

偶発転換社債(CoCo債)の価格設定とヘッジ戦略

藤沼, 雅之 / FUJINUMA, Masayuki

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

55

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

4

(発行年 / Year)

2014-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00010361>

偶発転換社債 (CoCo 債) の価格設定とヘッジ戦略

A pricing and hedge strategy of Contingent convertible bonds (CoCo bonds)

藤沼雅之

Masayuki Fujinuma

指導教員 浦谷規

法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

We consider a model of Contingent Convertible Bonds (CoCo bonds), which is a new tool to control the banking crisis as seen in 2008. We use the formulations for the pricing and hedge of CoCo from Cheridito et al [1]. The value of CoCo stems from future coupon payments, the redemption of the principal in case the CoCo does not convert and the possible conversion into equity. At first we formulate the stock prices process using the geometry Brownian movement with the jump. In addition, we build a hedge strategy using the stock, risk-free asset and CDS. Finally, we study the discretized model of pricing and heading CoCo bonds for data of Lloyds Banking Group issued in December 2009.

Key Words: Contingent Convertible Bonds, Credit default swap, pricing, hedge

1. はじめに

(1) 研究背景

近年の国際的な金融危機を経験し、各国の金融機関はその健全性がより問われるようになった。また、自己資本比率が健全性を示す指標に用いられた国際的な規制が設置されたことにより、早急な自己資本強化が金融機関に求められている。その際に、金融機関の危機に際して自己資本比率を増加させ、デフォルトを防ぐ CoCo 債に注目が集まった。本論文では、CoCo 債の詳細な価格設定とヘッジ戦略を文献 [1] を参照しながら研究する。

(2) 研究目的

本研究の目的は、確率変数を最小限にとどめた CoCo 債モデルを構築することである。株価過程は幾何ブラウン運動とポアソン過程を使用しモデル化する。その後、プライシングとキャリブレーション、ヘッジングの研究を行う。また、シミュレーションあるいは実測値を用いた数値実験を行う。

2. CoCo 債とは

CoCo 債とは、ある一定の偶発条件（自己資本比率等の低下など）に抵触した場合の株式に転換されるもしくは元本が削減される普通株に強制的に転換される転換社債

である。株式と社債のハイブリッド証券であるが、一般的な転換社債と異なり、投資家は株式への転換オプションを有しない。他人資本を自己資本に強制的に転換することにより、自己資本が強化され金融機関のデフォルトを防ぐ効果が期待されている。

3. モデル

満期 $T(0 < t_1 < \dots < t_n = T)$ 、元本 F 、クーポン c_i を支払う契約の CoCo 債を考える。株価をジャンプ過程を持つ幾何ブラウン運動を用いてモデル化する。本研究では、リスク中立確率 $\mathbb{Q}$ が存在すると仮定している。

(1) リスクフリー・ゼロクーポン債の価格

$$P(t, s) := E_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^s r_v dv} \right], \quad t \leq s \quad (1)$$

r_t : 短期金利過程

(2) 金融機関の株価過程

本研究では、ポアソン過程 (N_{Λ_t}) の最初のジャンプ時刻 τ でトリガー・イベントが起こるとし、次のジャンプ時刻 θ で機関のデフォルトが起こると仮定して金融機関の株価過程を以下のように定義する。 ($\tau \leq \theta$)
リスク中立確率 $\mathbb{Q}$ のもとで、

$$\frac{dS_t}{S_t} := (r_t - q - \gamma)dt + \sigma dW_t + \gamma dN_{\Lambda_t} \quad (2)$$

$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$ λ : ジャンプ強度, $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

q : 配当率, $q \in \mathbb{R}$

γ : ジャンプ関数, $\gamma \in [-1, \infty)$

また, 配当と割引率を考慮した株式の価格は以下の式になる.

$$\tilde{S}_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds + qt\right) S_t \quad (3)$$

式 (2), 式 (3) より以下の確率微分方程式が導かれる.

