経済学と数学，そしてゲーム理論

中山，幹夫 / NAKAYAMA, Mikio

(出版者 / Publisher)
法政大学経済学部学会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
経済志林 / The Hosei University Economic Review
(巻 / Volume)
63
(号 / Number)
1
(開始ページ / Start Page)
55
(終了ページ / End Page)
108
(発行年 / Year)
1995-07-30
(URL)
https://doi.org/10.15002/00008597

経済学と数学，そしてゲーム理論

中　山　幹　夫

1. はじめに

1994年のノーベル経済学賞は，ゲーム理論を経済分析の標準的方法として定着させるのに貢献した，ナッシュ，ハルサニーおよびゼルテンに与えられた。ゲーム理論自身の展開から言えば，今回の対象にはなっていない協力ゲーム，とくにコアと経済の競争均衡との関連を明らかにしたオーマン，シャプレイおよびシュービックの業績も同等の価値をもつと思われるが，確かに経済学へ与えた影響の広範さという点では，このナッシュに始まる非協力ゲームの理論には及ばない。いずれにせよ，1980年代前半から徐々に進行してきた経済分析のゲーム理論への方法論的シフトがこれで国際的に認知されたものと考えてよい。

さて，しかしながら，今回のノーベル経済学賞に対しての新聞の論評などにはこれまでのものとはやや違った批判的トーンが目立ったと感じるのはゲーム理論研究者としてのひがみのゆえであろうか？　たとえば，日経では今回の3人を小物と断じているし，読売新聞特集記事『YEN』では，伝聞調で，研究の範囲が狭いとか以前の研究の改良にすぎない，などと臆面もなく書いている。最近のノースやコース，さらにベッカーなどが受賞したときにはみられなかった論調のコメントである。これらの無知や誤りを指摘することは容易なことであるが，それよりもむしろこのようなコメントが世に出る背景を考えると，啓蒙活動に余り熱心ではなかった理論家の責任も無いとはいえない。最近になってようやくすぐれた解説論文が神

取道宏氏によって書かれたが[1]，それでも一般の経済学や物理学などに比べればゲーム理論の入門書や啓蒙書はきわめて少なく[2]，専門家以外の人々の間に無知や誤解があっても当然なのかも知れない。

そこで，本稿ではゲーム理論の経済学への貢献を平易に解説……と言いたいところであるが，それは神取氏の展望論文に譲り，ここでは視点を変えて，ゲーム理論の創始者たるフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンによる理論とナッシュによる非協力ゲームの理論，およびその周辺を数学を使わずに散策しながら，数学者が経済学やゲームの問題をどのように理論化していくのかを見てみたい。またそれによって，ゲーム理論がたんなる数学的技術ではなく思考方法そのものであること，すなわち，経済学で道具として使われる数学理論，たとえば統計理論や確率過程論，トポロジー，関数解析，測度論，等々と異なり，経済学の根幹に関わる思考体系であることも伝えたいと思う。

冒頭に述べたように，非協力ゲームの創始者はナッシュである。ゲーム理論そのものの創始者であるフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの理論では，完全な利害対立をあらわすゼロ和ゲームの理論に引き続いて結託行動（協力ゲーム）の分析が詳細に展開されており，ナッシュが行ったような非協力ゲームの考察はどこにも見られない。ナッシュの方法はきわめて自然な拡張になっているので，ノイマン自身がなぜその方向に進まなかったのかはひとつのミステリーでさえある。また，ナッシュも協力行動の理論を展開しているが，これは結託の理論ではなく，ノイマン＝モルゲンシュテルンのアプローチと著しい対照をなしている。すでに万能数学者としての誉れ高かったノイマンの方法と 22 歳にも満たない大学院生だったナッシュの理論とが対比できるということは，それだけでナッシュの天

1）神取道宏（1994）
2）Williams (1966), Davis (1970), 鈴木（1970），西山（1986），Dixit and Nalebuff (1992) などが主なものであり，多くても 10 冊を超えることはない。教科書についても 30 冊前後であろう。

才を物語るものである。このように，ノイマンとナッシュの方法を詳細に比較すること自体，科学史上の興味深いテーマである。本稿では，しかし，ゲーム理論の学説史としての厳密性は追求せずに，概念的，哲学的側面に目を向けた「案内」を試みる[3]。

2. 経済学と数学

ゲーム理論の世界に入る前に，少し経済学と数学について寄り道をしよう。今日の経済学は社会科学の中では他に例を見ないほど数学に汚染（？）された学問である。同じ数学が物理学では市民権を得た共通語であるのに対し，経済学では耳障りな方言である。「純粋」経済学者から見ると，汚染された経済学はスケールが小さく技術的で，そもそも理解できない。本もあまり書かないし，はたして奴らは経済学者といえるのか？　こんな「純粋」経済学者のかげ口が今にも聞こえてくるようである。

それにしても，一体なぜ人は数学を忌み嫌うのだろうか？　論理的な構造物であるはずなのに，どうして数学を理解しない人が多いのだろうか？フランスの大数学者アンリ・ポアンカレは，この疑問を次のように表現している。

> すべての人が必ずしも発見をなし得ないことは，何ら怪しむに足らない。すべての人が必ずしも前に学んだ証明を記憶し得ないのもなお首肯されよう。しかしながら，現に数学上の推理を説明されているその場に於てさえ，必ずしもこれが理解されないというに至っては，一考すればすこぶる驚嘆すべきことのように思われる。しかも，辛苦してわずかに理解し得る人々の方が大多数を占める。これは争うべからざる事実であって，中等学校の教師の経

---

3) ゲーム理論全般にわたる学説史的サーベイについては Aumann (1989) 参照。

> 験は必ずわたくしの言にそむかないに相違ない。（アンリ・ポアンカレ，『科学と方法』吉田洋一訳，岩波文庫，1953年）

中等学校の教師どころか大学の教師の経験にさえそむかないのであるが，これに対してポアンカレは次のように述べている。

> 数学の証明は単に推論式をならべたのみではない。ある一定の順序に配列された推論式であって，その各要素の順序は，その要素たる推論式そのものより遥に重要なのである。もし，わたくしがこの順序についての感じ，いわば直覚ともいうべきものをもっていて，一目の下に推理全体をみとめ得るならば，その要素のひとつを忘れることを憂える必要はない。どの要素も，みずからそのために設けられた梱の中にはいって来て，しかもわたくしが何等記憶の力を用いる必要はなくて済むのである。（前掲書，p.54）

さらに続けて『隠れた調和と関係とをわれわれに洞察せしめる数学上の秩序に対するこの感じ，この直覚は，必ずしもすべての人のもつところではない』と述べ，数学が理解されない理由をこのセンスの欠如に帰している。記憶力の問題でもなければ計算力の問題でもなく，さらには推論能力の問題でさえないのである。

好むと好まざるとにかかわらず，すでに数学的方法が経済学の中に入り込んでいるということは，経済学そのものの中にこの数学的センスと共鳴する構造が存在していることを意味する。ワルラスのなしえなかった競争均衡の存在問題はもちろんのこと，クールノーやエッジワース，さらにアダム・スミス[4]やケネーに遡ってさえもその萌芽を見い出すことは不可能ではない。経済学はもともと数学的構造をはらんだものとして誕生してい

4）私利私欲の追及が社会の調和を生み出すという命題はけっして自明ではない。

たのである。

さて，ここにもう一人，無視できない人物がいる。ケインズである。量子力学の創始者たるマックス・プランクがケインズに「経済学は自分にとって難しすぎたので経済学をあきらめた」と語ったことにふれて[5)]，ケインズは次のように述べている。

> ……最高の形態における経済学的解釈にとって必要な，論理と直観の混合ならびにその大部分が正確でない事実の広範な知識は，まったくたしかに，きわめて正確に認知しうるような比較的単純な事実の意味内容や先行条件を想像しかつその究極点にまで追及する力，という点に主な天分をもつ人々にとっては，非常に困難なことである。（都留重人，『近代経済学の群像―人とその学説』日経新書，p.155，1973 年）

正直言って，私にはこの文章を理解することができない。とくに，後半で述べられているような天分を持つ人々にとってなぜ論理と直観の混合が非常に困難なのだろうか。直観を欠いた論理とは「石頭」の論理である。まさか，プランクは石頭だと言っているのではあるまい。当時の経済学が依然として社会思想と不可分であったのならば，なるほど論理と文学的なインスピレーションとを絶妙にミックスしてはじめてその経済学的解釈なるものができあがるのであると言えるかも知れない。しかし，すでにマーシャルの経済学が世に出た後のことであり，経済学は科学としていわゆる政治経済学とたもとを分かち始めていたはずである。にもかかわらずケインズはさらに，次のようにも述べている。

> 経済学の巨匠は，いろいろな天賦の才能のまれにみる結合をもた

5) Samuelson (1989) によると，Russell はそれを聞いて次のように語ったという：‘That’s funny. I quit economics because it was too easy’.

> なければならない……（中略）……かれは，ある程度において，数学者であり，歴史家であり，経世家であり，哲学者でなければならない……（中略）……かれは，気分的には好き嫌いがありながら，しかも同時に公平でなければならず，芸術家のごとく超然として高潔に，しかも時には政治家のごとくに地上に近くあらねばならない。（都留重人，前掲書 p.16）

ケインズという人物にふさわしく，すさまじい自信である。あるいはマーシャルを誉めたたえるための言葉だったのかも知れないが，謹厳実直なプランクが経済学を敬遠したのは，まことにもって正解だったと言わなければならない。もし経済学が真にこのような「巨匠」の導きのみを必要とするものであったとしたら，どのような学問になっていただろうか？

そもそも，経済学における解釈の多義性と『その大部分が正確でない事実』こそ，経済学の，科学への飛躍を阻む元凶である。ケインズの言葉とは裏腹に，ケインズについて何も知るはずのない数学者達，とくにフォン・ノイマンやアブラハム・ウォルドなどが，方法論的個人主義を身につけたオーストリア学派の経済学者モルゲンシュテルンの影響もあって経済学に関心をもったのは，経済学にとって全く幸運だったと言うべきである。ワルラス以来，未解決であった競争均衡の存在問題に歴史上はじめて厳密な考察が施されたばかりでなく，彼らの貢献こそがナッシュやシャプレイ，さらにアローやドゥブルーなどの若い優秀な数学者達の興味・関心を惹起したのである。このような数学者達の参入による「経済学の科学化」というプロセスを経なかったならば，経済学はいつまでたっても凡人の介入を許さぬ天上の垂訓であったであろう。

3. ノイマン＝モルゲンシュテルンの理論

ジョン・フォン・ノイマンについて語ることは，20 世紀の科学につい

て語ることに等しい[6]。公理的集合論，量子力学と観測の問題の数学的基礎，プログラム内蔵方式計算機，さらにDNAの自己複製メカニズムの数学的モデルともいえる自己増殖オートマトンの理論など，思いつくものだけをあげてもそれぞれ数学基礎論，物理学，コンピュータ科学，生物学の，今世紀の発展を方向づける基礎を築いた仕事である。これに，経済の均衡成長の存在証明とゲーム理論を通じての経済学への貢献が加わる。数学者としてはめずらしく絶大な記憶力と計算力をもっており，語学と歴史にもすぐれた才能を示したことが知られている。さらに，悪名高いマンハッタン計画や軍関係の委員会での仕事ぶりをみると，ノイマンこそケインズが自分と同一視した経済学の巨匠の資格を備えた人物であるとさえ言える。

オスカー・モルゲンシュテルンについては，鈴木光男（1994）に詳しい紹介がある。この中で鈴木は，モルゲンシュテルンの初期の著作や論文にはゲーム理論の根本問題である，相手の行動の予見という発想がすでにみられることを指摘している。とくに興味深いのは，『完全予見と経済均衡』という報告をK.メンガーのコロキウムで行ったときに，その問題はノイマンがミニマックス定理の論文（1928年）で扱った問題と同じものであることを，位相数学の大家であるチェックが指摘したというくだりである。相手の行動の予見の終わりなき無限の連鎖を断ち切るための不完全予見，これがモルゲンシュテルンの発想であって，これはまさに，ノイマンのミニマックス定理に不可欠なゲームの混合戦略の概念につながるものである。このモルゲンシュテルンの報告は彼自身の1928年の論文に基づいており，混合戦略の概念は奇しくも同じ年に世にでたということができる。また，もうひとつ重要なことは，このセミナーの主催者K.メンガーは数学者で，ゲーデルやウォルドをはじめとして当時の優れた数学者達が出入りしており，論理実証主義の影響もあって，モルゲンシュテルンの数

