

二項モデルを用いたSABRモデルのアメリカ型オプションの評価

石井, 洋輔 / ISHII, Yousuke

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

55

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

8

(発行年 / Year)

2014-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00010350>

二項モデルを用いた SABR モデルの アメリカ型オプションの評価

EVALUATIONS OF AMERICAN OPTION UNDER
THE SABR MODEL USING A BINOMIAL TREE

石井 洋輔

Yousuke ISHII

指導教員 浦谷 規

法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

As a stock price process, the Black-Scholes model is traditionally used to estimate option prices, however the volatility of the Black-Scholes model is assumed to be a constant. It is well known that the volatility changes in financial markets. In this thesis, the SABR model which was introduced by Hagan, Kumar, Lesniewski and Woodward (2002) and is one of stochastic volatility models, is used and an American option is considered under the model. The SABR model is approximated as a binary tree using the method of Vellekoop and Nieuwenhuis (2009). In this paper, features of exercise boundaries and Greeks of American put option are studied.

Key Words: SABR model, stochastic volatility, American option, binary tree, exercise boundary, Greeks

1. はじめに

ヨーロッパ型オプションにおいては、権利の行使時刻が満期と決まっており、その価格についてはブラック・ショールズモデル (BS モデル) に対して、BS 公式によって求めることができる。その他のモデルに対しても陽な形や、モンテカルロ法で容易に価格を求めることができる。しかし、期間中いつでも権利を行使できるアメリカ型オプションの場合はその様に簡単には求まらない。

オプションには資産購入の権利であるコールオプションと資産売却の権利であるプットオプションがあり、ある条件のもとではコールオプションにおいてはヨーロッパ型とアメリカ型の理論価格が等しいことが知られている。プットオプションに関しては両者が異なり、数値計算によって価格を求めることが必要となる。

価格が BS モデル下でのアメリカ型プットオプション価格の計算においては、多くの数値計算手法が存在している。しかし、モデルを複雑にしたときの数値計算方法は

確立されていない。特にアメリカ型オプションの価格付けが必要となる最適行使境界の構造を調べる研究は解明すべき点が多くあると思われる。本研究では、参考文献の [2], [3], [4] の手法を用いて確率ボラティリティモデルである SABR モデルに対し二項近似を行い、二項ツリーを構築していき、オプション価格、最適行使境界、 Greeks について考察を行っていく。これにより、オプションの買い手に対しての権利行使の意思決定に有用であり、また、売り手に対しても価格付けやヘッジに役立つものと考えられる。

2. 二項モデルでのアメリカ型オプションの価格付け

二項モデルによるアメリカ型オプションの価格付けを考える。

(1) 二項ツリーの構築

k をタイムステップ、 i を資産価格水準とし、ノード (k, i) での資産価格を $S_{k,i}$ とし、時刻 Δt の間に資産価格が確率 p で u 倍、確率 $q = 1 - p$ で d 倍で株価が推移す

る二項モデルは、図 1 のような資産価格のツリーとなる。

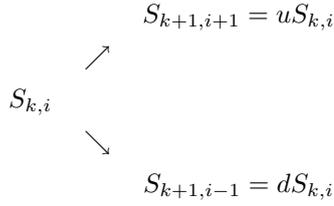


図 1 株価の二項ツリー (二期間)

(2) アメリカ型オプションの価格付け

アメリカ型オプションは購入日から満期までの期間いつでも権利を行使する事が可能なオプションである。このオプションは各時刻で権利を行使した場合と、そのまま保有した場合での価値の比較を行い、オプション価格を導いていく。この行使するかしないかの境目の資産価格を最適行使境界とする。ここでは、二項ツリーにおけるアメリカ型プットオプションを考える。満期 n ではオプションの残存期間が無いので、 S を満期 n での株価、 K を行使価格、 r を金利としてオプションの価格 $Price_n$ は次のようになる。

$$Price_n(S) = \max\{K - S, 0\}.$$

また、時刻 k での価格は次のように満期からさかのぼる事で求まる。ここでは S を時刻 k での株価とする。

$$Price_k(S) = \max\left[K - S, \frac{1}{1+r} \left(pPrice_{k+1}(uS) + qPrice_{k+1}(dS) \right)\right].$$

\max の中の一つ目の $K - S$ を選択する事は権利を行使する事を意味している。二つ目の式は権利を行使しなかったときのオプション価値である。そして初めて権利を行使した時点での S が行使境界価格となる。

3. SABR モデルと近似手法

BS モデルにおいては株価のボラティリティが定数で与えられているが、実際の市場ではボラティリティが変動する事が知られていてその動きをうまく表現できない。そこでボラティリティが確率的に変化する確率ボラティリティモデル、その中で Hagan et al. [1] によって提案された、SABR モデルについて本稿で扱っていく。

