

GARCHオプション価格付けモデルの拡張:理論 と実証分析

金, 瑠晋 / KIM, Yong-Jin

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

科学研究費助成事業 (科学研究費補助金) 研究成果報告書

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

4

(発行年 / Year)

2012-05

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月25日現在

機関番号：32675
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2009～2011
 課題番号：21530314
 研究課題名（和文）GARCHオプション価格付けモデルの拡張：理論と実証分析
 研究課題名（英文）An extension of the GARCH option pricing model: theory and empirical analysis
 研究代表者
 金 瑠晋（YONG-JIN KIM）
 法政大学・経営学部・教授
 研究者番号：80326008

研究成果の概要（和文）：本研究は、条件付き非正規分布の下での GARCH オプション価格付けモデルについて、既存の理論的成果を統合的に再構成すると共に、EGB2 分布の下での GARCH オプション価格付けモデルを取り上げ、その価格付けパフォーマンスを実証分析することを目的とする。米国の S&P500 株価指数オプションの中で、2002 年正月 2 日から 2006 年 12 月 27 日までの毎週水曜日のオプション取引データをサンプルと選び、NGARCH-EGB2 オプション価格付けモデルとベンチマークモデルである NGARCH-Normal オプション価格付けモデルとの価格付け誤差を分析した結果、前者の価格付けパフォーマンスが優れていることが確かめられた。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this paper is to recapitulate the previous theoretical achievements on the GARCH option pricing with conditional non-normality in a unified framework and provide the empirical evidence that incorporating the exponential generalized beta distribution of the second (EGB2) innovation in lieu of the normal innovation contributes to the improvement of pricing performance. We confirm the empirical relevance of the NGARCH-EGB2 option pricing model, using the S&P 500 index options data on every Wednesday from January 2, 2002 to December 27, 2006.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：経済学、財政学・金融論

キーワード：オプション価格付け、GARCH 過程、非正規分布、S&P500 株価指数オプション

1. 研究開始当初の背景

（1）かつてより金融時系列データの分散、もしくは、ボラティリティの時間変動性を表現するモデルとして GARCH 過程 (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process) がよく知られている。1980 年代初めに登場した GARCH モ

デルは、いわゆる状態空間モデルよりも比較的容易にボラティリティが推定できることから実務的にも広く使われるようになった。また、この分野の嚆矢である Robert Engle は、この業績で 2003 年度のノーベル経済学賞を受賞した。

（2）オプション価格付けの文脈で、GARCH

モデルが初めて用いられるようになったのは、Duan (1995, *Mathematical Finance*)による。つまり、GARCH オプション価格付けモデルは、計量経済学分野における GARCH モデルが世の中に登場してから約 15 年後に発表されたことになる。一般に、オプションの価格は、満期までのボラティリティ期間構造に強く依存しているため、オプション価格付けモデルにおいて、原資産のダイナミックを GARCH 過程によって記述することは、極めて自然な発想である。Duan (1995)は、原資産の対数収益率が GARCH 過程に従い、尚且つイノベーションが正規分布に従うという仮定の下で、ヨーロッパ・オプションの価格を評価するためには、リスク中立確率の下で、GARCH 過程がどのように表現されるべきかを明らかにした。

(3) Duan (1995)は、ブラック・ショールズ・モデルと統合的な経済モデルを初めて明らかにした Brennan (1979)と Rubinstein (1976)を、ボラティリティが時間変動する GARCH モデルの枠組みへ上手く移植したものとと言える。

(4) それ以降、Duan(1995)の GARCH オプション価格付けモデルを拡張する試みが積極的に行われてきた。その試みの大半は、多様なボラティリティ関数を取り入れることにより、オプションの価格付けパフォーマンスがどのくらい改善されるかを調べるものであった。

(5) もうひとつの拡張は、Duan(1995)で見られる条件付き正規分布の仮定を緩和することである。これは、多くの金融時系列データの場合、条件付き正規分布では表現できない厚い裾や非対称性を持っていることが知られているからである。本研究は、このような立場から GARCH オプション価格付けモデルに対する一つの拡張モデルを提案し、実証分析を行うことに関係している。

2. 研究の目的

(1) 本研究は、原資産の対数収益率が GARCH 過程に従い、尚且つその条件付き分布が正規分布を特殊なケースとして含む任意の連続分布に従うという仮定の下で、ヨーロッパ・オプション価格を評価するためには、リスク中立確率の下で、元の GARCH 過程がどのように再表現されるべきかを明らかにすることである。