---

6) Ulam, Kuhn, Tucker and Shannon (1968), Dore, Chakravarty and Goodwin (1989), 鈴木（1994）など。また，Mirowski (1992) は，ヒルベルトの形式主義，量子力学およびチューリングの計算理論がフォン・ノイマンのゲーム理論に影響を与えていることを指摘している。

学と数学的方法に対する感受性がここで培われたということである。

さて，このように共通の問題意識をもった経済学者と数学者が，大陸でのナチの台頭にともない相次いでプリンストンに移住したあと共同研究を始め，それが大著，Theory of Games and Economic Behavior となって結実するわけである。この共同研究の歴史家的なサーベイについては鈴木（1994）または Weintraub（1992）に詳しい。この大著には，大きくわけて，2 人ゼロ和ゲームの理論，効用理論および n 人協力ゲームの理論が展開されている。これらに先立つ長い序論では，当時の経済学が物理学と対比して概念的にも方法論的にも未熟な学問であること，とくに相互連関的な意思決定＝ゲームという視点が欠落していること，さらにこれを扱うには概念的にも数学的にも新しい方法が必要であり，またこの方法は人間の経済や社会における集団行動の分析に新たな光をあてる可能性をもっていることなどが，大陸調の文体で哲学的に論じられている。また，この序論は全体の予備的サーベイにもなっており，完結した論文としても読める部分である。以下では，まず，このノイマン＝モルゲンシュテルン理論を構成する効用理論，2 人ゼロ和ゲームおよび n 人協力ゲームの理論を概観して，その後，ナッシュの理論にとりかかろう。

3.1　効用理論

効用という言葉は，経済学では日常の用法とは異なる意味をもった専門用語である。『消費者は予算制約のもとで効用を最大化する』というとき，それは『消費者は予算制約のもとで自分にとって最も好ましい消費計画を選ぶ』という意味である。この『最も好ましい』という判断ができるためには，消費者は自分の好みについて正確に知っており，どんな選択肢 A と B が与えられても，どちらを好むのか，あるいは無差別なのかの判断ができなければならない。この好みの判断基準を「選好順序」という。合理的な人間は自分の選好順序にしたがって選択肢を比較する。このとき，もし，より好ましい選択肢にはより大きい値を対応させる評価尺度があっ

たならば，2つの選択肢の比較とはその評価尺度による2つの値の大きさの比較を意味する。このように，選好順序を数値の大小の順序に変換する評価尺度のことを（**序数的**）**効用関数**という。

この説明からわかるように，効用という概念は選好順序の別表現であって，人間の満足感や苦痛の程度を測る量ではない。しかし，このことを肝に銘じてさえおけば，事実上，満足の尺度とみなしてもよい。ワルラスやジェボンズの効用理論では，効用とは実質的なもので少なくとも理論展開の上では測定可能な量として扱われている。しかし，激しい批判にさらされたワルラスは，興味深いことに，ポアンカレに助言を求める手紙を書いた[7]。ポアンカレの返事は要約すると，効用は測定可能ではなく，**満足の増大にともなって増大する任意の関数で定義しうるもの**であること，さらに，**個人間での比較は無意味である**，という今日からみてもまったく正しい見解を述べたものであった。ポアンカレは，それゆえ，序数的効用に対する正しい考察を行った，記録に残るかぎりの歴史上最初の人物ということになる。

しかし，この序数的効用概念も，確率1/2でAを選択し確率1/2でBを選択するというように，選択行動が不確実性を含む場合には無力である。ノイマン自身はすでにミニマックス定理において，このように戦略を確率的に選ぶという混合戦略の概念を定式化し，期待効用の計算をしているが，この計算を経済学的に基礎づけるためにも整合的な効用理論が必要であった。期待効用の概念自体は，Daniel Bernoulli（1700−1783）によってすでに使われてはいたが，問題はその期待効用を正当化するための根拠である。ノイマン＝モルゲンシュテルンはこの問題を公理的方法によって処理した。公理的方法とは，ユークリッドの幾何学の公理で知られるように，一組の自明な仮定を公理系として先験的に与えて推論の出発点とする方法である。ノイマンはすでにこの方法を集合論に対して採用し，

7）安井，福岡（1977）

公理的集合論を構築している。今回は「公理的効用理論」であるから，仮定される公理系は人間の合理的選択行動という観点からして自明な内容をもったものでなければならない。モルゲンシュテルンはノイマンがこの仕事を驚くべきことにわずか2時間で完成したことを書き残している[8)]。こうして，経済学における最初の公理的方法による理論―NM効用理論―が生まれた。

NM効用は，予定どおり，リスクを含む選択肢をその期待効用で評価する。つまり，選択肢αが確率1/2でA，1/2でBという選択をあらわすとき，αの効用は（1/2）×（Aの効用）+（1/2）×（Bの効用）であたえられる。これを期待効用原理という。これを可能にしているのは，『くじの中にくじを含むくじは，合成された単一のくじと同等である』ことを述べる公理である。それゆえ，この公理を受け入れない人は当然，期待効用の概念も受け入れないことになる[9)]。公理的方法が優れているのは，このように問題点の明確な指摘を可能にするということであり，事実，この公理の妥当性をめぐって多くの実験，研究がなされている。いずれにせよ，今日にいたるまで，ゲーム理論においても不確実性や情報の経済学においてもNM効用は事実上唯一の効用概念である。

3.2　ゼロ和2人ゲームとミニマックス定理

(1)　戦略の概念

理論体系としてのゲーム理論はゼロ和2人ゲームからはじまる。歴史的にはノイマンよりはやく，数学者のツェルメロが1912年にチェスの数学的分析を行っている[10)]。現代の用語で言えば，『有限な完全情報ゼロ和2人ゲームには純粋戦略での均衡が存在する』こと，すなわち，チェスにおいてはゲームを引き分けで終わらせる戦略が存在することを証明した。実

8）Weintraub (1992) p.87.

9）たとえば，不確実な結果より確実な結果のほうがいいとつねに思う人は理論的にはNM効用理論を否定しているのである。

10）Zermelo (1912).

際にそういう戦略を構成したわけではないので，このツェルメロの定理は実用性に訴えるものではない。しかし，この，経験的には自明と思われることにも証明が必要であることを直観する能力，これが数学的センス，とくにツェルメロのように基礎論で有名な業績を残す数学者に必要なセンスであろう。

チェスや将棋，あるいは碁などのゲームが**有限**であるというのは，各手番でとりうる手は有限個しかなく，またゲームは有限回のステップで終わるからである。また，**完全情報**とは，各手番においてそれまでのゲームの実際の展開がどのプレイヤーにも明らかになっていることをいう。このようなゲームでは，**後ろ向き帰納法**といって，ゲームを逆向きに解いていくことが，少なくとも原理的に可能である。有限のステップで終わるので，最後の手番も有限個の種類しかない。このひとつ一つの最後の手番でのベストチョイスをまず決める。次に，これらの最後の手番の一つ前の手番で，相手の最適反応が決まる。次に，さらに一つ前の手番で自分の最適反応が決まり，以下，同様にして最初の手番でのベストチョイスを決めることができる。ただし，この方法を適用して実際にチェスの最適戦略を求めた人はおらず，したがって，このようにして決まる最適戦略が勝ちをもたらすのか引き分けなのかは知られていない。ここで**戦略**とは，各手番でどういう手をとるかをあらかじめ指定しておく**計画**のことであって，各手番での個々の選択のことではない。上で述べたように有限な完全情報ゲームでは後ろ向き帰納法で戦略を決定することができる。戦略を選ぶということは，相手が各手番でどんな手をとってもそれに対応する手はあらかじめ決定してあり，それを実行していくことによりゲームは進行し，終了するということである。もちろん，実際のゲームはつねにこのように進行するわけではないが，形式的分析のために戦略という**概念**をこのように定式化するのである。

この戦略という概念はゲームが完全情報でない場合にも適用可能であり，そして，むしろこれが通常の場合である。ジャンケンのように，同時

に選択する手番がある場合，ゲームは完全情報にはならない。しかし，そこでの自分の選択をあらかじめ指定しておくことは，もちろん可能である。このように，戦略の概念ひとつをとってみても，経済学での消費者の消費計画などと比較して，人間の合理的行動というものを分析するためのきわめて自然な概念であることがわかる。

(2) ミニマックス定理

有限ゲームでは戦略の数はもちろん有限個である。2 人のプレイヤーが同時に自分の戦略をひとつ選べばゲームの結果が決まり，対応する NM 効用＝利得を獲得する。たとえば，チェスでは，勝ちは +1 負けは −1，引き分けは 0 というように与えることができる。このように，戦略のどんな組み合わせにも，和がゼロになるような利得の組が対応するゲームをゼロ和 2 人ゲームという。ノイマンの有名なミニマックス定理は，以下に説明する意味で，ゼロ和 2 人ゲームは確定することを述べるものである。

いま，ゼロ和ゲームであるから，プレイヤー 1 は利得の最大化をめざし，プレイヤー 2 は損失の最小化をめざすとしよう。ゲームにおいては，相手の戦略が決まらないかぎり自分の利得も決まらないから，最大化をめざすといっても消費者の最大化行動のようなわけにはいかない。相手がどんな戦略を選んでも確実に獲得できる利得とは何か，と考える必要がある。プレイヤー 1 の戦略に対して，相手がどのような戦略をとっても確実に獲得できる利得をその戦略の**利得の保証水準**という。この利得の保証水準に注目し，それが最大となる戦略を選ぶというのがプレイヤー 1 の合理的な行動である。この戦略を**マックスミニ戦略**といい，そのときの利得の保証水準を**マックスミニ値**という。同様に，プレイヤー 2 の戦略に対して，相手がどのような戦略をとってもそれ以上大きくはならない損失額をその戦略の**損失の保証水準**といい，この損失の保証水準をできるだけ小さくする戦略を**ミニマックス戦略**，そのときの損失の保証水準を**ミニマックス値**という。一般には，これらの保証水準には

利得の保証水準の最大値 ≤ 損失の保証水準の最小値

という関係が成立している。どんな場合でも確実に獲得できる利得の値が，どんな場合でも確実に押さえ込むことのできる損失の額を上回ることは，ゼロ和ゲームではありえないからである（もし，上回れば「矛盾」の語源と同じ事態が生じる）。上の不等式でとくに等号が成立する場合，ノイマンはそのゲームは確定すると定義し，その値をゲームの値とよんだ。ゲームが確定するならば両プレイヤーの合理的行動はこれ以上改善できない共通の値をもたらすという意味で互いに最適である。しかし，ゲームが確定するとはかぎらないことはジャンケンを考えると明らかである。グー，チョキ，パーのどの戦略についても利得の保証水準は −1，損失の保証水準は 1 なので上の不等式の等号は成立しない。成立するゲームはむしろ例外である。ノイマンは天才にふさわしく，戦略の概念を拡張することによってこの問題を解決した。**混合戦略**の導入である[11)]。

上の不等式で等号が成立しない場合，ジャンケンを考えればわかるように，両プレイヤーの相手の行動についての推論は堂々巡りを繰り返す。ノイマン＝モルゲンシュテルンの大著には，モルゲンシュテルンによる「シャーロックホームズ物語」が述べられており，追跡するモリアティと逃げるホームズの互いの行動の推測が無限の連鎖に陥る有様が記述されている。混合戦略とは，この推測を無意味にするために，戦略の選択を偶然機構に委ねるという考えである[12)]。たとえば，ジャンケンでは 3 通りの戦

11）ボレル集合で有名な確率論の大家，ボレルはすでに 1921 年に等号が成立するいくつかのゲームを考察し，混合戦略の概念を導入しているが，ミニマックス定理のような一般的な結果は得ていない（鈴木編（1973）参照）。後で，数学者のフレッシェがエコノメトリカ誌上でボレルの優先権を主張したが，ノイマンは数学的にはミニマックス定理が証明されなければ価値はないと答えている。Freshet (1953) および von Neumann (1953) 参照。

12）実際，自分の最適混合戦略で正の確率で用いられる戦略はどれも同じ期待利得を発生する。それゆえ，自分に関するかぎりこれらの戦略のうちどれを用いてもかまわないが，相手に推論させないためには確率的に選択をしなければならないのである。

略，グー，チョキ，パーがあるが，グーを 1/6，チョキを 2/6，パーを 3/6 の確率で選ぶというのがひとつの混合戦略である。これに対し，もとの各戦略，グー，チョキ，パーを**純粋戦略**という。ミニマックス定理はこの混合戦略という土俵の上で証明された。

ミニマックス定理　すべての有限ゼロ和 2 人ゲームは確定する。

この定理は，不動点定理によるノイマンのオリジナルな証明のほかに凸集合の分離定理や代数的証明など多くの別証明を生み，さらに線形計画法などとの構造的関連をつうじて数学やオペレーションズ・リサーチに大きい影響を与えることになった。また，この定理とその背景にあるマックスミニ戦略の概念は，ノイマン＝モルゲンシュテルンの協力ゲームの理論において基礎的な役割をはたしている。

3.3　協力ゲームの理論（NM 理論）

ノイマン＝モルゲンシュテルンの大著は，その 2/3 以上のページを結託を許す n 人協力ゲームの理論の分析に捧げている。また，その長い序論においても協力ゲームの予備的考察にかなりのページをさいていることからも，彼らがいかにこの協力ゲームに力を注いでいたかがわかる。実際，経済学を含む科学の歴史において，人間の協力行動についての本格的な数学的分析は彼らの研究をもって嚆矢とする。しかし，当初の期待とは裏腹に n 人協力ゲームの理論はプリンストンにおいてでさえ経済学者の側からはほとんど歓迎されなかった。シュービックは経済学者のボーモルが NM 理論で用いられている譲渡可能効用に疑問をもっていること，また，ヴァイナーは，チェスさえ解けない理論がそれよりはるかに難しい経済の問題に何の役に立つのだ，とよく言っていたことを述べている[13]。興味深いのは，同じプリンストンでも数学科では，大学院生や若い数学者達がこ

13）Shubik (1992).

