

PK戦の解析：予備的考察

鶴谷, 亮人 / TSURUYA, Akito

(出版者 / Publisher)

法政大学大学院理工学・工学研究科

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編 / 法政大学大学院紀要. 理工学・工学研究科編

(巻 / Volume)

55

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

6

(発行年 / Year)

2014-03-24

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00010341>

PK 戦の解析-予備的考察-

PRELIMINARY STUDY OF PENALTY SHOOTOUT IN FOOTBALL

鶴谷 亮人

Akito TSURUYA

指導教員 長坂 建二 教授

法政大学大学院理工学研究科システム工学専攻修士課程

In this study, we consider a problem of finding factors of results in penalty shootouts (abbreviated to PSO) of football games. We check up 143 official football games and after PSOs, the first kicking PSO teams are confirmed to have tendency to win.

London School of Economics and Political Science infer that first successes in PSO are main factor of wins in PSOs and they give pressures to the opponent teams. Our data reject the above inference of LSE & PS.

Therefore, we construct a simple stochastic model in which each PSO is independent with equal probability of success. We demonstrate algebraically that if the success rate of PSOs of the first kicking PSO team is higher than that of the opponent team, then the first kicking team wins. Furthermore, our data fit quite well to the demonstrated result.

It is truth that our stochastic model explains to PSOs very well. However, because we cannot reject all of inference of LSE & PS, it is needs that further analysis of PSOs.

Keywords— *Calculation of Probability, Unfairness, Triangular Struggle, Conditional Probability, Bayes' Theorem, Penalty Shootout (PSO)*

1. はじめに

サッカーの試合において、トーナメント戦や、ワールドカップの決勝トーナメントにおいては、規定の試合時間が終了しても決着がつかない場合には、試合時間を延長して、勝敗を決定しようとする。しかし、延長戦でも勝敗が決しない場合には、通称 PK 戦を実施する。[1], [2]

PK 戦の勝敗データを見ると、先攻の方が有利であるらしいことがわかる。[3] このことは、London School of Economics and Political Science (LSE) が 1970～2000 年にかけて行われた主要な大会の PK 戦 2820 件を分析した結果、先攻のチームの約 60% が勝利していることが報告されている。[4], [5]そして、国内においては、PK 戦の研究は今までに、研究されておらず、それらは PK 戦ではなく規定試合時間内に起こりうる PK も含めた、キッカーやキーパーに着目した戦略的なものだけであった。[6], [7], [8], [9]

大相撲においては、本割の結果、相星の力士が 3 人以上いる場合には何らかの方法で優勝者を決定する必

要がある。相星の力士数により異なる決定方法等が規定されているが、3 人の場合の巴戦の場合に、最初に対戦する力士が有利であることを紹介する。つまり巴戦の数理である。[10], [11], [12], [13] サッカーにおいては、大相撲の巴戦のように、3 人の力士の強さが同じ、つまり、勝つ確率がどの対戦でも $1/2$ という条件の下でも、不平等(unfairness)が発生するとは限らない。そこで、先攻のチームの誰もがペナルティキックでゴールを決める確率を $u (0 < u < 1)$ 、後攻のチームの誰もがペナルティキックでゴールを決める確率を $v (0 < v < 1)$ 、とおき、常に一定値として、前後の結果の影響を受けないと仮定して、先攻が勝つ確率、後攻が勝つ確率を計算し、 $u > v$ ならば先攻有利であることを示そうとして試みを紹介する。

2. PK 戦の数理

サッカーの PK 戦において PK 戦は、勝敗を決定しなければならないトーナメント戦のような場合であり、延長戦でも得点数に差がないときには、PK 戦を行う。PK 戦の出場者は、延長戦終了時のゲーム出場者である

が、退場者が出たような場合は少ない出場者の人数ちょうどが PK 戦の PK 戦の出場者となる。したがって、退場者がいない場合の PK 戦の出場者は各チーム 11 人、合計 22 人となる。退場者 1 名であれば、各チーム 10 人、合計 20 人となる。まず両方のチームが 5 本のキックを行う。先にキックする方を先攻、その後にキックする方を後攻と呼び、何人目のキッカーがキックしているかを回と呼び、先攻を表 (Top)、後攻を裏 (Bottom) と呼ぶことにする。例えば、先攻のチームの 3 人目がキックをするのは、3 回の表であり、後攻のチームの 5 人目がキックをするのは、5 回の裏という事になる。