(2) また、米国の S&P500 株価指数オプション・データを用いて実証分析を行うことに

よって、提案されたモデルの有用性を確認する。

3. 研究の方法

(1) 理論モデルの構築については、最近の研究成果を統一的にまとめる方向で行われる。本研究テーマについては、すでいくつかの論文が発表され、各々独自のアプローチが取られているように見受けられるが、各々のアプローチは密接に関係してあっているため、統一的に再構成することができる。

(2) 実証分析については、研究に着手し始めた当初は日本の株価指数オプション市場を対象にしたが、研究の途中で、実証分析対象として国際的に標準とされている米国の S&P500 株価指数オプション・データを用いることにした。まず、原資産のダイナミックに対する GARCH モデルのパラメータを推定したあと、提案されたオプション・モデルの価格付け誤差を調べるにことによってその有用性を確認する。

4. 研究成果

(1) 2004 年以降、Siu, Tong and Yang を含む一連の研究者たちは、条件付き分布が非正規分布に従うという仮定の下で、いくつかの GARCH オプション価格の評価モデルを提案した。彼らのモデルの着眼点は、結局のところ条件つきエッセンシャル変換を用いて、リスク中立確率を構成することである。本研究では、この事実を利用し、リスク中立確率の下で、元の GARCH 過程がどのように再表現されかについて詳しく述べた。

① まず、観測確率測度 P の下で、対数収益率過程を GARCH モデルとして定式化する。この際、イノベーションとして、正規分布を特殊なケースとして含む任意の連続分布を取り入れる。

② 次に、投資家の確率割引ファクターを定式化することによって、リスク中立確率測度 Q が満たすべき条件式を求めた。この定式化は、条件つきエッセンシャル変換に深く関係し、投資家の効用関数クラスを制限することを意味する。

③ 最後に、リスク中立確率測度 Q の下で、元の対数収益率に対する GARCH 過程がどのように再表現されるかを調べた。そ

の結果、イノベーションが非正規分布に従う場合は、観測確率測度 P の下での GARCH モデルと形式的には類似した表現ができるものの、正規分布のケースで見られる、観測確率測度 P とリスク中立確率測度 Q の下でのボラティリティの同値性は成り立たないことが分かった。

(2) リスク中立確率 Q の下で、対数収益率の GARCH 過程を記述するためには、各時点で対数収益率変動のリスク・プレミアムを求める必要がある。各時点においてリスク・プレミアムが満たすべき方程式は、具体的に、 $\Psi_t(v_t - 1) - \Psi_t(v_t) + \mu_t - r_t = 0$ として表現される。ここで、 $\Psi_t(\bullet)$ は、イノベーションの条件付き積率母関数の自然対数を、 μ_t は、対数収益率の条件付き平均関数を、 r_t は、無リスク金利を意味する。最後に v_t は、各時点におけるリスク・プレミアムを表す。この方程式から、明示的にリスク・プレミアムが求められるケースは、幾つかの分布に限られるが、殆どの場合、簡単な数値解析を施すことによってリスク・プレミアムを求めることができる。

(3) イノベーションの非正規性がオプション価格にもたらす影響を明示的に捉えるために、理論モデルの具体例として EGB2 分布 (Exponential Generalized Beta Distribution of the Second) を取り上げ、リスク中立確率 Q の下で、原資産の対数収益率がどのような GARCH 過程に従うかを詳しく示した。

(4) EGB2 分布は、金融時系列データでよく見られる、正規分布では表現できない非対称性や裾の厚さを記述する上で、大変優れている性質を持っているものの、GARCH オプション価格付けの文脈ではまだ取り入られていない。従って、GARCH オプション価格付けにおいて EGB2 分布の導入は、新しい試みである。GARCH モデルの定式化と推定については、次の点に注意した。

① 対数収益率の条件付き平均関数の定式化は、Duan (1995)、Christoffersen and Jacobs (2004) などに倣った。具体的に、平均関数は、 $\mu_t = r + \lambda \sigma_t - 0.5 \sigma_t^2$ で与えられる。ここで、 σ_t は、時点 t のボラ

ティリティであり、 λ は、単位ボラティリティに対するリスク・プレミアムであり、推定されるパラメータの一つである。

② ボラティリティ関数の定式化については、比較的簡潔な非線形・非対称 GARCH(1, 1) (簡単に、NGARCH(1, 1) と言う) モデルを採用した。これは、Christoffersen and Jacobs (2004) の実証分析によると、他の複雑なボラティリティ構造よりも、NGARCH(1, 1) モデルが、オプション価格付けパフォーマンスが優れているという報告があるからである。