の新しい理論の展開に身をもって参加していたことである。何事にもひとこと言わずにはおれない経済学者と，ぐずぐず言うよりは新しいアイディアを求め，新しい結果を出すことに価値をおく数学者の違いがあらわれている。

今日の経済学においても，NM 理論はナッシュによる非協力ゲームほど広範に普及しているわけではない。その理由は，私見によれば，NM 理論では人間の協力行動はひとつの公理のようなものであり，それを受け入れることから出発しているからである。協力行動といっても，それは合理的主体が自分の利益のためにとる行動であり，それゆえに，人間の経済活動の多くの局面でみられる行動ではあるが，新古典派以来の経済学の主要な分析対象ではなかった。しかし，協力行動を前提とすることが自然であるような場面に対しては，きわめて実りの多い研究を生み出してきた。たとえば，NM 理論の解概念から派生するコアによる，エッジワースの契約曲線の再定式化とそれを通じてのコアの競争均衡への収斂[14]，シャプレイ＝シュービックの一連の市場ゲームの研究[15]，オーマンによる連続無限人からなる純粋交換経済でのコアと競争均衡の一致定理[16] などがその代表的なものである。その他，様々な解概念の定式化[17] とその経済学への応用，効用の譲渡可能性の仮定をはずした NM 理論の拡張など，NM 理論がその後の研究に与えた影響ははかり知れない。ここでは，その NM 理論の骨格である結託と安定集合について概観してみよう。

(1) 2人ゲームから n 人ゲームへ

ノイマン＝モルゲンシュテルンの大著を特徴づけるひとつの要素は，用いられている数学の当時としての斬新さである。微分演算にかわって，凸集合論や組み合わせ論的な議論がみられ，これも経済学者に敬遠された原

14) Shubik (1959), Debreu and Scarf (1963).
15) たとえば，Shapley and Shubik (1969a) など。
16) Aumann (1964).
17) 最も有名で応用も多いのは，Shapley (1953) による value の概念である。

因であろう。組み合わせ論的な傾向のひとつは与えられた有限集合の部分集合を考えるところに由来している。この与えられた有限集合とはプレイヤーの集合であり，その部分集合とは結託（＝提携）を意味する。ゼロ和2人ゲームの後を受けてNM理論では，プレイヤーの数が3人以上となる場合の基本概念である結託の考察から出発している。今日からみれば，2人ゲームでもゼロ和でない場合の分析や3人以上でも結託のない理論になぜ進まなかったのかという疑問が生じる。事実ナッシュはこの方向に理論を展開し，それが今日，経済学で広く受け入れられていることを考えると不思議な感じさえする。実は，それに対する解答のヒントが次のシュービックの記憶の中にある：

> ...I recall suggesting that I thought that Nash's noncooperative equilibrium solution theory might be of considerable value in applications to economics. He indicated that he did not particularly like the Nash solution and that a cooperative theory made more social sense....(Shubik (1992))

ノイマンは，結託行動の考察から出発するNM理論はより社会的な意味内容をもった理論であると考えており，この社会的文脈に強い関心をもっていたのである。確かに，NM理論では結託を形成して自分達に有利な方向に結果を導くという行動が基礎になっていて，結論を先取りして言うならば，このような行動がたとえば1人のプレイヤーを差別し，残りのプレイヤーで利益を好きなように分割するという人間社会での差別的行動形態を社会的に安定な結果（＝解）として説明するということさえ可能なのである[18)]。

さて，プレイヤーの有限集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$ とし，結託を N の部

18）定和3人ゲームには実際このような差別解が存在することがNM理論で示されている。

分集合 S であらわす。結託の形成にあたって，参加メンバーは**拘束力をもつ協定**を取り決めることができるという仮定が置かれる。この仮定のもとに結託 S は各メンバーの戦略を調整し，一致して行動することができる。さらに，このとき，必要ならば各メンバーは互いに利得，損失を補償しあうことができるという，**効用の譲渡可能性**も仮定される。この2つの仮定は両刃の剣であって，これによってモデルを簡潔にすることができる反面，経済学者にとっては NM 理論をにわかに受け入れがたいものにする原因ともなっている。ともかく，この2つの仮定によって，結託 S は S のメンバーでないプレイヤー達の行動の如何にかかわらず独力で獲得可能な利得＝マックスミニ値を獲得することができる。この値を $v(S)$ としよう。結託 S の形成にともない，残りのプレイヤー達が対抗して結託 N-S を形成し，S と N-S が一定値 c を争う定和2人ゲームをプレイするというのが NM 理論の協力 n 人ゲームのシナリオである。定和ゲームとゼロ和ゲームには本質的な違いはなく，NM 効用の原点が異なるだけである。それゆえ，$v(S)$ はミニマックス定理によって存在が保証されているマックスミニ値（＝ミニマックス値）である。結託 $S=N$ については，対抗すべき相手が存在せず，定和の定義から自動的に $v(N)=c$ である。また，$S=$ 空集合 ϕ については，つねに $v(\phi)=0$ としておく。こうして，すべての結託 S について値 $v(S)$ が対応し，組 (N, v) で協力 n 人ゲームが完全に記述される。この関数 v を**特性関数**という。

このように，NM 理論における協力 n 人ゲームのモデルは，定和という制約だけをみても経済学的には確かにありふれた状況であるとは言い難い。しかし，このモデルは直接の応用のためのものであるよりは，協力ゲームの基本モデルともいうべきものである。実際，後でこの定和という制約ははずされることになる。定和の条件がきわめて自然にみたされる状況のひとつは，多数決ルールによる社会的意思決定である。N を投票者の全体（＝奇数）とすると，結託 S が多数派であるとは，S の人数 $|S|$ が $n/2$ より大きいことである。S が多数派ならば N-S は必然的に多数派で

はない。それゆえ，多数派は投票に勝利し，+1 の利得を得，少数派は負けるので 0 の利得を対応させると，

$$v(S) = 1 \quad \text{if } |S| > n/2$$
$$\phantom{v(S) = {}} 0 \quad \text{if } |S| < n/2$$

で与えられる (N, v) が多数決ルールを記述する。このようなゲームのクラスを NM 理論では**単純ゲーム**とよんで立ち入った分析を施している。さらに，この単純ゲームは後年シャプレイ＝シュービックによって，投票力指数を求める研究に用いられた[19]。

NM 理論における**非定和協力ゲーム**とは，たんに特性関数 v が S のマックスミニ値を与えるような (N, v) のことである。それゆえ，非定和ゲームでは S と N-S の戦略が均衡するとはかぎらないことが理論上の弱点であるが，経済学への応用にはむしろこの方が都合がよい。さらに，定和の制約から解放されたことによって，以後の数学的な理論展開においても，協力 n 人ゲーム (N, v) とは，たんに **$v(\phi) = 0$ をみたす 2^N 上の実数値関数 v** と同一視されるようになった。つまり，協力ゲームにおいては戦略は表舞台から姿を消すことになったのである。面白いことに，これによって逆に理論としての応用範囲は広がった[20]。しかし，戦略が消えたと言っても，思考の舞台から消えたわけではない。特性関数が与える値は，行動を規制する制度やルールのもとで結託が独力で獲得できる利得である。逆に言えば，特性関数をつくるということは，プレイヤー達が結託を形成して行動する社会的な場においての制度やルールをあらたに「設計する」ことをも意味する。このように，制度やルールの関数として特性関数を認識することにより，協力ゲームの理論は，価格メカニズムにしがみつく経済学者の頭の上を飛び越えて，外部性や環境[21] さらには社会規範や法[22] の

19) Shapley and Shubik (1954).
20) シャプレイ＝シュービックの一連のマーケットゲームの研究が典型的な例である。
21) Shapley and Shubik (1969b) など。
22) Aumann and Maschler (1985) のタルムードにおける遺産分割問題の研究など。

領域にまで翼を広げることになるのである。

(2) 社会的行動基準としての解

一般に，方程式が与えられたとき，その解とは，求めることができるか否かは別にして，自明な意味をもつものである。すなわち，方程式をみたす1組の変数や，関数のことである。しかし，2人ゲームの場合もそうであったように，ここでは問題自身が新しく，解の概念も新しい観点から定式化しなくてはならない。協力 n 人ゲームのノイマン＝モルゲンシュテルン解は**安定集合**とよばれ，斬新であるばかりでなく社会的意味内容を内包する深い解概念である。数学的には何をおいてもまず必要な存在について，NM 理論の範囲でルーカスによって反例が発見されているにもかかわらず[23]，今日まで淘汰されるどころか応用される問題に対して深い洞察を与えるという役割はますます大きくなっている[24]。

NM 理論では，プレイヤー全員が協力した場合に実現する利得，すなわち，$v(N)$ が各プレイヤーにどのように帰属するかをあらわす一覧表を**配分**という。配分が決まれば，各プレイヤーへの帰属額が決まる。ただし，各プレイヤー i が獲得する額は，当然，独力で獲得できる値 $v(\{i\})$ 以上でなければならない。この条件を**個人合理性**という。安定集合は，その名が示すように，個々の配分を指定するものではなく，配分のある集合が全体として後に述べる意味の安定性をもつものである。今日でこそめずらしくはないが，当時としてはこれはきわめて斬新な発想である。この安定性は以下に述べる，支配という配分間の順序概念を経由して定義される。

いま，任意の2つの配分 x と y を考える。これらの配分に対し，ある結託 S の各メンバーへの x による帰属額が y による帰属額より厳密に小

---

23) Lucas (1967).

24) Greenberg (1990) では，安定集合の概念を基本的な解として再定式化することにより驚くほど多彩な分析を展開している。

さく，しかも，y による S の各メンバーへの帰属額の合計が v (S) 以下であるとき，配分 x は y に**支配される**という。S の各メンバーは S だけで行動することによって全体で v (S) を獲得できる。それゆえ，y による帰属額を自身で実現できるので，配分 x に執着する理由はないからである。ここで K を配分の集合としよう。安定集合の定義を形式的に述べると，

K が**安定集合**であるとは，K は，K に属する配分によっては支配されない配分の全体であることである。

この定義は，言い換えると，K の任意の 2 つの配分には支配の関係はなく（内部安定性），K の外の任意の配分は K の中のある配分によって支配される（外部安定性），ということであり，K が集合として安定であることの意味がよくわかる。内部安定性は当然の要請であり，外部安定性も，K の外の配分が K に属すことができない根拠を与えるものである。ここでとくに，**いかなる配分にも支配されない配分の集合**を C と書こう。すると，

C はすべての安定集合の部分集合である

ことがわかる。実際，C に属し，K に属さない配分があったとすると，その配分は K のある配分に支配されることになって C の定義に反するからである。この意味において C はコアとよばれる。コアは NM 理論ではその名前ではよばれていないが，空集合になることがあるので解としては適さないとされている[25]。しかし，後の協力ゲームの展開の中で独立な解概念として確立され，経済学に重要な貢献をすることになる。

さて，この安定集合に対するノイマン＝モルゲンシュテルンの「解釈」によると，安定集合とは社会の行動基準である。たとえば，3 人単純ゲームでは集合 $K = \{(1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/2), (0, 1/2, 1/2)\}$ がひとつの

25） von Neumann and Morgenstern (1953) p.41 (footnote 3).

