FEM-CIP法による1次元入反射場解析

YANAGAWA, Tomotaka / 神崎, 壮一郎 / 佐々木, 豊 / 辛, 承胤 / 柳川, 智隆 / 吉田, 長行 / KANZAKI, Soichiro / SASAKI, Yutaka / SHIN, Seungyun / YOSHIDA, Nagayuki

(出版者 / Publisher)
法政大学情報メディア教育研究センター
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学情報メディア教育研究センター研究報告
(巻 / Volume)
27
(開始ページ / Start Page)
68
(終了ページ / End Page)
72
(発行年 / Year)
2013
(URL)
https://doi.org/10.15002/00008994

法政大学情報メディア教育研究センター研究報告　*Vol.27*　2013 年
http://hdl.handle.net/10114/8203

FEM-CIP 法による 1 次元入反射場解析

Analysis of Incident and Reflected field by FEM and CIP Method in 1D model

神崎壮一郎 [1)]　佐々木豊 [1)]　辛承胤 [1)]　柳川智隆 [1)]　吉田長行 [2)]
Soichiro Kanzaki, Yutaka Sasaki, Seungyun Shin, Tomotaka Yanagawa, Nagayuki Yoshida

[1)] 法政大学大学院デザイン工学研究科建築学専攻
[2)] 法政大学デザイン工学部建築学科

When we analyze wave propagation, we should model the ground as if it is extended infinitely in the limited analytical region. Now we try to make infinite ground model by FEM and CIP method. CIP method is usually used to analyze sound, noise and electromagnetic field. In this research, we try to build both Incident field and Reflected field at the same time. When we can analyze both of field, it is able to chase the all the details of earthquake motion.

Keywords : Soil Analysis, Wave Transmitting Boundary, CIP Method, FEM

1. はじめに

近年，地盤の非線形な動的挙動が活発に研究されている[1]．非線形問題を扱う場合，有限要素法が有効かつ柔軟な手法であることはよく知られている．しかしながら，有限要素法は本来，有限領域を対象とする数値解析手法である．そのため，無限あるいは半無限弾性体の波動伝播問題に適用する場合には，解析領域の内部と外部に境界を設け，外部から内部へ伝わる入射波と内部から外部へ逸散する反射波の双方同時の処理が必要とされる[2][3]．

この境界処理法として，境界にダッシュポットを設ける粘性境界が代表的であるが，本研究では，CIP(Constrained Interpolation Profile)法を用いて，より精度の高い境界処理法の確立を目指している[4][5]．CIP 法は移流方程式を解く解法であり，有限要素法とは異なる分野で用いられている．そこで，如何にして有限要素法と CIP 法を組み合わせるかが焦点となる[6][7]．

本論では，1 次元棒材モデルを用いて手法の提案と検討を行っている．

以下に本論文の解析に用いる諸量をまとめておく．

Notation

$[M]$	: mass matrix
$[C]$	: damping matrix
$[K]$	: stiffness matrix
$\{x\}$	: displacement vector
$\{f\}$	: impulsive force vector(FEM)
$\{f_{1i}\}$	: impulsive force vector(Incident CIP)
$\{f_{2i}\}$	: impulsive force vector(Reflected CIP)
n	: number of division
i	: node number
$\{u\}_n$	: displacement vector in n-dimension
$\{\sigma\}_n$	: stress vector in n-dimension
$\{\varepsilon\}_n$	: strain vector in n-dimension
$[D]_n$	: stress-strain matrix in n-dimension
$[\partial]_n$	：matrix of partial differentiation

原稿受付 2013 年 3 月 9 日
発行　2013 年 6 月 30 日

2. 解析方法

2.1 マトリクス運動方程式

非比例減衰を扱う1次元棒材モデルを例に以下に示す．

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\} \tag{1}$$

ここに，

質量マトリクス要素　: $m=\rho AL/n$
剛性マトリクス要素　: $k=GAn/L$

$$[M]=\begin{bmatrix} m/2 & & & & \\ & m & & & \\ & & \text{O} & & \\ & & & m & \\ & & & & m/2 \end{bmatrix},$$

$$[C]=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \text{O} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k & -k & & & \\ -k & 2k & \text{O} & & \\ & \text{O} & \text{O} & & \\ & & & 2k & -k \\ & & & -k & k \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\{f\}=[0,\ldots,f_n]^T,\quad f_n=f_{12}+f_{22}$$

なお，後の解析では断らない限り，レイリー減衰1%を導入する．

振動方程式（式(1)）の時刻歴応答解$\{x\}$は線形加速度法により求められる．Incident CIP 法領域の右端に，任意の時刻に複数のインパルスを式(3)のように与える．

$$\left\{f_{1i}\right\}=\left[0,\ldots,f_{13}\right] \tag{3}$$

2.2 CIP 法による弾性体の波動方程式

■弾性体の波動方程式

1次元の弾性体における振動方程式は，式(4)，(5)のように表される．

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\{u\}=[\partial]\{\sigma\} \tag{4}$$