次に、先攻のチームを A、後攻のチームを B としても一般性を失うことはない。ここで、A チームの i 回目までのペナルティキックの成功回数を $s_i(A)$ 、失敗回数を $t_i(A)$ と書くと、どちらも整数値を値とし

$$s_i(A) + t_i(A) = i, \quad 0 \leq s_i(A), t_i(A) \leq i \quad (2.1)$$

が成り立つ。後攻の B チームについても、同様に $s_i(B)$ 、 $t_i(B)$ を定めることができ、(2.1) と同様な性質が成立する。 $s_3(A) = 3$ の時、 $s_2(B)$ の値は、0, 1, 2 のいずれかである。

2.1 PK 戦の終了判定

両チームが 5 回目の表・裏のキックをする前に、他方が 5 回の表・裏のキックを行っても挙げられない得点を一方のチームが挙げられたときには、PK 戦は終了する。例えば、 $s_3(A) = 3$ の時、 $s_2(B)$ の値は、0, 1, 2 のいずれかである。もし、 $s_2(B) = 0$ であり、かつ $s_3(B) = 0$ ならば、 $s_5(B)$ の最大値は 2 である。したがって、

$$s_3(A) = 3, s_3(B) = 0$$

ならば、3 回の裏で PK 戦は終了し、先攻の A チームの勝利となる。これが、最も早く先攻の A チームが勝つ場合である。一方、最も早く後攻の B チームが勝つときは、 $s_3(A) = 0, s_3(B) = 3$ の場合だけである、PK 戦は 3 回の裏で終了し、後攻の B チームの勝利となる。まず注意するのは、 $s_i(A)$ と $t_i(A)$ は (2.1) の関係が常に成り立つので、考慮するのは $s_i(A)$ と $s_i(B)$ の値だけでよいことがわかる。次に、 $s_i(A), s_i(B)$ は共に i について単調非減少であるから、1 番大きい i の値に対する $s_i(A), s_i(B)$ の値により、PK 戦の終了を判定することは可能である。5 回の裏の時点で、 $s_5(A) = s_5(B)$ ならば、勝負はつかないので、6 回目が行われる。6 回目の時点で、 $s_6(A)$ と $s_6(B)$ の値が異なれば、PK 戦終了する。

$s_6(A) = s_6(B)$ ならば、7 回の表・裏に突入することになる。このように、PK 戦は決着がつくまで続行するが両チームの PK 戦の出場者がすべてキックしても勝敗がつかない場合には、2 巡目の PK 戦が開始される。キックの順番は 1 巡目と違って構わない。

さて、 $s_i(A)$ と $s_i(B)$ の値を比較することにより、PK

戦の終了、および勝利チームの決定が出来ることは、今までの議論より明らかであろう。

- (i) $i = 3$ $s_3(A) = 3, s_3(B) = 0$ ならば先攻の A チームの勝ちであることは、既に示した。つまり、

$$i = 3, s_3(*) = s_3(+) + 3 \quad (2.2)$$

ならば、*チームの勝利である。

- (ii) $i = 4$ $s_4(A) = 4, s_4(B) = 0, 1, 2$

$$s_4(A) = 3, s_4(B) = 0, 1$$

$$s_4(A) = 2, s_4(B) = 0$$

の場合が 4 回の裏で先攻の A チームが勝つ場合である。ところが、 $s_4(A) = 4, s_4(B) = 0$ ならば $s_3(A) \geq 3, s_3(B) = 0$ であり、これは $s_3(A) = 3, s_3(B) = 0$ となるから、 $i = 3$ の決着がつく場合となってしまう。一方、

$$s_4(A) = 4, s_3(B) = 1$$

ならば、4 回の表で A チームの勝利となる。

同様に、 $s_4(A) = 3, s_3(B) = 0$ の場合にも 4 回の表で A チーム勝利である。したがって、

- (ii)-(a)

4 回の表で A チームの勝利となるための判定条件は

$$s_4(A) = s_3(B) + 3 \quad (2.3)$$

- (ii)-(b)

