

### 最適成長ポートフォリオの構築と評価

SATA, Koutarou / 佐多, 弘太郎

---

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

55

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

4

(発行年 / Year)

2014-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00010354>

# 最適成長ポートフォリオの構築と評価

Construction and evaluation of the portfolio

佐多 弘太郎

Koutarou Sata

指導教員 浦谷規

法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

In this thesis, we consider Growth Optimal Portfolio (GOP), which maximizes the expected logarithmic utility of the terminal portfolio wealth. We compare the GOP portfolio and the market portfolio theoretically and also through statistical comparison of the past Dow Jones 30 companies market data during 1990's. We show the significant rationality in GOP investment strategy from the historical data.

## 1. はじめに

GOP とは対数効用関数を最大化し、市場ポートフォリオを補完する重要な投資基準である。1 種類の安全資産と複数のリスク資産から構成され、かつ、外部との資本のやりとりがない自己充足的 (self-financing) なポートフォリオを考え、リスク資産価格は確率過程に従うとする。ポートフォリオのボラティリティを所与としたとき、ドリフトを最大化させる、すなわち期待収益率を最大化させるリスク資産の投資比率の組合せは、安全資産への投資比率の関数となることが知られている。ここでさらに、安全資産の投資比率の関数として表されたポートフォリオのドリフトの対数を最大にするように、安全資産の投資比率を選択したポートフォリオのことを GOP という。割引債の理論 価格に関しては、現実確率のもとで観測可能な GOP をニューメーラールとして算出していることが特徴的であり、デリバティブの価格付けにおいて一般的に用いられるリスク中立確率測度は用いられない。

本論文では PLATEN, Eckhard; HEATH, David(2006) の理論に基づき、Growth Optimal Portfolio(GOP) を構築及び数値実験を行った。この GOP ポートフォリオから得られる最適投資比率をダウジョーンズ 30 社の 1990 年代の市場データに適用しその有効性と意義を検討する。

## 2. ベンチマークモデル

### (1) 投資の定義

$d$  の危険資産と 1 つの安全資産からなる連続金融市場モデルを考える。

$B(t)$  は安全資産、

$$B(t) = \{B(t), t \in [0, T]\}$$

$$B(t) = \exp \int_0^t r(s) ds \quad (1)$$

ここで  $r = \{r(t), t \in [0, T]\}$  は短期金利、 $S^j(t) = \{S^j(t), t \in [0, T]\}$  は  $j, \in \{1, 2, \dots, d\}$  は株価とし、株価  $S^{(j)}(t)$  は次の微分方程式 (SDE) を満たすものとする、

$$dS^{(j)}(t) = S^{(j)}(t) \left( a^j(t) dt + \sum_{k=1}^d b^{j,k}(t) dW_t^k \right) \quad (2)$$

ここで、 $b^{j,k}$  は  $j$  番目の株価と  $k$  番目のウィナープロセスのボラティリティである。ボラティリティ  $b^{j,k}$  は以下の条件を満たすと仮定する。

$$\int_0^T \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d (b^{j,k}(t))^2 dt < \infty$$

そして、平均項  $a^j = \{a^j(t), t \in [0, T]\}, j \in \{1, 2, \dots, d\}$  は、以下の条件を満たすとする。

$$\int_0^T \sum_{j=0}^d \|\alpha^j(s)\| ds < \infty$$

もし、証券の数がウィナープロセスの数より多いならば、余分な証券を持っていることになり、ウィナープロセスの数より少なければ非完備の市場モデルであるため、同じ数のウィナープロセスでモデリングを行う。そのために次を仮定する。

・ボラティリティ行列  $b(t) = [b^{j,k}(t)]_{j,k=1}^d$  は  $t \in [0, T]$  で逆行列  $b^{-1}(t) = [b^{j,k}(t)]_{-1,j,k=1}^d$  が存在する

$\theta^k(t)$  をリスクの市場価格とし、以下の関係式で定義する

$$\theta^k(t) = \sum_{j=1}^d b^{-1,j,k}(t)(\alpha^j(t) - r(t)) \quad (3)$$

$t \in [0, T], k \in \{1, 2, \dots, d\}$

以上より、(2) の SDE は以下方程式を満たす、

$$\frac{dS^j(t)}{S^j(t)} = \left( r(t)dt + \sum_{k=1}^d b^{j,k}(t)(\theta^k(t)dt + dW_t^k) \right) \quad (4)$$