安定集合である[26)]。ここで，(1/2, 1/2, 0) はプレイヤー 1，2 が各々 1/2, プレイヤー 3 が 0 を獲得する配分をあらわす。この安定集合は，

任意の 2 人が結託して自分達だけで利得を均等に分け合うこと

が社会的に容認された一般原則＝行動基準であることを述べている。また，$0 \leq k < 1/2$ とするとき，配分の集合 $L = \{(x,\ 1\text{-}k\text{-}x,\ k) \mid 0 \leq x \leq 1\text{-}k\}$[27)]，すなわち

プレイヤー 3 に値 k を残し，1-k をプレイヤー 1 と 2 で任意に分け合うこと

は差別解という安定集合である。これは，このように差別的に分配することもまた社会の行動基準であることを意味する。重要なことは，これらのうちどの行動基準が選ばれるのかについて，安定集合は何も言っていないことである。この意味で安定集合は予測に役に立つわけでもなく，さらにまた，どのように行動すべきかを教えてくれるわけでもない。しかし，少しでも科学の洗礼を受けた人ならば，安定集合のあの形式的定義がこの思いがけぬ豊かさを内包していることに無感動ではいられないであろう[28)]。さらにそれが具体的意味内容をともなって現われるときはなおさらである。ノイマン＝モルゲンシュテルンは，非定和 3 人協力ゲームを 1 人の売り手と 2 人の買い手の間の家の取引に応用して，この取引の安定集合を求めた。それは，**買い手の 1 人がより高い価格で買う競争的な部分**（**コア**）**と 2 人の買い手のうち一方が他方に補償を支払って競争から下りてもらい，残った買い手が低い価格で家を手に入れる部分**とから成ってい

26）証明はたとえば，鈴木（1994）参照。
27）集合 L は無限集合である。
28）現役の指導者の一人，R.J. Aumann は，“It is a mystery that just the stable set concept, and it only, is so closely allied with endogeneous notions of social structure.” と述べている。(Aumann (1989)).

る[29]。最初の部分はベーム - バベルクのいわゆるマージナルペアであるが，後の部分はそれまでの経済学の常識には存在しなかった結託行動である。協力ゲームのモデル以外に，一体どんな経済理論がこのような行動を導きえたであろうか。

(3) 拡張，展開および応用

NM 理論の概観を終えるにあたって，その後の発展について手短に展望しておこう。まず，NM 理論の土俵の中での重要な貢献としては，シャプレイによる value 理論があげられる[30]。これは後に述べるナッシュの交渉理論同様，公理的方法によって任意のゲーム (N, v) に対しひとつの配分 ϕ を対応させるという理論である。この配分 ϕ はシャプレイ値とよばれている。シャプレイ値は数学的に美しいだけでなく，具体的な公式として与えられ，しかも経済学の限界概念の期待値ともいうべき形をしているためコアと同様，経済学への重要な貢献を多く生み出してきた。*Quarterly Journal of Economics* 誌に掲載された Shapley and Shubik (1967) はその「純粋」経済学への応用の一例であり，生産手段の種々の所有形態のもとでの成果の配分をこのシャプレイ値によって分析したものである。同様に，唯一の配分を与える解として Schmeidler (1969) の仁 (nucleolus) がある。この仁もつねに存在し，計算可能であり，しかも「最大の不満を最小化する」というアピーリングな解釈をともなう配分であるため，実際の公共事業の費用分担問題などの工学的応用にも用いられている[31]。また，あるゲームの仁が，2000 年もの間合理的説明のつかなかった，タルムードの遺産分割法を与えることを示した Aumann and

---

29) ノイマン＝モルゲンシュテルンのオリジナルよりも，Luce and Raiffa (1957) の解説の方が読みやすい。このモデルの安定集合はまた，取引は価格を媒介として行われること，および，その価格がどのような範囲の値として決まるか，ということも同時に説明している。

30) Shapley (1953).

31) Suzuki and Nakayama (1976) が最初の応用である。

Maschler（1985）のドラマティックな研究もある。理論の展開としては，仁は Davis and Maschler（1965）のカーネルの後に現われ，カーネルはさらに Aumann and Maschler（1963）の交渉集合の後に現われた。これら3種類の解は新しいものが古いものに含まれるという数学的関連をもっており，後になるほどリファインされた解になっている。これらはまた，配分をめぐるプレイヤー間の交渉における安定性という視点を共有しており，配分の支配関係を軸とする安定集合やコアとは異なる哲学を反映する解である。また，最初に述べたシャプレイ値は，ゲームの先験的な評価を与えるもので，これも別の範疇に属する。このように，協力ゲームは異なる思想を反映して異なる解概念を生み出しており，また，各々の解概念はそれぞれ適した応用研究を生み出している[32]。

次に NM 理論が前提としている，譲渡可能効用と拘束的協定の以後の取り扱いについてみてみよう。ノイマン＝モルゲンシュテルン自身は，譲渡可能性をはずすこと，さらに効用関数を抽象的な順序で置き換える試みについて述べているが，実際に扱いやすい拡張は Aumann and Peleg（1960）によって提示され，安定集合も拡張された。この場合，$v\ (S)$ は実数値ではなく，S の各メンバーが獲得可能な利得ベクトルの集合になる。以後，この枠組みの中でコア，交渉集合，仁，およびシャプレイ値の拡張がなされている[33]。他方，拘束的協定については，非協力ゲームによるアプローチを別にすれば[34]，あまり発展がない。ノイマン＝モルゲンシュテルンは，もちろん，拘束的協定の仮定は将来，理論からはずされるべき補助的概念であることを，次のようにはっきりと認識していた：

> … The player who lives up to his agreement must possess the conviction that the partner too will do likewise. …what,

32） Aumann (1989) は解の多様性についての示唆に富む正当化を与えている。

33） コアは Aumann (1961), 交渉集合は Peleg (1963), 仁は Kalai (1975) および Nakayama (1983), シャプレイ値は Shapley (1969).

34） 代表的なものは Harsanyi (1974) である。

> if anything, *enforces* the "sanctity of such agreements? ....we have reached the point beyond which it is difficult to go in formulating such a theory without auxiliary concepts such as "agreements," "understandings", etc. On a later occasion we propose to investigate what theoretical structures are required in order to eliminate these concepts.... (Neumann and Morgenstern (1953, pp.223−224))

最近になって，結託が分裂せずに自分自身を維持しうるようなマックスミニ戦略をとることが可能かという視点から，自己拘束的な結託形成についてNakayama（1993）が考察しているが，一般的な結託形成の問題はやはり後述のナッシュ・プログラムの課題であるといえよう。

4.　ナッシュの理論

今日のゲーム理論のメインストリームであり，現代経済学の重要な方法論的基礎でもあるのは，ナッシュによる非協力ゲームの理論である。NM理論のところで述べたように，ノイマン＝モルゲンシュテルンの主要な関心事は結託行動にもとづく n 人協力ゲームであって，ゼロ和ではない2人ゲームや結託をともなわない n 人ゲームには全く言及していない。実際，彼らの方法論ではこの部分を取り扱うことはできないのである。ナッシュは，そこに不滅の金字塔を打ち立てた。非協力均衡点の概念と，すべての協力ゲームを非協力ゲームに還元して分析するというプログラムとである。前者はいうまでもなくナッシュ均衡のことであり，後者は後年，ハルサニーとゼルテンによって強力に推進されることになるいわゆる**ナッシュ・プログラム**である。ノーベル賞の対象となったのはこのナッシュ・プログラムであると言ってよい。

さて，まず，ナッシュのゲーム理論の論文を年代順に並べてみよう。

1. Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 36.1 (1950) 48−9.
2. A simple three-person poker game, (joint with L.S. Shapley) *Ann. Math. Study,* 24 (1950)
3. The bargaining problem, *Econometrica,* 18 (1950)
4. Non-cooperative games, *Ann. of Math.* 54 (1951)
5. Some experimental n-person games, (joint with G. K. Kalisch, J.W. Milnor, and E.D. Nering), *Research Memorandum* RM−948, The Rand Corporation, Santa Monicha, 1952.
6. Two-person cooperative games, *Econometrica,* 21(1953)
7. A comparison of treatments of a duopoly situation (joint with J.F. Mayberry and M. Shubik), *Econometrica,* 21 (1953)

1 はナッシュの n 人ゲームの誕生を告げる記念碑的な論文である。この正味 1 ページにもみたない論文の中でナッシュは n 人ゲームの定義，均衡概念および角谷の不動点定理による存在証明を，数式を使わず言葉と若干の記号だけで完全に記述している。2，5 および 7 は，均衡概念の応用と実験に関するものであり，とくに，5 は NM 理論の結託形成に関する実験研究である。3 は 2 人協力ゲームとしての交渉を扱ったもので，有名な**効用積の最大化**を導いている。4 は 1 で発表したゲームを**非協力ゲーム**と名付け，ブラウワーの不動点定理による存在証明とゲームの**可解性**についての分析を含む論文である。この論文の存在証明は後でアロー＝ドゥブルーによって，経済の一般均衡の存在証明に用いられた[35]。6 は 3 で考察した 2 人協力ゲームを，2 人非協力ゲームに**埋め込み**，効用積の最大化をその非協力ゲームの均衡点として導いた画期的論文である。この中には，

35） Arrow and Debreu (1954).

協力ゲームとは何かについてのナッシュの哲学が述べられており，これが今日のナッシュ・プログラムの原点である。以下では，1，3，4，および6を中心に，ナッシュの思考の跡をたどってみることにする。その前に，ナッシュのその他の仕事についても短く触れておこう。1953年以降，ナッシュは数学の世界に戻って，次のような論文を発表している。

1′. The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, 63 (1956)
2′. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.*, 80 (1958)
3′. Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général, *Bull. Soc. Math. France,* 90 (1962)

これらは岩波数学辞典に解説されているもので，その分野の代表的業績であることは言うまでもない。とくに，1′ についての次のような専門家の記述は注目に価する。

> ……以上はすでに注意したように，局所的な埋め込みであるが，与えられたリーマン空間全体を適当な次元のユークリッド空間へ等長的に埋め込む問題の方が重要であろう。この種の問題については，1956年に公表されたJ. Nashの論文 "The imbedding problem for Riemannianmanifolds, *Ann. of Math.*, 63" が最も重要であろう。そこでは決定的な2つの定理が証明されている……（中略）……これらの定理の証明はまったく大変なものである。(松本　誠著『計量微分幾何学』裳華房)

このように，ナッシュは数学者としても歴史に残る仕事をした後，残念なことに病気のため研究ができなくなり，学問の世界を離れなければならな

くなった。それだけに，今回のノーベル賞がナッシュの理論に与えられたことには感慨無量なものがある。

4.1 均 衡 点

自分の（混合）戦略と相手の（混合）戦略の任意の組み合わせに対して，和がつねにゼロとなるような自分の（期待）利得と相手の（期待）利得が定まる，というのがゼロ和2人ゲームであった。このゼロ和の条件を含む効用の譲渡可能性をはずしたものが，ナッシュの2人ゲームであり，さらに，プレイヤーの数を n 人に拡張したものがナッシュの n 人ゲームである。とくに，論文4で述べられているように，各プレイヤーが独立に自分の戦略を選び，他のプレイヤーとの間での合意が拘束的であるとは仮定されないのが**非協力ゲーム**である。経済学者ならば，この定式化から，ポーカーやマージャンなどの室内ゲームよりもむしろ，経済主体が直接影響を及ぼしあう寡占や外部効果，さらには価格による間接的な影響のもとでの一般均衡のモデルを連想するであろう。しかし，シュービックやハルサニー，ゼルテンなどの傑出した経済学者[36]を除けば，当初から注目した経済学者は少なかった。鈴木（1995）の回想によれば，ナッシュやシャプレイ，スカーフなどの超一流の数学者がゲーム理論をやるのをみて，あきらめた経済学者もいたという。いずれにせよ，経済理論自体の未発達もあって，すぐに浸透したわけではなかった。

