CIP法による2次元放射場解析の検討

YANAGAWA, Tomotaka / 佐々木, 豊 / 神崎, 壮一郎 / 辛, 承胤 / 柳川, 智隆 / 吉田, 長行 / SASAKI, Yutaka / KANZAKI, Soichiro / SHIN, Seungyun / YOSHIDA, Nagayuki

(出版者 / Publisher)
法政大学情報メディア教育研究センター
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学情報メディア教育研究センター研究報告
(巻 / Volume)
27
(開始ページ / Start Page)
73
(終了ページ / End Page)
77
(発行年 / Year)
2013
(URL)
https://doi.org/10.15002/00008995

法政大学情報メディア教育研究センター研究報告　*Vol.27*　2013 年
http://hdl.handle.net/10114/8204

CIP 法による 2 次元放射場解析の検討

Study on Analysis of 2D Radiation Field by CIP Method

佐々木豊[1)]　神﨑壮一郎[1)]　辛承胤[1)]　柳川智隆[1)]　吉田長行[2)]
Yutaka Sasaki, Soichiro Kanzaki, Seungyun Shin, Tomotaka Yanagawa, Nagayuki Yoshida

[1)] 法政大学大学院デザイン工学研究科建築学専攻
[2)] 法政大学デザイン工学部建築学科

When we analyze wave propagation, we should model the ground as if it is extended infinitely in the limited analysis region. We can make the infinite ground model by CIP method. This method is usually used to analyze sound, noise and electromagnetic field. In this research, But, we use it to model the ground motion.　We introduce polar coordinate system to get the theoretical solution more precisely. This solution is compared with the numerical results. In this paper we aim to investigate 2-dimensional radiation field by CIP method.

Keywords : Soil Analysis, Wave Transmitting Boundary, CIP Method, FEM

1．はじめに

現在，地盤の非線形特性を考慮した動的研究が行われている[1]．非線形特性を反映する方法として有限要素法による動的解析が挙げられるが，この方法では解析領域が限られてしまう．そのため，無限あるいは半無限弾性体の波動伝播問題に適用する場合には，Fig.1 のように，解析領域の内部から出てゆく放射波を完全に透過させる処理が必要である．有限な閉領域で波動の完全透過ができる境界処理法は確立されておらず，実現すれば地盤と建物の解析効率を上げることが可能となる[2][3].

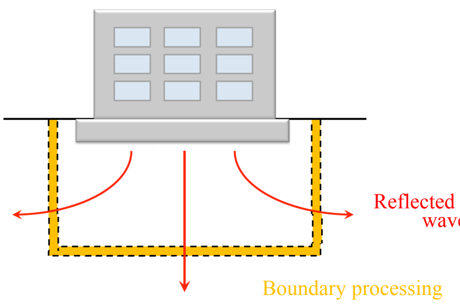


図. 1　解析領域

Fig.1 Analytical region

この境界処理法として，境界にダッシュポットを設ける粘性境界が代表的であるが，本研究では，CIP(Constrained Interpolation Profile)法を用いたより精度の高い境界処理法の確立を目指している[4][5]．CIP 法は移流方程式を解く解法である[6].

本研究では 2 次元格子モデルを用いた放射場モデルで CIP 法の透過効果を検証する．以下に本論文の解析式に用いる諸量をまとめておく.

Notation

$[M]$	: mass matrix
$[C]$	: damping matrix
$[K]$	: stiffness matrix
$\{x\}$	: displacement vector
$\{f\}$	: impulsive force vector
n	: number of division
i	: node number
$\{u\}_n$	: displacement vector in n-dimension
$\{\sigma\}_n$	: stress vector in n-dimension
$\{\varepsilon\}_n$	: strain vector in n-dimension
$[D]_n$	: stress-strain matrix in n-dimension
$[\partial]_n$	: matrix of partial differentiation

原稿受付 2013 年 3 月 9 日
発行　2013 年 6 月 30 日

2. 解析手法

CIP 法による弾性体の波動方程式

■弾性体の波動方程式

$n=(1,2,3)$ 次元の弾性体における振動方程式は, 式(1), (2)のように表される.