(1) SABR モデルの定義

リスク中立確率測度 \mathbb{Q} の下でフォワード価格 F_t とボラティリティ α_t を次のように仮定する。

$$\begin{aligned}
 dF_t &= \alpha_t F_t^\beta dW_t^1, \\
 d\alpha_t &= \nu \alpha_t dW_t^2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $\beta \in \{0\} \cup [0.5, 1]$, $\nu > 0$ の定数とする。また、 W^1 および W^2 はリスク中立確率測度 \mathbb{Q} の下で相関のあるブラウン運動とし、相関係数 $\rho \in (-1, 1)$ を用いて次の様に表す事ができる。

$$d[W^1, W^2]_t = \rho dt.$$

リスク中立確率測度のもとで配当が無い場合、フォワード価格と株価の関係は次の様に与えられる、

$$F_t = S_t e^{\int_t^T r(s) ds} = \frac{S_t}{D(t, T)}.$$

ただし、 $r(t)$ を金利過程とし、 $D(t, T) = e^{-\int_t^T r(s) ds}$ を割引過程とする。従って、(1) 式は現在株価で表すと次式で表される。

$$dS_t = r(t)S_t dt + \alpha_t S_t^\beta D(t, T)^{1-\beta} dW_t^1, S_0 = s. \tag{3}$$

(2) 二項ツリー

この節では SABR モデルに対し [2], [3], [4] の方法を用いて二項近似ツリーを構築していく。

a. 二項近似

ここで Vellekoop and Nieuwenhuis[2] の方法を用いて二項ツリーを構築していく。

(3) 式と (2) 式に対して、オイラー・丸山近似を用いた。まず (3) 式に対して T を満期とし微小期間 $\Delta t = T/n, n \in \mathbb{N}$ について考えると

$$\begin{aligned}
 S_{t+\Delta t} &= S_t + r_t S_t \Delta t \\
 &\quad + \alpha_t S_t^\beta D(t, T)^{1-\beta} (W_{t+\Delta t}^1 - W_t^1).
 \end{aligned}$$

ここでブラウン運動の定義より $W_{t+\Delta t} - W_t$ は平均 0、分散 Δt の正規分布に従う事に注意し、さらに近似を

$$\begin{aligned}
 S_{t+1} &= S_t + r_t S_t \Delta t \\
 &\quad + \alpha_t S_t^\beta D(t, T)^{1-\beta} Y_{t+\Delta t}^1 \sqrt{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{4}$$

とする。同様にしてボラティリティ α についても (2) 式に対して

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + \nu \alpha_t Y_{t+\Delta t}^2 \sqrt{\Delta t} \tag{5}$$

が得られる。ここで Y^1, Y^2 は次を満たす確率変数とする。

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Q}(Y^1 = i_1, Y^2 = i_2) &= \frac{1}{4} (1 + i_1 i_2 \rho), \\
 i_1, i_2 &\in \{-1, 1\}.
 \end{aligned}$$

(4) 式, (5) 式の二項近似では株価とボラティリティそれぞれが 2 種類の枝を作るので一つの株価から 4 本の枝が作られる。そして伸びた枝の先は必ずしも結合するとは限らず、計算付加が大きくなる。そこで計算負荷を減らすた

めに再結合というものをする必要がある. ここではあらかじめ株価とボラティリティそれぞれの取りうる最大値, 最小値を期間ごとに求めていき, 任意の数で区切る事によりメッシュを設定する. 最大値と最小値は (4) 式と (5) 式においてボラティリティ α_t がその時刻の最大値の場合に株価の最大値, 最小値を得る. よって常に $Y^2 = 1, Y^1 = 1$ で株価は最大値 S_t^{max} , 常に $Y^2=1, Y^1 = -1$ で株価が最小値 S_t^{min} をとる事になる. ボラティリティにおいては (5) 式の右辺の二項目において負の値をとるパラメータがないためその時刻まで常に $Y^2 = 1$ のときボラティリティの最大値 α_t^{max} , その時刻まで常に $Y^2 = -1$ のとき最小値 α_t^{min} をとる. メッシュの設定については次のように任意の数で区切り,

$$\begin{aligned}\Delta S_t &= (S_t^{max} - S_t^{min}) / (m_s - 1), \\ \Delta \alpha_t &= (\alpha_t^{max} - \alpha_t^{min}) / (m_a - 1),\end{aligned}$$

として, 各期間 $t = 1, 2, \dots, n$ での i 番目の株価と j 番目のボラティリティの点は次の様になる.