さて，今日の理論家ならば知らない人はいない**ナッシュ均衡**とは，この非協力ゲームの均衡概念である。2人ゲームの場合，2人の戦略の組が**均衡点**であるとは，相手がその戦略をとるかぎり，自分のその戦略は自分の利得を最大化するということである。今日の用語では，互いに**最適反応**であるような戦略の組のことである[37]。この明快なアイディアの n 人の場合

36） 今日ではもちろんゲーム理論家というべきである。

37） Cournot (1838) が寡占企業の行動の落ち着き先としてこの考えを定式化しているので，経済学者の中にはクールノー＝ナッシュ均衡とよぶ人もいる。

への拡張はほとんど自明である。ナッシュ自身の言葉でみてみよう。

> … Any n-tuple of strategies, one for each player, may be regarded as a point in the product space…. One such n-tuple counters another if the strategy of each player in the countering n-tuple yields the highest obtainable expectation for its player against the n-1 strategies of the other players in the countered n-tuple. A self-countering n-tuple is called an equilibrium point.（ナッシュ論文 1）

戦略の n-tuple とは，n 人のプレイヤーのとる戦略を，プレイヤー 1 から順に n 個並べたものである。n-tuple s が n-tuple t に counter するとは，s の各成分は t の対応する成分を除いた $(n-1)$-tuple に対する最適反応であることを意味する。それゆえ，s が self-countering であるとは，s に記述された n 人の戦略は，どの 1 人の戦略も残りの $n-1$ 人の戦略に対する最適反応であるような組み合わせとなっていることである。

ナッシュ均衡の存在定理は，ミニ・マックス定理の拡張になっていることが次のようにしてわかる。ゼロ和 2 人ゲームでは，相手はこちらの利得を最小化するので，均衡点での利得は自分の戦略についての最大値であると同時に相手の戦略についての最小値となっている。それゆえ，均衡戦略は自分のマックス・ミニ戦略であり，均衡値はマックス・ミニ値である。同様に，その均衡値は相手のミニ・マックス値であり，均衡戦略はミニ・マックス戦略となる。

ナッシュは，しかし，この均衡点をそのまま非協力ゲームの解とよんだわけではない。ゲームのクラスを一般化したことにより，均衡はただひとつに決まるとはかぎらないという代償を支払わなければならなかった。ゼロ和 2 人ゲームではマックス・ミニ戦略の定義から，マックス・ミニ値はひとつしかなく，それゆえ，均衡値はただひとつに決まる。つまり，すべ

ての均衡点は同じ利得を実現する。また，ある意味でより重要なことに，マックス・ミニ戦略もミニ・マックス戦略も**相手の戦略に依存せずに決まる**ので，ゼロ和2人ゲームの任意の2つの均衡点は**交換可能**である。すなわち，

> (s, t) と (p, q) が均衡点ならば，(s, q) も (p, t) も均衡点である。

この意味において，ミニ・マックス定理は均衡点が本質的に一意であることも含意しており，ゲーム理論の中で最も数学的に美しい定理のひとつであるが，この性質は n 人ゲームへは受け継がれないのである。ナッシュは，それゆえ，論文4において，均衡が本質的に一意であるという性質をもったゲームを含む，あるクラスに属するゲームを**可解なゲーム**とよんで，そうでないゲームと区別した。可解な n 人ゲームとは，正確には，任意の2つの均衡点の間で任意の一人の戦略を互いに入れ替えたものも依然として均衡点であるゲームのことである。ゼロ和2人ゲームはもちろん可解であるが，可解な2人ゲームでもゼロ和でなければ，一人のプレイヤーの利得が異なる均衡の間で等しいとはかぎらない。

このように，ナッシュ均衡は，数学的には確かにゼロ和2人ゲームのミニ・マックス戦略の拡張であるが，ミニ・マックス定理の完璧さにくらべると行動原理としての弱点を背負って生まれたようにみえる。しかしながら，ゼロ和ゲームとそうでない n 人ゲームの社会的「文脈」の複雑さの違いを考慮すると，ゼロ和ゲームの行動原理と同等の説得力をもった行動原理を求めることの方が科学的に不健全な態度であるといえるだろう。むしろ，社会的状況の質的差異を反映して，可解なゲームとそうでないゲームがあるのは当然であり，ナッシュ均衡の概念によって初めてさまざまな状況における合理的行動とは何かについての科学的分析が可能になったというべきである。事実，少し後になるが，合理性に対する一定の哲学を背景として，ナッシュ均衡の中でもどの均衡が実現するのかを考察する**均衡**

選択の理論がゼルテンによって開始されることになる[38]。ナッシュ自身は，論文6で展開した2人協力ゲームの理論のなかで，早くも，この均衡選択の問題にぶつかり，天才的な洞察によってその問題を処理している。これがハルサニーを経由してゼルテンの均衡選択理論，すなわち，完全均衡の概念につながるのである。

4.2　2人協力ゲームとナッシュ・プログラム

(1)　交渉問題

Econometrica 誌上に発表された1950年の第3論文，“The bargaining problem” は，2人のプレイヤーが交渉によって利得の配分を決定するという問題を考察したものである。この，ノイマン＝モルゲンシュテルンの大著を唯一の引用文献とする論文でナッシュが定式化し，解決した問題は，それ以前にも何人かの傑出した経済学者達によって試みられたにもかかわらず，満足な理論の欠落した問題であった。ハルサニーはこの事実を次のように述べている。

> Lacking any clear and consistent definition of rational behavior for these game situations, even such powerful analytical minds as Cournot, Bertrand, Edgeworth, and Hicks have been unable to propose satisfactory models of the two players' behavior and have been unable to avoid the fundamental mistake of ascribing some quite implausible and patently irrational behavior to their two duopolists or bilateral monopolists—without any specific empirical or theoretical justification for assuming such behavior and without even realizing its irrationality. (Harsanyi

---

38)　Selten (1965, 1975), Kreps and Wilson (1982), Kohlberg and Mertens (1986), Harsanyi and Selten (1988) など。

(1977, p.18))

唯一の例外といえるのがデンマークの経済学者 Zeuthen（1930）の労働市場の団体交渉モデルであって，ナッシュのアプローチと外見上全く異なるにもかかわらず，数学的には同値であることが，ハルサニー自身によってすぐ後で明らかにされている[39]。22 歳にも満たない数学の大学院生であったナッシュが，このような経済学の文献を知るはずもなく，また，NM 理論も言及さえしていない，この単純すぎるくらいの問題の経済学的重要性を見抜いたということは，ナッシュという人の経済学的センスをも物語るものである。

ナッシュのこの問題へのアプローチは，NM 効用理論と同じく，公理的方法である。2 人ゲームが与えられたとき，各プレイヤーのとりうる純粋戦略の組に対して実現する利得の組がひとつ対応する。つまり，有限個の実現可能な利得の組の一覧表が与えられるわけである。いま，横軸にプレイヤー 1，縦軸にプレイヤー 2 の利得をとって，これらの利得の組をこの座標平面上に書き込むと，その利得の一覧表は座標平面上の有限個の点の集まりとなる。これらの点すべてを含む最小の凸多角形の領域を**利得集合**という。もとの有限個の各点は純粋戦略の組に対応し，それらを結ぶ線分上の点は**相関戦略**，すなわち，各々の純粋戦略の組が選ばれる確率分布に対応している。相関戦略は，プレイヤー間の合意を前提とする協力概念である。非協力ゲームならば，均衡点に対応する利得が実現してゲームは終了するが，ナッシュの協力ゲームでは，2 人のプレイヤーの交渉によって，利得集合の中のどの点を実現するのかを決定するのである。合意にいたらなかった場合には，**基準点**，すなわち，利得集合の中のあらかじめ決められた点が実現して，交渉が終了する。これが**ナッシュの交渉**のルールである。この単純な枠組みの中に，ツォイテンの労使間賃金交渉にはじま

39） Harsanyi (1956).

り，2国間の経済協議にいたるまでのありとあらゆる交渉問題を埋め込むことが可能である。

さて，結論からいうと，ナッシュは，利得集合の中で2人の純利得の積，すなわち，基準点から測った利得の積を最大化する点が交渉によって選ばれることを示した。いわゆる**効用積（ナッシュ積）の最大化**であり，これが交渉問題の**ナッシュ解**である。利得集合は凸多角形であり，また，効用積＝一定値，をあらわす曲線が直角双曲線であることに注意すれば，ナッシュ解はつねに唯一の点を交渉の結果として定めることがわかる[40]。

効用の和を最大化するのならわかるが，積を最大化するとはナンセンスではないか，と思う人もあろう。そのような人は，以下に掲げる公理をよく吟味してもらいたい。ナッシュはこれらの公理と効用積の最大化が数学的に同値であることを証明したのである。

公理1. 交渉の結果は，2人にとってこれ以上改善の余地のないものでなければならない。

これは経済学でいうパレート効率性の要請である。

公理2. 基準点における2人の利得が等しく，また利得集合の中の任意の点について，その座標を入れ替えた点もまた利得集合の中にあるとする。このとき，交渉の結果は2人に等しい利得を与えなければならない。

これは**対称性**の公理とよばれ，2人が実現可能な利得について対称ならば，結果も対称であるべきことを述べている。

公理3. 交渉の結果は，効用を測る原点と尺度からは独立でなければならない。

40) Luce and Raiffa (1957) はナッシュ解を裁定者の提示する仲裁案であると解釈しているが，これではゲーム理論にならない。ナッシュ自身はもちろんこの解釈を拒絶した (Raiffa (1992)).

効用関数はもちろんNM効用であるから，正の数をかけたり正の数を足したり引いたりしたものも，再び同じ選好順序をあらわすNM効用関数である。この公理は，交渉の結果も当然，この効用変換から独立であることを述べているに過ぎない。商取引を円で計算してもドルで計算しても，取引額としての本質的違いがあるわけではないのと同じである。

公理4. 交渉の結果は，妥結にいたらなかった代替案が後で削除されたとしても，影響を受けないものでなければならない。

これは，Independence of Irrelevant Alternatives の頭文字をとった **IIA** の名で知られる有名な公理である。このように表現すると全く自明にみえるが，以上の4つの公理のうち，このIIAが最も多くの批判にさらされた[41]。それは，この公理が，利得集合の局所的形状にのみ解が反応することを要請していることに由来するものである。たとえば，ナッシュ解の点を通る水平線より上の利得集合の部分を切り取った交渉問題の解は，切り取る前の交渉問題の解と同じ点を与える。切り取られた部分が，プレイヤー2の交渉力を反映すると考えるならば，ナッシュ解はこの意味の交渉力の増減には鈍感であることになる。しかしまた，次のオーマンによるエピソードも傾聴に値する。

……3人の候補者A，B，Cのうち，Aをセミナーによぶことが決まった。後で，Cはセミナーには来れないことがわかったので，決定をやりなおそうと提案したところ，『Cが来れなくても結果には影響しないのにどうしてだ？』とけげんな顔をする。つね日頃，経済学のセミナーではIIAに批判的な同僚達が，である。(Aumann (1985))

41) Luce and Raiffa (1957), Kalai and Smorodinsky (1975) など。

思わず拍手でもしたくなるようなエピソードである。公理が妥当か否かということは，最終的には個人の判断に行き着く問題であり，普遍的な真偽の問題ではない。それゆえ，弱点があったとしても，それだけで理論が葬り去られたりはしない。それどころか，真摯な批判が存在するということ自体，問題の重要性と影響の大きさを意味しており，それだけ活発な研究活動を刺激することになる[42]。ナッシュの交渉問題は，その意味でも新しい研究分野の誕生としては典型的なもののひとつであり，今日，すでに大きな分野に成長している[43]。

(2) 2人協力ゲーム

ナッシュ自身が，交渉問題のモデルについて拡張する必要があると認めたものは，実は固定的基準点の仮定である。確かに，交渉が決裂したときに発生する事態が一通りしかないというのは現実的にはむしろ例外であろう。労使間交渉をみても，交渉決裂時にとりうるオプションは段階的にいくらでもありうる。もちろん，決裂が戦争を意味するような外交交渉などでは固定的基準点のモデルがあてはまるが，理論としては，さまざまな**脅しの可能性**が取り込まれている方が望ましい。ここまでは，誰でも考えつくことである。ナッシュは，モデルを拡張するとともに，重大な方法論上のプログラムを提案しそれをこの交渉問題について実行してみせた。**協力ゲームを適当な非協力ゲームの中に埋め込み，その均衡点を分析することによって，協力行動を考察する，**という，後に**ナッシュ・プログラム**として知られることになる方法論である。ナッシュ自身に語ってもらおう。

> The writer has developed a "dynamical" approach to the study of cooperative games based upon reduction to non-cooperative form. One proceeds by constructing a model of

42) Kalai and Smorodinsky (1975) による個別単調解はその代表例である。
43) たとえば，Osborne and Rubinstein (1990).

