発散のないmodelの試作(16)

Furuoya, Izumi / 古尾谷, 泉

(出版者 / Publisher)
法政大学多摩研究報告編集委員会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学多摩研究報告 / 法政大学多摩研究報告
(巻 / Volume)
29
(開始ページ / Start Page)
91
(終了ページ / End Page)
98
(発行年 / Year)
2014-05-30
(URL)
https://doi.org/10.15002/00010311

法政大学多摩研究報告　29：91 ～ 98, 2014

発散のない model の試作（XVI）

古尾谷　泉

An attempt toward a non-divergent model (XVI)

Izumi FURUOYA

素粒子物理学において、摂動論で散乱行列を計算する際にあらわれる、Fig.1 で示される過程に対応する典型的な発散積分について議論する。最初、従来の理論で発散量をどう処理するかを説明する。次に、我々の　model で発散量を消失させるためには、どのように我々の model を修正すればよいかを議論し、その条件を導出する。

Fig.1 は、momentum p の入射粒子が、仮想的に momentum k の粒子を放出した後、その粒子を吸収し、再び、もとの粒子に戻る過程をあらわす。以下、取り扱いを簡単にするために、入射粒子と仮想的な放出粒子とは、同一の scalar 粒子とし、したがって、それらの粒子の質量は同じであり、これを m で表すことにする。

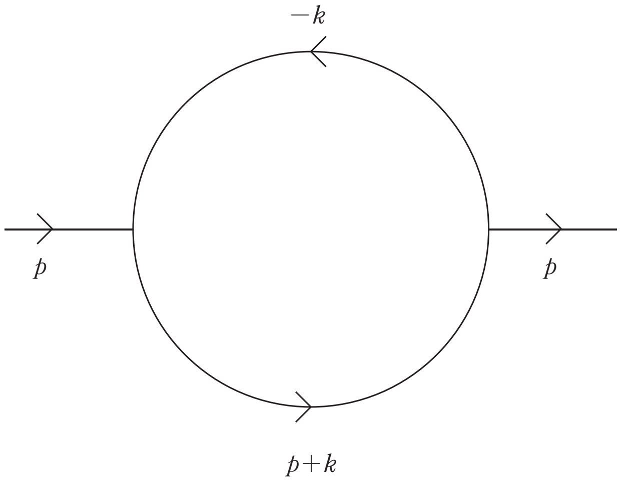

Fig.1

Fig.1 に対応する発散積分は

$$\int d^4 k \ 1/((p+k)^2 - m^2)(k^2 - m^2), \tag{1}$$

である。Eq.(1) で、積分の体積 $d^4 k = dk^0 dk^1 dk^2 dk^3$ は k についての 4 次元の量であり、また、分母も k についての 4 次の量であるから、この積分は発散してしまう。

最初は、従来の理論における dimensional regularization の方法を用いて、Eq.(1) の積分を計算しよう。そのため、Feymann の paramertization

$$1/ab = \int_0^1 dz\ 1/(b+(a-b)z)^2, \tag{2}$$

により、Eq.(1) を

$$\int_0^1 dz \int d^4 f\ 1/(f^2-s)^2, \tag{3}$$

但し $f=p-kz$, および、$s=p^2z(1-z)+m^2$, と書き直しておく。

次に、Eq.(3) の z についての被積分関数の計算を行うために、積分公式

$$\int d^D f \quad 1/(f^2-s)^n = i\pi(-1)^n\ \Gamma(D-n/2)/(\Gamma(n) \quad s^{(D-n/2)}), \tag{4}$$

を用いる。Eq.(4) は D が non-integer の値に対しても、よく定義さてている式ではあるが、$D=4$ で$n=2$ のときには、対数的に発散してしまう。そこで、ここでは、$D=4-\eta$ とおいて、最後に、$\eta\to 0$ とおくことにしよう。Eq.(4) から

$$\Pi_\eta = \int d^{(4-\eta)} f \quad 1/(f^2-s)^2 = i\pi^{(2-n/2)} \quad \Gamma(\eta/2)/(\Gamma(2) \quad s^{(n/2)}), \tag{5}$$