$t \in [0, T], j \in \{1, 2, \dots, d\}$

## (2) ポートフォリオ

$\delta = \{\delta(t) = (\delta^0(t), \delta^1(t), \dots, \delta^d(t))^T, t \in [0, T]\}$  を取引戦略とし、伊藤積分

$$\int_0^t \delta^j(s) dS^{(j)}(s)$$

が定義できるものとする。

ここで、 $\delta^j(t), j \in \{0, 1, \dots, d\}$  は時刻  $t$  で第  $j$  資産の保有数を表している。時刻  $t$  のポートフォリオの価値プロセス  $S^{(\delta)} = \{S^{(\delta)}(t), t \in [0, T]\}$  は、

$$S^{(\delta)}(t) = \sum_{j=0}^d \delta^{(j)}(t) S^{(j)}(t)$$

である。

取引戦略  $\delta$  とポートフォリオ  $S^{(\delta)}$  が以下の方程式を満たすとき自己調達戦略という。

$$dS^{(\delta)}(t) = \sum_{j=0}^d \delta^{(j)}(t) dS^{(j)}(t) \quad (5)$$

これは、ポートフォリオ価値のすべての変化が取引による損益によるものだけであることを示している。

$\pi_\delta^j(t)$  は  $j$  番目の価格プロセス  $S^j(t)$  に対する投資割合であり、以下のように表現される

$$\pi_\delta^{(j)}(t) = \delta^{(j)}(t) \frac{S^j(t)}{S^{(\delta)}(t)}$$

この関数  $\pi^j(t)$  は投資割合なので、明らかに

$$\sum_{j=0}^d \pi_\delta^j(t) = 1$$

となる。

(9),(6),(10) 式によりポートフォリオの価値  $S^{(\delta)}(t)$  の SDE は以下の式を満たす

$$\frac{dS^{(\delta)}(t)}{S^{(\delta)}(t)} = \left( r(t)dt + \sum_{k=1}^d b_\delta^k(t)(\theta^k(t)dt + dW_t^k) \right) \quad (6)$$

このとき、(12) 式での  $k$  番目のポートフォリオのボラティリティは

$$b_\delta^k(t) = \sum_{j=1}^d \pi_\delta^{(j)}(t) b^{j,k}(t)$$

ポートフォリオのドリフト項は

$$\alpha_\delta(t) = r(t) + \sum_{k=1}^d b_\delta^k(t) \theta^k(t)$$

となる。

$S^{(\delta)}(t)$  の割引価値を

$$\bar{S}^{(\delta)}(t) = \frac{S^{(\delta)}(t)}{B(t)}$$

とする。

その SDE は以下の微分方程式を満たす、

$$\begin{aligned} d\bar{S}_\delta(t) &= \bar{S}_\delta(t) \sum_{k=1}^d b_\delta^k(t)(\theta^k(t)dt + dW_t^k) \\ &= \sum_{k=1}^d \psi_\delta^k(t)(\theta^k(t)dt + dW_t^k) \end{aligned} \quad (7)$$

( $\psi_\delta^k(t)$  は拡散係数であり、

$$\psi_\delta^k(t) = \bar{S}_\delta(t) b_\delta^k(t) = \sum_{j=1}^d \delta^{(j)}(t) \frac{S^j(t)}{B(t)} b^{j,k}(t)$$

割引後の株価  $\bar{S}^\delta$  のドリフト項  $\alpha_\delta(t)$  は

$$\alpha_\delta(t) = \sum_{k=1}^d \psi_\delta^k(t) \theta^k(t)$$

時刻  $t$  での割引後ポートフォリオ価値  $\bar{S}^\delta(t)$  の不確実性はその総拡散係数と総ボラティリティにより測定することができる。

$\bar{S}^\delta > 0$  の総拡散係数  $\gamma^\delta(t)$  を

$$\gamma^\delta(t) = \sqrt{\sum_{k=1}^d (\psi_\delta^k(t))^2}$$

と定義すると、総ボラティリティ  $b_\delta(t)$  は

$$b_\delta(t) = \frac{\gamma^\delta(t)}{\bar{S}^\delta(t)} \quad (8)$$

となる。

### 3. 最適ポートフォリオの定義

#### (1) 最適ポートフォリオ

総拡散係数  $\gamma$  が

$$\gamma_\delta(t) = \gamma^\delta(t)$$

のとき、その時の  $\alpha$  が

$$\alpha_\delta(t) \geq \alpha_s(t)$$

の条件を満たすとき、その戦略  $\tilde{\delta}$  のポートフォリオ  $S^{\delta}(t)$  は最適ポートフォリオであると定義する。

総リスクの市場価格は

$$\|\theta\| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (\theta^k(t))^2} \quad (9)$$

$t \in [0, T]$  で厳格に 0 より大きいと定義すると有限である。

$$0 < \|\theta(t)\| < \infty$$

ここで、シャープレシオを導入する。シャープレシオ  $H_\delta(t)$  とはポートフォリオにおける超過リターンがポートフォリオのリスクに占める割合である。つまり、割引株価とリスクプレミアムの比率として  $S^\delta(t)$  の時刻  $t$  での総ボラティリティ  $b_\delta(t)$  によって求まる。

$$p_\delta(t) = \frac{\alpha_\delta(t)}{S^\delta(t)}$$

(20) 式より

$$H_\delta(t) = \frac{p_\delta(t)}{b_\delta(t)} = \frac{\alpha_\delta(t)}{\gamma^\delta(t)} \quad (10)$$