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = \{\sigma dW_t + \gamma(dN_{\Lambda_t} - \lambda_t dt)\} \quad (4)$$

(3) CoCo 債の無裁定価格

CoCo 債はジャンプが発生する時刻によって 3 つの要素に分けることができ, 以下の式で定義できる.

$$C_t = C_t^1 + C_t^2 + C_t^3 \quad (5)$$

$$C_t^1 = \sum_{t_i > t} c_i E_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{t_i} r_s ds} \mathbf{1}_{\{\tau > t_i\}} \right] \\ + \sum_{t_i > t} c_i E_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{t_i} r_s ds} \frac{\tau - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \mathbf{1}_{\{t_{i-1} < \tau \leq t_i\}} \right]$$

$$C_t^2 = F E_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right]$$

$$C_t^3 = G E_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} S_{\tau} \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \right]$$

c_i : 時刻 t_i における CoCo 債のクーポン

F : 満期 T における元本

G : 転換先の株式

また, 現金に転換するならば第 3 項は, 以下の式になる.

$$C_t^3 = G E_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \right]$$

この式での G は支払われる金額を表している.

4. 独立仮定

本研究の目的には金利過程 (r_t) を指定する必要はないが, 常に金利過程とブラウン運動, ポアソン分布は, 独立であることが重要である. よって, 以下のように独立を仮定する.

仮定

1. r_t はリスク中立確率 $\mathbb{Q}$ の下ではブラウン運動 (W_t), 標準ポアソン分布 (N_t) とは, 独立である.
2. リスク中立確率 $\mathbb{Q}$ の下ではブラウン運動 (W_t), 標準ポアソン分布 (N_t) は独立であり, 同じ確率空間に存在する.

5. CDS の価格

CDS とは, 定期的な金銭の支払いと引き替えに, 一定の国や企業の債務の一定の元本額に対する信用リスクのプロテクションを購入する取引である. 本研究では, プロテクション購入者の視点で議論を行なう. 時刻 t において, 転換とデフォルトが起きていない場合の満期 T_k の CDS の価格を,

$$PL_t - CL_t \quad (6)$$

となる. ここで,

$$PL_t = (1 - R) E_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{\theta} r_s ds} \mathbf{1}_{\{\theta \leq T_k\}} \right] \quad (7)$$

$$CL_t = \delta \sum_{t < s_i \leq T_k} \Delta s E_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{s_i} r_s ds} \mathbf{1}_{\{\theta > s_i\}} \right] \\ + E_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{\theta} r_s ds} (\theta - s_{i-1}) \mathbf{1}_{\{s_{i-1} < \theta \leq s_i\}} \right] \quad (8)$$

となる.

PL_t : プロテクションレグの価値

CL_t : クーポンレグの価値

R : 回収率

Δs : クーボンの支払い間隔

δ : CDS のスプレッド

プロテクションレグとは, デフォルトが発生した際に売り手が買い手に支払う補填金のキャッシュフローの現在価値である. 一方, クーボンレグとは, プロテクションの買い手が売り手に定期的に支払うクーポンのキャッシュフローの現在価値である.

6. CoCo 債のプライシング

時刻 t において CoCo 債の転換が起きていないとすると, 時刻 t における CoCo 債の価値の各要素は以下のように表すことができる.

$$C_t^1 = \sum_{t_i > t} c_i P(t, t_i) e^{-(\Lambda_{t_i} - \Lambda_t)} \\ + \sum_{t_i > t} \frac{c_i}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(t, s) (s - t_{i-1}) \lambda_s e^{-(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds$$

$$C_t^2 = F P(t, T) e^{-(\Lambda_T - \Lambda_t)}$$

$$C_t^3 = G S_t (1 + \gamma) \int_t^T e^{-q(s-t)} \lambda_s e^{-(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds$$

また、現金に転換する場合は、

$$C_t^3 = G \int_t^T P(t, s) \lambda_s e^{-(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds$$

7. 2回ジャンプモデル CDS のプライシング

時刻 t 以前に転換が起きない時の満期 T_k の CDS の 2 つのレッグの価格は、以下の式で与えられる。

$$PL_t = (1 - R) \int_t^{T_k} P(t, s) \lambda_s (\Lambda_s - \Lambda_t) e^{-(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds \quad (9)$$

$$CL_t = \delta \sum_{t < s_i \leq T_k} \Delta s (1 + \Lambda_{s_i} - \Lambda_t) e^{-(\Lambda_{s_i} - \Lambda_t)} + \int_{s_{i-1}}^{s_i} P(t, s) (s - s_{i-1}) \lambda_s (\Lambda_s - \Lambda_t) e^{-(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds \quad (10)$$