$$\begin{aligned}S_{t,i} &= S_{t,i} + i\Delta S_t, \alpha_{t,j} = \alpha_{t,j} + j\Delta \alpha_t, \\ i &= 0, 1, \dots, m_s - 1, \quad j = 0, 1, \dots, m_a - 1.\end{aligned}$$

ここで m_s, m_a は株価, ボラティリティの刻み数とし, 時間に関係なく一定とする. また, $S_{t,0} = S_t^{min}, \alpha_{t,0} = \alpha_t^{min}$ とする. お互いのメッシュが重なる点をグリッドと呼び, 時刻 t でのグリッド集合を G_t とすると

$$G_t = \{(S_{t,i}, \alpha_{t,j}) | i = 0, \dots, m_s - 1, j = 0, \dots, m_a - 1\}$$

と表す事ができる.

b. アメリカ型フットオプションの計算法

ここで Vellekoop and Nieuwenhuis[2] の方法を用いたアメリカ型オプションの計算法を説明していく.

まず, 満期でのオプション価格を求める. 満期でのオプション価格はペイオフと等しくなるため, 満期 n のグリッド (i, j) でのオプション価格 $Price_{n,i,j}$ は行使価格を K とすると次の様になる. ここで, $B_{n,i,j} = \max\{K - S_{n,i}, 0\}$ を権利を行使したときの価格とすると

$$\begin{aligned}Price_{n,i,j} &= B_{n,i,j}, \\ i &= 0, 1, \dots, m_s - 1, j = 0, 1, \dots, m_a - 1,\end{aligned}$$

となる. $Price_{n,i,j}$ はボラティリティノード j に関係なく一定であるという事に注意する.

次に一期前, つまり時刻 $n-1$ でのオプション価格を求めていく. 時刻 $n-1$ に用意してある G_{n-1} の 1 点 $(S_{n-1,i}, \alpha_{n-1,j})$ から (4) 式と (5) 式を用いて時刻 n での株価とボラティリティ $\tilde{S}_{n,i}$ と $\tilde{\alpha}_{n,j}$ を求める. ここで事前

に用意した株価とボラティリティのグリッド集合 G_n に $(\tilde{S}_{n,i}, \tilde{\alpha}_{n,j})$ が属しているとは限らない事に注意する. 例として $Y_1 = 1, Y_2 = 1$ のときに (4) 式, (5) 式を用いて計算して求めた $\tilde{S}_{n,i}$ と $\tilde{\alpha}_{n,j}$ を仮に x, y とすると, グリッドの集合 G_n の中に 4 点, x, y を囲むグリッドがある. (図 2 を参照) つまり, 株価とボラティリティそれぞれについて次を満たす変数 l, m が唯一存在する.

$$\begin{aligned}S_{n,l} &\leq x < S_{n,l+1}, \quad \alpha_{n,m} \leq y < \alpha_{n,m+1}, \\ l &= 0, 1, \dots, m_s - 1, \quad m = 0, 1, \dots, m_a - 1.\end{aligned}$$

ただし, $S_{n,m_s-1} = x, \alpha_{n,m_a-1} = y$ となることもある. そしてこの x と y を囲む 4 点, $(S_{n,l}, \alpha_{n,m}), (S_{n,l}, \alpha_{n,m+1}), (S_{n,l+1}, \alpha_{n,m}), (S_{n,l+1}, \alpha_{n,m+1})$ に先ほど計算した x, y からの比を考える. Z^{11} を $Y^1 = 1, Y^2 = 1$ の場合のそれぞれの点の重みと考え次のようになる.

$$\begin{aligned}Z_1^{11} &= (1 - \tilde{x})(1 - \tilde{y}), \quad Z_2^{11} = \tilde{x}(1 - \tilde{y}), \\ Z_3^{11} &= (1 - \tilde{x})\tilde{y}, \quad Z_4^{11} = \tilde{x}\tilde{y}.\end{aligned}$$

ここで \tilde{x}, \tilde{y} は次のように決まる.

$$\tilde{x} = \frac{x - S_{n,l}}{S_{n,l+1} - S_{n,l}}, \quad \tilde{y} = \frac{y - \alpha_{n,m}}{\alpha_{n,m+1} - \alpha_{n,m}}.$$

ここで重みが決まった. 一期前からの一本の枝を囲む 4 点について図 2 をのせる.

