

## 木造ラチスシェルに関する研究：弾性座屈荷重最大化による形態創生

熊川, 恵理子 / KUMAKAWA, Eriko

---

(発行年 / Year)

2011-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2011-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

P377.5  
M35-2  
2010-28

2010年度 修士論文

木造ラチスシェルに関する研究  
—弾性座屈荷重最大化による形態創生—

法政大学大学院 工学研究科 建設工学専攻 建築学領域

09R5326

クマカワ エリコ

熊川 恵理子

主査 佐々木睦朗 教授

副査 吉田 長行 教授

坪井 義隆 教授



# 目次

## 第1章 序論

1.1	研究の背景	1
1.2	既往の研究	2
1.3	研究の目的	3
1.4	論文の構成	4

## 第2章 理論準備

2.1	概説	5
2.2	座屈解析の手法	
2.2.1	線形座屈解析法	6
2.2.2	弾性座屈解析法	7
2.2.3	ノックダウンファクターによる弾性座屈解析法	9
2.3	接合部における曲げ剛性の評価	11

## 第3章 弾性座屈荷重最大化による木造ラチスシェルの形態創生

3.1	概説	13
3.2	弾性座屈荷重最大化を目的とする形態創生の定式化	13
3.3	数値解析例	
3.3.1	例題1: 線形座屈荷重係数最大化による数値解析例	20
3.3.2	例題2: 弾性座屈荷重最大化による数値解析例	26
3.3.3	2つの形態創生の比較	33
3.4	結語	36

## 第4章 結論

4.1	総括	37
4.2	今後の展望	38

## 付録 A NURBS 曲線による形状表現

A.1	NURBS とは	付 1
A.2	4次元座標系の導入と有理化	
A.3	NURBS 曲線	
A.4	NURBS 曲面	付 2
A.5	制御点と重みによる形状表現	
A.6	NURBS の制御点と有限要素の節点	付 3

## 付録 B 制約付き最適化手法

B.1	概説	付 5
B.2	非線形計画問題に対する逐次2次計画法	
B.2.1	最適性の条件	付 5
B.2.2	制約付き問題に対する準ニュートン法	付 6
B.2.3	ペナルティ関数と直線探索	付 8
B.2.4	大域的収束性と超1次収束の両立	付 10
B.2.5	逐次2次計画法のアルゴリズム	付 13
B.3	2次計画問題に対する双対法	
B.3.1	最適性条件とJ-最適解	付 14
B.3.2	双対法	付 16

## 付録 C 半剛接立体骨組の要素剛性マトリックスの詳細

C.1	半剛接立体骨組の要素剛性マトリックス	
C.1.1	軸要素	付 23
C.1.2	曲げ要素	付 24
C.1.3	ねじり要素	付 26
C.1.4	半剛接立体骨組の要素剛性マトリックス	付 26
C.2	微分の定式化	
C.2.1	半剛接立体骨組の要素剛性マトリックスの微分	付 23

## 付録 D 木質構造物の設計

D.1	部材の設計	付 29
D.2	接合部の設計	付 30

参考文献

謝辭

# 第1章

## 序論

### 1.1 研究の背景

近年、温室効果ガスの排出による地球温暖化をはじめとした地球環境に関する重要な問題がある。そのため、私達が扱う建築においても環境負荷の少ない建築材料・工法を選択するなど、地球環境に配慮する必要がある。林野庁のホームページ<sup>(1)</sup>を参考に図 1.1 に、住宅一戸あたりの工法と炭素放出量の関係を示した。図中 b の炭素貯蔵量を a の材料製造時の炭素放出量において「-」（マイナス）評価すれば、住宅一戸の建築を通じた炭素放出量「a-b」は工法ごとに、木造住宅が-0.9[t]、鉄骨プレハブ住宅が 13.2[t]、鉄筋コンクリート住宅が 20.2[t]となり、木造住宅の有用性がわかる。また、このデータは住宅に関するものではあるが、同様のことが木造建築全般についても判断できる。

木造建築には、特有の風味や柔らかさ・香りといった長所があり、人にやすらぎや安堵感をあたえる素材としての魅力がある。一方、耐火性が低いという点から住宅など小規模建築に限られることが多い。事実、法的に多くの規制を受けたという歴史がある。近年になり大断面の木材の耐火性が確認され、1987年の建築基準法改正・海外からの日本の林産物市場開放に伴い、木造が再び見直され、図 1.2 の木の花ドームや図 1.3 の大館樹海ドームなど、木質空間構造物の実現に至っている。しかし、接合部における曲げ剛性の低下やクリープなどの短所から大規模建築への採用は少ない。

また、ドームなどの大空間構造物に採用されている単層ラチスシェル構造では座屈が問題になることがある。そこで固有値問題として求めることができる線形座屈解析にて、その線形座屈荷重や座屈性状などを十分に検討する必要がある。ただし、座屈前変形が大きい場合には、その荷重と変形の関係が幾何学的非線形関係となり、その際の座屈荷重は弾性座屈荷重と呼ばれ、線形座屈荷重の半分程度となることが知られている。

さらに、今日では設計・施工技術の発展により、多様な形態の建築物が実現可能となったが、必ずしも力学的に合理的なものばかりとは言えない。だからと言って、かつての RC シェルのような単純な幾何学的形態を基にしたデザインで、現代の先駆的な形態の実現は困難である。そこで、コンピュータの飛躍的な進歩と解析技術（有限要素法）の発展に伴い、幾何学的な制約のない自由曲面を構造物に適応させている。佐々木ら<sup>(2)</sup>は感度解析を用いて構造物の歪エネルギーを最小化するという考え方にに基づき、力学的に合理的な自由曲面シェルを創生する逆解析的な形態解析手法を提案し、図 1.4 の福岡アイランドシティ中

中央公園中核施設ぐりんぐりんにて実現している。

形態解析を一種の逆解析としてみれば、構造設計においてもさまざまな応用の可能性が考えられている。なかでも魅力的な応用例は構造物の造形的な可能性にあり、主として形態抵抗型の空間構造において威力を発揮すると考えられる。そのような形態創生を対象として構造を建築の重要な形態言語として利用しようとする場合、形態解析あるいは形態デザインは、構造の形態に力学的な裏付けによる実現の保障を与えるものとなる。そしてそれは、これからの新世代の構造デザインの形態デザインを支援する一つの強力な手法として期待されている。

		木造住宅	鉄骨プレハブ住宅	鉄筋コンクリート住宅
a	材料製造時の炭素放出量	5.1	14.7	21.8
b	炭素貯蔵量	6	1.5	1.6
a-b		-0.9	13.2	20.2

図 1.1 住宅一戸あたりの材料製造時の炭素放出量と炭素貯蔵量<sup>(1)</sup>[単位:t]



図 1.2 木の花ドーム<sup>(2)</sup> (右：外観・左：内観)

図 1.3 大館樹海ドーム外観<sup>(4)</sup>



図 1.4 福岡アイランドシティ中央公園中核施設ぐりんぐりん<sup>(6)</sup>



## 1.2 既往の研究

単層ラチスシェルを扱う場合、座屈が主な問題となる(以下、本論文でいう「ラチスシェル」は「単層ラチスシェル」のことを言う)。そのため、その座屈に影響を及ぼしうる形状初期不整や座屈性状に関する研究が多数行われている。例えば、小河ら<sup>(6)</sup>は形状初期不整の与え方が座屈荷重に対してどのような影響を与えるのかを解析的に調べ、その座屈荷重の低減率を示している。また、加藤ら<sup>(7)</sup>は荷重不整・形状初期不整を与えた際に座屈挙動にどのような影響を及ぼすのかを解析的に分析している。ただし、これらの研究ではS造のラチスシェルを対象としている。

また、ラチスシェルでは線形座屈荷重と弾性座屈荷重に大きなズレが生じることから、荷重増分法などによる幾何学的非線形解析が必要となる。しかし、幾何学的非線形解析は線形座屈解析に比べ、煩雑で解析時間がかかることがある。そこで加藤<sup>(8)</sup>らは、線形座屈荷重に対する弾性座屈荷重の比率をロックダウンファクターとして定義し、線形座屈荷重から弾性座屈荷重を推定する手法を導き出している。さらに、剛接合のラチスシェルのみならず、半剛接合のラチスシェルにおけるロックダウンファクターの導出<sup>(9)</sup>にも及んでいる。

対して木造ラチスシェルでは、S造ラチスシェルでの課題のほかに、木材特性がその力学性状に大きく関係してくる。前節でも述べたように、木材にはめり込みという現象がある。特にボルト接合部においては、力を加えた際にボルトが木材にめり込んでいくため、接合部が完全な剛接合ともピン接合ともならない。そのため接合部を的確に評価しモデル化することが重要な課題となる。そこで、松野<sup>(10)</sup>らは実験と理論から木造ラチスシェルの接合部の力学特性の算定式を導出し、モデル化を行っている。

ラチスシェルの形態創生に関する研究では、大崎ら<sup>(11)</sup>がS造ラチスシェルを対象として、線形座屈荷重最大化と部材一様化を目的とした形状最適化を修正許容方向法にて行っている。また、本研究室においても小林<sup>(12)</sup>は設計外力に対し安定性の高い構造形状を生成するために、線形座屈荷重係数最大化を目的とした単層ラチスシェル構造の形状最適化を逐次2次計画法にて行っている。そして解析結果から力学性状について詳細に分析することで、座屈荷重と構造形状の間にある力学的な傾向を把握した。

こうした松野<sup>(10)</sup>らの研究と形態創生に関する研究を参考に、木造ラチスシェルを解析対象とした歪エネルギー最小化を目的とする形態創生を高橋<sup>(13)</sup>らが研究を行っている。この研究では、接合部を半剛接合として木造ラチスシェルの形態創生を行い、接合部特性の違いが架構全体の力学性状に与える影響について検討している。また、今年度の同研究室での研究<sup>(14)</sup>では、ラチスシェルにおいては座屈性状が重要な検討項目になる背景から、木造ラチスシェルを解析対象とした線形座屈荷重係数の最大化を目的とする形態創生を行っている。

### 1.3 研究目的

1.1 節で述べたような木造建築の有用性から木造ラチスシェルを採用し、1.1 節で述べた弾性座屈荷重の検討の必要性和、1.2 節で述べた弾性座屈荷重推定式の提案を踏まえて、木造ラチスシェルの弾性座屈荷重の最大化による形態創生を行う。手順としては、解析モデルに制御点を設け、その制御点位置を変数とする弾性座屈荷重を目的関数とした感度解析を行う。

通常、非線形問題に対して感度解析を用いることは困難である。しかし、新たに提案された、線形座屈荷重と弾性座屈荷重の比を表すノックダウンファクターを導入することにより、非線形問題を線形問題として解くことが可能になる。

### 1.4 論文の構成

論文の構成は以下のとおりである。

第1章では、本研究の目的を決めるにあたっての研究の背景・既往の研究について説明する。

第2章では、本研究で用いる既往の手法について説明する。始めに、座屈解析について説明する。次に、既往研究にて定式化されている接合部における曲げ剛性の評価手法について説明する。

第3章では、2章で述べた座屈解析手法と感度解析手法を用いた、半剛接部を有する木造ラチスシェルの弾性座屈荷重の最大化による形態創生の定式化を行う。続いて、その手法を、ボルト接合による木造単層格子シェルに対し、実行する。また、同様のモデルに対し、すでに定式化されている線形座屈荷重係数最大化を実行し、各解析手法と各数値の最大化による形態の比較・分析を行う。

第4章では、本研究について総括し、今後の展望について述べる。

## 第2章

### 理論準備

#### 2.1 概説

本章では、木造ラチスシェルの弾性座屈荷重最大化による形態創生を行うために必要となる座屈解析法と曲げ剛性の評価方法に関する基礎理論の説明を行う。

第2.2節では、座屈解析の手法について述べる。汎用プログラムで用いられている線形座屈解析と幾何学的非線形性を考慮した弾性座屈解析のほか、ロックダウンファクターによる弾性座屈解析について説明する。

第2.3節では、ロックダウンファクターを用いた座屈解析法にて必要となる接合部における曲げ剛性の評価方法を説明する。

#### 2.2 座屈解析の手法

構造物の座屈解析は、柱・板・球形シェルなどの連続体の座屈に関して多くの実績がある。対して、骨組みで構成されたシェルの座屈に関しては、連続体シェルとの関連を考慮しながら設計<sup>(15)</sup>や解析技術が蓄積されてきた。しかし、形状が一様でない場合や境界条件が複雑な場合などでは、シェル理論を用いることは困難である。そうした場合には、マトリックス幾何剛性法などを利用し、線形座屈荷重を求める手法がとられてきた。また、荷重に対して変形量大きい場合には弾性座屈荷重を求めることが必要で、幾何学的非線形解析がなされてきた。ただし、幾何学的非線形解析は厳密解を得るために時間がかかるという問題があった。そこで、境界条件や荷重条件などの関連から弾性座屈荷重を算出するロックダウンファクターという研究がはじめられた。

以上のような背景を踏まえ、第2.2.1節では、座屈時の荷重と変形の関係に線形性を持つ線形座屈解析法について説明する。続いて第2.2.2節では、幾何学的非線形性を考慮した弾性座屈解析法について説明する。さらに第2.2.3節では、本研究で重要となる、線形座屈荷重とロックダウンファクターから弾性座屈荷重を算出する座屈解析法について説明する。

また、一般的に座屈現象として全体座屈・個材座屈・局所座屈があるが、本研究では全体座屈を対象として研究を進めていく。ただし、個材座屈・局所座屈に関しては、付録Bで示す手法で1つの部材に生じる応力が許容応力値以内に収まるように制約条件を設け、さらに、一様な節点荷重を対象とするため、発生しないものとする。

### 2.2.1 線形座屈解析法

本節では、第2.2.3節で説明するノックダウンファクターを用いた弾性座屈解析で用いる線形座屈荷重の求め方について、文献<sup>(16)</sup>を参考に簡略的に説明する。

線形座屈解析は、座屈前の変形が構造物の安定性に与える影響は小さいという条件のもと、線形座屈荷重係数を固有値問題として解くものである。ここで、基準荷重ベクトル  $P_0$ 、線形座屈荷重係数  $\lambda$  として比例載荷荷重  $\lambda P_0$  が作用する構造物について考える。この線形座屈荷重係数  $\lambda$  の増加、つまり、比例載荷荷重  $\lambda P_0$  の増加とともに、構造物の瞬間的な堅さを示す接線剛性  $K_T$  が低下し、 $K_T=0$  のとき座屈点に達する。そしてこの点での荷重を座屈荷重という。

いま、荷重係数  $\lambda$  を静的釣合い曲線における載荷経路パラメータ  $\lambda_0$  を基準となる設計荷重係数とする。また、 $\lambda=\lambda_0$  に対応する荷重  $P=\lambda_0 P_0$  が作用したときの変形状態が得られているものとし、この状態を参照状態とする。また、接線剛性  $K_T$  は変形により変化する線形剛性行列  $K_L$ 、初期変位剛性行列  $K_u$ 、初期応力剛性行列  $K_\sigma$  により式(2.1)のように示される。

$$K_T = K_L + K_u + K_\sigma \quad \text{式(2.1)}$$

この変位・応力は荷重により変化し、変位・応力は荷重係数の関数であるので、 $K_T \cdot K_u \cdot K_\sigma$  は  $\lambda$  の関数となる。そこで、 $\lambda$  を  $\lambda_0$  から  $\lambda_0+\Delta\lambda$  まで増加させたとき、それらの変化量を記号  $\Delta$  にて表すと式(2.2)の通りになる。

$$K_T(\lambda_0 + \Delta\lambda) = K_L + K_u(\lambda_0) + \Delta K_u + K_\sigma(\lambda_0) + \Delta K_\sigma \quad \text{式(2.2)}$$