8. ヘッジ戦略

CoCo 債は、金利リスク、転換リスク、資産リスクの最初の 2 つ、または全てにさらされてる。資産リスクは株、金利リスクは国債か金利スワップによって、転換リスクは CDS によってそれぞれヘッジできる。それぞれのリスクにに対してのヘッジを行なう。

(1) 資産リスクのヘッジ

資産リスクをヘッジするためには $\Delta_t := \partial C_t / \partial S_t$ 株の株式を持つポジションを取ればよい。よって、株式に転換するタイプ CoCo 債の場合には、

$$\Delta_t = \frac{\partial C_t^3}{\partial S_t} = G(1 + \gamma) \int_t^T e^{-q(s-t)} \lambda_s e^{-(1+\gamma)(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds \quad (11)$$

となる。

(2) 転換リスクのヘッジ

CoCo 債と株式の価値の上昇を CDS への適切な投資で相殺することによって、転換リスクはヘッジすることができる。株式に転換する CoCo 債の価値の変化は、転換後の株価から転換前の CoCo 債の価格を引いたものとなる。よって、転換の際の CoCo 債価値の変化は、

$$J_t = GS_t(1 + \gamma) - C_t \quad (12)$$

となる。転換ジャンプによる CDS の価値の変化は、

$$J_t^k = (1 - R) \int_t^{T_k} P(t, s) \lambda_s (1 - \Lambda_s + \Lambda_t) e^{-(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds - \delta \sum_{t < s_i \leq T_k} P(t, s_i) \Delta s (-\Lambda_{s_i} + \Lambda_t) e^{-(\Lambda_{s_i} - \Lambda_t)} + \int_{s_{i-1}}^{s_i} P(t, s) (s - s_{i-1}) \lambda_s (1 - \Lambda_s + \Lambda_t) e^{-(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds \quad (13)$$

である。

これらを用いると、ジャンプによる価格変動をヘッジするためには、CDS のプロテクションを

$$\frac{J_t - \Delta_t \gamma S_t}{J_t^k} \quad (14)$$

だけ買うポジションを取れば良いことがわかる。

(3) 金利リスクのヘッジ

ここでは、リスクフリー・イールドカーブに対して、先ほどのポートフォリオ全体のイミュニゼーションを試みる。単純化のために、イールドカーブの平行シフトに対してのみヘッジをする。イールドカーブの変動への CoCo の感度は、以下の式で表すことができる。

$$Y_t = \sum_{t_i > t} c_i (t_i - t) P(t, t_i) e^{-(\Lambda_{t_i} - \Lambda_t)} + \sum_{t_i > t} \frac{c_i}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s - t) P(t, s) (s - t_{i-1}) \lambda_s e^{-(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds + F(T - t) P(t, T) e^{-(\Lambda_T - \Lambda_t)} \quad (15)$$

である。

また、プロテクションの買い手視点の CDS のデュレーションは、

$$Y_t^k = (1 - R) \int_t^{T_k} (s - t) P(t, s) \lambda_s e^{-(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds - \delta \sum_{t < s_i \leq T_k} (s_i - t) P(t, s_i) \Delta s e^{-(\Lambda_{s_i} - \Lambda_t)} + \int_{s_{i-1}}^{s_i} (s - t) P(t, s) (s - s_{i-1}) \lambda_s e^{-(\Lambda_s - \Lambda_t)} ds \quad (16)$$

である。これより、金利リスクは、

$$Y_t - \frac{J_t - \Delta_t \gamma S_t}{J_t^k} Y_t^k \quad (17)$$

のデュレーションを持つ債券を購入することでヘッジが可能である。

9. 実証実験

Lloyds Banking Group が 2009 年 12 月に発行した, Enhanced Capital Notes [ECNs] を用いて, モデルに実際のデータに当てはめていく.

(1) キャリブレーション

モデルを市場データに合わせる為にキャリブレーションを行なう. まず, ゼロクーポン債の現在価格を以下のよう定義する.

$$P(t, s) := P(t, T_{k-1}) \exp(-f_k(s - t_{k-1})) \quad (18)$$

ただし, $s \in (T_{k-1}, T_k]$ である.

また,

$$f_k := \frac{1}{T_k - T_{k-1}} \log \frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_k)}$$

である. 次に, $(T_{k-1}, T_k]$ に l_k を設定する.