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}=[D][\partial]^T\{u\} \tag{5}$$

1次元S波問題では、式(4)，(5)は次のように書ける．

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \tag{6}$$

$$\tau_{xy}=G\frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{7}$$

■波動方程式から移流方程式への変換

式(6)，(7)は，次のように表すこともできる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F\}=[A][Q]\{F\} \tag{8}$$

1次元S波問題において，式展開を行う．

ここで，

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}\dot{u}_y \\ \tau_{xy}\end{Bmatrix},\quad [A]=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{\rho} \\ G & 0\end{bmatrix},\quad [Q]=\frac{\partial}{\partial x},$$

となる．

マトリクス$[A]$の固有値問題を考える．

$$\left|[A]-\lambda[I]\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & \dfrac{1}{\rho} \\ G & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

固有値は

$$\lambda=\pm c_s$$

となり，対応する固有マトリクスは

$$[\varphi]=\begin{bmatrix}c_s & -c_s \\ G & G\end{bmatrix},\quad [\varphi]^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{c_s} & \dfrac{1}{G} \\ -\dfrac{1}{c_s} & \dfrac{1}{G}\end{bmatrix}$$

となる．

これらを用いて式(8)を直交化すると次のような移流方程式が得られる．

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}f_1-c_s\dfrac{\partial}{\partial x}f_1=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}f_2+c_s\dfrac{\partial}{\partial x}f_2=0\end{cases} \tag{9}$$

ここで，

$$\begin{cases}\dot{u}_y=c_s\left(f_1-f_2\right) \\ \tau_{xy}=G\left(f_1+f_2\right)\end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases}f_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\dot{u}_y}{c_s}+\dfrac{\tau_{xy}}{G}\right) \\ f_2=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\dot{u}_y}{c_s}+\dfrac{\tau_{xy}}{G}\right)\end{cases} \tag{11}$$

2.3 解析手法（CIP 法の利用）

x 軸上の y 方向変位 u_y がせん断波として伝播する問題を扱う．但し，ここでは簡単のため u_y を u と標記する．なお，x 軸の正の方向に伝播する進行波には R : Reflected wave（反射波）を，負の方向に伝播する後退波には I : Incident wave（入射波）を付して区別する．また，CIP 解析と FEM 解析の各諸量にはそれぞれ上添え字 cip と fem を付して区別する CIP 領域と FEM 領域の境界における結合モデルを Fig.1 に示す．

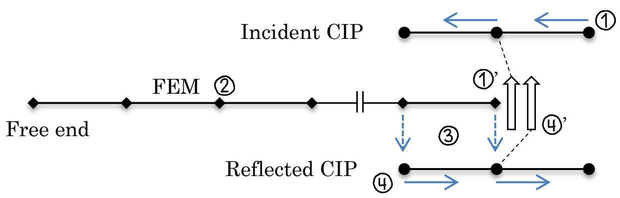


図 1　CIP-FEM モデル

Fig.1 CIP-FEM model

＜移流方程式による速度波入力法＞

■計算手順

・入射 CIP 端部節点 3 における入射移流量 $f_{13} = \dot{u}_{0I} / c_s$ （$\dot{u}_{0I}$: 入射速度）の全時刻データの作成．

・入射 CIP 全節点 $i = 1,2,3$ における入射移流量の初期化： $f_{1i}(0) = 0$

・反射 CIP 全節点 $i = 1,2,3$ における反射移流量の初期化： $f_{2i}(0) = 0$

・ FEM 全節点 $i = 1,2,\ldots,N$ の初期条件の設定： $u_i^{fem}(0) = \dot{u}_i^{fem}(0) = 0$

・ $t = 0$ とする．

① 時刻 t ：入射 CIP 端部節点 3 の入射移流量 $f_{13}(t)$ を設定

② 時刻 t の入射 CIP 全節点値を Δt 時間移流 ①：

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - c_s \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

③ FEM 境界節点 N （入射 CIP 節点 2）における応力の算定

$$\tau_{I2}^{cip}(t+\Delta t) = G f_{12}(t+\Delta t)$$

④ 時刻 t の反射 CIP 全節点値を Δt 時間移流 ④：

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + c_s \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

⑤ FEM 境界節点 N （反射 CIP 節点 2）における応力の算定

$$\tau_{R2}^{cip}(t+\Delta t) = G f_{22}(t+\Delta t)$$

⑥ FEM 線形加速度法解析②：FEM 境界節点 N に入力①’ ④’

$$[M]\{\ddot{u}^{fem}(t+\Delta t)\} + [C]\{\dot{u}^{fem}(t+\Delta t)\} + [K]\{u^{fem}(t+\Delta t)\} = \{\tau_{I2}^{cip}(t+\Delta t)\} + \{\tau_{R2}^{cip}(t+\Delta t)\}$$