ただし、冒頭で述べたように座屈前の変形は十分に小さいので、式(2.2)の第2・3項の変形に関する項を無視し、 $K_\sigma$  が  $\lambda$  に比例するとして、接線剛性  $K_T$  は式(2.3)のように示される。

$$K_T(\lambda_0 + \Delta\lambda) = K_L + \frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0} K_\sigma(\lambda_0) \quad \text{式(2.3)}$$

ここで、荷重係数の倍率  $\mu=(\lambda_0+\Delta\lambda)/\lambda_0$  を用いると、座屈時の荷重倍率  $\mu_{cr}$  は、式(2.4)に示す固有値問題を解いて得られる。このような座屈荷重係数の定義を図2.1に模式的に示す。

$$[K_L + \mu_{cr} K_\sigma(\lambda_0)] \phi = 0 \quad \text{式(2.4)}$$

ここで、ベクトル  $\phi$  は座屈モードを表す。

基準荷重  $P_0$  が作用したときの初期応力剛性行列  $K_G$  は、一般に幾何剛性行列と呼ばれる。荷重が 0 の場合、つまり  $\lambda=0$  の無変形状態を参照状態とすると、 $K_0=\lambda K_G$  であり、式(2.4)を変更すると、座屈荷重係数  $\lambda_{cr}$  は式(2.5)に示す固有値問題における正の最小固有値として定義される。

$$[K_L + \lambda_{cr} K_G] \phi = 0 \tag{2.5}$$

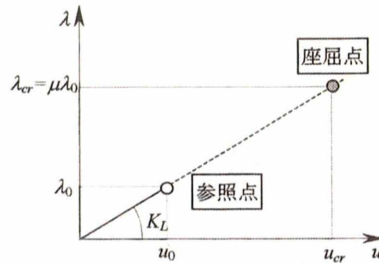


図 2.1 線形座屈解析<sup>(16)</sup>

### 2.2.2 弾性座屈解析法

第 2.2 節でも述べたように、単層ラチスシェルは荷重時の変形が大きく、変形に応じて力の流れ方も変化する。その際の座屈荷重を弾性座屈荷重といい、これは線形座屈荷重に比べ小さくなる。文献<sup>(16)</sup>によれば線形座屈荷重に対する弾性座屈荷重は 1/2 程度と記載されている。例えば、図 2.2、左のような単純なモデルの①節点に関して、荷重 - 変形の関係グラフにおける線形座屈荷重と弾性座屈荷重の関係は図 2.2 の右のようになる。

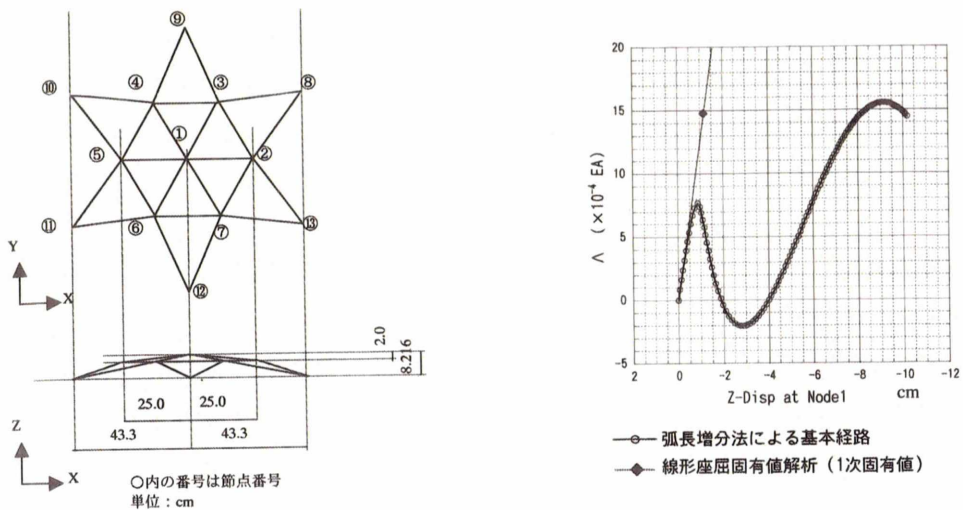


図 2.2 左:モデル図 右:基本釣合い経路と線形座屈荷重係数の関係<sup>(16)</sup>

こうした現象に対して、増分理論をもちいた弧長増分法や荷重増分法による幾何学的非線形解析を行うことで弾性座屈荷重は求められている。第3.3.2節にて、本研究の整合性を確認するために汎用解析ソフトのMIDASの弧長増分法による非線形解析を用いている。ここで、文献<sup>(16)(17)</sup>を参考に、弧長増分法による幾何学的非線形解析について説明する。

### ・ 幾何学的非線形解析

荷重-変位関係が図2.3のような非線形にあるものを例に説明する。ただし、 $n\lambda$ をn-stepにおける荷重係数とし、 $f$ を基準荷重、 $n\mathbf{u}$ をn-stepにおける変位とする。

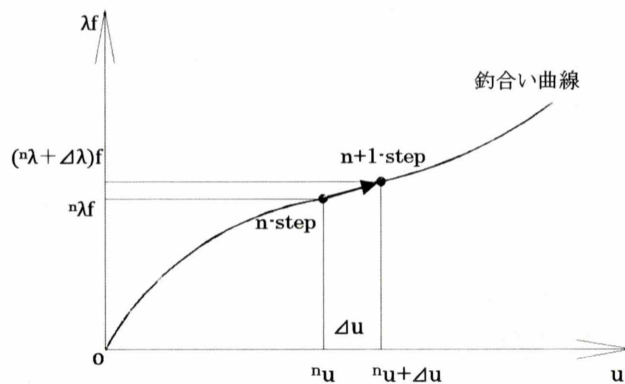


図 2.3 荷重-変位関係

幾何学的非線形解析において、n-step と n+1-step の微小区間では荷重-変位関係は線形であるという仮定のもとで解析をする。そこで、荷重増分量(図2.3での $\Delta\lambda$ )あるいは、変位増分量( $\Delta\mathbf{u}$ )を一定として制御していくことが考えられる。しかし、非線形性の強い場合や荷重増分量に対して変位増分量が大きい場合には、厳密解との誤差が大きくなったり、解が発散したりすることが考えられる。そこで、より厳密なかいを得るために弧長法を用いる。

### ・ 弧長増分法

図2.3のn-step と n+1-step 区間に注目した図2.4を用いて弧長増分法を説明する。ただし、図における符号は図2.3と同様のものとし、 $\Delta\lambda$ と $\Delta\mathbf{u}$ の添え数字はn-step と n+1-step 区間において何度目の反復計算かを示す。また、 $\Delta l$ はベクトル長を示す。

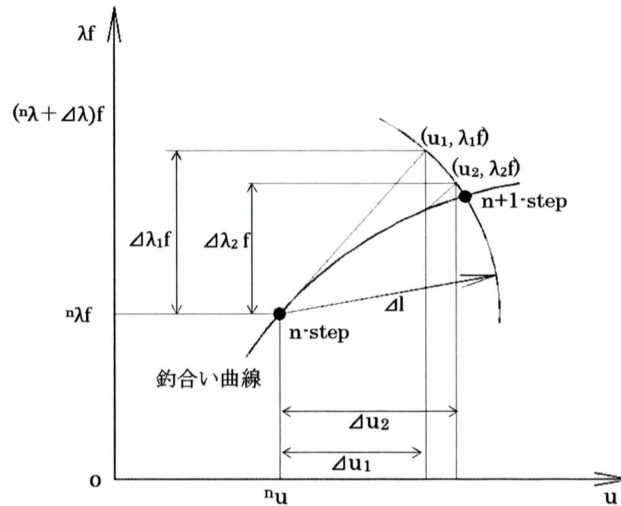


図 2.4 荷重-変位関係と弧長増分法

図 2.4 に示した手法は、弧長法の中でも球面経路法と言われるもので、直前の収束解(n-step の●)を中心とする半径 $\Delta l$ の円と釣合い曲線の交点が次の収束解(n+1-step の●)になることを示している。 $\Delta \lambda$  と  $\Delta u$  の添え数字にあるように、n-step と n+1-step 区間内において 1,2,... と反復を収束するまで繰り返す。さらに、この n-step と n+1-step 区間での計算を、予め決めておいた最大変位などの終了条件まで繰り返す。

### 2.2.3 ノックダウンファクターによる弾性座屈解析法

第 2.2.2 節では幾何学的非線形解析を極めて単純に説明したが、実際は煩雑で解析時間がかかる。そこで、より簡単に弾性座屈荷重を推定する方法が研究されている。近年、加藤ら<sup>(9)</sup>により線形座屈荷重にノックダウンファクターをかけることにより弾性座屈荷重を算定する手法が定式化されている。さらに、接合部が半剛接合の場合での曲げ剛性を考慮したノックダウンファクターも定式化<sup>(18)</sup>されている。

この手法において弾性座屈荷重は、式(2.6)に示すように、線形座屈荷重とノックダウンファクターの積により算出する。

$$P_{cr(\kappa)}^{el} = \alpha_{0(\kappa)} \times P_{cr(\infty)}^{lin} \tag{2.6}$$

$P_{cr(\kappa)}^{el}$  : 弾性座屈荷重 [kN]

$P_{cr(\infty)}^{lin}$  : 線形座屈荷重 [kN]

$\alpha_{0(\kappa)}$  : ノックダウンファクター

式(2.6)の線形座屈荷重は以下の式(2.7)で示し、

$$P_{cr(\infty)}^{lin} = \mu_q \times P_0 \quad \text{式(2.7)}$$

$\mu_q$  : 線形座屈荷重係数

$P_0$  : 基準荷重 [kN]

線形座屈荷重係数  $\mu_q$  は第 2.2.1 節で説明したような手法で求められる。具体的には式(2.8)の一般固有値となるようになる。

$$(K_L + \mu_q K_\sigma) \Phi = 0 \quad \text{式(2.8)}$$

ここで、 $K_L$  は要素剛性マトリックス、 $K_\sigma$  は幾何剛性マトリックス、 $\Phi$  は線形座屈モードを表す。

また、ノックダウンファクターは多数のモデルに対して線形座屈解析と弾性座屈解析を実行し、その線形座屈荷重値と弾性座屈荷重値の比率から、算出式(式(2.9))を導き出している。

$$\alpha_{0(\kappa)} = \alpha_0 \times \xi_{(\kappa)} \quad \text{式(2.9)}$$

$\alpha_0$  : 0.7(一定値)

$\xi_{(\kappa)}$  : 曲げ剛性の座屈荷重への影響係数

$$\xi_{(\kappa)} = \begin{cases} 0.47 \times \log_{10}(\kappa) + 0.34 & (1 \leq \kappa < 10) \\ 0.19 \times \log_{10}(\kappa) + 0.62 & (10 \leq \kappa < 100) \\ 1.0 & (100 \leq \kappa) \end{cases} \quad \text{式(2.10)}$$

さらに、式(2.10)の  $\xi_{(\kappa)}$  は接合部の曲げ剛性の大きさによって1つの式を選択して求まる。この曲げ剛性を直接評価した無次元化回転バネ定数  $\kappa$  は式(2.11)のように定義される。

$$\kappa = \frac{K_{\text{曲げ}} \times L_0}{E \times I_x} \quad \text{式(2.11)}$$

$\kappa$  : 無次元化曲げ剛性

$K_{\text{曲げ}}$  : 接合部における面外曲げ剛性 [kN・m/rad]

$L_0$  : 部材長 [m]

$E$  : 木母材のヤング係数 [kN/m<sup>2</sup>]

$I_x$  : 木母材の断面2次モーメント [kN/m<sup>2</sup>]

式(2.11)で用いられる接合部の曲げ剛性( $K_{\text{曲げ}}$ )に関しては第 2.3 節にて詳しく説明する。また、 $L_0$  に関しては解析モデルの全部材の曲げ剛性を評価したのではなく、解析モデルの形態を評価しているものである。単層格子ラチスシェルの場合に限って、式(2.12)のように定義した。



$$L_0 = \frac{\sum_i^m L_i}{m} \quad \text{式(2.12)}$$

- $m$  : 全部材数  
 $i$  : 部材番号  
 $L_i$  :  $i$  番目部材の部材長

### 2.3 接合部における曲げ剛性の評価手法

今回の研究において接合部は鋼板挿入式のボルト接合とする。この場合、ボルト径とボルト径の差によるガタ及び、接合部に力を加えた際のボルトの木材へのめり込み現象により、接合部は剛接合でもピン接合でもない半剛接合となる。この接合部の剛性を的確に評価することが重要であり、この評価方法として、松野の研究<sup>(12)</sup>を参考にする。

曲げ剛性の評価式はボルトごとに曲げ剛性を評価し、その和にて定義され、式(2.13)に示す。

$$K_{\text{曲げ}} = \sum (\alpha_{mk} \times k_{\theta i} \times L_b \times D_b \times r_i^2) \times \beta_{mk} \quad \text{式(2.13)}$$

- $\alpha_{mk}$  : ボルト長・ボルト径当たりの木材めり込み剛性に関する影響係数(実験定数)

$$\alpha_{mk} = 0.85$$

- $\beta_{mk}$  : ボルト本数に関する影響係数(実験定数)

$$\beta_{mk} = 1$$

- $L_b$  : 木材中のボルト長(木材幅)[m]

- $D_b$  : ボルト径[m]

- $r_i$  : ボルトの曲げ回転の中心からの距離[m]

- $k_{\theta i}$  : 木材繊維方向に対して  $\theta$  方向のボルト長・ボルト径のめり込み剛性[kN/m]

ただし、木材繊維方向に対して  $\theta$  方向にめり込むボルトのボルト長・ボルト径あたりのめり込みめり込み剛性  $k_{\theta i}$  はハンキンソン式<sup>(19)</sup>によって定義され、式(2.14)~(2.16)のようになる。また、式(2.15)<sup>(20)(21)</sup>と式(2.16)中の計算に関する単位系は[tf]と[cm]を用い、計算後に[kN]と[m]の単位系に変換して、解析を進めている。

$$k_{\theta i} = \frac{k_{0i} \times k_{90i}}{k_{0i}(\sin \theta)^2 + k_{90i}(\cos \theta)^2} \quad \text{式(2.14)}$$

- $k_{0i}$  : 木材繊維方向のボルト長・ボルト径当たりの木材めり込み剛性[kN/m<sup>3</sup>]

- $k_{90i}$  : 木材繊維直交方向のボルト長・ボルト径当たりの木材めり込み剛性[kN/m<sup>3</sup>]

- $\theta$  : 木材の繊維方向に対するボルトのめり込み方向

$$k_{0i} = \frac{E_w}{31.6 + 10.9 \times D_b} \quad \text{式(2.15)}$$

$$k_{90i} = \frac{k_{0i}}{4.3} \quad \text{式(2.16)}$$

また、接合部における回転中心とボルトの回転半径の関係は図 2.5 に示す通り。図 2.5 中において、i 番目接合部  $D_i$  はモーメント力  $M$  によって  $\theta_M$  だけ回転して点  $B_i$  に移動したとする。また、すべり変位  $S_i$  は  $\theta_i$  度傾いているとする。