> the pre-play negotiation so that the steps of negotiation become moves in a larger non-cooperative game...describing the total situation. ...Thus the problem of analyzing a cooperative game becomes the problem of obtaining a suitable, and convincing, non-cooperative model for the negotiation.

これは，1950 年の論文 4: "Non-cooperative games" の最後のページにおける記述である。論文 3: "The bargaining problem" も 1950 年の公刊であるから，これらの論文を書いているときには論文 6: "Two-person cooperative games" の骨格はすでに完成していたとみられる[44)]。

均衡点は，自分以外のすべてのプレイヤーがその戦略をとるかぎり，自分の戦略はそれらに対する最適反応になっているような戦略の組であるから，自分だけがそこから離反するという動機は存在しない。この意味で，均衡点は**内生的な拘束力**をもっていると言ってよい。つまり，NM 理論では理論の外から仮定する必要のあった拘束力が，ナッシュの n 人ゲームでは解に自ら備わった性質となっているのである。ここに，協力ゲームの舞台裏での各プレイヤーの行動を戦略として明示的にとりこんだ非協力ゲームの均衡点によって，もとの協力ゲームの解を記述するという可能性が生まれる。結託行動も例外ではなく，それゆえ，原理的には非協力ゲームによってすべての協力行動を分析するというゲームの統一理論も夢ではなくなるのである[45)]。

さて，交渉問題が実際，どのように拡張されたのかについてみてみよ

---

44) 1950 年秋の Raiffa による批判以前に完成していたと推測される。Raiffa (1992) 参照。

45) 数学や物理学においては，このように単一の方法論で理論をつくるというプログラムはめずらしいものではない。ニュートンの力学による物理学の構築，ヒルベルトによる数学の算術化の構想，さらにアインシュタインの相対性理論による力の統一理論などがその例である。現代の経済学もまた，経済主体の合理的行動によってすべてを説明しようと努めている。

う。交渉問題で与えたのと同じ利得集合から出発し，2段階からなる次のような非協力ゲームを考える。第1段階で各プレイヤーは同時に戦略を選ぶ。これは**脅し戦略**とよばれ，これによって，最終的に合意にいたらなかった場合の利得の組，つまり基準点が定まる。次にこの基準点を知ったうえで，各プレイヤーは第2段階で各々自分の利得の要求額を同時に提示する。これらの要求額の組が利得集合の中に入っていれば，それは実現可能であって，要求どおりの利得を各々獲得してゲームは終了する。しかし，もし利得集合の外にはみ出せば，2人の要求は両立せず，ルールによって基準点がゲームの結果となる。この第2段階は，**要求提示ゲーム**といって，2人が**同時**に提示することがルールによって要請される。これに対し，第1段階での脅し戦略の同時性は要請されないが，ここでコミットした脅しは，第2段階での要求が両立しなかった場合には，そのとおりに実行されなければならない。

いま，要求提示ゲームでは，つねにナッシュ積を最大化する点が実現すると仮定してみよう。実際，これは仮定ではなく結果なのであるが，理由は後で述べる。実現する利得は基準点に依存して決まるのであるから，それは結局，第1段階での戦略に依存して決まる。脅し戦略とよばれる所以である。さらに，その利得は，ナッシュの公理1によってパレート効率的であるから，2人のプレイヤーについて同時に増加することはありえない。脅し戦略の任意の変化に対し，もしプレイヤー1の利得が増加すればプレイヤー2の利得はかならず減少するのである。すなわち，全体のゲームはゼロ和ゲームを拡張した，**厳密に競争的なゲーム**となる。すると，任意の均衡点において，自分がその戦略を堅持するかぎり，相手がどのような戦略に変更したとしても，相手の利得の減少に対応して自分の利得は増加するだけである。逆に，相手がその戦略を堅持するかぎり，自分の利得はその均衡点において最大になる。言い換えると，任意の均衡点における自分の戦略は**ミニ・マックス戦略であると同時にマックス・ミニ戦略**であり，相手についても同様である。これが，各プレイヤーについて，ノイマ

ンのミニ・マックス定理と同じ意味をもつことは明らかであろう。それゆえ，そのナッシュ均衡は可解であり，しかも，すべてのナッシュ均衡は唯一の利得の組を実現する[46]。この均衡戦略を，2人協力ゲームの**最適脅し戦略**といい，均衡利得の組を**ゲームの値**という。こうして，ナッシュの2人協力ゲームの均衡点は，ミニ・マックス定理の美しい拡張となっているのである。

ここで，保留しておいた要求提示ゲームの考察に移ろう。残された仕事は，要求提示ゲームのナッシュ均衡が，ナッシュ交渉解からえられる唯一の利得の組をもたらすことを論証することである。まず，第1段階で選ばれた脅し戦略によって決まっている基準点に利得集合の座標の原点を移動し，見通しをよくしておこう。利得の要求額の組がナッシュ均衡となるのは，それがちょうど利得集合のパレート・フロンティア，すなわち，利得集合の第1象限での右下がりの境界上にあるとき，およびそのときにかぎられる。相手のその要求額に対し，自分の要求額を少しでも増加させると，ルールによって原点（基準点）がゲームの結果になってしまうので，その境界上の点が互いに最適反応になることは容易にわかる。われわれはしかし，ここで，実に，**無限個の均衡点**に直面してしまったのである。さて，どうやってこの中から唯一つの均衡点を選び出せるのだろうか？

ナッシュは**平滑化**という方法でこれを解決した。パレート・フロンティアを横断した瞬間に突然ゼロに落ち込む不連続な利得関数を滑らかな関数で近似するのである。いま，(x, y) で2人の要求額をあらわし，$h(x, y)$ を (x, y) が両立可能となる確率をあらわす滑らかな関数とする。利得集合上では $h(x, y) = 1$，その外では (x, y) が遠ざかるにつれて単調に減少するがゼロにはならないように h を選ぶと，2人の利得の期待値は各々 xh，yh となる。ここで，(x, y) がナッシュ積の期待値 xyh の正の領域全体での最大値を与えるとすると，固定された $\boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{xh}$ は最大であ

46） この2人協力ゲームの均衡点の存在証明は角谷の不動点定理によっている。

り，また，固定された $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{yh}$ は最大である[47]。すなわち，(x, y) はナッシュ均衡であり，逆もまた正しい。さらに，利得集合上でのナッシュ積が最大になる点を (x^*, y^*) とすると，xyh が全域で最大であることからつねに $x^*y^* \leq xyh$ である。それゆえ，関数 h を十分に急速に減少するように選べば，均衡点 (x, y) は (x^*, y^*) に十分近くなる。こうして，ますます急速に減少する関数 h の列に対応する均衡点の列の極限として，求める点 (x^*, y^*) が得られるのである。

この平滑化による均衡選択というナッシュの考えは，当時としてはゲームのプレイとしての関連性を欠くもののように映ったに違いない[48]。ルース＝レイファは次のように書いている。

> Nash then shows that his "solution" is "the only necessary limit of the equilibrium points of smoothed games." Indeed, this is true, but isn't it a completely artificial mathematical "escape from this troublesome nonuniqueness"? Would it have any relevance to the players? (Luce and Raiffa (1957, pp.141−142))

確かに，ナッシュは $h\ (x, y)$ の意味について，

> It can be thought of as representing uncertainties in the information structure of the game, the utility scales, etc. (ナッシュ論文 6，p.132)

---

47) xh が最大でなければ $x'h' > xh$ となる x' と h' がある。すると $yx'h' > yxh$ となって，xyh が最大であることに矛盾する。

48) 現在でも，ゲーム理論家ではない人には『利得集合の外の点が実際にゲームの結果としてある確率で実現する』と誤って解釈されることがある。また，極限はゲームのプレイを通じてそこへ『近づいていく』点ではないことも，よく誤解される。

と短くコメントしているだけである。しかし，completely artificial mathematical escape であるというルース＝レイファの批判は，当時はともかく，今日ではもはやゲーム理論家の賛同をえられないであろう。ゼルテンの摂動均衡（trembling-handequilibrium）の概念を中心とする**摂動論**，すなわち，**不合理性を取り除いていく思考プロセスの極限としての合理性**の概念の中に，このナッシュの平滑化のアイディアが形を変えて生きているからである[49]。ナッシュ自身が『ゲームの情報構造の不確実性』と表現したものを，ゲーム理論の批判者であったルース＝レイファは読みとることができなかったけれども，後のゲーム理論家達はそれを正しくさらに一般的に定式化し，均衡選択の理論における主要な方法として確立したのである[50]。

4.3　実験へのコメント

1950 年代は，NM 理論やナッシュの理論で定式化されている合理的行動が，どの程度実際の人間行動に反映されているのかを，実験室における実験によって確かめてみようとする，**実験経済学**の黎明期でもあった[51]。ナッシュ自身，共同論文 5 で n 人ゲームの実験にかかわっているし，また，自分の理論についての実験にコメントを寄せてもいる。以下では，Roth（1993）に紹介されている，ドレッシャー＝フラッド[52] の実験に対するナッシュの意義深いコメントを味わうことにしよう。

Row \ *Column*	1	2
1	(1, 2)	(1/2, 1)
2	(0, 1/2)	(1, 1)

実験というのは，右図のゲームを繰り返して被験者にプレイさせることにより，どのような利得を獲得したかを調べて，ナッシュの

49）Kaneko (1981) はこれを明確に示している。
50）合理的均衡選択の哲学については，Binmore (1990) における Modeling rational players: Part Ⅰ，Ⅱが必読文献である。
51）Roth (1993) はこの頃の実験に関する詳しいサーベイである。
52）Flood (1952).

理論とつきあわせてみることである。このゲームは Tucker (1950) の命名によって，**囚人のジレンマ**としてあまねく知られているものであり，ナッシュ均衡は RAW が 2，COLUMN が 1 という戦略の組み合わせである。理論上は，繰り返し回数が有限であるかぎり，毎回このナッシュ均衡を繰り返すのが唯一の合理的戦略，すなわち，その**繰り返しゲームを大きい一つのゲームとみなしたときのナッシュ均衡**であることが，後ろ向き帰納法によって容易に確かめることができる。しかしながら，100 回の繰り返し実験の平均利得は，RAW が 0.40，COLUMN が 0.65 と，理論とは無視できない隔たりを見せたのである。ドレッシャー＝フラッドは，この結果から，人間はナッシュの理論のようには行動せず，むしろ，“split the difference” principle とでもいうべき協力行動をとると解釈した。確かに，この解釈は常識的で無理なく受け入れられるようにみえる。しかし，理論家としては，このようなあいまいな『行動原理』の上に理論を築くことはできないであろう。彼らにコメントを求められたナッシュは，次のように理論の創始者らしい見解を述べている。少々長いが注目すべき内容なので，全文を引用する。

The flaw in this experiment as a test of equilibrium point theory is that the experiment really amounts to having the players play one large multimove game. One cannot just as well think of the thing as a sequence of independent games as one can in zero-sum cases. There is much too much interaction, which is obvious in the results of the experiment.

Viewing it as a multimove game a strategy is a complete program of action, including reactions to what the other player had done. In this view it is still true the only real absolute equilibrium point is for [Row] always to play 2, [Column] always 1.

However, the strategies:

[Row] plays 1 until [Column] plays 1, then 2 ever after,

[Column] plays 2 until [Row] plays 2, then 1 ever after,

are very nearly at equilibrium and in a game with an indeterminate stop point or an infinite game with interest on utility it *is* an equilibrium point.

Since 100 trials are so long that the Hangman's Paradox cannot possibly be well reasoned through on it, it's fairly clear that one should expect an approximation to this behavior which is most appropriate for indeterminate end games with a little flurry of aggressiveness at the end and perhaps a few sallies, to test the opponent's mettle during the game.