となる。小さな η に対して

$$s^{-\eta/2} \ = \ 1-(\eta/2)\log s,,, \tag{6}$$

および

$$\Gamma(\eta/2) \ = \ 2/\eta-\gamma+,,, \tag{7}$$

と展開し、これらを Eq.(5) に代入すれば

$$\Pi_\eta(s) = 2i\pi^2/\eta - i\pi^2(\gamma+\log s), \tag{8}$$

となる。$\eta\to 0$ すると、Eq.(8) は発散してしまう。この発散を取り除くためには、$s^0=m^2$ とおいて、次の引き算をすればよい

$$\lim_{\eta\to 0} \ (\Pi(s)-\Pi(s_0)) = -i\pi^2 \log(s/s_0), \tag{9}$$

次に、Eq.(3) を極座標で計算しよう。

極座標は、(空間はユークリッド的にしてある)

$$f^2 = f_0^2+f_1^2+f_2^2+f_3^2, \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
&f_0 = f c_1\ c_2\ c_3, \\
&f_1 = f c_1\ c_2\ s_3, \qquad \text{ただし} \qquad s_i = \sin(\theta_i) \\
&f_2 = f c_1\ s_2, \qquad \text{および} \quad c_i = \cos(\theta_i) \\
&f_3 = f s_1, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ \text{である。}
\end{aligned} \tag{11}
$$

とおく。ここで　積分の領域、これは、仮想粒子の取りうる energy momentum の範囲であるが、は

$$
\begin{aligned}
0 < f < \infty, \qquad & -\pi/2 < \theta^1 < \pi/2, \\
& -\pi/2 < \theta^2 < \pi/2, \\
& 0 < \theta^3 < \pi,
\end{aligned} \tag{12}
$$

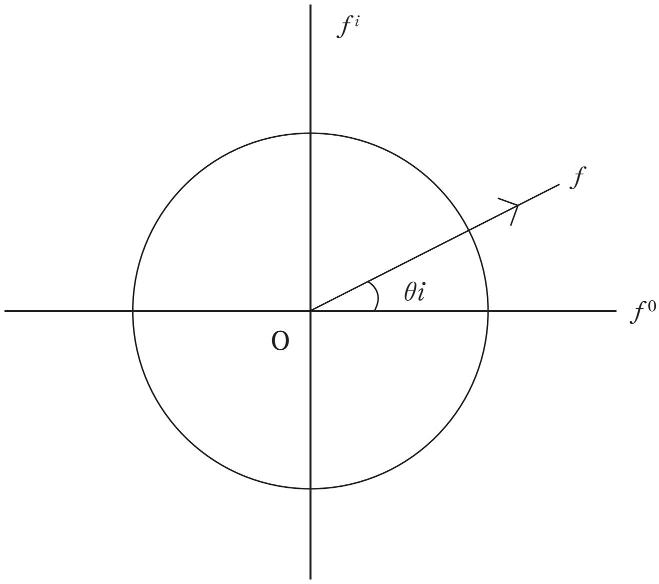

Fig.2

である。Eq.(12) の領域について、積分すれば

$$
\begin{aligned}
\Pi &= \int\int\int\int df^0\, df^1\, df^2\, df^3\ 1/(f^2 - s)^2 \\
&= (-)\int\int\int\int f^3 df\ 1/(f^2 - s)^2\ c_1 c_2^2 d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\
&= 2\pi^2 \int df\ \ f^3/(f^2 - s)^2 \\
&= \pi^2\ \ (\log(f^2 - s) - s/(f^2 - s))/_{f=0}^{f=\infty},
\end{aligned} \tag{13}
$$

となる。上の計算で

$$
\int\int\int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3\ c_1 c_2^2 = 2\pi^2, \tag{14}
$$

を用いた。$f \to \infty$ で　Eq.(13) は発散する。前同様、以下の引き算をおこなうことで、無限大は消失する。

$$\begin{aligned}\Pi(s)-\Pi(s_0) &= \pi^2(\log(f^2-s)-s/(f^2-s))-\pi^2(\log(f^2-s_0)-s_0/(f^2-s_0)) \\ &= \pi^2((\log((f^2-s)/(f^2-s_0))-(s/(f^2-s)-s_0/(f^2-s_0)))/^{\infty}_{f=0} \\ &= (-)\,\pi^2\log(s/s_0)\end{aligned} \tag{15}$$