⑦ 時刻 $t+\Delta t$ ：反射 CIP 節点 1 の移流量 $f_{21}(t+\Delta t)$ を算定③

$$\dot{u}_{R1}^{cip}(t+\Delta t) = \dot{u}_{N-1}^{fem}(t+\Delta t) - \dot{u}_{I1}^{cip}(t+\Delta t) = \dot{u}_{N-1}^{fem}(t+\Delta t) - c_s f_{11}(t+\Delta t),$$

$$f_{21}(t+\Delta t) = -\dot{u}_{R1}^{cip}(t+\Delta t) / c_s$$

⑧ $t+\Delta t \rightarrow t$ として①に戻る。

3. 解析結果

3.1 1 次元解析棒材モデル

1 次元解析におけるモデル図と材料特性を Fig.2 と Table.1 に示す．

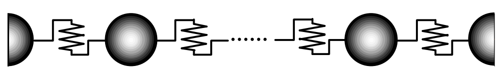


図 2　1 次元解析棒材モデル

Fig.2 1D analytical model

Table.1 The material property

表 1　物性値（1 次元）

L	Length	$100m$
c_S	S wave velocity	$120m/s$
ρ	Density	$1500kg/m^3$
A	Section area	$1m^2$
υ	Poisson ratio	0.49
G	Elastic shear modulus	$\rho c_s^2 = 2.16 \times 10^7 kg/m \cdot s^2$

3.2 1 次元棒材モデル解析結果 - S 波問題 -

本研究では三角波，矩形波，正弦波，random 波の計 4 種類の波形入力を試みた．

また，1 次元 S 波問題における，1 次元棒材モデル（Fig.2 参照）に 1 周期三角波を入力した際の時刻歴応答解析結果を示す．ここでの FEM 解析領域は質点番号 $i=1$：100， Incident CIP 及び Reflected CIP の解析領域は共に質点番号 $i=99$：101 である．質点間距離はすべて 1[m]とした．$i=101$ に入力した三角波の速度波形を Fig .3 に示す．

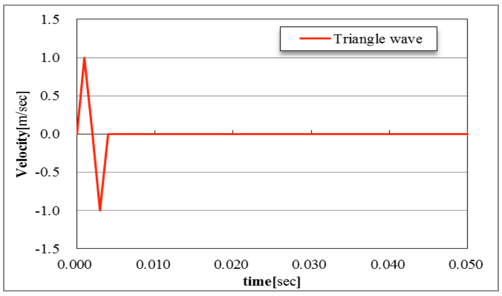


図 3　入射波モデル（三角波）

Fig.3 Incident wave model (Triangle wave)

質点 1，50，100 の時刻歴変位挙動と時刻歴速度挙動を Fig.4，5 に示す．

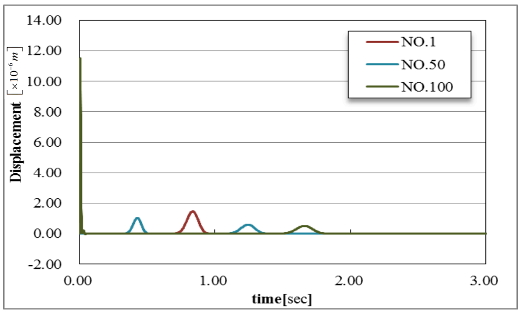


図 4　質点 1，50，100 の変位挙動

Fig.4 Displacement behavior of nodes 1,50,100

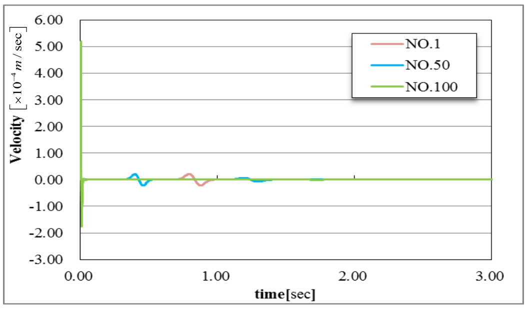
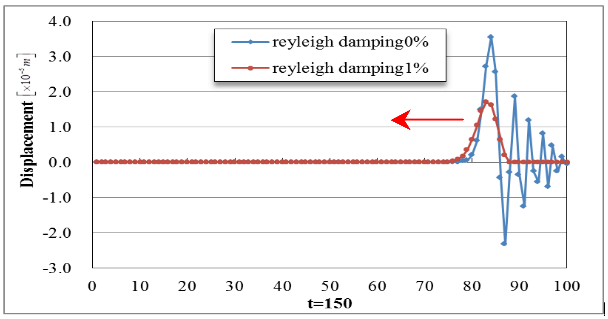