It is really striking, however, how inefficient [Row] and [Column] were in obtaining the rewards. One would have thought them more rational.

If this experiment were conducted with various different players rotating the competition and with no *information given to a player of what choices the others have been making until the end* of all the trials, then the experimental results would have been quite different, for this modification of procedure would remove the interaction between the trials."

Roth（1993）によれば，この実験は1950年1月に行われたものである。そうすると，ナッシュのコメントもそう遠くないときになされたのであろう。1950年代半ば以前だとすれば，その頃には今日いうところの繰り返

しゲームの Folk Theorem なるものがゲーム理論の研究者の間ですでに共有知識になっていたかどうかは微妙なところである。しかし，第3パラグラフの記述は，まさにそのフォーク定理[53] の内容であり，言及されている戦略は今日，grim trigger strategy の名で知られる，繰り返しゲームにおける基本的な戦略の一つである。もし，このコメントがかなり早い時期になされたものだったとしたら，フォーク定理の起源もまたナッシュにあるということになる。それはともかく，興味深いのは，100 回という繰り返しは後ろ向き帰納法[54] を頭の中で作用させるには長すぎ，それゆえ，無限回繰り返しゲームの理論で近似する方が適切だというくだりである。まことに，非協力ゲーム理論の創始者にふさわしい解釈であるといえよう。さらに注目すべきは，最後のパラグラフである。ここでは，プレイヤーを固定せずに様々に組み合わせ，また，繰り返しの途中での情報開示を一切ともなわずに実験することを提案している。これは，囚人のジレンマの繰り返しをプレイするアルゴリズムを募り，集まったアルゴリズムをコンピュータ上でトーナメント方式で戦わせることによってアルゴリズムの優劣を観察し協力行動の出現を分析した，1984 年のアクセルロッドの画期的な研究[55] を予期するかのようなコメントである。限定的な合理性しかもたない多数のプレイヤー＝アルゴリズム＝遺伝子，が偶然に支配された環境でプレイするゲームの落ち着き先を研究する『進化的ゲーム理論』が 1980 年代に入って盛んになったのは，このアクセルロッドや生物学者のメイナード・スミス[56] などの影響が大きい。けれども，その萌芽はといえば，われわれはそれをこのナッシュのコメントの中に見い出すことができるのである。

---

53) 最初の提唱者が誰だかわからないために，このように呼ばれている。

54) Hangman's Paradox とは，後ろ向き帰納法によって死刑執行が不可能になるという死刑囚のパラドックスのことであると思われる。たとえば，Gamow and Stern (1966), 野崎昭弘『詭弁論理学』中公新書など参照。

55) Axcelrod (1984).

56) J.M. Smith (1985)『進化とゲーム理論』寺本，梯訳，産業図書。

4.4 ゲームの展開形

ナッシュがわずか 3，4 年の短期間に基礎を据えた非協力ゲームは，その後しばらくゆっくりとした経過をたどって発展する。プリンストンや RAND の数学者達のゲーム理論に対する関心もむしろ協力ゲームにウェイトがおかれていたような感があるが，その中にあって非協力ゲームの以後の進化および深化に欠くことのできない役割をはたすのが，キューンによるゲームの展開形である[57]。キューンといえば，経済学の最適化問題を解いたことのある人ならば知らない人はいない，キューン＝タッカーの定理のその人である。ゲームの展開形自体は，NM 理論やナッシュの 2 人協力ゲームの中にも姿を現わしているが，今日広く普及している形の定式化はこのキューンによるものである。

3.2 の(1)戦略の概念のところで述べたように，チェスや碁などの有限な完全情報ゲームは，1 点からはじまって枝わかれしていく木の形にゲームの進行を表現することが原理的に可能である。木の根（ルート）にあたるものがゲームの始点で，そこからのびる各枝は最初のプレイヤーの選択肢，これらの各枝の先の分岐点からさらにのびる各枝は次のプレイヤーの選択肢，というように記述し，各先端には各プレイヤーの利得の組を与えることによりゲームを表現することができる。サイコロを振る，というような**偶然手番**では，選択肢とともにそれらが実現する確率を付与しておけばよい。また，ジャンケンのように同時選択を含むゲームでは，自分がどの分岐点で選択しようとしているのかは確定できないということが生じる。しかし，この場合でも，論理的に可能な点を数えあげることはできる。そこでこれらの分岐点からなる集合を**情報集合**とよんで，一つの情報集合は一人のプレイヤーの一つの手番をあらわすと考える。たとえば，ジャンケンを 1 回する場合，自分の情報集合は 3 点，すなわち，始点から

57） Kuhn (1953).

のびる相手のグー，チョキ，パーの各枝の先の分岐点から構成され，これらの各点からはいずれも自分の選択である３本の枝がのびているわけである。こうして，すべての有限ゲームを**ゲームの木**という形式で記述することができる。これを**ゲームの展開形**という。このように，展開形では，各プレイヤーの手番は唯一の点からなるものも含めていくつかの情報集合として与えられる。純粋戦略とは，各手番（情報集合）での選択をあらかじめ決定しておくひとつの計画であり，混合戦略はもちろんどの純粋戦略をどの確率で選ぶかを指定する確率分布である。

展開形では，もう一つの戦略概念が重要である。自分の個々の手番で局所的に選択をランダマイズするという行動計画であり，これを**行動戦略**という。行動戦略が与えられれば，ゲームのプレイの結果に関してそれと同等な混合戦略を導くことはつねに可能であるが，逆はそうではない。キューンの業績の一つは，**完全記憶**という概念を定義し，このもとでは逆も成立することを示したことである。ゲームのプレイヤーが，**自分の以前の選択とそこで獲得した情報を知っている**という完全記憶の条件は，合理的プレイヤーならば当然であると言えるけれども，プレイヤーはつねに一個の主体であるとはかぎらず，そのプレイヤーの各手番を担当する何人かの代理人から構成されていることもある。このような場合，ゲームが完全記憶でないときは，代理人の間であらかじめ選択を互いに関連づけておく必要がある。混合戦略はこの相関関係を内蔵している戦略であるが，行動戦略は各手番での選択が互いに独立なので，場合によっては必要となる各選択間の相関を組み込んでおくことはできないのである。キューンの定理は完全記憶さえ仮定すれば，均衡分析においてより扱やすい行動戦略を用いてもよいことを保証しており，今日までのほとんどのモデルはその恩恵を蒙っている。

キューンのもう一つの重要な貢献は，**部分ゲーム**の概念の導入とツェルメロの定理のナッシュ均衡への拡張，すなわち，**完全情報ゲームでは純粋戦略でのナッシュ均衡が存在する**ことを述べる定理である。展開形ゲーム

の部分ゲームとは，1点からなる情報集合をルートとする木を考えたとき，それが独立したゲームの木になっていることをいう。すなわち，その木に属する分岐点と属さない分岐点を同時に含む情報集合が存在しないことである。完全情報ゲームでは終点以外の分岐点はすべて，そこから始まる部分ゲームをもつ。すると，ツェルメロの定理と同じようにして後ろ向き帰納法で求めた純粋戦略でのナッシュ均衡は，**すべての部分ゲームにおいてナッシュ均衡である**ことがわかる。今日の，ゼルテンによる用語にしたがえば，この性質をもつナッシュ均衡は**部分ゲーム完全均衡**であるといわれる。この部分ゲーム完全性の概念は，あらゆる均衡選択の理論が通過しなければならない第一関門である。ナッシュの2人協力ゲームも，有限ではないが展開形のゲームであり，要求提示ゲームという部分ゲームをもっている。第一段階での脅し戦略によってきまる基準点が何であっても，この部分ゲームではナッシュ均衡が達成されていることはすでに述べたとおりである。1人ゲームの場合には，部分ゲーム完全性は，経済学のみならず数理計画や最適制御工学などで，時間を通じての最適化問題を解くための普遍的原理として知られているベルマンの**最適性原理**に帰着する。

このように，ゲームの展開形は，戦略を構成する各手番とそこで利用可能な情報をすべて記述しており，表現形式において最も根本的なものである。展開形から各プレイヤーの純粋戦略と利得の関係を抽出してコンパクトに記述すればナッシュの n 人ゲームがえられ，さらに結託を許して，結託としてのマックス・ミニ値を与えればNM理論の協力ゲームがえられる。こうして，原理的には，どんなゲーム状況も適当な展開形から導出できるわけであり，その意味で，適当な**非協力ゲームに還元して均衡を分析する**というナッシュ・プログラムは，展開形というそのための強力な土台を獲得したと言ってよい。事実，上で触れたゼルテンの部分ゲーム完全均衡や摂動均衡[58] はもちろん，その後のハルサニーの完全ベイズ均衡[59]，

58） Selten (1965, 1975).
59） Harsanyi (1967, 1968).

クレプス＝ウィルソンの逐次均衡[60] など，ほとんどの均衡選択の理論は，この展開形の上で開花したのである[61]。

4.5 ハルサニーの情報不完備ゲーム

最後に，ナッシュ・プログラムに自在な手足を与えることになった，ハルサニーの**ベイジアン・ゲーム**[62] について手短かに触れておきたい。これは，**情報不完備ゲーム**といって，ゲームのルールやプレイヤーの属性などに関する不確実性があるとき，その不確実な要素をいくつかのタイプに分類し，どのタイプであるかをあらわす先験的確率分布を付与することによって，その情報不完備ゲームを**情報完備ゲーム**に変換して分析するという方法である。この方法によれば，たとえば，相手が友好的か敵対的かわからないという情報不完備ゲームは，以下のように定式化される。まず，**自然**とよぶ架空のプレイヤーを仮定し，この自然が偶然手番として相手のプレイヤーのタイプをある先験的確率分布にしたがって選ぶ。この確率分布は，相手が友好的か敵対的かわからないという，自分の直面する不確実性を表現するものである。さらに，その選択結果は相手には知らされるが自分には知らされない。それゆえ，自分はその先験確率で友好的な相手とプレイし，残りの確率で敵対的な相手とプレイすることになる。相手は，友好的な代理人と敵対的な代理人から構成されるプレイヤーであり，それぞれの手番で選択する。このように，もとの情報不完備ゲームは，タイプを選び出す自然の偶然手番をもった（不完全情報の）情報完備ゲームに変換される。

いわゆるモラル・ハザードや逆選抜は，経済主体間に情報の非対称が存在するために発生する病理的な現象として知られている。価格メカニズムが作用するための大前提＝情報の対称性，が崩れているために取引が成立

60） Kreps and Wilson (1982).
61） Kohlberg and Mertens (1986) を除く。
62） Harsanyi (1967, 1968).

しえないのである。ハルサニーのベイジアン・ゲームは，そもそも，情報の非対称性をゲームに取り込むために登場した方法であるから，このように適切な分析方法の欠落した分野にとっては，まさに画期的なイノベーションとなる。組織や契約関係の経済分析を中心とする情報の経済学という新しい研究分野がそれによって急速に発展したのも当然であると言えよう。

また，これまで何度か触れてきたゼルテンの摂動均衡と，それを扱いやすくしたクレプス＝ウィルソンの逐次均衡などの，均衡選択理論におけるイノベーションや，さらに，部分ゲーム完全均衡によるフォーク定理で代表される繰り返しゲームの理論的進化も，情報経済学や新しい産業組織論の興隆に大きく貢献したことは言うまでもない。これらの新しい経済学に対するゲーム理論の貢献については，稿を改めてサーベイするのが適当であろう。

5. 経済学と数学，文学，生物学，そしてゲーム理論 —終わりに代えて

本稿では，ゲーム理論の基礎を築いたノイマン＝モルゲンシュテルンとナッシュの理論を中心に，おおよその骨格をたどってみた。この3人の理論が互いに補完しあって基本的な枠組みを構成していることは現在でも変わらないが，これに，繰り返しゲームを含む展開形の上での完全な合理性によるアプローチであるナッシュ・プログラムと，進化的ゲームによる限定された合理性のアプローチが加わり，方法論的にも互いに補完しあう分析方法が備わって理論全体がますます豊かに進化していることは言うまでもない。

応用研究もまた，枚挙にいとまがないほど，多岐多彩にわたっている。その中でも異色といえるものは，*Games and Economic Behavior* 誌に発表された，Brams の “Game theory and literature”[63] であろう。文

63） Brams (1994).