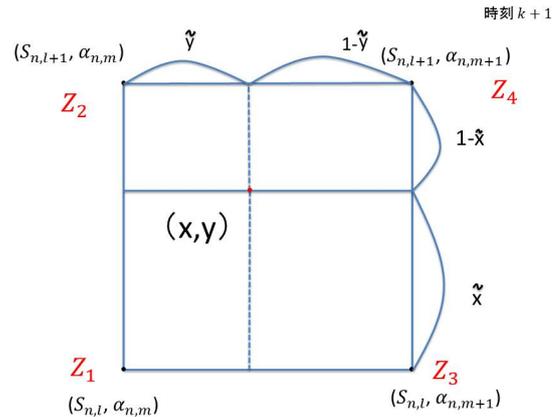


図 2 $(x, y) = (\tilde{S}_{n,i}, \tilde{\alpha}_{n,j})$ を囲む 4 点と比重のイメージ Y^1, Y^2 の残りの 3 つの組み合わせに対しても同様に各 $(\tilde{S}_{n,i}, \tilde{\alpha}_{n,j})$ を囲む 4 点を求め, 比重 $Z_1^{Y^1, Y^2}, \dots, Z_4^{Y^1, Y^2}$ を求める.

次に, 満期 n からオプション価格を割り引いていく. 前の手順で関係する時刻 n でのグリッドは 16 点あり, それらにはあらかじめ求めておいた $Price_{n,l,m}$ というものがあるので, $Price_{n-1,i,j}^{a,b,z}$ をオプション価格に重みを乗じたものとする,

$$Price_{n-1,i,j}^{a,b,z} = Price_{n,l,m} \times Z_z^{a,b}.$$

となる。ここで $a = Y^1, b = Y^2$, を表す添字とし, $z = 1, 2, 3, 4$ の先ほど求めた重みを表す添字とする。各枝に関する推移確率は

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(Y^1 = 1, Y^2 = 1) &= \frac{1}{4}(1 + \rho), \\ \mathbb{Q}(Y^1 = 1, Y^2 = -1) &= \frac{1}{4}(1 - \rho), \\ \mathbb{Q}(Y^1 = -1, Y^2 = 1) &= \frac{1}{4}(1 - \rho), \\ \mathbb{Q}(Y^1 = -1, Y^2 = -1) &= \frac{1}{4}(1 + \rho), \end{aligned}$$

となる。したがって、割引いたオプション価格はこれら 16 点の $Price_{n-1,i,j}^{a,b,z}$ を割引いた値の総和となる。つまり最終的に求まる時刻 $n-1$ のグリッド $(S_{n-1,i}, \alpha_{n-1,j})$ の権利を行使しない場合のオプション価格 $C_{n-1,i,j}$ は、

$$\begin{aligned} C_{n-1,i,j} &= \frac{1}{4e^{r\Delta t}}(1 + \rho) \sum_{z=1}^4 Price_{n-1,i,j}^{1,1,z} \\ &+ \frac{1}{4e^{r\Delta t}}(1 - \rho) \sum_{z=1}^4 Price_{n-1,i,j}^{1,-1,z} \\ &+ \frac{1}{4e^{r\Delta t}}(1 - \rho) \sum_{z=1}^4 Price_{n-1,i,j}^{-1,1,z} \\ &+ \frac{1}{4e^{r\Delta t}}(1 + \rho) \sum_{z=1}^4 Price_{n-1,i,j}^{-1,-1,z} \end{aligned}$$

となる。この $C_{n-1,i,j}$ はオプションを保有した場合の価値である。したがって、権利を行使した場合との比較を各グリッドで行う必要がある。つまり $B_{n-1,i,j}$ を行使したときの価値とし、

$$\begin{aligned} Price_{n-1,i,j} &= \max(B_{n-1,i,j}, C_{n-1,i,j}) \\ &= \max(K - S_{n-1,i}, C_{n-1,i,j}). \end{aligned}$$

となる。ここで $B_{n-1,i,j}$ を選択したノードと $C_{n-1,i,j}$ を選択したノードの境目が行使境界となる。これを時刻 $n-1$ の G_{n-1} の全てのグリッドに対して行う。

次に同じアルゴリズムで時刻 $n-2, n-3, \dots, 1$ と前に戻って計算していく事で時刻 1 までのツリーを構築していく。

時刻 0 においてはグリッド集合が 1 点 (S_0, α_0) というものしかない。この一点から 4 本の枝を (4) 式, (5) 式を用いて求め、時刻 1 でのグリッドの集合 G_1 の中から $(\tilde{S}_{1,0}, \tilde{\alpha}_{1,0})$ という枝を囲む 4 点を探し、それぞれの重みをかけたオプション価格は先ほどと同様に

$$Price_{0,0,0}^{a,b,z} = Price_{1,l,m} \times Z_z^{a,b}$$

となる。したがって時刻 0 でのオプション価格は、16 点の $Price_{0,0,0}^{a,b,z}$ を割り引き、確率をかけた値の総和となる。ここでさらに権利を行使した場合との比較を行い、

$$Price_{0,0,0} = \max(B_{0,0,0}, C_{0,0,0})$$

となる。これが時刻 0 でのアメリカ型プットオプション価格となる。これですべての時刻に対し、ツリーが構築された。またグリークスは中心差分法を用いて計算する。

4. 数値実験と考察

このアルゴリズムに対して、パラメータを変化させる事により行使境界がどのような影響をうけるかなどの考察を行っていく。実験で使うパラメータと基準とする値を以下の表 1 に示す。また表 2 に使用したシミュレーション環境を載せる。