ここで,

$$\Lambda_s^t := \Lambda_s - \Lambda_t, \quad m_k := l_k + f_k, \quad \Delta T_k := T_k - T_{k-1}$$

とおくと, 式 (9) の積分部分は以下になる.

$$\sum_{j=1}^k P(t, T_{j-1}) e^{-\Lambda_{T_{j-1}}^t} \frac{l_j}{m_j^2} \left[l_j + m_j \Lambda_{T_{j-1}}^t - (l_j + m_j \Lambda_{T_j}^t) e^{-m_j \Delta T} \right] \quad (19)$$

同様に, 式 (10) の積分部分は, $T_{j-1} \leq s_{i-1} < s_i \leq T_j$ に対して,

$$P(t, s_{i-1}) e^{-\Lambda_{s_{i-1}}^t} \frac{l_j}{m_j^3} (2l_j + m_j \Lambda_{s_{i-1}}^t - [(1 + m_j \Delta s)(2l_j + m_j \Lambda_{s_{i-1}}^t) + l_j m_j^2 (\Delta s)^2] e^{-m_j \Delta s}) \quad (20)$$

となる. 式 (19), 式 (20) を用いて推定したジャンプ強度を図 1 に示す.

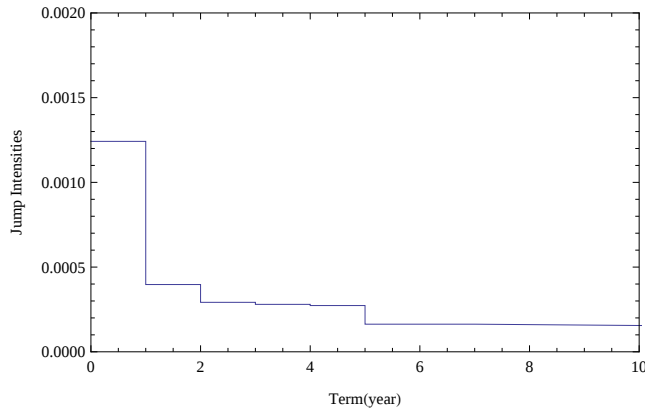


図 1 推定した λ_t の値

リスク中立確率 $\mathbb{Q}$ の下では式 (6) は $PL_t - CL_t = 0$ となることから, そこからスプレッドを求めることができる. 推定した, λ_t を用いて, 式 (5) に基づいて CoCo 債の価格求めた. その構成比率を時刻ごとに示したの図を以下に示す.

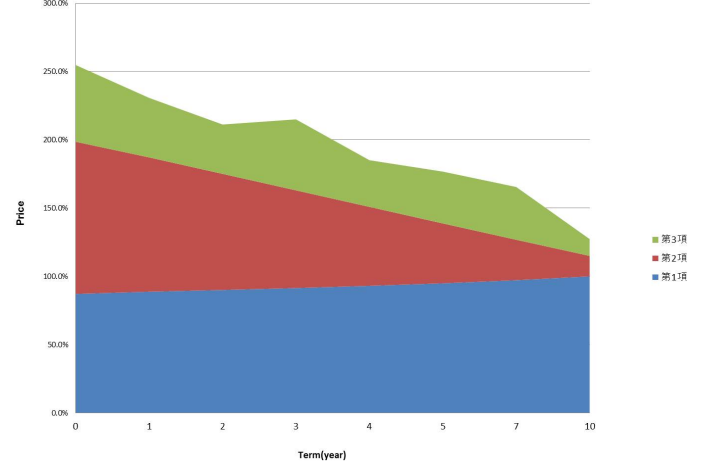


図 2 CoCo 債の構成比率の推移

10. 考察

この論文では, CoCo 債のヘッジと価格付けをジャンプがある幾何ブラウン運動を用いて, 研究を行った. 本研究で使ったモデルは CoCo 債の基本的なモデルであり, 発展させることが可能である. パラメータを増やしより精度の高いモデルの構築が今後の課題であると思う.

参考文献

- [1] Cheridito, Patrick, and Zhikai Xu. "A reduced form CoCo model with deterministic conversion intensity." SSRN 2254403 (2013).
- [2] Cheridito, Patrick, and Zhikai Xu. "Pricing and hedging CoCos." SSRN 2201364 (2013).
- [3] O' Kane, Dominic, and Stuart Turnbull. "Valuation of credit default swaps." Lehman Brothers Quantitative Credit Research Quarterly 2003 (2003): Q1-Q2.