となり、これは　Eq.(9) と一致する。しかし、ここでの処方は、無限大－無限大　という形なので、一意にはきまらない、といってよい。

次に、上述の議論を、我々の model で行おう。我々の model space は多次元準ユークリッド空間内の超曲面であるとする。我々の model では、電荷の不変性の要請を満たさなければならない。この要請は超曲面上に不変無限小線素が存在することと等価である。このことは、前のいくつかの論文で示されている。この超曲面の選択の仕方は、いろいろ考えられるが、その選択の妥当性は実験事実に合うかどうかによって決定されるべきである。ここでは、最も簡単な場合を考えて、我々の model space は、５次元定曲率空間とし、その超曲面上に不変無限小線素

$$ds^2 = e^{(-2\xi/a)}(dt^2-dx^2)-d\xi^2, \tag{16}$$

が与えられているものとする。ここで、$t\,(=x^0)$ は時間座礁、$\boldsymbol{x}(x^1,\ x^2,\ x^3)$ は３次元空間座礁である。また、ξ は我々の model space に新しく導入された座標である。我々の model では、電荷の不変性の要請により空間が僅かに歪み、この歪が、CP violation の原因となるのである。また更に、粒子が生まれるところでは、energy の吸収がおこり、その結果、空間の曲率が complex number となり、素粒子物理における世代が生まれるのである。

我々の model space は５次元なのだから、energy momentum は５個の成分からなる。これらを $(q^0\,\boldsymbol{q}\ q^{\xi})$ で表すことにすると、我々の電荷の不変性の要請の数学的表現は

$$q^{02}-\boldsymbol{q}^2-e^{(2\xi/a)}\ (\mu^2+q^{\xi 2})=0, \tag{17}$$

で表される。ここで、素粒子の質量を

$$m^2\ =\ e^{(2\xi/a)}\mu^2, \tag{18}$$

と置くと、Eq.(17) は

$$q^{02}-\boldsymbol{q}^2-m^2=e^{(2\xi/a)}\mu^2, \tag{19}$$

とかける。さらに、Eq.(19) より

$$1/(q^{02}-\boldsymbol{q}^2-m^2)=e^{(2\xi/a)}/q^{\xi 2}, \tag{20}$$

となるが、$\Phi=e^{(2\xi/a)}/q^{\xi 2}$ とおけば

$$q^{\xi 2}\Phi=e^{(-2\xi/a)}, \tag{21}$$

となる。ここで、量子論的取り扱いをしよう、すなはち、Eq.(21) で

$$q^{\xi} \to -i\,\partial^{\,\xi}, \tag{22}$$

と置き換えれば

$$-\,\partial_{\,\xi}^{\,2}\Phi = e^{(2\xi/a)}, \tag{23}$$

を得る。Eq.(23) の解は

$$\Phi = (-)\,(a/2)^{2}\,e^{(-2\xi/a)}, \tag{24}$$

である。ここで、積分定数はすべて零と置いた。それは、それらがあると、我々の model space からはみ出してしまうからである。

発散の問題は、積分における変数の分子の次元と分母の次元との、大小関係のみで決定されるのであるから、以下、取り扱いを容易にするために、空間はユークリッド的に直しておいて、議論をすすめよう。すなわち、Eq.(19) におけるマイナス符号を、すべてプラス符号にかえて議論をしよう。また、発散の問題は、energy momentum の大きいところで考えればよいから、$m = 0$ として議論しよう。これらのことから、Eq.(19) は Eq.(24) を用いて、

$$q^{02} + \boldsymbol{q}^{2} = (a/2)^{2}\,e^{(2\xi/a)}, \tag{25}$$

と書き換えられる。Eq.(25) の $(q^{0}\,\boldsymbol{q})$ を極座標で表すと

$$\begin{aligned}
q^{0} &= (2/a)\,e^{(\xi/a)}\,c_1\,c_2\,c_3,\\
q^{1} &= (2/a)\,e^{(\xi/a)}\,c_1\,c_2\,s_3,\\
q^{2} &= (2/a)\,e^{(\xi/a)}\,c_1\,s_2 \quad ,\\
q^{3} &= (2/a)\,e^{(\xi/a)}\,s_1 \qquad ,
\end{aligned} \tag{26}$$