表 1 各パラメータの標準値

パラメータ	記号	値
株価の刻み数	m_s	100
ボラティリティの刻み数	m_a	20
期間の刻み数	n	100
初期株価	S_0	100
初期ボラティリティ	α_0	0.1
満期	T	0.25
SABR モデルにおける β	β	0.8
相関係数	ρ	-0.3
金利	r	0.01
ボラティリティの変動率	ν	0.1
行使価格	K	100

表 2 シミュレーション環境

メーカー	lenovo
型番	ThinkPad Edge11 (0328-RZ8)
OS	Windows 7 HomePremium 32bit
CPU	Intel Core i3 380UM (1.33GHz)
メモリ	4GB
開発言語	Microsoft Visual C++ 2010

(1) 株価刻み数による変化

株価の刻み数 m_s を 20 から 200 に変化させたときの m_s とオプション価格、計算時間の関係を表 3 に載せ、 m_s の変化による時刻、ボラティリティと行使境界の関係のグラフを図 3, 図 4 に載せる。

表3 株価の刻み数 m_s , オプション価格と計算時間

刻み数 m_s	オプション価格	計算時間 (秒)
20	1.912	0.8120
40	1.303	3.072
60	1.058	6.811
80	0.9253	11.66
100	0.8447	18.49
120	0.7962	26.20
140	0.7644	35.37
160	0.7437	46.28
180	0.7306	58.69
200	0.7230	72.00

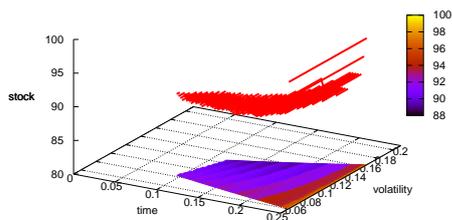


図3 株価の刻み数 $m_s = 20$

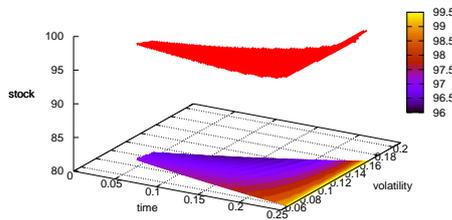


図4 株価の刻み数 $m_s = 200$

表3及び、図3と図4から株価の刻み数の変化と行使境界の変化について次の結果が得られた。

- ・ 刻み数を増やす事でオプション価格が低くなり、徐々に収束している。
- ・ 刻み数が増えると計算時間は長くなり、 m_s が倍になると約4倍になる。
- ・ 刻み数が増えると行使境界価格が上がる。
- ・ 刻み数が少ないと早期行使の最初の時間が遅くなる。
- ・ 基本的な構造としては、ボラティリティが小さいところでは行使境界は高くなり、時刻が大きくなると境界が高くなる事が分かる。他のパラメータについてもこの構造は以下同様に見られた。

より詳しい考察は本論文に記してある。他のパラメータに対しても同様である。

(2) ボラティリティの刻み数による変化

ボラティリティの刻み数 m_a を10から100に変化させたときの m_a とオプション価格、計算時間の関係を表4

に載せ、 m_a の変化による時刻、ボラティリティと行使境界の関係のグラフを図5、図6に載せる。

表4及び、図5、図6から、次の結果が得られた。

- ・ 刻み数を増やしてもオプション価格に大きな影響を与えない。
- ・ 刻み数が増えると計算時間は長くなり、 m_a が倍になると約4倍になる。
- ・ 刻み数を増やしても行使境界に大きく影響を与えない。

表4 ボラティリティの刻み数 m_a , オプション価格と計算時間

刻み数 m_a	オプション価格	計算時間 (秒)
10	0.8445	4.581
20	0.8447	18.40
30	0.8448	41.18
40	0.8448	73.20
50	0.8448	114.1
60	0.8448	165.1
70	0.8449	226.2
80	0.8449	296.8
90	0.8449	375.0
100	0.8449	462.4