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\{u\}_n=[\partial]_n\{\sigma\}_n \tag{1}$$

$$\{\sigma\}_n=[D]_n\{\varepsilon\}_n=[D]_n[\partial]_n{}^T\{u\}_n \tag{2}$$

ここで式(1)を 2 次元 SH 波問題に適応させると,

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\{u\}_{2(\mathrm{SH波})}=\frac{1}{\rho}[\partial]_{2(\mathrm{SH波})}\{\sigma\}_{2(\mathrm{SH波})} \tag{3}$$

となり, 式(2)を代入した式を波動方程式と呼ぶ.
ただし

$$\{u\}_{2(\mathrm{SH波})}=u_z,\quad \{\sigma\}_{2(\mathrm{SH波})}=\begin{Bmatrix}\tau_{yz}\\ \tau_{zy}\end{Bmatrix},$$

$$[\partial]_{2(\mathrm{SH波})}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix},\quad [D]_{2(\mathrm{SH波})}=\begin{bmatrix}G & 0\\ 0 & G\end{bmatrix}$$

とする.

■波動方程式から移流方程式への変換

式(2), (3)の振動方程式は,[0]を任意のゼロマトリクス, $[I]$ を任意の単位マトリクスとおくと,

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F\}_n=[A]_n[Q]_n\{F\}_n \tag{4}$$

となる. 2 次元 SH 波問題では, 式(4)において

$$\{F\}_{2(\mathrm{SH波})}=\begin{Bmatrix}\dot{u}_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix},\quad [A]_{2(\mathrm{SH波})}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{\rho}\\ G & 0 & 0\\ 0 & G & 0\end{bmatrix},$$

$$[Q]_{2(\mathrm{SH波})}=\begin{bmatrix}[\partial]_{2(\mathrm{SH波})}{}^T & [0]\\ [0] & [\partial]_{2(\mathrm{SH波})}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}$$

とすると, $[Q]_2$ は x 方向微分と y 方向微分に分解して表現することが出来る.

$$[Q]_2=[Q_x]_2+[Q_y]_2=[q_x]_2\frac{\partial}{\partial x}+[q_y]_2\frac{\partial}{\partial y} \tag{5}$$

ただし,

$$[Q_x]_{2(\mathrm{SH波})}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}=[q_x]_{2(\mathrm{SH波})}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$[Q_y]_{2(\mathrm{SH波})}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}=[q_y]_{2(\mathrm{SH波})}\frac{\partial}{\partial y} \tag{6}$$

とする. これより, 式(4)は最終的に,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{F\}_{2(\mathrm{SH波})}&=[A]_{2(\mathrm{SH波})}[q_x]_{2(\mathrm{SH波})}\frac{\partial}{\partial x}\{F\}_{2(\mathrm{SH波})}\\ &+[A]_{2(\mathrm{SH波})}[q_y]_{2(\mathrm{SH波})}\frac{\partial}{\partial y}\{F\}_{2(\mathrm{SH波})}\end{aligned} \tag{7}$$

となる. ただし,

$$[A_x]_{2(\mathrm{SH波})}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{\rho}\\ 0 & 0 & 0\\ G & 0 & 0\end{bmatrix},[A_y]_{2(\mathrm{SH波})}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\rho} & 0\\ G & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{8}$$

とする. 次に, 式(8)の対角化を行うために, 次の固有値問題を考える.

$$\left|[A_x]_{2(\mathrm{SH波})}-\lambda[I]\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & \frac{1}{\rho}\\ 0 & -\lambda & 0\\ G & 0 & -\lambda\end{vmatrix} \tag{9}$$

$$=-\lambda^3+\frac{G}{\rho}\lambda=-\lambda\left(\lambda^2-\frac{G}{\rho}\right)=0$$