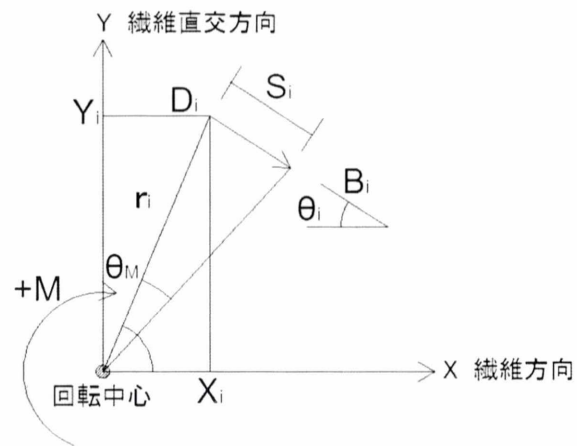


図 2.5 接合部における回転中心とボルトの回転半径の関係

ただし、接合部の面外曲げ要素の剛性に対して軸要素の剛性は十分に大きいことから、軸要素に関しては剛接合とする。

## 第3章

# 木造ラチスシェルの弾性座屈荷重最大化による形態創生

### 3.1 概説

本章では、第2節で説明したノックダウンファクターによる弾性解析法を用いた形態創生について定式化及び、解析モデルによる解析手法と解析結果の関連性を分析する。

第3.2節では、第2.2.3節で説明したノックダウンファクターによる弾性座屈荷重を感度解析法により最大化を図る形態創生の手法について説明する。

第3.3節では、まず、同研究室の既往研究よって定式化されている手法<sup>(14)</sup>において、面外要素において半剛接合を考慮し、さらに許容応力度による制約条件も考慮した場合の解析結果を示す。続いて、第3.2節で説明したノックダウンファクターを用いた手法による解析結果を示す。さらに、解析手法の違いが解析結果にどのように影響するのかを分析する。

第3.4節では、本章の結語を示す。

### 3.2 弾性座屈荷重最大化を目的とする形態創生の定式化

本章で用いるラチスシェルの弾性座屈荷重最大化問題としての形態創生法は、付録Bに示す逐次2次計画法を用いて非線形計画問題を解くものである。その非線形計画問題の目的関数をラチスシェルの弾性座屈荷重とし、制約条件には付録Dに示す許容応力度を用いる。設計変数は、節点座標をスプライン関数の一種であり、付録Aに示すNURBSによって表現している制御点座標とする。この形態創生手法の定式化は以下のようなになる。

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimize} & f(q) = -P^{el} \\
 \text{subject to} & c_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, l) \\
 & c_i \geq 0, \quad (i = l + 1, \dots, m)
 \end{array} \tag{3.1}$$

ここで、 $q$  は形状に関する制御点座標からなる行列の設計変数であり、 $f(q)$  は目的関数である弾性座屈荷重、 $c_i(q)$  は制約関数を表す。また、目的関数の弾性座屈荷重  $P^{el}$  は第2.2.3節の式(2.6)で示したようにノックダウンファクターと線形座屈荷重の積である。

・ 感度解析

本節では、設計変数である形状に関する制御点座標  $q$  に関する線形座屈荷重係数の偏微分を行い、勾配を求める。

まず、弾性座屈荷重  $P^{el}$  の節点座標  $r$  に関する偏微分を線形座屈荷重係数感度と  $\alpha_{zr}$  おくと式(3.2)のように書ける。

$$\alpha_{zr} = -\frac{\partial P^{el}}{\partial r} \quad \text{式(3.2)}$$

式(3.2)は第2.2.3節の式(2.6)で示したように、ロックダウンファクターと線形座屈荷重の積であるから、積の微分で示され、以下、式(3.3)のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{cr(\kappa)}^{el}}{\partial r} &= \frac{\partial(\alpha_{0(\kappa)} \times P_{cr(\infty)}^{lin})}{\partial r} \\ &= \frac{\partial \alpha_{0(\kappa)}}{\partial r} \times P_{cr(\infty)}^{lin} + \alpha_{0(\kappa)} \times \frac{\partial P_{cr(\infty)}^{lin}}{\partial r} \\ &= -\left(\frac{\partial \alpha_{0(\kappa)}}{\partial r} \times \mu \times P_0 + \alpha_{0(\kappa)} \times \frac{\partial \mu}{\partial r} \times P_0\right) \end{aligned} \quad \text{式(3.3)}$$

式(3.3)の  $\alpha_0$  はロックダウンファクター、 $\mu$  は線形座屈荷重係数、 $P_0$  は基準荷重である。

ここで、式(3.3)の第1項のロックダウンファクターの微分に関して第2.2.3節の式(2.9)・(2.10)・(2.11)の節点座標  $r$  に関する偏微分を行うと式(3.4)のようになり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{0(\kappa)}}{\partial r} &= \alpha_0 \times \frac{\partial \xi_{(\kappa)}}{\partial r} \\ &= \begin{cases} \alpha_0 \times 0.47 \times \frac{1}{L_0 \times \log_e 10} \times \frac{\partial L_0}{\partial r} & (1 \leq \kappa < 10) \\ \alpha_0 \times 0.19 \times \frac{1}{L_0 \times \log_e 10} \times \frac{\partial L_0}{\partial r} & (10 \leq \kappa < 100) \\ 0 & (100 \leq \kappa) \end{cases} \end{aligned} \quad \text{式(3.4)}$$

$\alpha_0$  : 0.7(一定値)

$\xi_{(\kappa)}$  : 曲げ剛性の座屈荷重への影響係数

$K$  : 無次元化曲げ剛性 ( $\kappa = \frac{K_{\text{曲げ}} \times L_0}{E \times I}$  第2.2.3節の式(2.11)に同じ)

$L_0$  : 部材長 [m] ( $L_0 = \frac{\sum_i^m L_i}{m}$  第2.2.3節の式(2.12)に同じ)

部材長  $L_0$  の節点座標  $r$  に関する偏微分は、部材要素  $i$  の 1 端の節点座標を  $(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})$ 、2 端の節点座標を  $(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2})$  とすれば、式(3.5) のようになる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_0}{\partial r} &= \frac{\sum_i^m \frac{\partial L_i}{\partial z}}{m} \\
 &= \frac{\sum_i^m \frac{\partial \sqrt{(x_{i2} - x_{i1})^2 + (y_{i2} - y_{i1})^2 + (z_{i2} - z_{i1})^2}}{\partial r}}{m}}{m} \\
 &= \frac{\sum_i^m \frac{z_{i2} - z_{i1}}{\sqrt{(x_{i2} - x_{i1})^2 + (y_{i2} - y_{i1})^2 + (z_{i2} - z_{i1})^2}}}{m} \\
 &= \frac{\sum_i^m \frac{z_{i2} - z_{i1}}{L_i}}{m}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

また、式(3.3) の第 2 項の線形座屈荷重係数の微分に関しては小林の研究<sup>(11)</sup>によって示されており、その論文の符号において誤表記があったため、訂正したものを式(3.6)に示す。

$$\frac{\partial ((K_L + \mu_r K_\sigma) \phi)}{\partial r} = 0$$

を展開して、

$$\left( \frac{\partial K_L}{\partial r} + \frac{\partial \mu_r}{\partial r} K_\sigma + \mu_r \frac{\partial K_\sigma}{\partial r} \right) \phi = 0$$

となり、これを線形座屈荷重係数  $\mu$  の節点座標に関する微分の形式にまとめていくと、

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = - \frac{\phi^T \left( \frac{\partial K_L}{\partial r} + \mu_r \frac{\partial K_\sigma}{\partial r} \right) \phi}{\phi^T K_\sigma \phi} \tag{3.6}$$

ここで、 $K_L$  は要素剛性マトリックス、 $K_\sigma$  は幾何剛性マトリックス、 $\phi$  は線形座屈モードを表す。

また、制御点座標  $q$  と節点座標  $r$  には付録 A の式(A.13)より次の関係式がある。

$$Hq = r \tag{3.7}$$

$H$  は節点のパラメトリック平面上の座標のみ依存する係数マトリックスである。

以上より、線形座屈荷重係数  $f(q)$  の制御点座標  $q$  に関する偏微分  $\nabla f(q)$  は、式(3.2),(3.7)より以下のように定義できる。

$$\nabla f(q) = - \frac{\partial P^{el} \partial r}{\partial r \partial q} = \alpha_{zr}^T H \tag{3.8}$$

・ 形態デザイン手法の流れ

以上で述べた弾性座屈荷重の最大化による形態創生の手法の流れを端的に示すと、次の通りである。

- STEP1 所与の設計領域に対して構造体の初期形状、設計変数である制御点  $z$  座標の初期値を定める。
- STEP2 所与の条件に基づいて、有限要素解析を行い、各制御点の感度係数を求める。
- STEP3 感度係数に応じて制御点の  $z$  座標を変化させる。
- STEP4 得られた形態を用いて、STEP2~3の操作を、予め決められた終了条件に達するまで繰り返す。

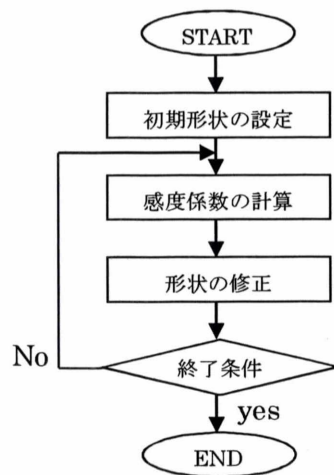


図 3.1 形態創生の流れ

### 3.3 数値解析例

例題1では線形座屈荷重係数最大化による形態創生を、例題2ではロックダウンファクターを用いた弾性座屈荷重最大化による形態創生を行う。ただし、例題1の初期解析モデルと例題2の初期解析モデルは同様のものを用い、解析条件も同様のものとし、以下に示す。

・ 解析モデル形状

本節で用いる解析モデルは、各部材長が4mの半開角 $\Phi$ が $35^\circ$ のx方向の基準節点をy方向の基準節点に沿って推移させていく格子推動シェルであり、図3.2に示す通りである。周辺はピン支持としている。応力は三次元梁要素の有限要素法による線形静的解析により算定する。モデルの対称性を考慮し1/4を解析対象とする。この時、要素数は60、節点数は36点となる。その他の解析条件の詳細は表3.1に示す。

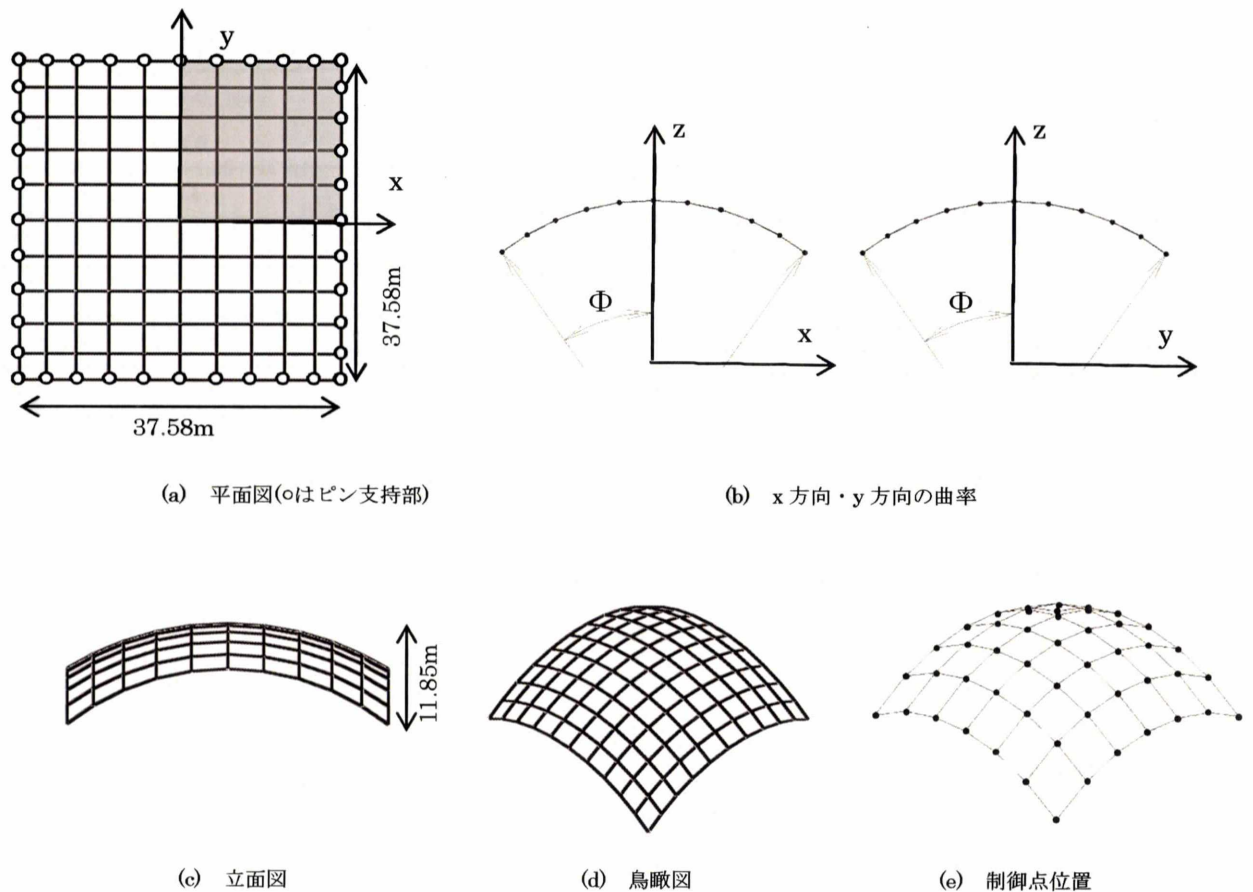


図3.2 解析モデル

解析対象	1/4 モデル
形状	37.58m×37.58m
支持条件	周辺ピン支持
荷重条件	節点集中荷重：16 kN
接合部条件	半剛接合（及び剛接）
制約条件	許容応力度設計

表 3.1 解析条件

・ 接合部・断面性状

使用材料としては、ベイマツ集成材を全ての部材について用いる。以下の図 3.3 に母材の断面性状、材料性状を以下の表 3.2 に示す。

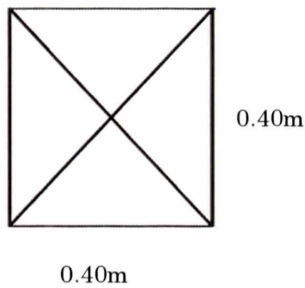


図 3.3 断面形状

部材幅	0.40	m
部材成	0.40	m
部材長	4.0	m
断面積	0.16	m <sup>2</sup>
断面係数	1.067×10 <sup>-2</sup>	m <sup>3</sup>
y 軸まわりの断面 2 次モーメント	2.113×10 <sup>-8</sup>	m <sup>4</sup>
x 軸まわりの断面 2 次モーメント	2.113×10 <sup>-8</sup>	m <sup>4</sup>
ヤング係数(木母材)	1.548×10 <sup>7</sup>	kN/m <sup>2</sup>
サンブナンのねじり定数	3.605×10 <sup>-8</sup>	m <sup>4</sup>
ポアソン比	0.50	—
単位容積重量	5.394×10 <sup>-7</sup>	kN/m <sup>3</sup>
許容引張応力度	12.8	kN/m <sup>2</sup>
許容圧縮応力度	11.2	kN/m <sup>2</sup>
許容曲げ応力度	16.5	kN/m <sup>2</sup>

表 3.2 材料性状

また、接合部の接合方法、材料特性を以下に示す。本解析では鋼板挟み込み式ボルト接合法を対象とし、接合部のボルトの本数を 6 本、12 本、16 本と変更して比較する。さらに剛接合の場合との比較も行う。また、ボルト間隔、ボルトの端あき、縁あきは木質構造設計基準・同解説<sup>(22)</sup>を参考に設定し、接合部断面を図 3.4 に、接合部におけるボルト配置は図 3.5 のようにした。その他の接合部の条件は以下の表 3.3 に示す。



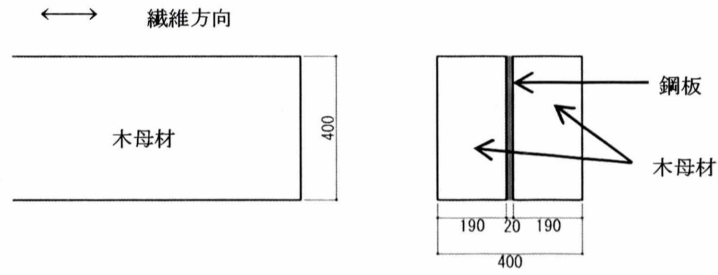


図 3.4 接合部断面 [図中寸法:mm]

