

ニューメレールポートフォリオの評価

西村, 吉政 / NISHIMURA, Yoshimasa

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

55

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

4

(発行年 / Year)

2014-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00010359>

ニューメレールポートフォリオの評価

EVALUATION OF NUMERAIRE PORTFOLIO IN ASSET PRICE

西村 吉政

Yoshimasa NISHIMURA

指導教員 浦谷規

法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

We investigate the numeraire portfolio and the asset pricing, the change of probability measures. Numeraire portfolio is known as a growth optimal portfolio, which is the portfolio that allows the pricing in the real probability without taking the risk-neutral probability in the pricing of assets. We describe the features of the Numeraire portfolio and indicate price of this portfolio as an example. We consider the relationship of the numeraire portfolio and CAPM in continuous time.

Key Words: numeraire portfolio, change of probability measure, risk-neutral probability

1. はじめに

金融商品において、将来の支払いは不確実なものである。この将来の支払いの現在の価値を決定することが金融商品の価格付けである。ニューメレール (基準財) とは資産価格を評価する際に基準となる単位である。この基準となる財を適切に選択し、資産価格の評価を行う。しかし、ニューメレールを変換する度に測度変換を行う。そこで、確率測度の変換を避けることができるポートフォリオをニューメレールポートフォリオと呼ぶ。適切なニューメレールを選択することは金融商品の価格付けを容易にする。しかし、その選択によってリスク中立確率をとり、マルチンゲールにする必要がある。マルチンゲールにすることは選択したニューメレールに依存することになる。ニューメレールにおいて、リスク中立確率はマネーマーケットアカウントに関連し、フォワード測度はゼロクーポン債に関連している。マルチンゲールとなる確率の存在は裁定機会が存在しない完備市場でなければならない。しかし、ニューメレールポートフォリオを用いると測度変換を行わずに現実確率においてマルチンゲールにすることができる。つまり、完備市場においても非完備市場においても資産の価格評価が行える。本論文ではニューメレールポートフォリオの特性について論ずる。

2. ポートフォリオの定義

確率測度とフィルトレーションを確率空間 $\{\Omega, \{F_t\}_{t \in [0, T]}, P\}$ とする。株価 S の証券の収益率は

$$dR_i = \frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dZ$$

σ_i : ボラティリティ行列 σ の第 i 行成分

とする。 $i = 0, \dots, N$ であり $S_i(0) = 1$ とする。自己調達戦略におけるポートフォリオの各資産への投資配分率である重みを x とし、

$$\sum_{i=0}^N x_i = 1$$

とする。安全資産に対する重み x_0 は

$$x_0 = 1 - \sum_{i=1}^N x_i$$

とする。時刻 t における自己調達戦略のポートフォリオの価格を $X(t)$ とする。また、 $X(0) = 1$ とする。このポートフォリオの収益率を

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \sum_{i=0}^N x_i dR_i$$

と定義する。 $X(0) = 1$ とすると、このポートフォリオの価格は伊藤の公式を用いて

$$X(t) = \exp \left\{ \int_0^t \sum_{i=0}^N x_i dR_i - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N x_i x_j \langle dR_i dR_j \rangle \right\}$$

と表すことができる。

3. ニューメレールポートフォリオの定義

ニューメレールポートフォリオは以下のような特徴を持つ。

1. 自己調達戦略のポートフォリオのニューメレールとすると、その価格過程は確率測度 $\mathbb{P}$ の下、マルチンゲールとなる。

2. 対数効用関数の期待値を最大化するポートフォリオ戦略である。さらに、異なる時間間隔 $(0, T)$, (T, T') においても同一である。

3. 一意性、特徴は完備市場、非完備市場においても存在する。

4. 配分率である重みをアロードブル証券で定義するとき、それらの重みは確率測度 $\mathbb{P}$ においても定義することが可能である。

ニューメレールポートフォリオの配分率は以下のように表す。

$$\mathbf{h}(t) = V^{-1}(t) \{\boldsymbol{\mu}(t) - \mathbf{r}(t)\}$$

V : 危険資産の分散共分散行列

$\boldsymbol{\mu}$: 収益率ベクトル

$\mathbf{r}$: 金利ベクトル

ニューメレールポートフォリオの配分率は接点ポートフォリオの配分率に比例する。

安全資産を資産 0 とし、

$$\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} = r(t)dt \quad (1)$$

とする。さらに安全資産を含んだ分散最小化問題を考え、接点ポートフォリオを求めていく。

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sigma^2 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top V \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{r} + \mathbf{x}^\top (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{r}) = \bar{r} \end{aligned}$$