固有値は

$$\lambda=0,\pm c_s$$

となり, 対応するマトリクスは,

$$[\varphi_x]=\begin{bmatrix}c_s & -c_s & 0\\ 0 & 0 & 1\\ G & G & 0\end{bmatrix},[\varphi_x]^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{c_s} & 0 & \frac{1}{G}\\ -\frac{1}{c_s} & 0 & \frac{1}{G}\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix} \tag{10}$$

となる. 同様に,

$$\left|[A_y]_{2(\mathrm{SH波})}-\lambda[I]\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & \frac{1}{\rho}\\ 0 & -\lambda & 0\\ G & 0 & -\lambda\end{vmatrix} \tag{11}$$

$$=-\lambda^3+\frac{G}{\rho}\lambda=-\lambda\left(\lambda^2-\frac{G}{\rho}\right)=0$$

固有値は

$$\lambda = 0, \pm c_s$$

となり，対応するマトリクスは,

$$[\varphi_y] = \begin{bmatrix} c_s & -c_s & 0 \\ G & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\varphi_y]^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{c_s} & \frac{1}{G} & 0 \\ -\frac{1}{c_s} & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

となる．これより,

$$[\Lambda_x] = [\Lambda_y] = [\Lambda]_{2(\mathrm{SH波})} = \begin{bmatrix} c_s & 0 & 0 \\ 0 & -c_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

が得られる．ここで,

$$\{F\}_{2(\mathrm{SH波})} = [\varphi_x]\{f_x\}_{2(\mathrm{SH波})} \quad (14)$$

とおくと， x 方向移流方程式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f_x\}_{2(\mathrm{SH波})} = [\Lambda]_{2(\mathrm{SH波})}\frac{\partial}{\partial x}\{f_x\}_{2(\mathrm{SH波})} \quad (15)$$

ただし, $\{f_x\}_{2(\mathrm{SH波})} = \{f_{x1} \quad f_{x2} \quad f_{x3}\}^T$ とする．

同様に, $\{F\}_{2(\mathrm{SH波})} = [\varphi_y]\{f_y\}_{2(\mathrm{SH波})}$ とおくと, y方向移流方程式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f_y\}_{2(\mathrm{SH波})} = [\Lambda]_{2(\mathrm{SH波})}\frac{\partial}{\partial y}\{f_y\}_{2(\mathrm{SH波})} \quad (16)$$

ただし, $\{f_y\}_{2(\mathrm{SH波})} = \{f_{y1} \quad f_{y2} \quad f_{y3}\}^T$ とする．

以上から, 2 次元 SH 波問題における 2 組の移流方程式が導き出される．

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}f_{x1} - c_s\frac{\partial}{\partial x}f_{x1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}f_{x2} + c_s\frac{\partial}{\partial x}f_{x2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}f_{x3} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}f_{y1} - c_s\frac{\partial}{\partial y}f_{y1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}f_{y2} + c_s\frac{\partial}{\partial y}f_{y2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}f_{y3} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

また，式(8)より

$$\begin{cases} \dot{u}_z = c_s\left(f_{x1} - f_{x2}\right) \\ \tau_{yz} = f_{x3} \\ \tau_{zx} = G\left(f_{x1} + f_{x2}\right) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_z = c_s\left(f_{y1} - f_{y2}\right) \\ \tau_{yz} = G\left(f_{y1} + f_{y2}\right) \\ \tau_{zx} = f_{y3} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} f_{x1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{u}_z}{c_s} + \frac{\tau_{zx}}{G}\right) \\ f_{x2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\dot{u}_z}{c_s} + \frac{\tau_{zx}}{G}\right) \\ f_{x3} = \tau_{yz} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} f_{y1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{u}_z}{c_s} + \frac{\tau_{yz}}{G}\right) \\ f_{y2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\dot{u}_z}{c_s} + \frac{\tau_{yz}}{G}\right) \\ f_{y3} = \tau_{zx} \end{cases} \quad (22)$$