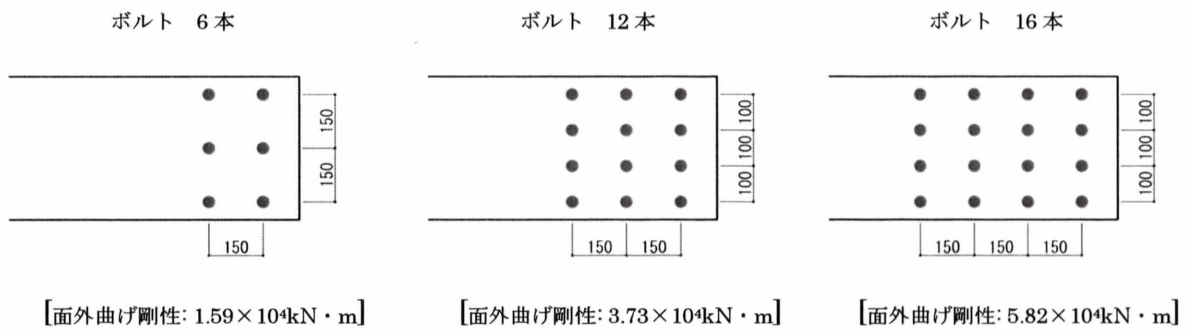


図 3.5 接合部におけるボルト配置 [図中寸法:mm]

ボルトの直径	0.02	m
せん断面の数	2	
ボルト径とボルト径のクリアランス	$1.0 \times 10^{-3}$	m
鋼板のヤング係数	$2.05 \times 10^8$	kN/m <sup>2</sup>

表 3.3 その他の接合部条件

3.3.1 例題 1: 線形座屈荷重係数最大化による数値解析例

ここでは、同研究室にて既に定義されている半剛接合部を有するラチスシェルの線形座屈荷重係数最大化<sup>(14)</sup>を用いて、前述の解析モデルに対して線形座屈荷重係数最大化を行った結果を示す。形態変化・応力変化・線形座屈荷重の変化について接合種類ごとに示す。また、本節以降で用いる座屈荷重に関して、線形座屈荷重係数最大化によるものに「l」、弾性座屈荷重最大化によるものに「e」の添え字をし、さらに形態創生における 1step(初期形状)のものに「(1)」、last step(最終形状)のものに「(L)」の添え字をし、表 3.4・3.5 のように定める。

	1step[初期形状]	last step[最終形状]
線形座屈荷重	$P^{lin_l(1)}$	$P^{lin_l(L)}$
弾性座屈荷重	$P^{el_l(1)}$	$P^{el_l(L)}$

表 3.4 線形座屈荷重係数最大化における各荷重の記号

	1step[初期形状]	last step[最終形状]
線形座屈荷重	$P^{lin_e(1)}$	$P^{lin_e(L)}$
弾性座屈荷重	$P^{el_e(1)}$	$P^{el_e(L)}$

表 3.5 弾性座屈荷重最大化における各荷重の記号

・形態変化

以下、表 3.6~3.9 に接合部ごとに初期形状と  $P^{lin_l(1)}$  と最終形状と  $P^{lin_l(L)}$ 、そして頂部高さを表記する。

表 3.6~3.9 の last step の形態において図 3.2 の(a)で示した xz 平面と yz 平面で切断したような 1/4 の領域でひし形を構成しており、さらにそれらが全体で折半のような形状を構成している。ただし、接合部剛性が大きいほど凹凸が大きく、小さいほど滑らかな面を構成している。また、 $P^{lin_l(1)}$  に対する  $P^{lin_l(L)}$  を増加率とすれば、面外曲げ剛性と増加率は比例関係にある。具体的には、剛接合の場合の増加率は 1.97、ボルト 16 本の接合の場合は 1.32、ボルト 12 本の接合の場合は 1.32、ボルト 6 本の接合の場合は 1.28 となっている。頂部高さと接合部剛性には関連性はみられない。

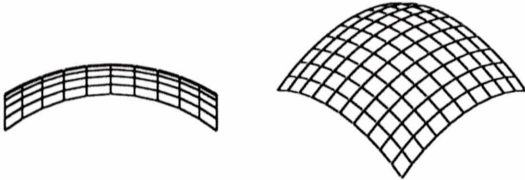
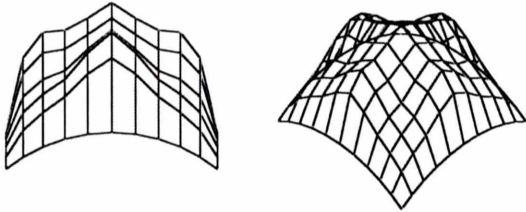
1 step			last step		
					
$P^{lin_l(1)}$	615.51	kN	$P^{lin_l(L)}$	1214.24	kN
頂部高さ	11.85	m	頂部高さ	29.53	m

表 3.6 剛接合の形態変化

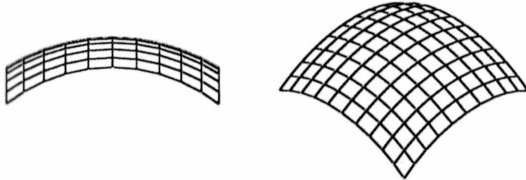
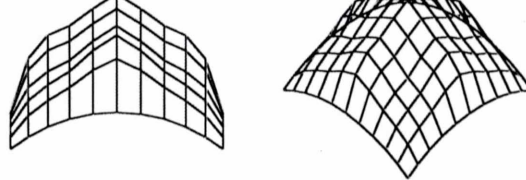
1 step			last step		
					
$P_{lin1(l)}$	568.53	kN	$P_{lin1(L)}$	753.19	kN
頂部高さ	11.85	m	頂部高さ	27.57	m

表 3.7 ボルト 16 本の形態変化

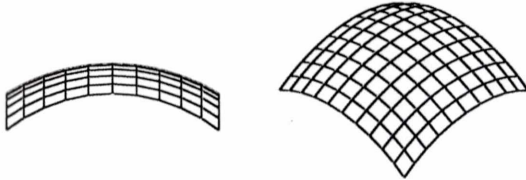
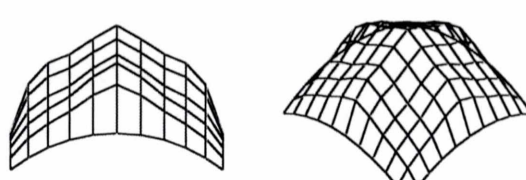
1 step			last step		
					
$P_{lin1(l)}$	549.65	kN	$P_{lin1(L)}$	725.00	kN
頂部高さ	11.85	m	頂部高さ	25.72	m

表 3.8 ボルト 12 本の形態変化

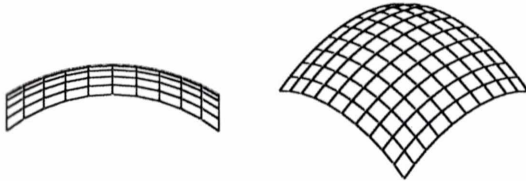
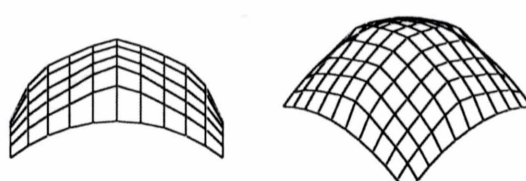
1 step			last step		
					
$P_{lin1(l)}$	501.59	kN	$P_{lin1(L)}$	658.07	kN
頂部高さ	11.85	m	頂部高さ	21.10	m

表 3.9 ボルト 6 本の形態変化

・応力変化

以下、表 3.10~3.13 に軸力と面外曲げ応力の変化を示す。ただし、軸力において、0 未満を圧縮、0 以上を引張りとする。また、面外曲げ・面内曲げにおいて、数値は絶対値をとっている。

まず、1step と last step の応力変化に注目する。剛接合の場合、平面図において周辺支持部の 1 つ内側で正方形を構成している部材に引張りが生じている。対して、半剛接合の場合は  $x \cdot y$  軸上の部材に引張りが生じており、これは面外応力図の同箇所において曲げが 0 となっていることから応力を軸力として処理していることがうかがえる。また、1step において圧縮のみであったのに対し、last step は圧縮・引張りが生じている。

次に、面外曲げ剛性の大小関係と応力関係に注目する。面内・面外曲げ応力は、1step においても last step においても、曲げ剛性が大きい程大きい傾向がある。軸力に関しては、どの接合方法でも剛接合としているため、全接合方法でほぼ同じ max・min 値を示している。

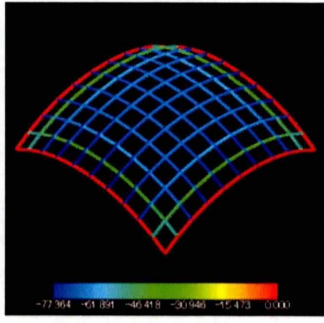
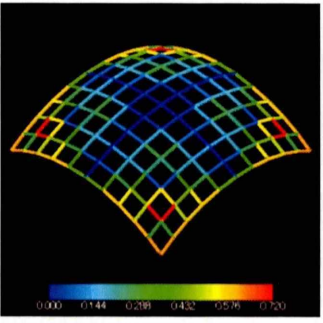
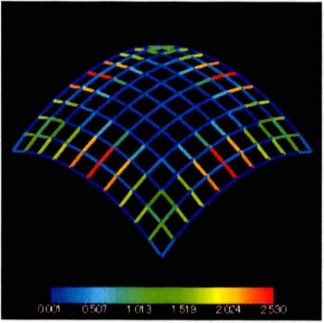
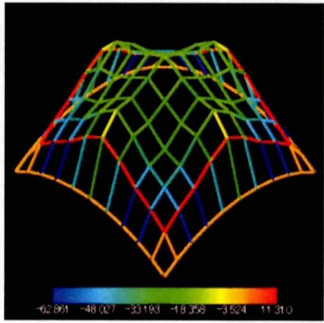
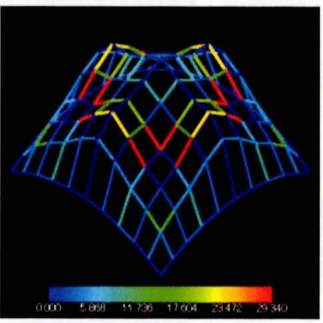
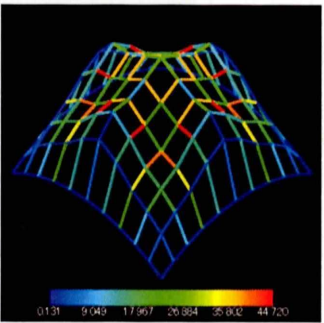
	軸力 [kN]	面外曲げ [kN・m]	面内曲げ [kN・m]
1step			
max/min	0.00/-77.36	0.72/0.00	2.53/0.00
last step			
max/min	11.31/-62.66	29.34/0.00	44.72/0.13

表 3.10 剛接合の応力変化

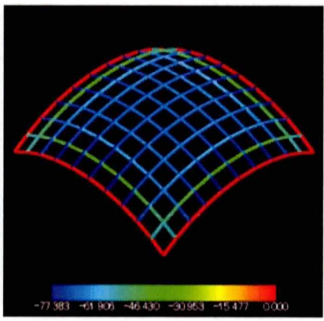
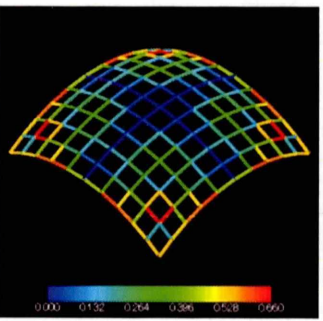
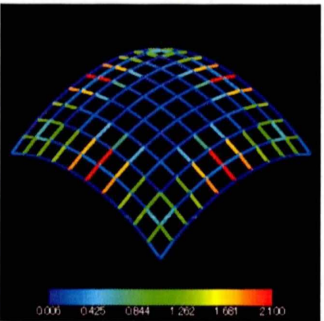
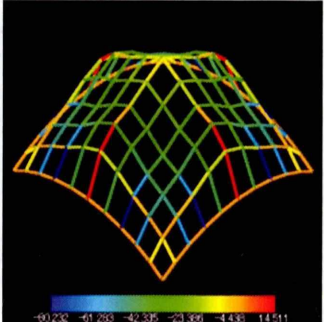
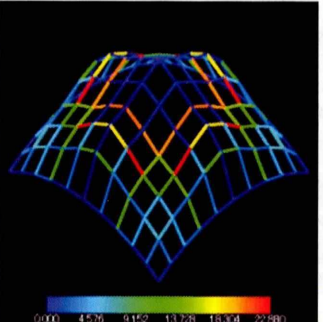
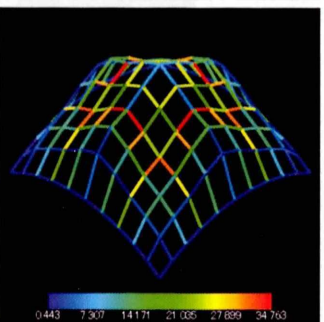
	軸力 [kN]	面外曲げ [kN・m]	面内曲げ [kN・m]
1step			
max/min	0.00/-77.36	0.66/0.00	2.10/0.01
last step			
max/min	14.51/-60.23	22.88/0.00	34.76/0.44

表 3.11 ボルト 16 本の応力変化

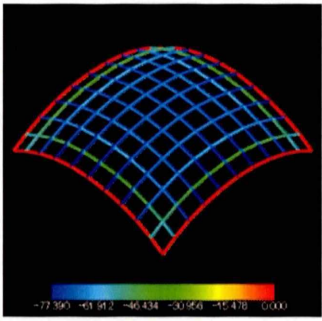
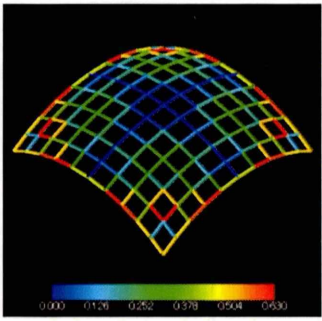
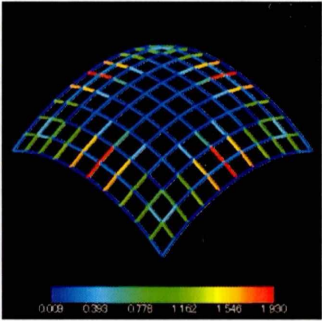
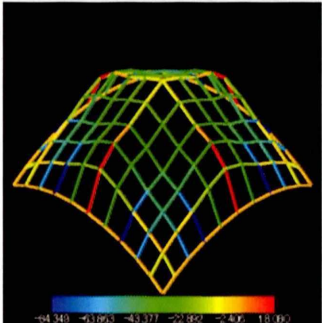
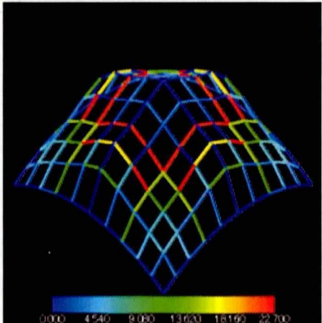
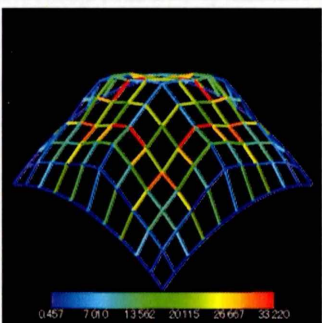
	軸力 [kN]	面外曲げ [kN・m]	面内曲げ [kN・m]
1step			
max/min	0.00/-77.39	0.63/0.00	1.93/0.01
last step			
max/min	18.08/64.34	22.70/0.00	33.22/0.46