この最小化問題を解くと、接点ポートフォリオの重みは

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\mathbf{1}^\top V^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{r})} V^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{r})$$

となる。

よって、接点ポートフォリオの重みはニューメレールポートフォリオの重みである $V^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{r})$ に比例することが示された。

ニューメレールポートフォリオの価格過程は危険資産の重みを $\mathbf{h}^\top(t)\mathbf{1}$ 、安全資産の重みを $1 - \mathbf{h}^\top(t)\mathbf{1}$ としたものである。よって

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = \{1 - \mathbf{h}^\top(t)\mathbf{1}\} \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \mathbf{h}^\top(t)d\mathbf{R}$$

と表される。

リスクの市場価格は完備市場では

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \{\sigma(t)\}^{-1} \{\boldsymbol{\mu}(t) - \mathbf{r}(t)\}$$

と定義する。非完備市場では

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \sigma^\top(t)\mathbf{h}(t)$$

と定義する。よってニューメレールポートフォリオの価格過程は

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = \{r(t) + \|\boldsymbol{\lambda}(t)\|^2\} dt + \boldsymbol{\lambda}^\top(t)d\mathbf{Z}$$

となり、この式に伊藤の公式を用いると $H(0) = 1$ より

$$H(t) = \exp \left\{ \int_0^t \left\{ r(u) + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\lambda}(u)\|^2 \right\} du + \int_0^t \boldsymbol{\lambda}^\top(u)d\mathbf{Z} \right\}$$

となる。

4. シミュレーション

本論文の理論に沿ってシミュレーションを行う。実際のデータを使用してニューメレールポートフォリオの価格を導出した。データは 2005 年 1 月～2005 年 12 月の業種別東証株価指数 33 種 (水産・農林業、鉱業、建設業、食料品、繊維製品、パルプ・紙、化学、医薬品、石油・石炭製品、ゴム製品、ガラス・土石製品、鋼鉄、非鉄金属、金属製品、機械、電気機器、輸送用機器、精密機器、その他製品、電気・ガス業、陸運業、海運業、空運業、倉庫・運輸関連業、情報・通信業、卸売業、小売業、銀行業、証券・商品先物取引業、保険業、その他金融業、不動産業、サービス業) を分析対象とした。

ニューメレールポートフォリオを

$$H(t) = \exp \left\{ \left\{ r + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 \right\} t + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{Z} \right\}$$

として行う。金利を $r = 0.005$ とし、期間は 1 年間とした。データから分散共分散行列を求め、コレスキー分解をし、リスクの市場価格を導出した。さらに標準正規乱数を用いて 1000 回シミュレーションを行い、ニューメレールポートフォリオの一年後の価格を求めた。

次に仮想の市場を想定し、データシミュレーションを行った。市場に企業が 10 社存在し、収益率、分散、共分散を与えてニューメレールポートフォリオの価格を求めた。こちらも同様に標準正規乱数を用いて 1000 回シミュレーションを行った。