4 回の裏で*チームの勝利となるための判定条件は

$$s_4(*) = s_4(+) + 2 \quad (2.4)$$

- (iii) $i = 5$

- (iii)-(a)

5 回の表で A チームの勝利となるための判定条件は

$$s_5(A) = s_4(B) + 2 \quad (2.5)$$

である。

- (iii)-(b)

5 回の裏で*チームの勝利となるための判定条件は

$$s_5(*) = s_5(+) + 1 \quad (2.6)$$

となる。

2.2 PK 戦の終了判定 (($i \geq 6$))

5 回の表・裏で、 $s_5(A) = s_5(B)$ ならば、先攻の A チームも後攻の B チームも勝利を得ることはない。したがって、PK 戦は 6 回に突入する。いわゆるサドンデス方式である。つまり、両チームの成功数に差がつくことが確定すれば、PK 戦は終了する。

$$s_5(A) = s_5(B)$$

であるから、6回目で*チームが勝つのは

$$s_6(*) = s_6(+) + 1 \quad (2.7)$$

の場合である。この方式が成り立つのは、サドンデス方式であっても、PK戦が終了するのは6回の裏の時点である。6回の裏で決着がつかないのは、(2.7)が成り立たない場合である。その後は6回の表・裏の解析と同様であるから、 $i \geq 6$ のときに*i*回目の裏で決着がついて*チームが勝利してPK戦が終了する判定条件は

$$\begin{cases} s_j(A) = s_j(B) & j = 5, 6, \dots, i-1 \\ s_i(*) = s_i(+) + 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

である。

2.3 単純確率モデル

先攻のAチームが成功する確率を u ($0 < u < 1$)とする。つまり、Aチームのペナルティキックが成功する確率は、誰がいつキックしても一定の値 u という事である。同様に、後攻のBチームのキッカーが成功する確率を v ($0 < v < 1$) とおく。Bチームのペナルティキッカーが成功する確率は、誰がいつキックしても一定の値 v という事である。したがって、各回のキックは独立であって、前後の影響を受けない。これが、単純ではあるが、PK戦の確率モデルである。

この確率モデルの下で、前節の判定条件を適用して、PK戦で先攻、後攻が勝つ確率を求める。2回の表・裏でPK戦の決着がつかないことを示したから、回数を表すインデックス i は $i \geq 3$ の場合を考えることになる。

(i) $i = 3$,

3回の表で先攻のチームが勝つことはないから、3回の表・裏が終了した時点で(2.2)の判定条件を適用すればよい。したがって、先攻のAチームが $i = 3$ のとき勝つ確率は $u^3(1-v)^3$ であり、後攻のBチームの場合は、 $u^3(1-u)^3$ となり、 u と v を入れ換えれば他のチームが勝つ確率となっていることがわかる。

(ii) $i = 4$

(ii)-(a) 4回の表で、先攻が勝つ場合は、判定条件は(3.3)であるから、その確率は $u^4v(1-v)^2 \times {}_3C_1$ と $u^3(1-u)(1-v)^3 \times {}_3C_1$ の和である。

一方、4回の表で後攻のBチームが勝つ確率は、 $u(1-u)^3v^3 \times {}_3C_1 + (1-u)^4 \times v^2(1-v) \times 3$

であり、成功と失敗を入れ換えると4回の表で先攻が勝つ確率となる。

(ii)-(b) 4回の裏で*チームが勝つ判定条件は、(2.4)であるから、*チームが勝つ確率は簡単に計算できる。その確率の式で、 u と v を入れ換えると+チームが4回の裏で勝つ確率となる。

(iii) $i = 5$

5回の表でPK戦の決着がつく確率を求めることができ

る。

ここで、次の記号を導入する。

$p(A; it), p(B; it)$ は、 i 回の表までに勝つ確率、

$p(A; ib), p(B; ib)$ は、 i 回の表までにBチームが勝つ確率とする。先攻のAチームが後攻のBチームに5回の裏までに勝つのは、15パターン、210通りあるので、それらをすべて加えて、

$$\begin{aligned} p(A; 5b) = & 5u(1-5v+10v^2-10v^3+5v^4-v^5) \\ & - 10u^2(1-10v+30v^2-40v^3 \\ & + 25v^4-6v^5) \\ & + 10u^3(1-15v+60v^2-100v^3 \\ & + 75v^4-21v^5) \\ & - 5u^4(1-20v+100v^2-200v^3 \\ & - 175v^4-56v^5) + u^5(1-25v+150v^2 \\ & - 350v^3-350v^4-126v^5) \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。