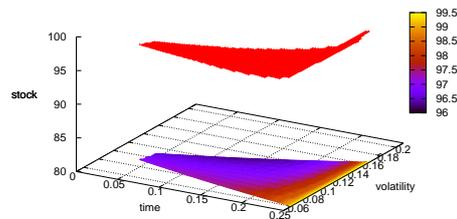


図5 ボラティリティの刻み数 $m_a = 10$

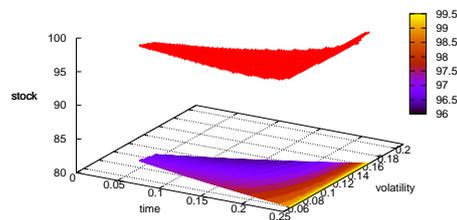


図6 ボラティリティの刻み数 $m_a = 100$

(3) 期間刻み数による変化

期間の刻み数 n を20から200に変化させたときの n とオプション価格、計算時間の関係を表5に載せ、 n の変化による時刻、ボラティリティと行使境界の関係のグラフを図7、図8に載せる。

表5 期間の刻み数 n , オプション価格と計算時間

刻み数 n	オプション価格	計算時間(秒)
20	0.7032	3.560
40	0.7140	7.189
60	0.7333	10.83
80	0.78501	16.36
100	0.8447	18.28
120	0.9190	21.95
140	0.9860	25.62
160	1.059	29.28
180	1.127	32.67
200	1.195	36.58

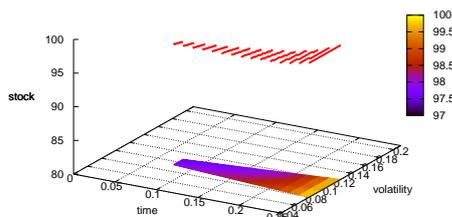


図7 期間の刻み数 $n = 20$

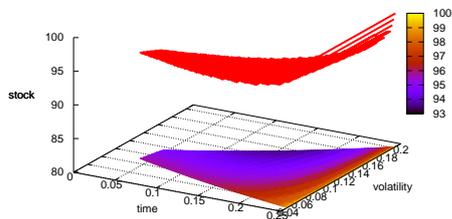


図8 期間の刻み数 $n = 200$

表5及び、図7、図8から次の結果が得られた。

- n を増やす事でオプション価格は高くなる。
- n を増やす事で計算時間は長くなり、 n が倍になると倍になる。
- n を増やす事で行使境界が低くなる。
- n を増やす事で株価とボラティリティの幅が広がる。
- n が少ないと早期行使の最初の時間が遅くなる。

(4) 初期株価による変化

初期株価 S_0 を 94 から 105 に変化させたときの S_0 とオプション価格、デルタとガンマの関係を表6に載せ、 S_0 の変化による時刻、ボラティリティと行使境界の關係のグラフを図9、図10に載せる。

表6及び、図9と図10から次の結果が得られた。

- 96以下では直ちに行使する事が最適となり、ペイオフ

とオプション価格が等しく、 S_0 が高くなるとオプション価格は下がる。

- デルタは常に負の値を取り、 S_0 が高くなると上がり、0に近づく。
- ガンマは常に正の値を取り、 S_0 が100付近で高くなり、その後下降する。
- 行使境界価格は S_0 が高くなると上昇する。
- 早期行使の最初の時間は S_0 が高くなると遅くなる。

表6 初期株価 S_0 , オプション価格, デルタ, ガンマ

初期株価	オプション価格	デルタ	ガンマ
94	6		
95	5	-1	0
96	4	-0.997	0.00417
97	3.004	-0.941	0.108
98	2.117	-0.805	0.163
99	1.393	-0.636	0.174
100	0.8447	-0.461	0.173
101	0.4695	-0.303	0.142
102	0.2371	-0.180	0.103
103	0.1080	-0.0966	0.0650
104	0.04388	-0.0461	0.0359
105	0.01570		

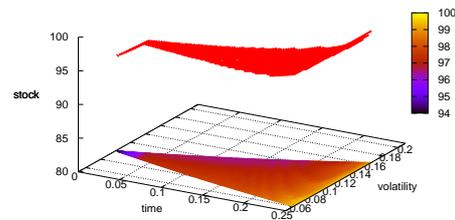


図9 初期株価 $S_0 = 94$

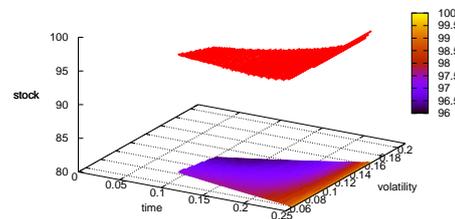


図10 初期株価 $S_0 = 105$

(5) 初期ボラティリティによる変化

初期株価 α_0 を 0.05 から 0.5 に変化させたときの α_0 とオプション価格、ベガの關係を表7に載せ、 α_0 の変化による時刻、ボラティリティと行使境界の關係のグラフを図11、図12に載せる。