③ 上記のような平均関数とボラティリティ関数の定式化の下で、推定されたパラメータ値は、図 1 の通りである。図 1 は、2002 年正月 2 日から 2006 年 12 月 27 日までの毎週水曜日における GARCH モデルのパラメータ推定値を表している。パラメータの推定を行う際には、各水曜日の過去 3,500 日間の S&P500 株価指数データを用いた。

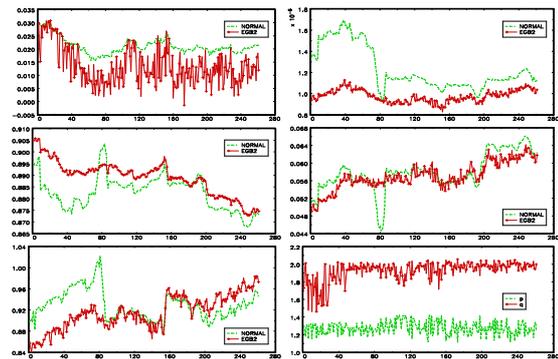


図 1 パラメータ推定値

④ 前述の通り、リスク中立確率 Q の下で、対数収益率が従うべき GARCH 過程を記述するためには、各時点におけるリスク・プレミアムを求める必要がある。しかし、EGB2 分布の下では、リスク・プレミアムを明示的に求めることは不可能であるため、二分法に基づく数値解析を用いた。次の図 2 は、EGB2 分布の下でのリスク・プレミアムを、正規分布の下でのものと比較した結果を示している。計算期間は、2002 年正月 2 日から 2006 年 12 月 27 日までの毎週水曜日である。

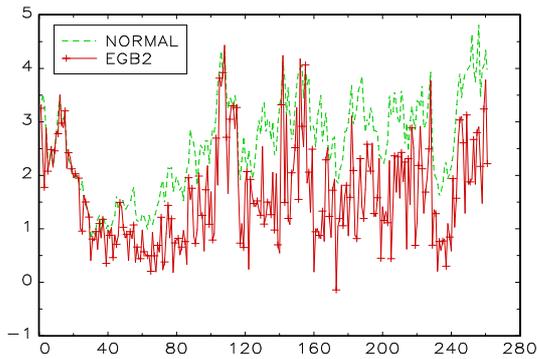


図2 リスク・プレミアムの比較

(5) 米国のS&P500 株価指数オプションを対象とした実証分析を行った結果、本研究で取り上げている GARCH-EGB2 オプション価格付けモデルが、伝統的な GARCH-Normal オプション価格付けモデルより価格付け誤差が小さい結果が出ており、前者の有用性が示された。本研究で用いたサンプルは、2002年正月2日から2006年12月27日までの毎週水曜日に取り引された、261週間のオプション・データである。オプションの取引データは、OptionMetrics より入手した。また、実証分析のための GARCH モデルは、前の項で述べた定式化によるものであり、Nonlinear GARCH(1, 1)-in-mean と呼ばれるモデルである。

(6) 毎週水曜日において GARCH モデルのパラメータの推定を行う際には、過去 3,500 日間の S&P500 株価指数データを用いた。また、この作業を 261 週に渡って繰り返した。オプションの価格データは、37,119 個（うち、コール・オプション 15,323 個、プット・オプション 21,796 個）である。オプション価格付け誤差の尺度としては、RMSE (Root Mean Square of Errors) を用いた。GARCH-EGB2 オプション価格付けモデルの RMSE が、伝統的な GARCH-Normal オプション価格付けモデルの RMSE より、すべてのサンプルの場合、7.7% 小さい結果が出た。また、本研究では、マネーネス、満期日までの期間、年度のカテゴリーで価格付けパフォーマンスを詳しく調べた。

(7) 本研究では、オプション価格付けモデルのパラメータ推定するために GARCH モデルの標準的な推定方法である最尤法を用いた。しかし、オプション価格付けの文脈では、オプションの取引データが持っている情報内容 (Informational Content) を活用するという意味で、インプライド・パラメータ・アプローチがよく採用されている。今後、この方向での実証分析を行い、より頑健な結果を示したい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金 瑠晋 (YONG-JIN KIM)

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：80326008