表 3.12 ボルト 12 本の応力変化

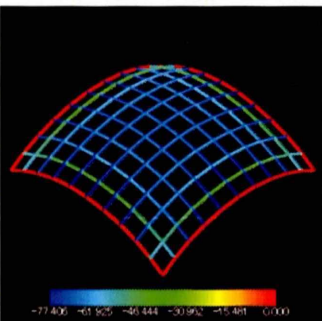
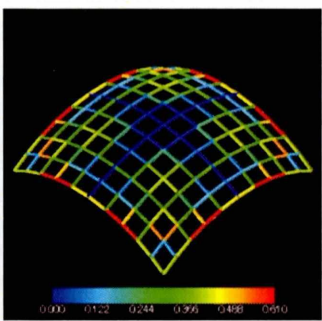
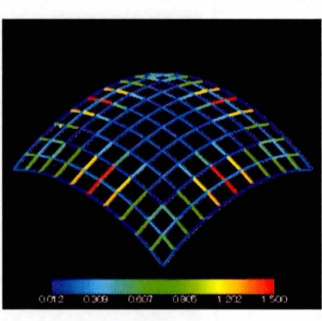
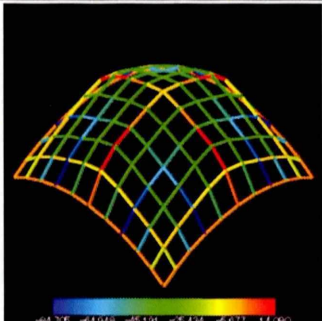
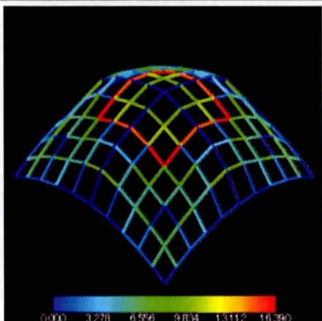
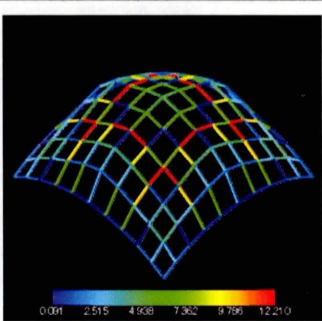
	軸力 [kN]	面外曲げ [kN・m]	面内曲げ [kN・m]
1step			
max/min	0.00/-77.36	0.61/0.00	1.50/0.01
last step			
max/min	14.08/64.70	16.39/0.00	12.21/0.09

表 3.13 ボルト 6 本の応力変化

・線形座屈荷重の変化

以下、図 3.6～3.9 に各接合の線形座屈荷重の変化を示す。ただし、各グラフにおいて、縦軸を線形座屈荷重[kN]、横軸を step 数とする。

どの接合部の場合も前半の step の線形座屈荷重の増加は緩やかであり、last step の 1step 前のところで大きな変化がみられる。既往研究の線形座屈荷重係数最大化<sup>(11)</sup>や半剛接合部を有する木造ラチスシェルの線形座屈荷重係数の最大化<sup>(14)</sup>において、前半の step が比較的大きい変化量を示しているものとは異なる。この理由としては、既往研究の周辺支持部の高さが 0 のモデルとは異なり、初期形状が球形に近い形状で力学的に安定していたためであると推測される。

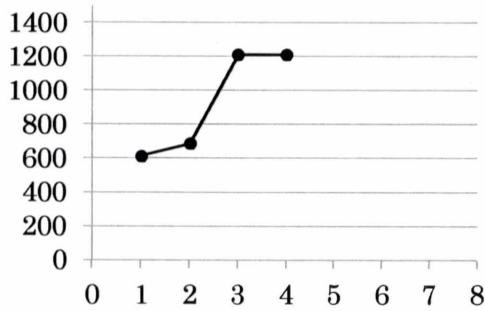


図 3.6 剛接合の線形座屈荷重の推移

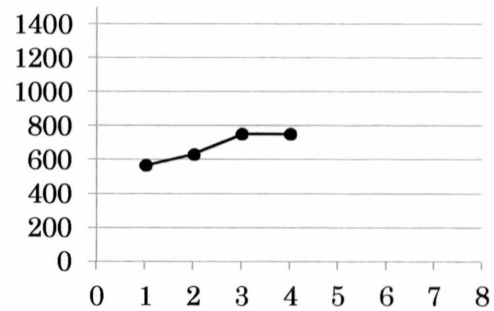


図 3.7 ボルト 16 本の線形座屈荷重の推移

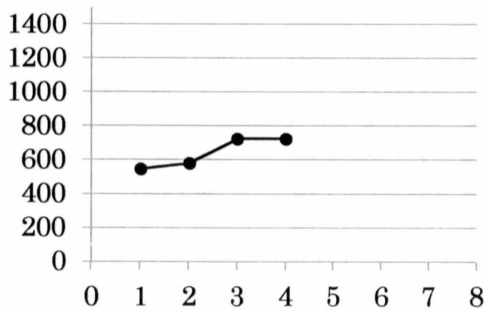


図 3.8 ボルト 12 本の線形座屈荷重の推移

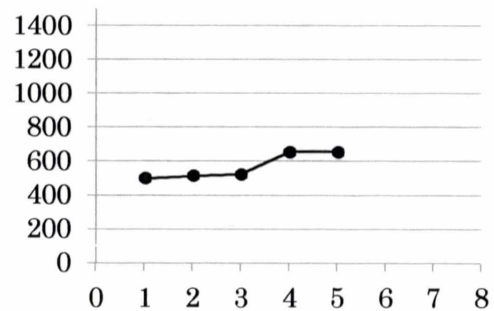


図 3.9 ボルト 6 本の線形座屈荷重の推移

3.3.2 例題 2: 弾性座屈荷重最大化による数値解析例

ここでは、本研究でのプログラムの解析結果と、汎用解析プログラムソフト MIDAS による非線形解析を用いた解析結果を比較する。この非線形解析は弧長増分法による手法を用いる。また、弧長増分法については、第 3.3.2 節にて説明した通りである。また、本節以降で用いるノックダウンファクターは  $\alpha$  と表記する。

・形態変化

以下、表 3.14~3.17 に形態変化とその線形座屈荷重とノックダウンファクター、そして線形座屈荷重とノックダウンファクターの積によって求まる弾性座屈荷重を示す。

last step の形状をみると、接合部の曲げ剛性が大きいほど 1/4 平面の領域において折半のような形状を構成し、剛性が小さいほど球面に近い形状をしている。ボルト 12 本の last step での形状では折半のような形状の面影は確認できず、ボルト 6 本の last step での形状ではより球体に近い球面への変化がみられる。

続いて、曲げ剛性が形態創生に大きく関係する半剛性(ボルト 16 本・ボルト 12 本・ボルト 6 本)での、 $P_{e(1)}^{el}$ に対する  $P_{e(L)}^{el}$ の増加の割合に注目する。この増加比はボルト 16 本では 1.49、ボルト 12 本では 1.65、ボルト 6 本では 1.58 となっていた。この弾性座屈荷重の増加比において、接合部の曲げ剛性の大小関係と関連性は確認できない。

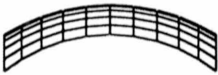
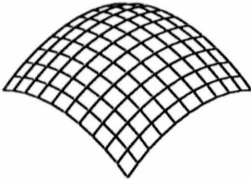
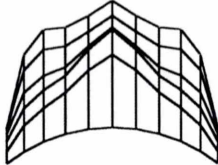

1 step			last step		
					
$P_{e(1)}^{lin}$	615.51	kN	$P_{e(L)}^{lin}$	1214.40	kN
$\alpha$	0.70		$\alpha$	0.70	
$P_{e(1)}^{el}$	430.85	kN	$P_{e(L)}^{el}$	850.08	kN
頂部高さ	11.85	m	頂部高さ	29.53	m

表 3.14 剛接合の形態変化



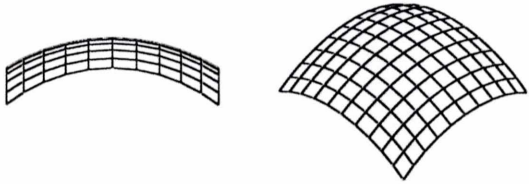
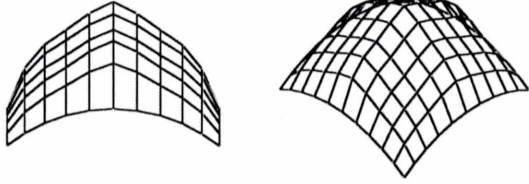
1 step			last step		
					
$P_{lin_e(1)}$	568.53	kN	$P_{lin_e(L)}$	808.60	kN
$\alpha$	0.52		$\alpha$	0.54	
$P_{el_e(1)}$	293.62	kN	$P_{el_e(L)}$	437.61	kN
頂部高さ	11.85	m	頂部高さ	25.47	m

表 3.15 ボルト 16 本の形態変化

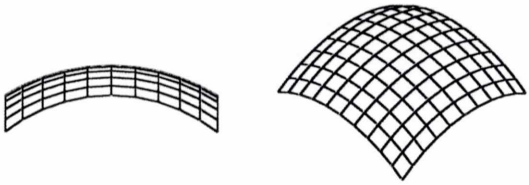
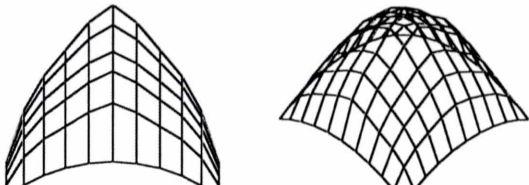
1 step			last step		
					
$P_{lin_e(1)}$	549.65	kN	$P_{lin_e(L)}$	826.51	kN
$\alpha$	0.45		$\alpha$	0.50	
$P_{el_e(1)}$	246.96	kN	$P_{el_e(L)}$	411.22	kN
頂部高さ	11.85	m	頂部高さ	35.32	m

表 3.16 ボルト 12 本の形態変化

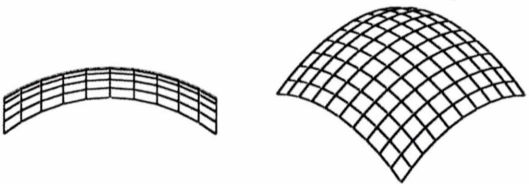
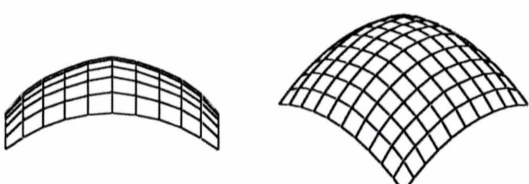
1 step			last step		
					
$P_{lin_e(1)}$	501.59	kN	$P_{lin_e(L)}$	774.41	kN
$\alpha$	0.33		$\alpha$	0.34	
$P_{el_e(1)}$	166.63	kN	$P_{el_e(L)}$	263.69	kN
頂部高さ	11.85	m	頂部高さ	16.52	m

表 3.17 ボルト 6 本の形態変化

## ・応力変化

以下、表 3.18~3.21 に軸力と面外曲げ応力の変化を示す。ただし、軸力において、0 未満を圧縮、0 以上を引張りとする。また、面外曲げにおいて、数値は絶対値をとっている。

まず、1step と last step の応力変化に注目する。剛接合では、平面図において周辺支持部の 1 つ内側で正方形を構成している部材に引張りが生じている。対して、半剛接合の場合は  $x \cdot y$  軸上の部材に引張りが生じており、面外応力図の同箇所において面外曲げが 0 となっていることから応力を軸力として処理していることがうかがえる。ボルト 6 本を除く接合方法では軸力は圧縮力のみであったが、圧縮・引張りが生じている。面外・面内曲げは全接合方法で増加している。

次に、面外曲げ剛性の大小関係と応力関係に注目する。軸要素については剛接合としているため 1step では同様の軸力が生じている。また、1step と last step 両方の step において、曲げ剛性が大きい程、面内・面外曲げは大きい傾向を確認できる。

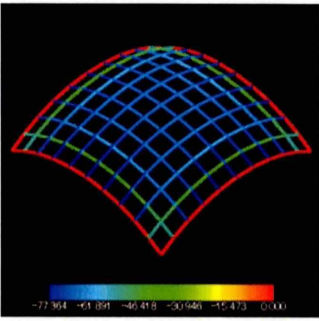
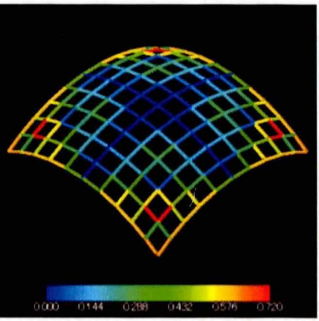
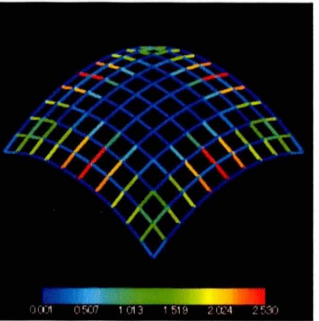
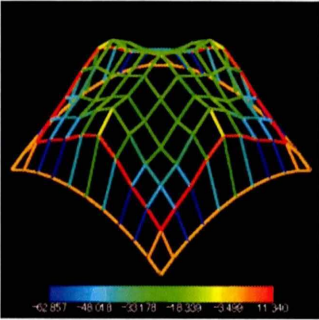
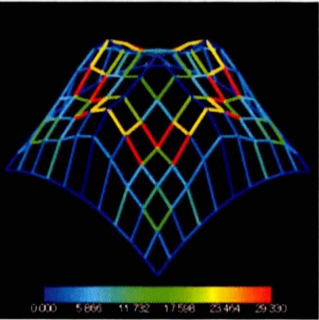
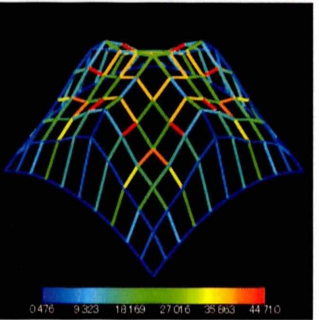
	軸力 [kN]	面外曲げ [kN・m]	面内曲げ [kN・m]
1step			
max/min	0.00/-77.36	0.72/0.00	2.53/0.00
last step			
max/min	11.31/-62.86	29.33/0.00	44.71/0.48