一方、 $p(B; 5b)$ は今までの議論から(2.9)において u と v を入れ換えればよいので、

$$\begin{aligned} p(A; 5b) = & 5v(1-5u+10u^2-10u^3+5u^4-u^5) \\ & - 10v^2(1-10u+30u^2-40u^3 \\ & + 25u^4-6u^5) \\ & + 10v^3(1-15u+60u^2-100u^3 \\ & + 75u^4-21u^5) \\ & - 5v^4(1-20u+100u^2-200u^3 \\ & - 175u^4-56u^5) + v^5(1-25u+150u^2 \\ & - 350u^3-350u^4-126u^5) \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。実際にすべての場合を考えると、15パターン、210通りあり、そこから(2.10)の式が導かれる。

さて、各回は独立試行と考えてよいから、 i 回 ($i \geq 6$) の裏にサドンデス方式でPK戦の勝敗が決まる確率は、5回までに決まらない確率

$$R = 1 - \{p(A; 5) + p(B; 5)\}$$

に、6回、7回、 $\dots$ 、 $i-1$ 回で勝敗が決しない確率と i 回の裏で勝敗が決する確率をすべて掛け合わせてやればよい。 i 回の裏で決着がつくのは、(2.8)の2番目の式から、

$$p(1-q) + (1-p)q$$

であり、第1項は先攻のAチームが勝つ確率、第2項は後攻のBチームが勝つ確率である。また、(2.8)最初の式が成り立つ確率は、

$$pq + (1-p)(1-q)$$

である。以上より、 $i \geq 6$ のときに i 回の裏にPK戦の決着がつく確率は

$$p(A; i) = p(A; 5b) + u(1 - v)R \\ \times \frac{1 - \{uv + (1 - u)(1 - v)\}^{i-5}}{1 - \{uv + (1 - u)(1 - v)\}} \quad (2.11)$$

$$p(B; i) = p(B; 5b) + (1 - u)vR \\ \times \frac{1 - \{uv + (1 - u)(1 - v)\}^{i-5}}{1 - \{uv + (1 - u)(1 - v)\}} \quad (2.12)$$

である。

2.4 u, v の関係と $p(A; i), p(B; i)$ の関係

$u = v$ の場合、PK 戦で先攻、後攻の勝つ確率はこの単純な確率モデルでは等しくなることがいえる。決定率を、 $u = v, u > v, u < v$ としたときのシミュレーション結果が下の表 2-1、表 2-2 である。

表 2-1. $u = v$ における勝率

決定率	勝率($i = 5$)	勝率($i = 20$)
$u = 0.9$ $v = 0.9$	$p(A; 5b) = 0.26916$ $p(B; 5b) = 0.26916$	$p(A; 20b) = 0.46827$ $p(B; 20b) = 0.46827$
$u = 0.8$ $v = 0.8$	$p(A; 5b) = 0.34021$ $p(B; 5b) = 0.34021$	$p(A; 20b) = 0.49622$ $p(B; 20b) = 0.49622$
$u = 0.7$ $v = 0.7$	$p(A; 5b) = 0.36422$ $p(B; 5b) = 0.36422$	$p(A; 20b) = 0.49942$ $p(B; 20b) = 0.49942$
$u = 0.6$ $v = 0.6$	$p(A; 5b) = 0.37412$ $p(B; 5b) = 0.37412$	$p(A; 20b) = 0.49982$ $p(B; 20b) = 0.49982$
$u = 0.5$ $v = 0.5$	$p(A; 5b) = 0.37695$ $p(B; 5b) = 0.37695$	$p(A; 20b) = 0.49988$ $p(B; 20b) = 0.49988$