学作品の中に現われるゲーム的状況を数多く取り上げ，現代のゲームの概念での説明を試みた論文である。ブラムスは国際的に知られた政治学のゲーム理論家で文学や歴史に造詣が深い。数学を一切使わなくても第一線のゲーム理論の研究が可能であることを示す好例である。また，未公刊であるが，Greif, Milgrom and Weingast（1993）は，ギルドがなぜ存続しえたかという問題を，繰り返しゲームの理論から説明し，新しい光をあてている興味深い研究である。このように，経済史や文学にまで応用されるならば，ほとんどの分野に応用可能であるといっても過言ではない。しかし，ゲーム理論のそもそもの目的からすれば，文学や歴史に応用しうるのはむしろ当然なことである。それよりも，スミスやドーキンス[64]が生物学に取り入れたことの方が，興味関心をそそるのではあるまいか。マーシャルが経済学における生物学のアナロジーの重要性を説いたのは有名な話であるが，これらの生物学者達は，合理的な人間の行動を記述するはずの理論を，**プログラムされた遺伝子の行動**を説明するのに用いたのである。進化的ゲーム理論は，この独創的な発想に逆に触発されて生まれた。ゲーム理論とスミスの生物学は，たんなるアナロジーを超えて，実際，ナッシュ均衡の概念をその基本的な発想において共有しているのである[65]。

このようにみてくると，冒頭で触れたような，ゲーム理論家は小物だとか研究範囲が狭いなどというのは，どこか他の宇宙での話のように思えるであろう。ゲーム理論にかぎらず，数理的な方法全般に対する「常識的な」批判のほとんどは「現実からの遊離」という濡れ衣を着せることに終始するものである。しかし，数学を使わなくても，現実から全く遊離した経済学もあるし，逆に本稿でみたとおり，NM 理論やナッシュの理論は人間の合理的行動に対する深い関心から生まれたものである。「現実」か

64） Dawkins (1976).
65） スミスの『進化的に安定な戦略』は，ナッシュ均衡である。van Damme (1991) など参照。

らの遊離を批判する前に，その現実とは何かを責任をもって明らかにする必要があるであろう。

実は，本稿も終わりに近づいた頃，またぞろ，経済学の数理化を快く思わない書評が現われた。読売新聞2月6日付けの『過剰な数理化一致して危惧』と題した，中村達也の署名入りの，M・シェンバーグ編『現代経済学の巨星』（都留重人監訳）岩波書店，についての書評である。ハイエクの言葉の引用から始まるこの書評は，わずか800字余りをほとんど都留重人の後書きの丸写しででっちあげた代物であるが，「数理化に対する危惧」だけは自分の言葉であるらしい。寄稿した経済学者達が「過剰な数理化を一致して危惧」しているか否かは読むつもりもないのでわからないが，唯一の数理経済学者であるドゥブルーまでも「一致して危惧」しているはずはないと思ったので，そこだけを拾い読みした。案の定，である。競争均衡の存在証明に明け暮れた若き日の情熱と興奮を伝える文章の中に，それを否定する言葉などあるはずがないのである。

> 単なる物理学者でしかないような物理学者でも，一流の物理学者でありうる。しかし，単なる経済学者でしかないような人は，偉大な経済学者ではありえない。

中村達也によると，これはハイエクの言葉だそうである。これが事実だとしたら，ケインズもそうであったように，なぜ「偉大な」経済学者達は，経済学（＝自分）を天上にまで祭り上げなければ気が済まないのだろうか？　凡人の理解を超える経済学など，誰も必要としてはいない。必要なのは，『単なる経済学者でしかないような経済学者でも，一流の経済学者でありうる』ような学問に経済学が成長することであり，そのためには，まず，原理的には誰でも理解しうる普遍的な科学へと飛躍しなければならないのである。

参考文献

Arrow, K.J. and Debreu, G. 1954. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica* 22, 265–90.

Aumann, R.J. 1961. The core of a cooperative game without sidepayments. *Transactions of the American Mathematical Society* 98, 539–52.

________. 1964. Markets with a continuum of traders. *Econometrica* 32, 39–50.

________. 1985. An axiomatization of the non-transferable utility value. *Econometrica* 53, 599–612.

________. 1989. *Game Theory.* The New Palgrave, Game Theory. Eatwell, J. Milgate, M. and Newman, P. (eds) London: Macmillan Reference Books.

________ and Maschler, M. 1963. The bargaining set for cooperative games. *Annals of Mathematics Studies* 52, 443–476, Princeton: Princeton University Press.

________ and ________. 1985. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory* 36, 195–213.

________ and Peleg, B. 1960. von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments. *Bulletin of the American Mathematical Society* 66, 173–9.

Axcelrod, R. 1984. *The Evolution of Cooperation.* New York: Basic Books.

Binmore, K. 1990. *Essays on the Foundations of Game Theory.* Oxford: Basil Blackwell.

Brams, S.J. 1944. Game theory and literature. *Games and Economic Behavior* 6, 32–54.

Cournot, A.A. 1838. *Researches into the Mathematical Principles of the theory of Wealth.* Trans. N.T. Bacon, New York: Macmillan, 1899, reprinted 1929.

Davis, M.D. 1970. ゲーム理論入門. 桐谷維，森克美訳，講談社：ブルーバックス 1973.

Davis, M.D. and Maschler, M. 1965. The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics Quarterly* 12, 223–259.

Dawkins, R. 1976. 利己的な遺伝子. 日高，岸，羽田，垂水訳，紀伊国屋書店

1991.

Debreu, G. and Scarf. H. 1963. A limit theorem on the core of an economy. *International Economic Review* 4, 235–246.

Dixit, K. and Nalebuff, B.J. 1991. 戦略的思考とは何か. 菅野・島津訳, TBS ブリタニカ.

Dore, M., Chakravarty, S. and Goodwin, R. (eds) 1989. *John von Neumann and Modern Economics.* Oxford: Clarendon Press.

Flood, M.M. 1952. Some experimental games. *Research Memorandum RM–789,* RAND Corporation, June.

Fréshet, M. 1953. Emile Borel, Initiator of the theory of psychological games and its application, *Econometrica* 21, 95–127.

Gamow, G. and Stern, M. 1966. 数は魔術師. 由良統吉訳, 白揚社.

Greenberg, J. 1990. *The Theory of Social Situations.* Cambridge: Cambridge University Press.

Greif, A., Milgrom, P. and Weingast, B.R. 1993. Coordination, commitment and enforcement: The case of the merchant gild. mimeo.

Harsanyi, J.C. 1956. Approaches to the bargaining problem before and after the theory of games: a critical discussion of Zeuthen's, Hicks' and Nash's theories. *Econometrica* 24, 144–57.

________. 1967–8. Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, parts Ⅰ, Ⅱ and Ⅲ. *Management Science* 14, 159–82, 320–34, 486–502.

________. 1974. An equilibrium-point interpretation of stable sets and a proposed alternative definition. *Management Science* 20, 1472–1495.

________. 1977. *Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations.* Cambridge: Cambridge University Press.

________. and Selten, R. 1988. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games.* MIT Press.

Kalai, E. 1975. Excess functions for cooperative games without sidepayments. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 29, 60–71.

________. and Smorodinsky, M. 1975. Other solutions to Nash's bargaining problem. *Econometrica* 43, 513–18.

Kaneko, M. 1981. A bilateral monopoly and the Nash cooperative solution. *Journal of Economic Theory* 24, 311–317.

Kohlberg, E. and Mertens, J–F. 1986. On the strategic stability of equilibria. *Econometrica* 54, 1003–38.

Kreps, D.M. and Wilson, R. 1982. Sequential equilibria, *Econometrica* 50, 863–894.

Kuhn, H.W. 1953. Extensive games and the problem of information. In Kuhn and Tucker (eds) *Contributions to the Theory of Games II,* Annals of Mathematics Studies 28, Princeton: Princeton University Press.

神取道宏. 1994. ゲーム理論による経済学の静かな革命. 岩井克人・伊東元重編『現代の経済理論』, 東大出版, 1994年.

Luce, R.D. and Raiffa, H. 1957. *Games and Decisions.* New York: John Wiley.

Mirowski, P. 1992. What were von Neumann and Morgenstern trying to accomplish? In Weintraub (1992), 111–147.

Nakayama, M. 1983. Note on a generalization of the nucleolus to a game without sidepayments. *International Journal of Game Theory* 12, 2, 115–122.

________. 1993. Self-binding strategies for a coalition, mimeo.

西山賢一. 1986. 勝つためのゲーム理論. 講談社ブルーバックス.

野崎昭弘. 1976. 詭弁論理学. 中公新書.

Osborne, M.J. and Rubinstein A. 1990. *Bargaining and Markets.* San Diego: Academic Press.

Peleg, B. 1963. Bargaining sets of cooperative games without side payments. *Israel Journal of Mathematics* 1, 197–200.

Raiffa, H. 1992. Game theory at the university of Michigan, 1948–1952. In Weintraub (1992), 165–175.

Roth, A.E. 1993. The early history of experimental economics. *Journal of the History of Economic Thought* 15, 184–209.

Samuelson, P.A. 1989. A revisionist view of von Neumann's growth model. In Dore, Chakravarty and Goodwin (1989), 100–122.

Schmeidler, D. 1969. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 17, 1163–1170.

Selten, R.C. 1965. Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit. *Zeitschrift für die gesammte Staatswissenschaft* 121, 301–24; 667–89.

________. 1975. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory* 4, 25–55.

Shapley, L.S. 1953. A value for n-person games. In Kuhn and Tucker (eds), *Contributions to the Theory of Games II,* Annals of Mathematics Studies 28, Princeton: Princeton University Press.

_______. 1969. Utility comparison and the theory of games. In Guilbaud, G.T. (ed.) *La décision.* Paris: Editions du CNRS.

_______. and Shubik, M. 1954. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American Political Science Review* 48, 787–92.

_______. and _______. 1967. Ownership and the production function. *Quarterly Journal of Economics* 81, 88–111.

_______. and _______. 1969a. On market games. *Journal of Economic Theory* 1, 9–25.

_______. and _______. 1969b. On the core of an economic system with externalties. *The American Economic Review* 59, 678–684.

Shubik, M. 1959. Edgeworth market games. In Luce, R.D. and Tucker, A.W. (eds.) *Contributions to the Theory of Games IV.* Annals of Mathematics Studies 40, Princeton: Princeton University Press.

_______. 1992. Game theory at Princeton, 1949–1955: a personal reminiscence. In Weintraub (1992), 151–163.

Smith, J.M. 1985. 進化とゲーム理論. 寺本・梯訳，産業図書.

鈴木光男. 1970. 人間社会のゲーム理論. 講談社現代新書.

_______編. 1973. ゲーム理論の展開. 東京図書.

_______. 1994. 新ゲーム理論. 勁草書房.

_______. 1995. ゲーム理論の 50 年 1 ナッシュのゲーム理論への貢献. 経済セミナー 1995 年 1 月号.

Suzuki, M. and Nakayama, M. 1976. The cost assignment of the cooperative water resource development: a game theoretical approach. *Management Science* 22, 1081–1086.

Tucker, A.W. 1950. A two-person dilemma. mimeo. Stanford University.

Ulam, S., Kuhn, H.W., Tucker, A.W. and Shannon, C.E. 1968. ジョン・フォン・ノイマン. 恒藤敏彦訳. Fleming, D. and Bailyn, B. (eds) 亡命の現代史 3 知識人の大移動 I 自然科学者. 広重徹・渡辺格・恒藤敏彦訳，みすず書房.

Weintraub, E.R. ed. 1992. *Toward a History of Game Theory.* Annual Supplement to Volume 24, History of Political Economy. Durham and London: Duke University Press.

Williams, J.D. 1954. *The Complete Strategist, Being a Primer on the Theory of Games of Strategy.* New York: McGraw-Hill Book Co.

van Damme, E. 1991. *Stability and Perfection of Nash Equilibria.* 2nd edition. Springer-Verlag.

von Neumann, J. 1953. Communication on the Borel notes. In Fréshet (1953).

_______ and Morgenstern, O. 1953. *Theory of Games and Economic Behavior.* 3rd edition. New York: John Wiley & Sons.

安井琢磨・福岡正夫. 1977. ウィリアム・ジャッフェ　ワルラス経済学の誕生. 日本経済新聞社.

Zermelo, E. 1912. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians* II, 501–504.

Zeuthen, F. 1930. *Problems of Monopoly and Economic Warfare.* London: Routledge & Sons.