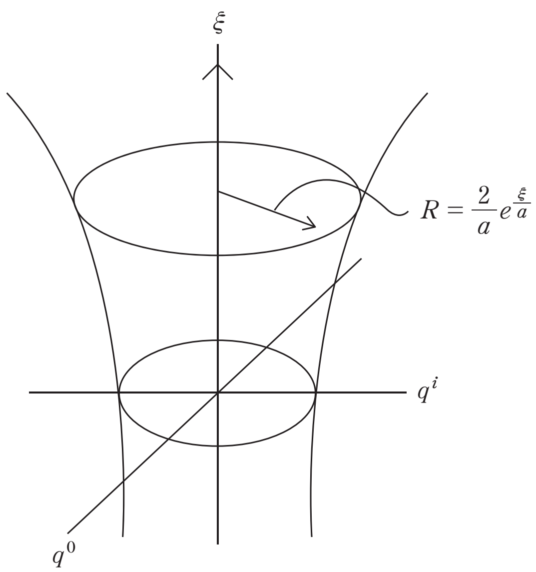

Fig.3

と書ける。仮想状態 $(q^0\,\boldsymbol{q})$ の取りうる。値の範囲は

$$0<\xi<\infty, \qquad \begin{aligned} &-\pi/2<\theta^1<\pi/2,\\ &-\pi/2<\theta^2<\pi/2,\\ &0<\theta^3<\pi, \end{aligned} \tag{27}$$

である。我々の model space における、Eq.(1) に対応する積分を、ユークリッド的に直し、以下の形

$$\Pi=\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int dq^0\,dq^1\,dq^2\,dq^3\;1/(q^{02}+\boldsymbol{q}^2)^2, \tag{28}$$

とする。Eq.(25) より、積分の変数を $(q^0\quad q^1\quad q^2\quad q^3)$ から、$(\theta^1\quad\theta^2\quad\theta^3\quad\xi)$ に変換しよう。4 次元体積は

$$\begin{aligned} dq^0\,dq^1\,dq^2\,dq^3&=\begin{vmatrix} \partial_\xi q^0 & \partial_1 q^0 & \partial_2 q^0 & \partial_3 q^0\\ \partial_\xi q^1 & \partial_1 q^1 & \partial_2 q^1 & \partial_3 q^1\\ \partial_\xi q^2 & \partial_1 q^2 & \partial_2 q^2 & \partial_3 q^2\\ \partial_\xi q^3 & \partial_1 q^3 & \partial_2 q^3 & \partial_3 q^3 \end{vmatrix}\; d\xi d\theta^1\,d\theta^2\,d\theta^3,\\ &=(-)\quad(2/a)^4\quad e^{(4\xi/a)}\quad d\xi d\Omega, \end{aligned} \tag{29}$$

ただし、

$$d\Omega=c_1^2c_2\,d\theta^1\,d\theta^2\,d\theta^3, \tag{30}$$

である。これらを Eq.(28) に代入して、Eq.(27) の範囲について積分すれば

$$\Pi=(-)(2\pi^2)(4/a)^4\int_0^\infty \xi d\xi, \tag{31}$$

となる。しかし、この積分は発散してしまう。このようにして、我々の選んだ model における metric では、Eq.(1) の積分の発散は抑えることは出来ない。

では、我々の model と類似の model で、発散を消失させることが出来るためには、どのような metric を選んだらよいであろうか。このことについて議論しよう。

ここでは、我々の model space における、不変無限小線素 Eq.(16) における metric $e^{(-2\xi/a)}$ を ξ の一般の関数 $F(\xi)$ で置き換えてみよう。model space は前に述べたように、ユークリッド的に直しておく。このようにして、我々の model space における不変無限小線素を