となる。

$S^\delta$  においてそのシャープレシオ  $H_\delta(t)$  は以下の条件を満たし、

$$H_\delta \leq |\theta(t)| \quad (11)$$

シャープレシオとリスクの市場価格が同値であるときそのポートフォリオ  $S^\delta(t)$  は最適ポートフォリオである。そのときの割引後株価プロセス  $\bar{S}^\delta$  は以下の SDE をみたとす。

$$d\bar{S}^\delta(t) = \bar{S}^\delta(t) \frac{b_\delta(t)}{|\theta(t)|} \sum_{k=1}^d \theta^k(t) (\theta^k(t) dt + dW_t^k) \quad (12)$$

そのときの最適投資割合は

$$\pi_\delta^{(j)}(t) = \frac{b_\delta(t)}{|\theta^k(t)|} \pi_{\delta_*}^{(j)}(t) \quad (13)$$

### 4. モデル

まず、市場に投資可能なポートフォリオをもつ  $n \in \{1, 2, \dots, n\}$  の投資家が存在すると仮定する。その中の  $l$  番目の投資家がもつポートフォリオを  $S^{\delta_l}$ ,  $l \in \{1, 2, \dots, n\}$  とする。すべての投資家の投資可能な総ポートフォリオを市場ポートフォリオとして、以下のように表現する

$$S^\delta(t) = \sum_{l=1}^n S^{\delta_l}(t) \quad (14)$$

市場ポートフォリオの SDE を考えるために、次のような仮定を行う

市場ポートフォリオ  $S^\delta$  は明確に正の値をとり、GOP の投資割合である  $\pi_{\delta_*}^0(t)$  は  $t \in [0, T]$  において 1 ではない。割引総市場ポートフォリオ  $\bar{S}^\delta(t)$  の SDE は

$$d\bar{S}(t) = \sum_{l=1}^n dS^{\delta_l}(t)$$

となり、

$$\begin{aligned} d\bar{S}(t) &= \sum_{l=1}^n \frac{(\bar{S}^{\delta_l}(t) - \delta_l^0)}{(1 - \pi_{\delta_*}^{(0)})} (\theta^k(t) dt + dW_t^k) \quad (15) \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{(1 - \pi_\delta^0(t))}{(1 - \pi_{\delta_*}^{(0)})} (\theta^k(t) dt + dW_t^k) \end{aligned}$$

安全資産価格は初期時点での投資割合が 0 となるので、

$$\begin{aligned} \pi_\delta^0(t) &= 0 \\ t &\in [0, T] \end{aligned} \quad (16)$$

これらのより、以下の割引総ポートフォリオの SDE は以下の式となる

$$d\bar{S}^\delta(t) = \frac{\bar{S}^\delta(t)}{1 - \pi_\delta^0(t)} \sum_{k=1}^d \theta^k(t) (\theta^k(t) dt + dW_t^k) \quad (17)$$

$$t \in [0, T]$$

## 5. シミュレーション

本論文の理論に沿ってシミュレーションを行う。今回使用したデータは1991年から1997年までのDowJonesの30種の銘柄を分析対象とした。

GOPの最適投資割合を

$$\pi_{\delta_*}^{(j)} = \sum_{k=1}^d \theta^k(t) b^{-1,j,k}(t)$$

としてシミュレーションを行い、各銘柄別の投資割合を年ごとに導出した。図1は1991年から1997年の30種の投資割合の合計値である。

1991年	1992年	1993年	1994年	1995年	1996年	1997年
0.192537	0.176626	1.137825	0.784321	0.583834	0.15543	-0.29702

図1 年度別の投資割合の合計

この投資割合の合計が1になるように安全資産を組み合わせることによってGOPの価格が求まる。

## 6. 結び

本研究では、GOPのポートフォリオの構築を行い、GOPが市場ポートフォリオと安全資産から成り立つことがわかった。理論上GOPは価格付けにおいて測度変換の必要がなく、確定的な関数を使っているため、比較的簡単に価格付けがおこなえることがわかった。

## 参考文献

- [1] LONG JR, John B. The numeraire portfolio. Journal of Financial economics, 1990, 26.1: 29-69.
- [2] PLATEN, Eckhard; HEATH, David. A benchmark approach to quantitative finance. Springer, 2006.
- [3] 吉雄, 田畑; 規, 浦谷. リスク測度とポートフォリオ管理. 朝倉書店, 2004.