が得られる．

3．解析結果

3.1 2 次元地盤格子モデル

2 次元解析におけるモデル図と材料特性を Fig.2 と Table.1 に示す．

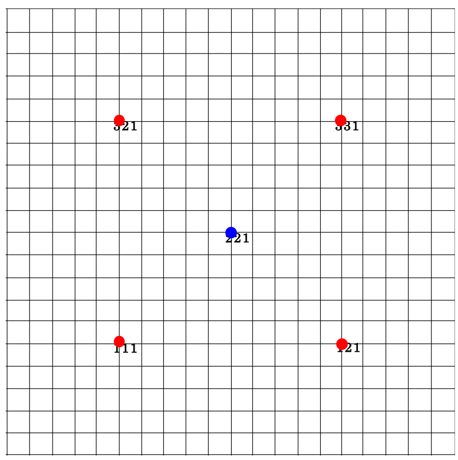


図. 2　2 次元解析地盤モデル

Fig.2 2D analytical model

Table.1 The material property (2D)

表 1　物性値（2 次元）

L_x, L_y	Length	$20m$
c_s	SH wave velocity	$120m/s$
ρ	Density	$1500kg/m^3$
t	Thickness	$1m$
υ	Poisson ratio	0.49

3.2 CIP 法による解析結果

2 次元 CIP 法における 4 質点(Fig.2 参照)の時刻歴挙動を Fig.3 に示す.

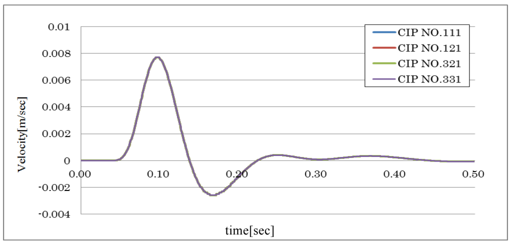
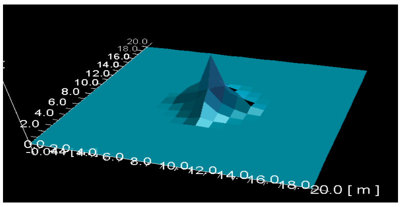


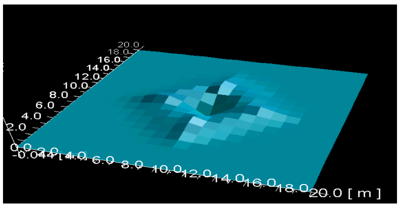
図.3　4 質点比較（2 次元 CIP）

Fig.3 Comparison of 4 nodes (2-dimensional CIP)

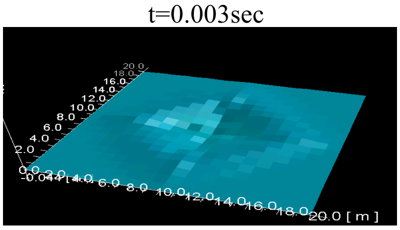
続いて，全質点の時刻歴挙動を Fig.4 に示す[7][8].