図 5　質点 1，50，100 の速度挙動

Fig.5 Velocity behavior of nodes 1,50,100

続いて，全質点の変位挙動を Fig.6 に示す．



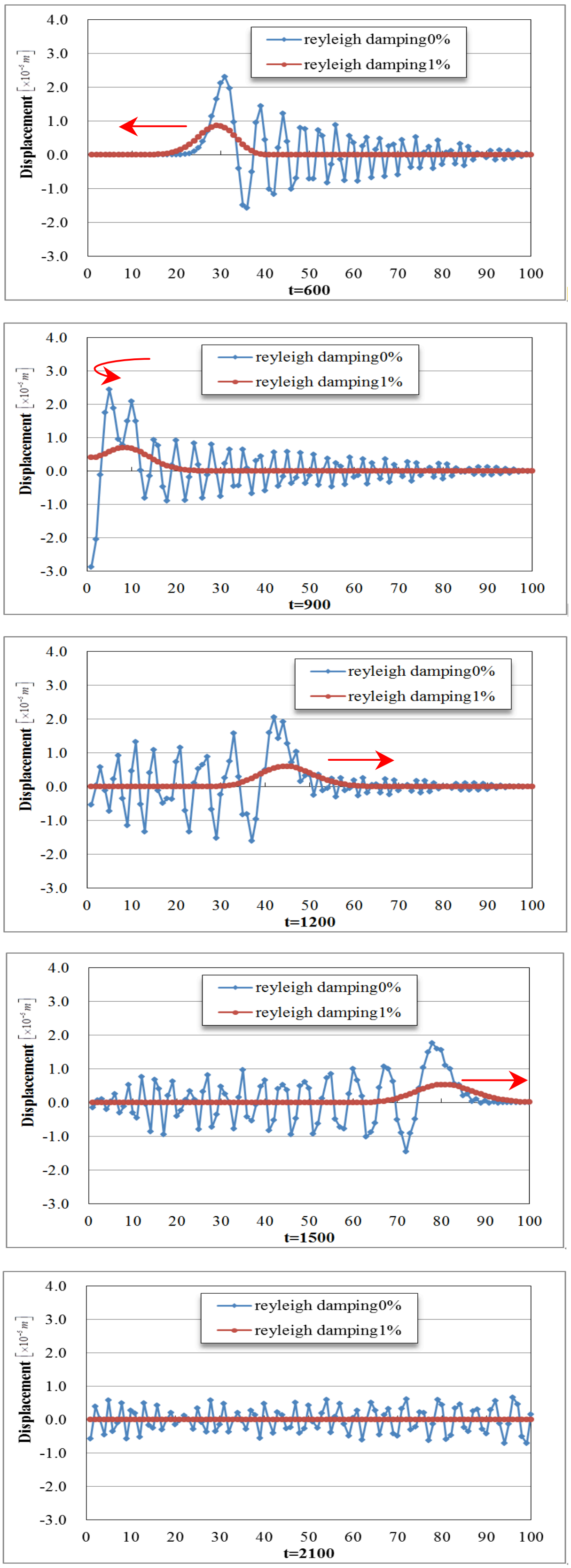


図 6　全質点変位挙動（三角波）

Fig.6 Displacement behavior of all nodes

(Triangle wave, Incident CIP+FEM+Reflected CIP)

4. 考察・結論

本論では, CIP 法と FEM を組み合わせることにより，放射場問題のみならず入反射場問題も高い精度で扱うことができることが確認できた．1 次元問題から高次元の問題へこの手法を拡張し，その有効性を確認することが今後の課題である．

参考文献

[1]日本建築学会，"入門・建物と地盤との動的相互作用"，日本建築学会，1996
[2]伊野慎二，吉田長行，"波動透過境界の最適化に関する研究", 法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.21，pp.101-108，2008
[3]古谷忍，吉田長行，"最適化手法による波動透過境界処理に関する研究", 法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.22，pp.55-61，2009
[4]矢部，尾形，滝沢，"CIP 法－原子から宇宙までを解くマルチスケール解法－"，森北出版，2003
[5]矢部，尾形，滝沢，"CIP 法と JAVA による CG シミュレーション"，森北出版，2007
[6]田嶋慶介，吉田長行，"1 次元・2 次元弾性体における CIP 法による波動境界処理", 法政大学情報メディア教育研究センター研究報告 Vol.24, pp.90-96, 2011
[7]神崎壮一郎，佐々木豊，吉田長行，"CIP 法によるせん断波動場の解析", 法政大学情報メディア教育研究センター研究報告 Vol.26，pp.75-80，2012