表 3.18 剛接合の応力変化

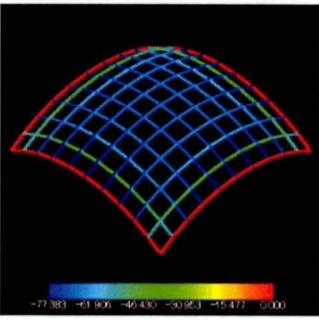
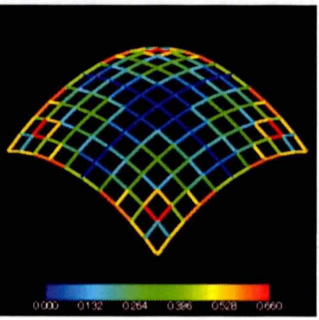
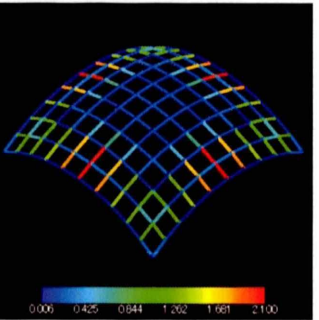
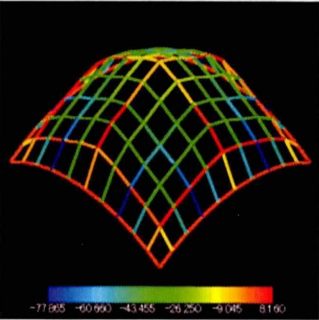
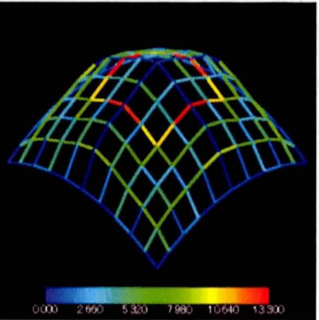
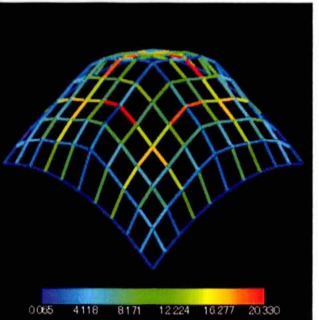
	軸力 [kN]	面外曲げ [kN・m]	面内曲げ [kN・m]
1step			
max/min	0.00/-77.36	0.66/0.00	2.10/0.01
last step			
max/min	8.16/-77.86	13.30/0.00	20.33/0.07

表 3.19 ボルト 16 本の応力変化

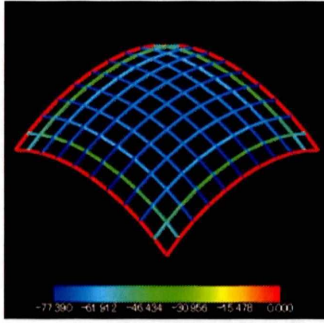
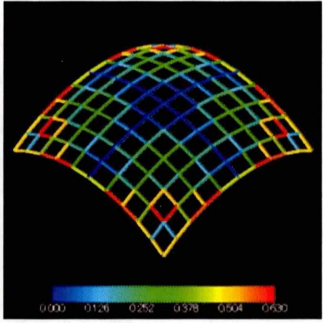
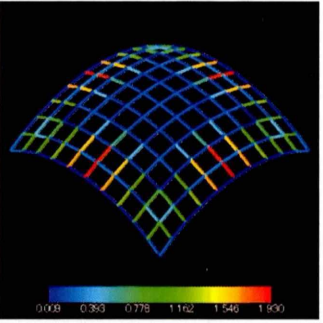
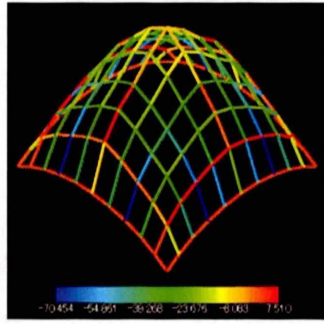
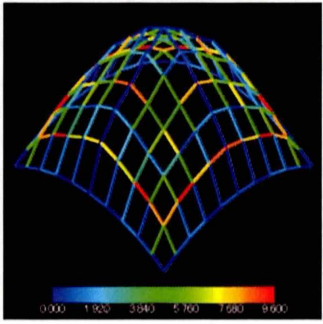
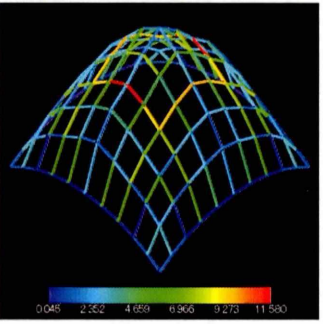
	軸力 [kN]	面外曲げ [kN・m]	面内曲げ [kN・m]
1step			
max/min	0.00/-77.39	0.63/0.00	1.930/0.01
last step			
max/min	7.51/-70.45	9.60/0.00	33.22/0.46

表 3.20 ボルト 12 本の応力変化

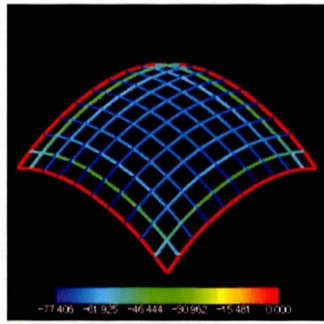
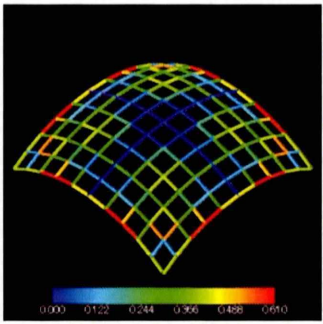
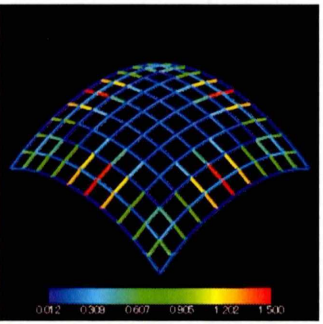
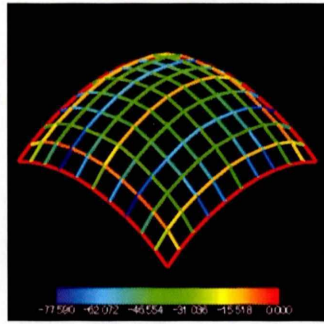
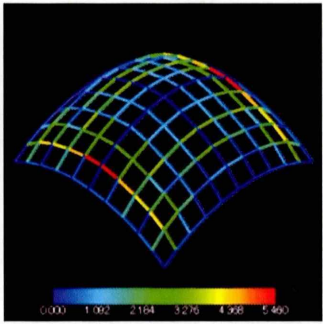
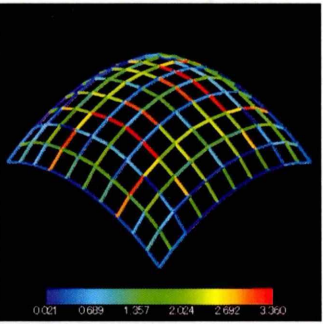
	軸力 [kN]	面外曲げ [kN・m]	面内曲げ [kN・m]
1step			
max/min	0.00/-77.36	0.61/0.00	1.50/0.01
last step			
max/min	0.00/-77.59	5.46/0.00	3.36/0.02

表 3.21 ボルト 6 本の応力変化

・弾性座屈荷重の変化

以下、図 3.10-3.13 に各接合の線形座屈荷重の変化を示す。ただし、各グラフにおいて、縦軸を弾性座屈荷重[kN]、横軸を step 数とする。

全接合方法において弾性座屈荷重の増加と増加量の収束が確認できる。弾性座屈荷重を求めるにあたり線形座屈荷重に掛けるノックダウンファクターが 0.7 と一定値である図 3.10 の剛接合と、形状変化によりノックダウンファクターも変化する図 3.11~3.13 の半剛接合では、推移の様子が異なる。剛接合の推移は 3step 目で急激な増加がみられる。対して、本剛接合の場合では、数 step に及ぶ緩やかな増加がみられる。さらに、剛接合・ボルト 16 本・12 本・6 本と接合部の面外曲げ剛性が小さくなるにつれ、弾性座屈荷重の 1step ごとの増加量は小さくなり、全 step 数は大きくなっている。

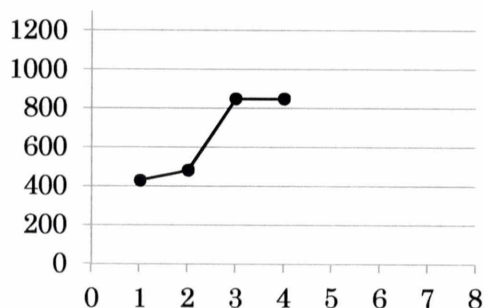


図 3.10 剛接合の弾性座屈荷重の推移

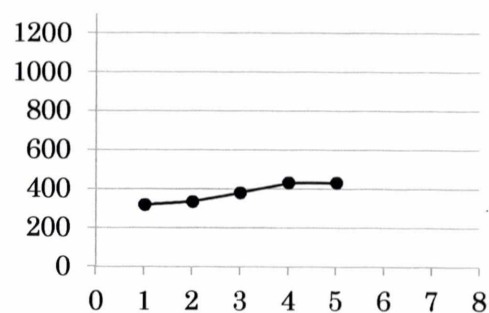


図 3.11 ボルト 16 本の弾性座屈荷重の推移

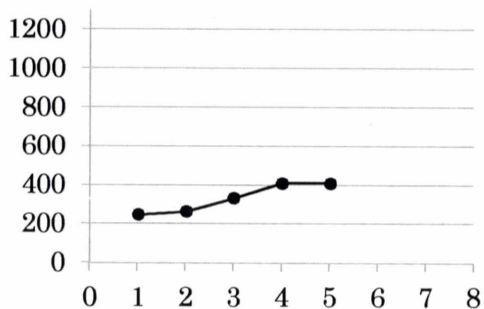


図 3.12 ボルト 12 本の弾性座屈荷重の推移

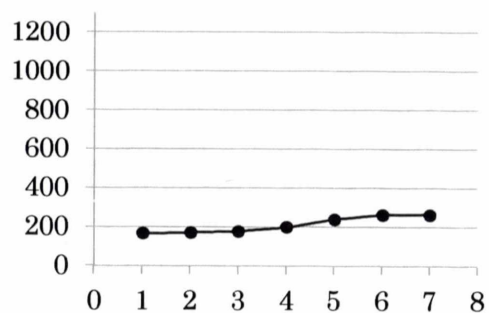


図 3.13 ボルト 6 本の弾性座屈荷重の推移

・プログラムの確認

ここで、本プログラムと MIDAS の座屈解析を、1step の形態創生を行っていないモデルに対し実行し、本プログラムの整合性を確認する。以下の表 3.22 に 1step の形状モデルの線形座屈荷重と弾性座屈荷重の値を、本プログラムによるものと汎用解析ソフト MIDAS によるものを示す。さらに本プログラムと MIDAS の各荷重値の差を、本プログラムと MIDAS のその荷重値の大きい方で除した値に 100 をかけた誤差率を求める。

まず、表 3.22 において線形座屈荷重の誤差率をみると、接合方法に関係なく 1.7%以下に収まっており、本プログラムの整合性が確認できた。また、弾性座屈荷重の誤差率をみると、ボルト 6 本の接合の場合の誤差率が高い。これはノックダウンファクターに関する研究<sup>9)</sup>にも記述されていたことではあるが、曲げ剛性が小さいほど誤差が大きくなる傾向にあるという現象である。また、どの接合方法においても MIDAS による弾性座屈荷重に比べて本プログラムによる弾性座屈荷重のほうが小さくなる傾向にある。

		剛接合	ボルト 16 本	ボルト 12 本	ボルト 6 本
線形座屈荷重	本プログラム[kN]	615.51	568.53	549.65	501.59
	MIDAS[kN]	605.28	559.04	540.32	493.12
	誤差率[%]	1.7	1.7	1.5	1.7
弾性座屈荷重	本プログラム[kN]	430.85	293.62	248.89	166.63
	MIDAS[kN]	455.25	297.33	259.68	184.32
	誤差率[%]	5.7	1.3	4.3	10.6

表 3.22 1step の形状の本プログラムと MIDAS の線形座屈荷重と弾性座屈荷重の比較

### 3.3.3 2つの形態創生の比較

ここでは、第3.3.1節と第3.3.2節の解析結果のうち、形態創生により得た last step について、考察をする。さらに、その last step の座屈荷重について MIDAS を用いて考察を進めていく。

#### ・形態比較

表 3.23 に、第 3.3.1 節と第 3.3.2 節でそれぞれ示した各形態創生手法による last step の形態比較を示す。

表 3.23 をみると、どちらの場合でも接合部剛性が大きい程、折半のような形状に近く、剛性が小さい程、球面形状に近い傾向がみられた。しかし、その傾向には違いがある。線形座屈荷重最大化による形態創生の場合は、程度は異なるが全接合方法において折半のような形状がうかがえた。対して、弾性座屈荷重最大化による形態創生はボルト 12 本・6 本では折半のような形状は全く確認できなかった。この要因として、線形座屈荷重は線形座屈荷重そのものに曲げ要素が関係しているのに対し、弾性座屈荷重はノックダウンファクターと線形座屈荷重の 2 つの項目に関係していることが考えられる。


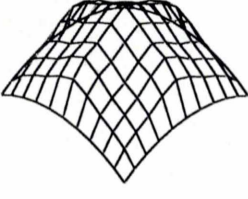
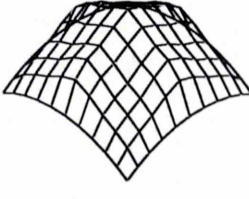
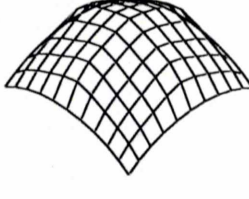

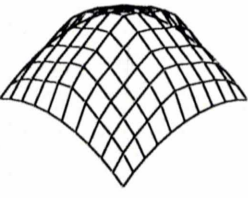
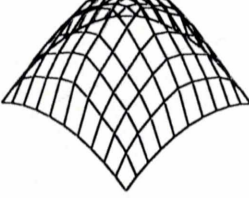
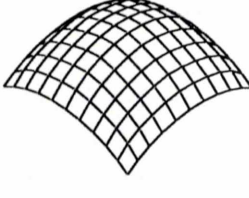
	剛接合	ボルト 16 本	ボルト 12 本	ボルト 6 本
線形座屈荷重係数最大化による形態創生				
弾性座屈荷重最大化による形態創生				

表 3.23 各形態創生手法での最終形状の比較

・応力比較

さらに、各接合法における形態創生手法ごとの last step での応力比較を行う。以下の表 3.24 に、第 3.3.1 節と第 3.3.2 節でそれぞれ示した最終 step の応力をまとめて示した。ただし、面外曲げ剛性に関して剛接合・ボルト 16 本・12 本・6 本と小さく変化させているので、面外曲げ応力の応力図を示した。

線形座屈荷重係数最大化による last step の面外曲げは、平面上で  $y=x$  と  $y=-x$  線の対角線上にある部材で応力集中が確認できる。対して、弾性座屈荷重最大化による last step の面外曲げの剛接合・ボルト 16 本のような接合部の面外曲げ剛性の大きいモデルでは、対角線上で応力集中が確認できる。しかし、ボルト 12 本・6 本では応力集中は確認できない。

また、各接合法の、線形座屈荷重係数最大化によるものと弾性座屈荷重によるものの面外曲げ応力の max 値を比較する。剛接合の場合は変化がなかったので半剛接合の場合で考える。全接合法において、弾性座屈荷重最大化によるもののほうが小さいことがわかる。さらに、線形座屈荷重係数最大化による max 値と弾性座屈荷重最大化による max 値の差を線形座屈荷重係数最大化による max 値で除した値は、ボルト 16 本で 0.41、ボルト 12 本で 0.58、ボルト 6 本で 0.67 である。以上により、弾性座屈荷重最大化の方が面外曲げ剛性の大小関係をより反映させ、面外曲げ応力の小さい形態を求めることが可能であった。