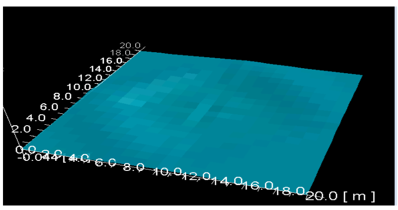
t=0.001sec



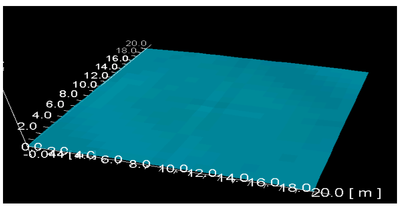
t=0.003sec



t=0.005sec



t=0.007sec



t=0.009sec

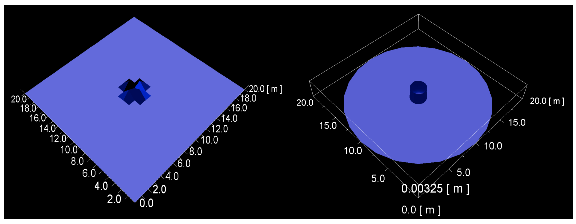
図.4　全質点速度挙動

Fig.4 Velocity behavior of all nodes

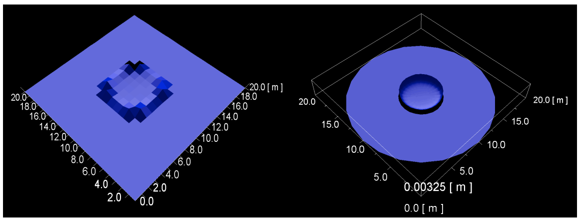
3.3 理論解

直交座標系と極座標系の理論解を Fig.5 に示す．左が直交座標系，右が極座標系の解析結果である．

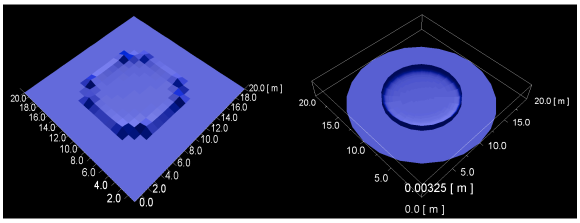
Cartesian coordinate system　　Polar system



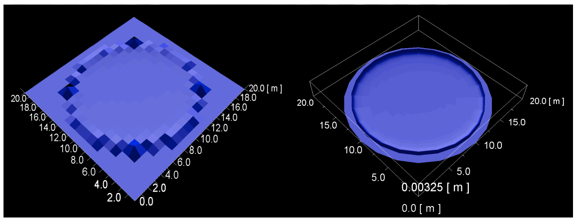
t=0.001sec



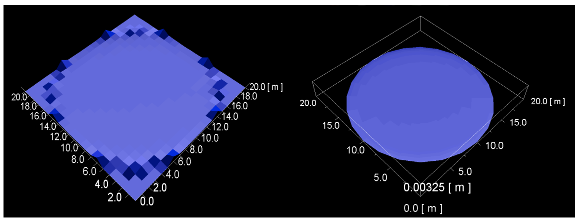
t=0.003sec



t=0.005sec



t=0.007sec



t=0.009sec

図.5　解析解（直交座標系と極座標系）

Fig.5 Analytical solution

(Cartesian coordinate system and Polar system)

直交座標系での解析解では不連続な結果となっているのに対し，Fig.5 のように極座標系での解析からは連続性のある結果を得られている．

4. 考察・結論

Fig.3 と Fig.4 より，CIP 法による解析結果は理論解の傾向をよくとらえていることがわかる．今後は分割数による精度の向上を検討する必要がある．

Appendix

インパルスを受ける 2 次元無限体 SH 波問題における，変位の理論解は以下のとおりである[9].

$$u_z(r,t) = \frac{1}{2\pi c_s}\frac{H(c_s t - r)}{\sqrt{(c_s t)^2 - r^2}}, \tag{23}$$

H : ヘビサイド関数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$

参考文献

[1]日本建築学会：入門・建物と地盤との動的相互作用，日本建築学会，1996

[2]田嶋慶介，吉田長行，"1 次元・2 次元弾性体における CIP 法による波動境界処理", 法政大学情報メディア教育研究センター研究報告 Vol.24, pp.90-96, 2011

[3]神崎壮一郎，佐々木豊，吉田長行，"CIP 法によるせん断波動場の解析", 法政大学情報メディア教育研究センター研究報告 Vol.26，pp.75-80，2012

[4]矢部，尾形，滝沢：CIP 法－原子から宇宙までを解くマルチスケール解法－，森北出版，2003

[5]矢部，尾形，滝沢：CIP 法と JAVA による CG シミュレーション，森北出版，2007

[6]寺本顕武：CIP 法に基づく 3 次元弾性波動場数値実験について，佐賀大学，2005

[7]峯村吉泰：Java によるコンピュータグラフィックス，基礎からシミュレーションの可視化まで，森北出版，2003

[8]松井文宏：RINEARN，http://www.rinearn.com/

[9]Karl F. Graff : Wave Motion in Elastic Solids，Dover，1991