表 2-2. $u > v, u < v$ における勝率

決定率 $u > v$	勝率($i = 5$)	勝率($i = 20$)
$u = 0.9$ $v = 0.8$	$p(A; 5b) = 0.48746$ $p(B; 5b) = 0.16933$	$p(A; 20b) = 0.71337$ $p(B; 20b) = 0.26973$
$u = 0.9$ $v = 0.7$	$p(A; 5b) = 0.65815$ $p(B; 5b) = 0.10087$	$p(A; 20b) = 0.84652$ $p(B; 20b) = 0.14970$
$u < v$		
$u = 0.8$ $v = 0.9$	$p(A; 5b) = 0.16933$ $p(B; 5b) = 0.48746$	$p(A; 20b) = 0.26973$ $p(B; 20b) = 0.71337$
$u = 0.7$ $v = 0.9$	$p(A; 5b) = 0.10087$ $p(B; 5b) = 0.65815$	$p(A; 20b) = 0.14970$ $p(B; 20b) = 0.84652$

2.5 $u > v$ のときの $p(A; i) > p(B; i)$ の証明

$p(A; 5b) - p(B; 5b)$ において、

$$u + v = s \quad (0 < s < 2)$$

$$u - v = t \quad (0 < t < 1)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{128} t (35t^8 - 20t^6(16 - 14s + 7s^2) \\ & + 42t^4(24 - 40s + 40s^2 - 20s^3 + 5s^4) \\ & - 20t^2 \\ & (64 - 144s + 216s^2 - 200s^3 + 120s^4 \\ & - 42s^5 + 7s^6) \\ & + 5 \\ & (128 - 256s + 512s^2 - 704s^3 + 688s^4 \\ & - 464s^5 + 208s^6 - 56s^7 + 7s^8)) \end{aligned}$$

となる。

さらに、

$$s - 1 = w \quad (-1 < w < 1)$$

とすると、前式は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{128} t (35t^8 - 20t^6(9 + 7w^2) + 42t^4(9 + 10w^2 + 5w^4) \\ & - 20t^2(21 + 21w^2 + 15w^4 + 7w^6) \\ & + 5 \\ & (63 + 28w^2 + 18w^4 + 12w^6 + 7w^8)) \end{aligned}$$

と表される。

ここで、因数の $1/128t$ は、 $0 < t < 1$ なので正である。

また、括弧内の $35t^8$ も正となる。

残りの多項式は、

$$\begin{aligned} & -20t^6(9 + 7w^2) \cdots \textcircled{1} \\ & 42t^4(9 + 10w^2 + 5w^4) \cdots \textcircled{2} \\ & -20t^2(21 + 21w^2 + 15w^4 + 7w^6) \cdots \textcircled{3} \\ & 5(63 + 28w^2 + 18w^4 + 12w^6 + 7w^8) \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。

つまり、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{4}$ は負であるため、 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ と $\textcircled{3} + \textcircled{4}$ が正であればよい。

まず、 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ は

$\textcircled{1}$ の t^6 以外を a とし、 $\textcircled{2}$ の t^4 以外を b とすると、

$$a + b = 198 + 280w^2 + 210w^4$$

となり、正であるため、 $a < b$ となる。

また、

$0 < t < 1$ より、 $t^6 < t^4$ であることから $t^6 a < t^4 b$ となり正である。

次に、 $\textcircled{3} + \textcircled{4}$ は

$\textcircled{3}$ の t^2 以外を c とし、 $\textcircled{4}$ を d とすると、

$$c + d = 735 + 560w^2 + 390w^4 + 200w^6 + 35w^8$$

となり、正であり、 $c < d$ である。

こちら、 $0 < t < 1$ より、 $t^2c < d$ となり正である。
よって、

$$\frac{1}{128}t\{35t^8 + (t^6a + t^4b) + (t^2c + d)\}$$

は正である。

以上より、 $p(A; 5b) - p(B; 5b) > 0$ である。

次に、 $i \geq 6$ のときを考える。

$$\begin{aligned} a &= uv \\ b &= (1-u)(1-v) \\ c &= u(1-v) \\ d &= (1-u)v \end{aligned}$$