$$ds^2=F(dt^2+d\boldsymbol{x}^2)+d\xi^2, \tag{32}$$

とおく。これより

$$q^{02}+\boldsymbol{q}^2=(-)F^{-1}q^{\xi 2}, \tag{33}$$

および、更に、

$$1/(q^{02}+\boldsymbol{q}^2)=(-)F/q^{\xi 2}, \tag{34}$$

となる。前と同様の手法で

$$\Phi=(-)F/q^{\xi 2}, \tag{35}$$

と置き、量子化 $q^{\xi}\to -i\,\partial^{\,\xi}$ をおこなえば、Eq.(35) より

$$-\,\partial^{\,\xi 2}\Phi=F, \tag{36}$$

となる。これを積分すれば

$$\Phi=\int\int F(\xi)\,d\xi, \tag{37}$$

を得る。ここで、$\Phi=\phi^{-2}$ と置き、$(q^0\,\boldsymbol{q})$ を極座礁で表せば

$$\begin{aligned}
q^0&=\phi c_1 c_2 c_3,\\
q^1&=\phi c_1 c_2 s_3,\\
q^2&=\phi c_1 s_2,\\
q^3&=\phi s_1,
\end{aligned} \tag{38}$$

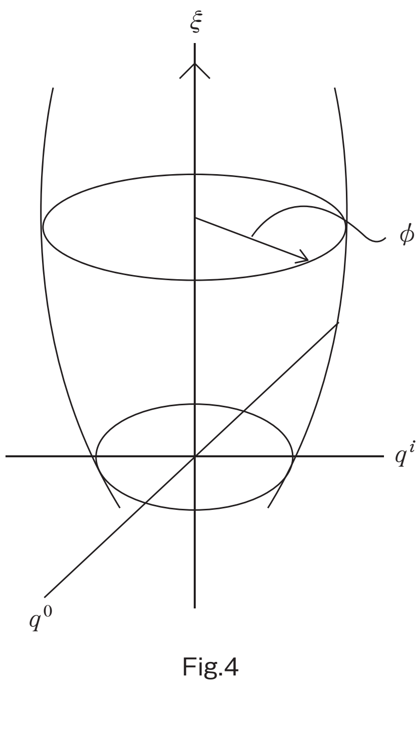

Fig.4

と書ける。これより

$$dq^0 dq^1 dq^2 dq^3 = \begin{vmatrix} \partial_\xi q^0 & \partial_1 q^0 & \partial_2 q^0 & \partial_3 q^0 \\ \partial_\xi q^1 & \partial_1 q^1 & \partial_2 q^1 & \partial_3 q^1 \\ \partial_\xi q^2 & \partial_1 q^2 & \partial_2 q^2 & \partial_3 q^2 \\ \partial_\xi q^3 & \partial_1 q^3 & \partial_2 q^3 & \partial_3 q^3 \end{vmatrix}$$

$$= (-) \quad c_1 c_2^2 \quad \phi^3(\partial_\xi \phi) \quad d\xi d\theta_1 d\theta^2 d\theta^3, \tag{39}$$

となる。したがって、Eq.(38) を用いて

$$\Pi = \int\int\int\int dq^0 dq^1 dq^2 dq^3 \quad 1/(q^{02} + \boldsymbol{q}^2)^2$$

$$= (-)2\pi^2 \int (\phi^3/\phi^4)(\partial_\xi \phi) d\xi$$

$$= (-)2\pi^2 \int \partial_\xi (\log\phi) d\xi, \tag{40}$$

となる。

これらの結果から、Eq.(32) の形の不変無限小線素をもつ model space で、積分 Π 、すなわち、Eq.(40) が収束するためには、ある実数 Ξ が存在して、

$$\xi > \Xi \text{ のとき} \quad \partial_\xi \log\phi < \xi^a \qquad a < -1, \tag{41}$$

いいかえると、Eq.(40) を積分して

$$\log\phi < \xi^{\alpha+1}/(\alpha+1) \qquad \alpha < -1, \tag{42}$$

となるような条件をみたす ξ の関数 $\phi(\xi)$ から、Eq. (37) を道して得られる F を metric にもつ model space であれば、Π は収束する。

なお、前年度の多摩研究報告 38: 47-52（2013）には誤りがありました。論文中の式、Eq.(17) は成立しません。したがって、それ以降の議論は意味がありません。それは、基本的な式、Eq.(17) を導く際に、δ 関数について、$\delta(0)\delta(0) = \delta(0)$ なる関係をつかったためです。しかし、この等式は誤りであって、成立しません。