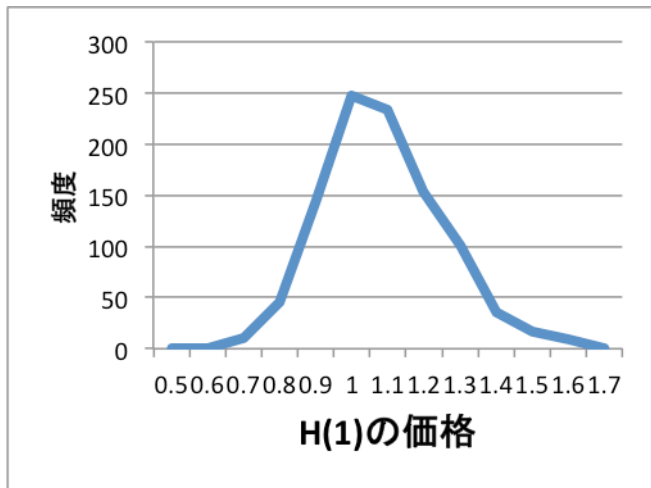


図1 実データでの $H(1)$ のヒストグラム

図1は1年後のニューメレルポートフォリオの価格のヒストグラムである。今回のデータでは価格は1付近の値をとることがわかった。

5. 数値実験

ここでニューメレルポートフォリオを用いて数値実験を行う。 $M(t)$ を市場ポートフォリオとし、この市場ポートフォリオが従う確率微分方程式を

$$\frac{dM(t)}{M(t)} = \mu dt + \sigma dZ$$

とする。市場ポートフォリオは伊藤の公式を用いて

$$M(t) = M(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma Z \right\}$$

とする。リスクの市場価格を

$$\lambda = \frac{(\mu - r)}{\sigma}$$

とし、ニューメレルポートフォリオを

$$H(t) = \exp \left\{ \left(r + \frac{1}{2} \lambda^2 \right) t + \lambda Z \right\}$$

とする。ニューメレルポートフォリオの投資比率を

$$h = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2}$$

とする。ニューメレルポートフォリオと市場ポートフォリオが同じブラウン運動に従うとし、ニューメレルポートフォリオを市場ポートフォリオを用いて表すと

$$H(t) = \left\{ \exp \left(r + \frac{1}{2} \lambda^2 - \mu h + \frac{1}{2} \lambda \sigma \right) \right\}^t \left(\frac{M(t)}{M(0)} \right)^h$$

とすることができる。ニューメレルポートフォリオの価格を k を用いて

$$H(t) = k^t \left(\frac{M(t)}{M(0)} \right)^h$$

と置き換える。パラメータを $r = 0.05$, $\mu = 0.12$ とし、期間 t は1年とする。ボラティリティ σ を変動させ、数値実験を行った。

表1 σ の変化に対するパラメータの変化

σ	λ	h	k
0.2	0.35	1.75	0.938
0.25	0.28	1.12	0.99
0.3	0.233	0.778	1.019
0.35	0.2	0.571	1.037
0.4	0.175	0.438	1.049
0.45	0.156	0.346	1.057
0.5	0.14	0.28	1.063
0.55	0.127	0.231	1.068
0.6	0.117	0.194	1.071

表1はボラティリティ σ の変化に対する各パラメータの変化を示した表である。 σ が高くなるとニューメレルポートフォリオの配分率 h が低くなる。よって、 σ が高くなると安全資産への配分が高くなることがわかる。

6. CAPM

ここでニューメレルポートフォリオとCAPMの関連性を述べる。価格 S の任意の資産は次を満たす。 $H(t)^- = \frac{1}{H(t)}$ とする。 $\frac{S(t)}{H(t)} = S(t)H(t)^-$ はマルチンゲールであるので、ドリフトはゼロとなる。

伊藤の積の公式を用いて、

$$d \{ S(t)H(t)^- \} = S(t)H(t)^- + H(t)^- dS(t) + dS(t)dH(t)$$

とし、両辺を $S(t)H(t)^-$ で割ると、

$$\frac{d \{ S(t)H(t)^- \}}{S(t)H(t)^-} = \frac{dH(t)^-}{H(t)^-} + \frac{dS(t)}{S(t)} + \frac{dS(t)}{S(t)} \frac{dH(t)^-}{H(t)^-}$$

と表すことができる。 $dH(t)^- = d \left\{ \frac{1}{H(t)} \right\}$ に伊藤の公式を用いると、

$$d \left\{ \frac{1}{H(t)} \right\} = -\frac{1}{H(t)} \left\{ \frac{dH(t)}{H(t)} \right\} + \frac{1}{H(t)} \left\{ \frac{dH(t)}{H(t)} \right\}^2$$

となり、ゆえに

$$\frac{dH(t)^-}{H(t)^-} = -\frac{dH(t)}{H(t)} + \left\{ \frac{dH(t)}{H(t)} \right\}^2$$