とすると、

i 回までに A, B それぞれが勝つ確率は、5 回までに A, B それぞれが勝つ確率と 6 回以降の等比数列の和より、

$$\begin{aligned} p(A; i) &= p(A; 5b) + cR \times \frac{1 - (a+b)^{i-5}}{1 - (a+b)} \\ p(B; i) &= p(B; 5b) + dR \times \frac{1 - (a+b)^{i-5}}{1 - (a+b)} \end{aligned}$$

次に、 $i = n$ のとき、

$$\begin{aligned} p(A; n) &> p(B; n) \\ p(A; 5b) + cR \times \frac{1 - (a+b)^{n-5}}{1 - (a+b)} &> p(B; 5b) + dR \times \frac{1 - (a+b)^{n-5}}{1 - (a+b)} \end{aligned}$$

となる。

$i = n + 1$ のときは、

$$\begin{aligned} p(A; n+1) &> p(B; n+1) \\ p(A; 5b) + cR \times \frac{1 - (a+b)^{n+1-5}}{1 - (a+b)} &> p(B; 5b) + dR \times \frac{1 - (a+b)^{n+1-5}}{1 - (a+b)} \end{aligned}$$

つまり、 c と d の大小関係にしかよらず、
 $i = n + 1$ のときも $p(A; n + 1) > p(B; n + 1)$ が成り立つ。

よって、 $i \geq 6$ においても、 $p(A; i) > p(B; i)$ は成り立つ。

3. 実際のデータと理論式の比較

実際に行われた PK 戦の結果と理論式において、先攻の決定率と後攻の決定率、それぞれの勝率がどうなっているのかを比較する。決定率は 143 試合の平均から、

表 3-1. 平均の決定率

決定率(u)	0.74250	決定率(v)	0.69071
--------	---------	--------	---------

である。

表 3-1 の先攻 A, 後攻 B, それぞれの決定率を $i = \infty$ までにそれぞれの勝つ確率の理論式の u, v へ代入する。その結果が以下の表 3-2 である。

また、実際のデータの勝数と勝率は表 3-3 の通り。

表 3-2. 理論式からの勝率

先攻	83.91413	勝	勝率	0.58681
後攻	59.08587	勝	勝率	0.41319
合計	143	勝	合計	1

表 3-3. データからの勝率

先攻	82	勝	勝率	0.57343
後攻	61	勝	勝率	0.42657
合計	143	勝	合計	1.00000

χ^2 適合度検定をおこなうと、

仮説 $H_0: P(A_1) = p(A; \infty), P(A_2) = p(B; \infty)$

$$\chi^2_{0.05}(1) = 3.84146 > x^2 = 0.01128$$

となり、仮説 H_0 は棄却されなかった。以上より、理論式から計算される勝率は実際のデータに近い結果となった。

4. 勝率への影響

先攻が有利になってしまう何らかの要因があるのを考える。まず考えなければならないのは、よく言われている先攻のキッカーの成功と失敗が後攻のキッカーへプレッシャーとなり、決定率が下がるのではということである。下の表が、143 試合において、先攻が決めた場合と外した場合に分け、その直後の後攻のキッカーの成功と失敗を集計した結果である。

次は、先攻後攻の区別はつけず直前のキッカーの成功と失敗は直後のキッカーのパフォーマンスに影響するかという点である。集計結果は以下の表の通り。

表 4-1. 2×2 分割表

	次のキッカー		(本)
	直後が決めた	直後が外した	合計
直前が決めた	715	267	982
直前が外した	245	97	342
合計	960	364	1324

表 4-2. 2×2 分割表

	後攻のキッカー		(本)
	決めた	外した	合計
先攻が決めた	381	149	530
先攻が外した	127	59	186
合計	508	208	716

以上の二つの要因は検定の結果からも有意差があるとは判断できず、影響しているとは考えにくい結果となった。

最も先攻のメリットとなると考えられる、先にポイントを先行したかどうかということによって、先攻と

後攻の勝率に差があるかを集計した．ポイントを先行するとはどういう状況をいうのかというと，1 回の表の時点で，キックが成功すれば先攻がポイントを先行したことになる．一方で，1 回の表がキックを失敗し 1 回の裏が成功すれば，後攻がポイントを先行したと判断する．