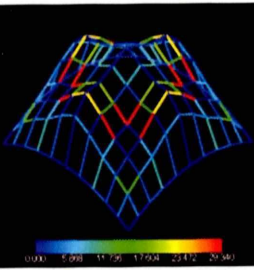
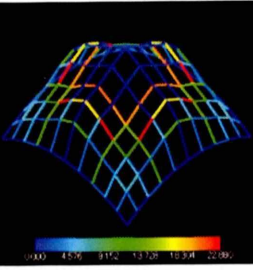
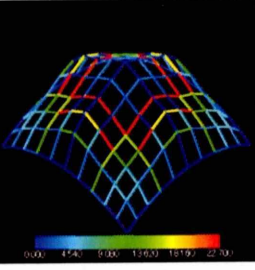
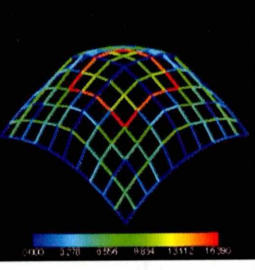
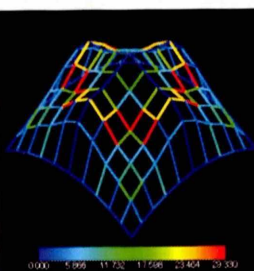
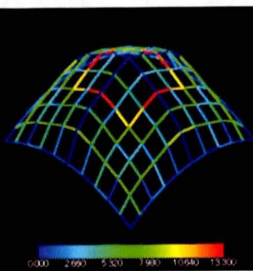
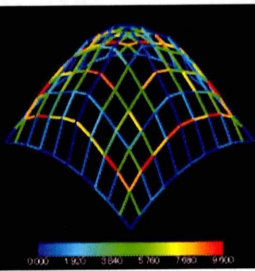
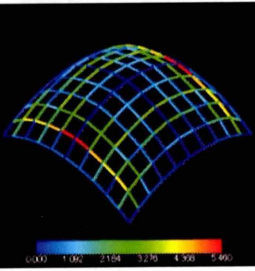
	剛接合	ボルト 16 本	ボルト 12 本	ボルト 6 本
線形座屈荷重係数最大化による形態創生				
max/min	29.34/0.00	22.88/0.00	22.70/0.00	16.39/0.00
弾性座屈荷重最大化による形態創生				
max/min	29.33/0.00	13.30/0.00	9.60/0.00	5.46/0.00

表 3.24 各形態創生手法での last step における面外曲げ応力 [kN・m]



・座屈荷重の比較

さらに、2つの形態創生による last step での弾性座屈荷重の比較を行う。ただし、形態創生を行う前の 1step での弾性座屈荷重の整合性は第 3.3.2 節で確認できたが、last step での弾性座屈荷重において、本プログラムと MIDAS には誤差が生じている(表 3.26)。そこで、ここでの比較には、MIDAS による値を用いる。表 3.25 に線形座屈荷重係数最大化の last step での弾性座屈荷重  $P^{el(L)}$  と、弾性座屈荷重最大化の last step での弾性座屈荷重  $P^{el_e(L)}$ を示す。

ノックダウンファクターの影響が小さい剛接合の場合は除き、 $P^{el_e(L)}$ は、 $P^{el(L)}$ より大きい。さらに、 $P^{el(L)}/P^{el_e(L)}$ を比較すると、ボルト 6 本の場合が最も大きく、接合部の面外曲げ剛性が小さくなるのと反対に、その比率は大きくなっている。つまり、面外曲げ剛性の影響が大きいものほど、弾性座屈荷重最大化による形態創生は有効であると判断できる。

	剛	16 本	12 本	6 本
$P^{el(L)}$	1000.40	588.00	495.00	244.20
$P^{el_e(L)}$	988.20	627.90	581.00	413.40
$P^{el_e(L)} / P^{el(L)}$	0.99	1.07	1.17	1.69

表 3.25 線形座屈荷重係数最大化と弾性座屈荷重最大化による last step 形状の弾性座屈荷重(MIDAS)の比較

弾性座屈荷重最大化による last step での弾性座屈荷重について、上で述べた本プログラムと MIDAS の誤差に関して分析する。表 3.26 に本プログラムによる last step でのノックダウンファクターと、MIDAS による線形座屈荷重と弾性座屈荷重の比を示す。

表 3.26 によれば、全ての接合方法において、ノックダウンファクター値よりも座屈荷重の比は大きい。本来、この座屈荷重の比とノックダウンファクターは一致するはずである。この誤差の要因として、ノックダウンファクターに関する要素が考えられ、今回、平均値として定義した基準部材長  $L_0$  の評価手法の改善が求められる。

	剛	16 本	12 本	6 本
$\alpha$	0.70	0.54	0.50	0.34
弾性座屈荷重				
線形座屈荷重	0.81	0.78	0.70	0.54

表 3.26 弾性座屈荷重最大化によるノックダウンファクターと線形座屈荷重と弾性座屈荷重(MIDAS)の比の比較

### 3.4 結語

本章では、剛接合・ボルト16本・ボルト12本・ボルト6本と接合部の面外曲げ剛性が異なるモデルに対し、線形座屈荷重係数最大化による形態創生と弾性座屈荷重最大化による形態創生と比較検討を実行した。そして、それぞれの手法での座屈荷重の変化・形状の変化・応力の変化の特徴を把握した。さらに、線形座屈荷重係数最大化による形態創生と弾性座屈荷重最大化による形態創生の最終形態での形状を比較した。弾性座屈荷重最大化では、面外曲げ剛性が小さい程、球面形状に近づくことが明らかになった。さらに、座屈荷重と応力を比較し、座屈時の変形が大きい、半剛接合部を有する木造単層ラチスシェルにおいては、既往の線形座屈荷重係数最大化手法に比べて、本研究での弾性座屈荷重最大化による形態創生の有効性が確認できた。

## 第4章

### 結論

#### 4.1 総括

近年の環境問題から木造単層ラチスシェルを研究対象とし、そこで問題となる座屈に関して線形座屈解析・弾性座屈解析・ノックダウンファクターによる弾性座屈解析についての理解を深めた。さらに、ノックダウンファクターによる弾性座屈荷重の最大化をはかり、得られた形態の特徴とその力学的特性の検討を行ってきた。

本研究の内容及び、成果は以下のように要約される。

第1章では、木造ラチスシェルの形態創生を行うにあたって、木質構造物の有用性や形態創生が行われるようになった背景を論じた。また、単層ラチスシェルにおいて問題となる座屈の既存研究についても論じた。

第2章では、座屈耐力がより大きい形態を求めるにあたって、ノックダウンファクターによる弾性座屈解析手法について説明し、さらに木質構造物の接合部が半剛接であるので、その曲げ剛性の評価方法について論じた。

第3章では、ノックダウンファクターによる弾性座屈荷重最大化による形態創生の定式化を行った。さらに、既に定式化されている線形座屈荷重係数最大化による形態創生と、今回定式化を行った弾性座屈荷重の最大化による形態創生を行い、2つの形態創生の形状特性と力学的特性の比較を行った。

以上より、座屈前変形が大きい、半剛接合部を有する木造単層ラチスシェルにおいて、既存研究としてあった線形座屈荷重係数最大化よりも弾性座屈荷重最大化による形態創生の方が有効であると確認できた。

## 4.2 今後の展望

本研究では、ノックダウンファクターの算出に際し、全部材の長さの平均値を用いた。しかし、第3.3.3において判明したように、複雑な形状では弾性座屈荷重に誤差が発生し、部材長の評価法に改善が望まれる。

また、今回は接合部の面内曲げ要素を剛接合と仮定した。より実問題に近づけるためには、直交格子シェルではなく、斜材を有するモデルでの考察も必要である。

さらに、今回は接合部の曲げ剛性を考慮した弾性座屈荷重について検討した。この曲げ剛性は線形バネとして導入している。しかし、ボルト接合部の挙動としてはある一定以上めり込むとその変形は戻らず、塑性化する。したがって、接合部の挙動を厳密に評価するならば、弾塑性バネを導入する必要がある。

## 付録 A

### NURBS 曲線による形状表現

#### A.1 NURBS とは

NURBS とは、Non-Uniform Rational B-Spline (非一様有理 B スプライン) の頭文字による略称である。NURBS による表現形式は、区分的有理式としてパラメータ表現するもので、従来の Bezier や B-spline 等の区分的多項式曲線・曲面の一般化になっており、円・円弧・楕円・楕円弧等の円錐曲線や球面・円柱面・円錐面等の曲面を近似無しに表現できるよう改良されている。更に制御点と曲線・曲面との関係を拡張し、複数の制御点が重なるのを許して折れる等の表現も可能になっている。

以上のような要因により、近年、ほとんどの CAD/CAM システムで NURBS が使われており、形状モデリングを行う上でスタンダードとなりつつある。

本章では NURBS について説明した後、NURBS で表現された曲面形状を有限要素メッシュ分割した際の有限要素の節点座標と NURBS 制御点座標の関係について述べる。

#### A.2 4次元座標系の導入と有理化

3次元座標 $(x,y,z)$ で指定される点に重み $w$ を加えた4次元座標を採用するとより表現性のある曲線や曲面を表現できる。この4次元座標は $(x,y,z,w)$ で重み $w$ を使い、 $X=wx, Y=wy, Z=wz$ とする。通常の3次元座標は $x=X/w, y=Y/w, z=Z/w$ と重み $w$ で割り算をした有理式で求める。これは次のような4次元空間から3次元空間への射影写像を意味する。

$$H: (X, Y, Z, w) \rightarrow (X/w, Y/w, Z/w) \quad \text{式(A.1)}$$

なお、 $(x,y,z,w)$ で表される座標系は同次座標系あるいは斉次座標系と呼ぶ。今まで用いてきた曲線や曲面の制御点を4次元座標としても数式はそのまま使用できる。即ち、曲線や曲面の形成は4次元空間で考え、最後に重み要素で割り算して通常の3次元座標を得る。この方法によると、3次元での補間では不可能である円や楕円、球や楕円球等の解析曲線や解析曲面を表現できる。

#### A.3 NURBS 曲線

NURBS 曲線はパラメトリック空間によって、自由曲線から円・楕円といった解析的な曲線までも統一的に表現できる特徴を持っている。

表現式は次のように与えられる。まず曲線の形成を4次元空間で考える。

$$C^w(t) = \sum_{i=1}^I B_{i,k}(t) P_i^w \quad \text{式(A.2)}$$

ここで  $C^w(t) = [X(t) Y(t) Z(t) w(t)]^T$  であり、 $P_i^w$  は 3 次元制御点座標を同次座標系に変換したものである。

次に  $C^w(t)$  を射影写像  $H$  により 3 次元空間に写像することで 3 次元空間上の曲線  $C(t)$  を得る。

$$C(t) = H(C^w(t)) \quad \text{式(A.3)}$$

ここで  $C(t) = [x(t) y(t) z(t) w(t)]^T$  である。

式(A.2)、式(A.3)をまとめて表現すると次のようになる。

$$C(t) = \frac{\sum_{i=1}^I B_{i,k}(t) w_i P_i}{\sum_{i=1}^I B_{i,k}(t) w_i} \quad \text{式(A.4)}$$

ここで  $P_i = H(P_i^w)$  であり、3 次元空間上での制御点座標である。なお、重み  $w_i$  を全て 1 にすると  $C(t)$  は B スプライン曲線<sup>(23)</sup>となる。

#### A.4 NURBS 曲面

NURBS 曲面はパラメトリック空間によって、自由曲面から球・楕円球といった解析的な曲面までも統一的に表現できる特徴を持っている。NURBS 曲面も表現式は NURBS 曲線と同様である。

$$S^w(s, t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) P_{ij}^w \quad \text{式(A.5)}$$

ここで  $S^w(s, t) = [X(s, t) Y(s, t) Z(s, t) w(s, t)]^T$  であり、 $P_{ij}^w$  は 3 次元制御点座標を同次座標系に変換したものである。

次に  $S^w(s, t)$  を射影写像  $H: (X, Y, Z, w) \rightarrow (X/w, Y/w, Z/w)$  により 3 次元空間に写像することで曲面  $S(s, t)$  を得る。

$$S(s, t) = H(S^w(s, t)) \quad \text{式(A.6)}$$

ここで  $S(s, t) = [x(s, t) y(s, t) z(s, t)]^T$  である。式(A.5)、式(A.6)をまとめて表現すると次のようになる。

$$S(s, t) = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) w_{ij}} \quad \text{式(A.7)}$$

ここで  $P_{ij} = H(P_{ij}^w)$  であり、3 次元空間上での制御点である。なお、重み  $w_{ij}$  を全て 1 にすると  $S(s, t)$  は B スプライン曲線<sup>(23)</sup>となる。

#### A.5 制御点と重みによる形状表現

NURBS 曲線と NURBS 曲面は制御点と重みにより形状を変化させることができる。図 A.1 は曲線の形状変形の様子を示したものである。同図(a)のように、制御点  $P_2$  を移動すると曲線は矢印の方向に変形する。同図(b)は制御点  $P_2$  の重みを変えたときの様子を示したものである。重みの値を増していくと限りなく制御点  $P_2$  に近づいた曲線形状になる。なお、重みは 0 から  $\infty$  までの値をとる。

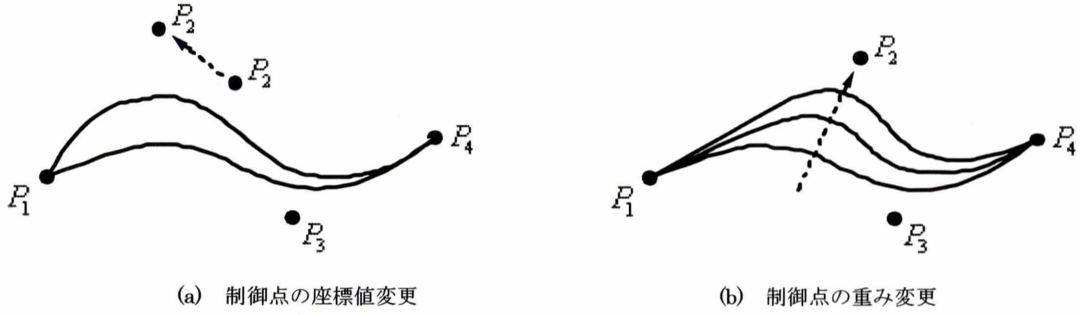


図 A.1 制御点の変更に伴う曲線の変形

### A.6 NURBS の制御点と有限要素の節点との関係

本研究では、NURBS で曲面形状を表現した上で、曲面を離散化して有限要素法により線形解析を行う。離散化された曲面の節点座標は制御点座標の関数として表現されるため、有限要素法により算定される曲面の応力は制御点座標の関数として扱うことができる。

本節では、曲面を離散化し、有限要素メッシュ分割された際の節点座標と NURBS の制御点座標との関係について詳細を述べる。

曲面上の位置を定める 2 つのパラメータを  $s, t (0 \leq s, t \leq 1)$  とする。曲面の任意点における通常 3 次元座標での位置ベクトルを  $S(s, t) = [x(s, t) \ y(s, t) \ z(s, t)]^T$  で表す。曲面形状を定義する NURBS の制御点を 1 本の  $S$  曲線および  $t$  曲線上にそれぞれ  $I$  個、 $J$  個配置し、全体として  $N = I \times J$  個網状配置するものとする。各制御点の通常 3 次元座標での位置ベクトルを  $P_{i,j} = [P_{xij} \ P_{yij} \ P_{zij}]^T \ (i=1, \dots, I) \ (j=1, \dots, J)$  と表す。このとき、曲面上の任意点位置ベクトル  $S$  は式(A.7)より次のように書ける。

$$S(s, t) = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) w_{ij}} \quad \text{式(A.8)}$$

今、パラメトリック平面  $s-t$  上に  $n$  個の節点を配置するとする。通常 3 次元座標系での節点座標ベクトルを次のようにおく。

$$\begin{aligned} r_x &= [x(s_1, t_1) \ \dots \ x(s_n, t_n)]^T \\ r_y &= [y(s_1, t_1) \ \dots \ y(s_n, t_n)]^T \\ r_z &= [z(s_1, t_1) \ \dots \ z(s_n, t_n)]^T \end{aligned} \quad \text{式(A.9)}$$