表7 初期ボラティリティ α_0 , オプション価格とベガ

初期値 α_0	オプション価格	ベガ
0.05	0.3763	
0.10	0.8447	9.46
0.15	1.323	9.52
0.20	1.797	9.33
0.25	2.256	9.40
0.30	2.738	9.53
0.35	3.210	9.37
0.40	3.676	9.29
0.45	4.140	9.31
0.50	4.608	

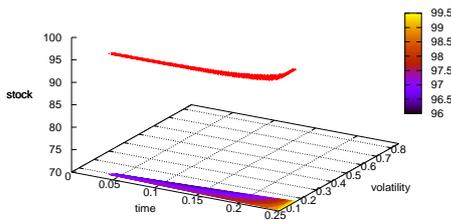


図11 初期ボラティリティ $\alpha_0 = 0.10$

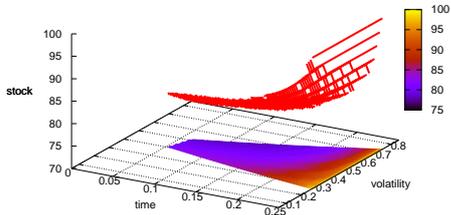


図12 初期ボラティリティ $\alpha_0 = 0.45$

表7及び、図11と図12から次の結果が得られた。

- α_0 が増えることでオプション価格は大きく上がる。
- α_0 が増えることでボラティリティの幅が広がる。
- ATM におけるベガは常に正の値を取り、 α_0 による影響はほとんど見られない。
- 行使境界価格は α_0 が増えると下がる。
- 早期行使の最初の時間は α_0 が高くなると遅くなる。

(6) ベータによる変化

β を 0 と 0.5 から 1.0 に変化させたときの β とオプション価格の関係を表8($\rho = -0.3, \rho = 0.3$ の場合)に載せ、 β の変化による時刻、ボラティリティと行使境界の関係のグラフを図13、図14に載せる。

表8及び、図13、図14から以下の結果が得られた。

- β が大きくなると、株価の広がりが大きくなり、オプション価格は高くなる。
- 相関係数が正の値を取るときの方が若干オプション価格は高くなる、相関係数の正負による β 変化の際のオプション価格の動きは同じである。
- β を大きくすると、行使境界は低くなる。

表8 ベータ β とオプション価格

	$\rho = -0.3$	$\rho = 0.3$
ベータ	オプション価格	オプション価格
0	0.001199	0.001786
0.5	0.1454	0.1568
0.6	0.2733	0.2930
0.7	0.4816	0.5148
0.8	0.8173	0.8720
0.9	1.359	1.448
1.0	2.196	2.339

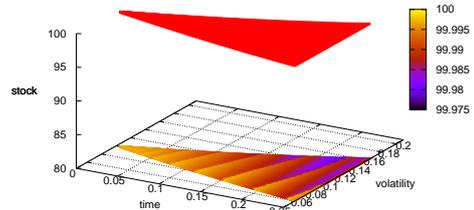


図13 $\beta = 0.0, (\rho = -0.3)$

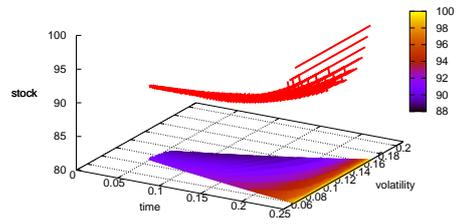


図14 $\beta = 1.0, (\rho = -0.3)$

(7) 相関係数による変化

相関係数 ρ を -0.9 から 0.9 に変化させたときの ρ とオプション価格、感度解析の関係を表9に載せ、 ρ の変化による時刻、ボラティリティと行使境界の関係のグラフを図15、図16に載せる。

表9 相関係数 ρ とオプション価格と感度

相関係数	オプション価格	感度
-0.9	0.7632	
-0.5	0.7992	0.0902
-0.1	0.8354	0.0909
0.0	0.8446	0.0912
0.1	0.8537	0.0915
0.5	0.8904	0.0922
0.9	0.9275	