と表す. よって

$$\frac{d\{S(t)H(t)^-\}}{S(t)H(t)^-} = \frac{dH(t)^-}{H(t)^-} + \frac{dS(t)}{S(t)} + \frac{dS(t)}{S(t)} \left\{ -\frac{dH(t)}{H(t)} \right\} + \frac{dS(t)}{S(t)} \left\{ \frac{dH(t)}{H(t)} \right\}^2$$

となる. よって

$$\frac{d\{S(t)H(t)^-\}}{S(t)H(t)^-} = \frac{dH(t)^-}{H(t)^-} + \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{dS(t)}{S(t)} \frac{dH(t)}{H(t)}$$

となる. ここでニューメレールポートフォリオの収益率を μ_{H^-} , 任意の資産の収益率を μ_S とする. ドリフト項はゼロとなるので

$$\mu_{H^-} + \mu_S - \sigma_{HS} = 0$$

となる. 次に接点ポートフォリオについて考える. 接点ポートフォリオの価格過程は

$$\frac{dM(t)}{M(t)} = \frac{\mathbf{h}^\top(t)}{\mathbf{h}^\top(t)\mathbf{1}} d\mathbf{R} = \frac{\mathbf{h}^\top(t)}{k(t)} d\mathbf{R}$$

とする. ニューメレールポートフォリオの危険資産への配分率の合計を $k(t)$ とする. この接点ポートフォリオを用いると, ニューメレールポートフォリオの価格過程は

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{H(t)} &= \{1 - \mathbf{h}^\top(t)\mathbf{1}\} \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \mathbf{h}^\top(t) d\mathbf{R} \\ &= \{1 - k(t)\} r(t) dt + k(t) \frac{\mathbf{h}^\top(t)}{k(t)} d\mathbf{R} \\ &= \{1 - k(t)\} r(t) dt + k(t) \frac{dM(t)}{M(t)} \\ &= \frac{\mu_m - r}{\sigma_m^2} \cdot \frac{dM(t)}{M(t)} + \{1 - k(t)\} r(t) dt \end{aligned}$$

とすることができる. よって CAPM は

$$\begin{aligned} \sigma_{HS} &= \frac{dH(t)}{H(t)} \frac{dS(t)}{S(t)} \\ &= \frac{\mu_m - r}{\sigma_m^2} \frac{dM(t)}{M(t)} \frac{dS(t)}{S(t)} + \{1 - k(t)\} r(t) dt \cdot \frac{dS(t)}{S(t)} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\mu_S - r = \frac{\sigma_{ms}}{\sigma_m^2} (\mu_m - r)$$

よって CAPM が求められた. この条件の場合, 接点ポートフォリオと市場ポートフォリオは一致もしくは比例する. CAPM は市場ポートフォリオを用いて表されるので, 市場ポートフォリオとニューメレールポートフォリオは同一となることがわかった

7. 考察

ニューメレールポートフォリオの性質について研究し, 市場ポートフォリオと関連性があることがわかった. しかし, 市場ポートフォリオにも問題点があり, どの市場を選択するかという点があげられる. 今回, 業種別東証株価指数 33 種を市場全体とみなしてシミュレーションを行い, ニューメレールポートフォリオの価格を導出した. 理論上, このポートフォリオを用いれば自己調達戦略のポートフォリオはリスク中立確率をとることなくマルチンゲールにすることができ, 現実の確率で資産の価格付けが可能となる. 確率測度変換の代用としてニューメレールポートフォリオを用いることができることがわかる. しかし, マーケットとしてどのように資産を選択して, このニューメレールポートフォリオとするかが今後の課題としてあげられる.

参考文献

- [1] I. Bajeux-Besnainou & R. Portait, The numeraire portfolio: a new perspective on financial theory, The European Journal of Finance, 291-309, 1997.
- [2] 木島正明, 田中敬一, 資産の価格付けと測度変換, 朝倉書店, 2007.
- [3] S.E. シュリープ, ファイナンスのための確率解析 II, シュプリンガー・ジャパン, 東京, 2008.