表 4-2. 2×2 分割表

	先攻(勝)	後攻(勝)	合計(試合数)
得点を先行(先攻)	77	40	117
得点を先行(後攻)	7	19	26
合計	84	59	143

これに関しては，検定結果が

$$\chi^2_{0.05}(1) = 3.84 < x^2 = 13.2744$$

となり，帰無仮説は棄却され，有意差があると考えられる．つまり，先にポイントを先行することは，勝敗に関わる要因であると考えられる．ベイズの定理から，先攻が勝った時，得点を先行していることが原因となっている事後確率は 0.9167 と非常に高いことがわかった．

5. まとめ

本研究では終了判定条件より，単純確率モデルを作成し，理論的に PK 戦において先攻の有利不利があり得るのか検証した．しかし，単純確率モデルにおいては決定率が等しければ，勝率も等しくなるため，巴戦の数理のような先攻後攻の理論的な有利不利は生じないという結果となった．また，シミュレーション結果における，実際の 143 試合の先攻，後攻の勝率のデータと，理論式から導かれる勝率との一致からも，PK 戦の数理はこの単純確率モデルで成り立っているように思える．

他者のキッカーの影響については，直前のキッカーの成功失敗が，次のキッカーの決定率に影響するかどうかという心理的な問題は，ほぼ関係しないようである．このことから，さらにそれ以前のキッカーの成功失敗が影響するとは考えにくい．しかし，見方を変え，ポイントを先行したときと先行された場合によって，勝率に差があるかということに関しては，大きな差があると考えられる．後攻であってもそれは言えることであった．これは，先攻が有利になってしまう要因の一つであると考えられる．なぜならば，先攻は各回において先にキックすることができ，1 回の表，つまり 1 番手のキッカーが成功してしまえばポイントを先行できてしまうのである．一方で後攻は，暫定的ではあるが，先攻が失敗しない限りポイントを先行するというメリットはなく，常に同点にし，追いつかなければならないという状況にあると言える．では，なぜ各回の

試行は独立と考えることができ，単純確率モデルで説明できたのか．143 試合の各回の先攻，後攻の決定率を参照すると，

表 5-1. 各回の決定率

決定率	1 回	2 回	3 回	4 回	5 回
先攻	0.75000	0.76974	0.76974	0.74074	0.75676
後攻	0.69930	0.71329	0.70629	0.68504	0.71233

上記より，ほとんどの先攻が一回の表からポイントを先行できてしまうことから，これが後攻にとってプレッシャーとなり，一貫して後攻の決定率が下がり，単純確率モデルで，勝率が一致したと考えられる．

文献

- [1] 日本サッカー協会規約・規定，“サッカー競技規則”，2013.
- [2] 国際サッカー評議会(IFAB)，“サッカー競技規則”，“Law of the Game 2010/2011”，FIFA. pp. 51-52, 2011.
- [3] W 杯大会別成績，ワールドカップのデータベース World Cup' s world ，2010.
- [4] 欧州通信，“PK は先攻が圧倒的有利，ルール改正を研究機関が提唱，Livedoor スポーツ，2010.
- [5] Jose Apesteguia and Ignacio Palacios-Huerta ，“Psychological Pressure in Competitive Environments : Evidence from a Randomized Natural Experiment” ，2010.
- [6] 小田 幸弘・廣瀬 信之・内田 誠一・森 周司 ，“ゴールキーパーがペナルティキックを止めるには－DP マッチングを用いたキッカーの動作解析－” ，2011.
- [7] 谷 浩明・松谷 実・松本 純一・松本 考彦・熊倉尚美 ，“競技経験の違いによるペナルティ・キックの軌道予測能力” ，2005.
- [8] 永都 久典 ，サッカーゴールキーパーの動作分析－PK 時における GK のセービングフォームについての基礎実験(1)－ ，
- [9] 太田 雄大・鈴木 敦夫 ，“サッカーのペナルティキックの最適戦略” ，2006.
- [10] 秋山 仁 “皆殺しの数学”，KK ベストセラーズ 1984.
- [11] 中村 義作 ，“遊びの確率論”，海鳴社 ，1982.
- [12] 大村 平 ，“確率のはなし” 日科技連，2002.
- [13] 玉置 光司 ，“基本確率” ，牧野書店，1992.