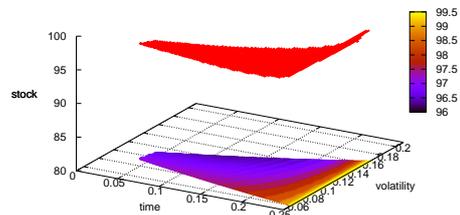


図15 $\rho = -0.5$

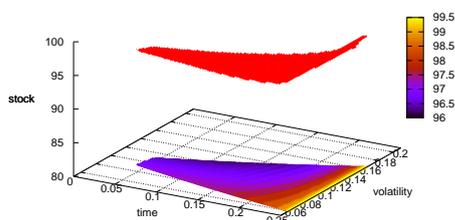


図 16 $\rho = 0.5$

表 9 及び、図 15 から図 16 より以下の結果が得られた。

- ・ 相関係数は増加するにつれオプション価格は微小に増加する。
- ・ 相関係数が増加すると感度は常に正の値をとり、微小に増加する。
- ・ 行使境界に与える影響はほとんど見られない。

(8)BS モデルと SABR モデルの比較

この節では次の BS モデル

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

との比較を行う。各パラメータを SABR モデルに対しては表 1, BS モデルに対しては表 10 のものを用い、時刻、ボラティリティと行使境界の関係をそれぞれ図 17, 図 18 に示し、比較をした。BS モデルではボラティリティが一定であるため、図 18 においては比較を行うためにボラティリティを作為的に 0.02 から 0.18 まで変化させたグラフとなっている。

表 10 BS モデルにおける各パラメータ

パラメータ	記号	値
期間の刻み数	n	100
初期株価	S_0	100
満期	T	0.25
金利	r	0.01
成長率	μ	0.01
行使価格	K	100

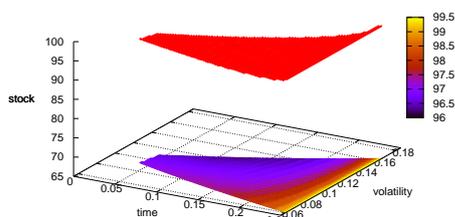


図 17 SABR モデルにおける行使境界

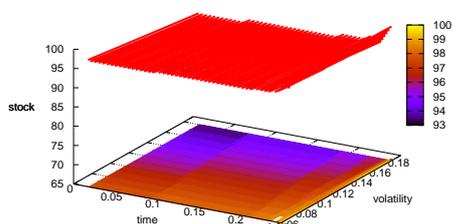


図 18 BS モデルにおける行使境界

図 17 と図 18 より以下の結果が得られた。

- ・ 行使境界価格はボラティリティが同じところでは同じ動きをする。
- ・ BS モデルにおいても、ボラティリティが低いと行使境界価格が高くなり、時刻が大きいと境界が高くなる構造は同じ。
- ・ SABR モデルでは初期行使までの時間が遅れる。

図 18 では実際の行使境界は各ボラティリティ水準で切った 2 次元グラフとなる。また、SABR モデルのパラメータ m_s, n, β は行使価格に大きく影響を与える事から、これらのパラメータを変化させた場合においてこの結果は変わってくる事に注意する。

5. まとめ

本論文では、Vellekoop and Nieuwenhuis[2] の方法を用いて SABR モデルを 2 項近似し、SABR モデルで扱われるパラメータの変化に対して、アメリカ型プットオプション価格、権利行使境界などがどの様な変化をするのか、各パラメータとの関係を見てきた。また、BS モデルとの境界の比較を行った。この方法を用いるときに、任意に設定をすることができる株価刻み数 m_s 、ボラティリティ刻み数 m_a 、期間刻み数 n については m_s と n においては価格や行使境界に与える影響が大きく m_a はそれほど影響はなかった。しかしこの 3 つのパラメータ、特に m_s と m_a は計算時間に大きく影響を与えるため慎重に選ぶ必要がある。またオプション価格が上がると行使境界価格が下がる傾向が全体で共通していた。BS モデルとの比較では、ボラティリティが同じところであればどちらも行使境界の変化は同様の動き方をしたが、満期までの期間中にボラティリティが変動したとき、BS モデルではオプションの買い手や売り手に損益を与える状況がうまれた。今後の課題としては任意に設定することができるパラメータの設定方法、株価の行使境界への初到達時間の分布、SABR モデルへの収束についての証明などを行う必要がある。

参考文献

- [1] P. S. Hagan, D. Kumar, A. S. Lesniewski, D. E. Woodward, *Managing smile risk*, Wilmott magazine, 84-108, 2002.
- [2] M. Vellekoop, N. Hieuwenhuis, *A tree based method to price American options in the Heston model*, The Journal of Computational Finance, 13, No.1, 1-8, 2009.
- [3] M. Vellekoop, G. Vlaming, *Pricing American Options with the SABR Model*, Second workshop on parallel and distributed computing in finance, 2009.
- [4] G. Vlaming, *Pricing options with the SABR model*, Master Thesis, University of Utrecht, June 30, 2002.