制御点座標ベクトルを次のようにおく。

$$\begin{aligned} q_x &= [p_{x11} \ \dots \ p_{x1J} \ \dots \ p_{xI1} \ \dots \ p_{xIJ}]^T \\ q_y &= [p_{y11} \ \dots \ p_{y1J} \ \dots \ p_{yI1} \ \dots \ p_{yIJ}]^T \\ q_z &= [p_{z11} \ \dots \ p_{z1J} \ \dots \ p_{zI1} \ \dots \ p_{zIJ}]^T \end{aligned} \quad \text{式(A.10)}$$

このとき、通常 3 次元座標の節点座標と制御点座標の関係式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} q_x &= \tilde{B}q_x \\ q_y &= \tilde{B}q_y \\ q_z &= \tilde{B}q_z \end{aligned} \tag{A.11}$$

ただし、 $\tilde{B}$  は第  $m$  行目の行ベクトル  $\tilde{B}_m$  が

$$\tilde{B}_m = \frac{[B_{1,k}(s_m)B_{1,l}(t_m)w_{11} \dots B_{1,k}(s_m)B_{j,l}(t_m)w_{1j} \dots B_{l,k}(s_m)B_{1,l}(t_m)w_{l1} \dots B_{l,k}(s_m)B_{j,l}(t_m)w_{lj}]}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{i,k}(s_m)B_{j,l}(t_m)w_{ij}} \tag{A.12}$$

であるような係数マトリクスである。

よって、節点位置ベクトル  $r=[r_x^T \ r_y^T \ r_z^T]^T$  と制御点位置ベクトル  $q=[q_x^T \ q_y^T \ q_z^T]^T$  の関係式は次のように書ける。

$$r = Bq \tag{A.13}$$

ただし、

$$B = \begin{bmatrix} \tilde{B} & & \mathbf{0} \\ & \tilde{B} & \\ \mathbf{0} & & \tilde{B} \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

$B$  の次元は  $3n \times 3N$  であり、通常正方行列ではなく、節点数  $n$  の方が制御点数  $N$  よりも大きいので縦長マトリクスとなる。しかし、曲面形状と制御点座標は 1 対 1 の関係にあるので、節点座標ベクトルと制御点座標ベクトルは 1 対 1 の関係にある。

更に、 $B$  はパラメトリック平面上の座標  $(s,t)$  と同次座標系での制御点座標  $w(s,t)$ 、 $B$  スプライン関数の節点  $\xi$  と階数  $k,l$  の関数であるが、本研究では、簡単のため同次座標系での制御点座標  $w(s,t)$ 、 $B$  スプライン関数の節点  $\xi$  と階数  $k,l$  を曲面形状修正の間、一定としている。したがって、 $B$  は有限要素の節点のパラメトリック平面上の座標  $(s,t)$  にのみ依存するとして扱っている。



## 付録 B

### 制約付き最適化手法

#### B.1 概説

シェルやラチスドームなどの空間構造では、外力に対し主に圧縮力で抵抗するため座屈に対する安全性を確保することが重要視される。それにより、力学的合理性や施工性などを追求することを目的に構造体の形状を理論的に修正する必要があると考えられる。

本研究では、シェルの高さの制約条件を取り込むために、非線形計画問題の1つである逐次2次計画法を採用している。逐次2次計画法は、各反復において元の問題を近似した2次計画問題を逐次解いてゆく方法であり、制約条件付き非線形計画問題に対して現在最も有効な方法の1つである。

ここでは、逐次2次計画法について述べ、制約付き自由曲面ラチスシェルの構造形態創生を定式化する。

B.2では、非線形計画問題に対する逐次2次計画法について述べる。

B.3では、2次計画問題を解く手法の1つである、双対法について述べる。

#### B.2 逐次2次計画法による自由曲面シェルの形態デザイン手法定式化

本節ではまず逐次2次計画法についてその概説と定式化について述べる。

##### B.2.1 最適性条件

この章では、次のような非線形計画問題を取り扱う。

$$\begin{aligned}
 \text{目的関数：} & \quad f(x) \rightarrow \text{最小} \\
 \text{制約条件：} & \quad c_{i(x)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_e \\
 & \quad c_{i(x)} \geq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

以下では目的関数 $f$ と全ての制約関数 $c_i$ を $n$ 次元空間 $R^n$ で定義された2回連続微分可能な関数と仮定し、等式制約条件と不等式制約条件の添字集合をそれぞれ

$$E = \{1, 2, \dots, m_e\}, \quad K = \{m_e + 1, m_e + 2, \dots, m\}$$

で表す。 $x^*$ を問題(B.1)の局所的最適解とする。そのとき、 $c_i(x^*)=0$ が成立している制約条件、すなわち $x^*$ における有効制約条件(active constrain)の勾配ベクトル $\nabla c_i(x^*)$ が1次独立ならば、次のキューン・タッカー条件を満たすベクトルの組 $(x, u)=(x^*, u^*)$ が存在する。

$$\nabla f(x) - \sum_{i=1}^m u_i \nabla c_i(x) = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$c_i(x) = 0, \quad i \in E \quad (\text{B.3})$$

$$c_i(x) \geq 0, \quad u_i \geq 0, \quad u_i c_i(x) = 0 \quad i \in K \quad (\text{B.4})$$

ただし、 $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}^T$  はラグランジュ乗数のベクトルである。

### B.2.2 制約付き問題に対する準ニュートン法

この節では、まず次の等式制約のみを含む問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{目的関数:} & \quad f(x) \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件:} & \quad c_i(x) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

ただし、 $c(x)$  はベクトル関数  $c(x) = \{c_1(x), c_2(x), \dots, c_m(x)\}^T$  を表すものとする。問題式(B.5)に対するラグランジュ関数(Lagrangian)を

$$L(x, u) = f(x) - \sum_{i=1}^m u_i c_i(x) \quad (\text{B.6})$$

で定義し、この関数の  $x$  に関する勾配とヘッセ行列をそれぞれ

$$\nabla_x L(x, u) = \nabla f(x) - \sum_{i=1}^m u_i \nabla c_i(x) \quad (\text{B.7})$$

$$\nabla_x^2 L(x, u) = \nabla^2 f(x) - \sum_{i=1}^m u_i \nabla^2 c_i(x) \quad (\text{B.8})$$

と書く。また、ベクトル関数  $c$  の点  $x$  におけるヤコビ行列(Jacobian matrix)、すなわち偏微分係数  $\partial c_j(x) / \partial x_i$  を第  $(i, j)$  成分とするような  $n \times m$  行列を  $\nabla c(x)$  で表す。

さて、いま点  $x^{(k)}$  が与えられているものとして、次の反復点  $x^{(k+1)}$  を求めるため、次のような 2 次計画問題を考える。

$$\text{目的関数:} \quad \nabla f(x^{(k)})^T d + \frac{1}{2} d^T B^{(k)} d \rightarrow \text{最小} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{制約条件:} \quad c(x^{(k)}) + \nabla c(x^{(k)})^T d = 0$$

これは、問題(B.5)の目的関数を  $x = x^{(k)}$  において 2 次近似(ただし定数項  $f(x^{(k)})$  は無視)し、制約条件を 1 次近似した問題であり、ベクトル  $d$  は現在の点  $x^{(k)}$  からの変位を表している。また、問題(B.9)の目的関数の 2 次の係数行列  $B^{(k)}$  は、後述のように、ラグランジュ関数  $L$  のヘッセ行列を近似した行列である。このような 2 次近似問題を解いて次の反復点を求めるという考え方は、前章の制約なし問題に対する準ニュートン法と共通するものである。

2 次計画問題(B.9)に対するキューン・タッカー条件は

$$\nabla f(x^{(k)}) + B^{(k)} d - c(x^{(k)}) u = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$c(x^{(k)}) + \nabla c(x^{(k)})^T d = 0 \quad (\text{B.11})$$

となるが、 $d = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ ,  $u = u^{(k+1)}$  において式(B.10)(B.11)を変形すると

$$\begin{bmatrix} B^{(k)} & -\nabla c(x^{(k)}) \\ \nabla c(x^{(k)})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(k+1)} - x^{(k)} \\ u^{(k+1)} - u^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x L(x^{(k)}, u^{(k)}) \\ c(x^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

が得られる。他方、問題(B.5)は不等式制約条件を含まないので、そのキューン・タッカー条件は次のような  $n+m$  個の変数と同数の式からなる非線形連立方程式の形に表現できる。

$$\nabla_x L(x, u) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$c(x) = 0 \quad (\text{B.14})$$

この非線形方程式にニュートン法を直接適用すると、その反復公式は

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ u^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ u^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(x^{(k)}, u^{(k)}) & -\nabla c(x^{(k)}) \\ \nabla c(x^{(k)})^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \nabla_x L(x^{(k)}, u^{(k)}) \\ c(x^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

となる。式(B.12)と式(B.15)を見比べると、式(B.12)は式(B.15)のヘッセ行列  $\nabla_x^2 L(x^{(k)}, u^{(k)})$  を  $B^{(k)}$  で置き換えたものであるから、もし実際に  $B^{(k)} = \nabla_x^2 L(x^{(k)}, u^{(k)})$  が成り立っているならば、ニュートン法の反復(B.15)は2次計画問題(B.9)の最適解とそれに対応するラグランジュ乗数を計算することと完全に等価であることがわかる。

以上の考察から、適当な準ニュートン法の公式を用いて、 $B^{(k)}$  がヘッセ行列  $\nabla_x^2 L(x^{(k)}, u^{(k)})$  の良い近似となるように更新していけば、2次計画問題(B.9)の解を逐次計算する反復法は、ニュートン法に似た性質を持つことが期待できる。

そのような行列  $B^{(k)}$  の更新法としては、たとえば

$$s^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} \quad (\text{B.16})$$

$$y^{(k)} = \nabla_x L(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}) - \nabla_x L(x^{(k)}, u^{(k+1)}) \quad (\text{B.17})$$

によってベクトル  $s^{(k)}, y^{(k)}$  を定義し、これらを BFGS 公式に代入することにより、 $B^{(k+1)}$  を定めることが考えられる。しかし、制約なし最適化に対する準ニュートン法の考え方を制約付きの問題に拡張する際には、少し注意が必要である。特に、2次計画問題(B.9)の解を計算するという立場からすれば、行列  $B^{(k)}$  が常に正定値に保たれることが望ましいが、

$$(y^{(k)})^T s^{(k)} > 0 \quad (\text{B.18})$$

が成り立たないときには、たとえ  $B^{(k)}$  が正定値であっても、 $B^{(k+1)}$  は正定値になるとは限らない。制約なし問題の場合には、ふつう式(B.18)が成立するが、制約付きの問題の場合には、式(B.16)(B.17)のベクトルが式(B.18)を満たさず、その結果 BFGS 公式で  $B^{(k)}$  を更新したとき  $B^{(k+1)}$  の正定値性が失われるという事態がしばしば起こる。

式(B.18)が満たされていない場合に正定値を保証するには、準ニュートン法の更新公式を次のように修正すればよい。まず、

$$\theta = \begin{cases} 1 & (s^{(k)})^T y^{(k)} \geq 0.2(s^{(k)})^T B^{(k)} s^{(k)} \text{ のとき} \\ \frac{0.8(s^{(k)})^T c B^{(k)} s^{(k)}}{\{(s^{(k)})^T B^{(k)} s^{(k)} - (s^{(k)})^T y^{(k)}\}} & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

とおき、この  $\theta$  を用いてベクトル

$$\tilde{y}^{(k)} = \theta y^{(k)} + (1 - \theta) B^{(k)} s^{(k)} \quad (\text{B.20})$$

を定義する。そして BFGS 公式において  $y^{(k)}$  を  $\tilde{y}^{(k)}$  で置き換えた公式

$$B^{(k+1)} = B^{(k)} + \frac{\tilde{y}^{(k)} (\tilde{y}^{(k)})^T}{(\tilde{y}^{(k)})^T s^{(k)}} - \frac{B^{(k)} s^{(k)} (s^{(k)})^T B^{(k)}}{(s^{(k)})^T B^{(k)} s^{(k)}} \quad (\text{B.21})$$

を用いて  $B^{(k)}$  を更新する。 $\theta$  の決め方は (B.19) より、式 (B.21) によって更新された  $B^{(k+1)}$  は、 $B^{(k)}$  が正定値ならば常に正定値になることが容易に確かめられる。

ところで、一般的に、このようにして更新された行列  $B^{(k)}$  が反復の進行にともなって  $\nabla_{x^2} L(x^{(k)}, u^{(k)})$  に近づいてゆくとは限らない。これは特に、最適解において、ヘッセ行列  $\nabla_{x^2} L(x^{(k)}, u^{(k)})$  が不定値となる場合を考えてみれば明らかである。(制約なし問題においては目的関数のヘッセ行列は最適解において常に半正定値であるが、制約付き問題の場合には、 $\nabla_{x^2} L(x^*, u^*)$  は必ずしも半正定値とは限らない。) しかしながら、 $B^{(k)}$  それ自身が  $\nabla_{x^2} L(x^{(k)}, u^{(k)})$  に近づかなくても、それがある適当な部分空間の上で  $\nabla_{x^2} L(x^{(k)}, u^{(k)})$  の良い近似になってゆくならば、各反復において 2 次計画問題 (B.9) の解  $d^{(k)}$  を求め、次の点を  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$  とする反復法は制約なし問題に対する準ニュートン法のような超 1 次収束性を持つことが示されている。

以上の考え方は不等式制約条件を含む場合に対しても自然に拡張でき、とくに、問題 (B.1) に対する 2 次近似モデルは、

$$\begin{aligned} \text{目的関数:} & \quad \nabla f(x^{(k)})^T d + \frac{1}{2} d^T B^{(k)} d \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件:} & \quad c_i(x^{(k)}) + \nabla c_i(x^{(k)})^T d = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_e \\ & \quad c_i(x^{(k)}) + \nabla c_i(x^{(k)})^T d \geq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

で与えられる。このように、各反復において、もとの問題を近似した 2 次計画問題を部分問題として解く反復法を総称して逐次 2 次計画法 (successive または sequential quadratic programming method) あるいはその頭文字をとって SQP 法と呼ぶ。

### B.2.3 ペナルティ関数と直線探索

前述で述べた SQP 法は、理論的には局所的な収束性しかもたないので、最適解への収束を得るには、その十分近くに初期点を選ばなければならない。しかし、そのような最適解の良い推定値を前もって知るとは一般に難しいので、実用的にはどのような初期解からも必ず何らかの(局所的)最適解に収束するように改良を加える必要がある。以下では、問題 (B.1) に対するペナルティ関数 (penalty function) を考え、それに対して直線探索を実行することにより SQP 法の大域的収束性を保証する方法を説明する。

ペナルティ関数とは、各点における目的関数値と実行可能性の度合いをひとつの指標にまとめたものであり、これまでさまざまな型のものが提案されている。ここでは、問題 (B.1) に対して、次式で定義されるペナルティ関数を採用する。

$$F_r(x) = f(x) + r \left[ \sum_{i=1}^{m_e} |c_i(x)| + \sum_{i=m_e+1}^m |\min\{0, c_i(x)\}| \right] \quad (\text{B.23})$$

ここで、 $r > 0$  はペナルティ・パラメータであり、 $|\cdot|$  は絶対値を表している。式 (B.23) の [ ] 中の項は、 $x$  が問題 (B.1) に対して、実行可能ならば 0 であり、実行可能領域から離れるにしたがって大きい値をとるので、点  $x$  の実行可能性の度合いを示している。

いま、 $(x^*, u^*)$ が問題(B.1)に対するキューン・タッカー条件(B.2)~(B.4)を満たしているものとする。そのときペナルティ・パラメータ $r$ が

$$r > \max\{|u_i^*| \mid i = 1, 2, \dots, m\} \quad (\text{B.24})$$

を満たすならば、適当な条件のもとで、 $x^*$ が関数 $F_r$ の停留点になることがいえるので、制約付きの問題(B.1)は、 $F_r$ を目的関数とする制約なし最小化問題と等価であると考えられる。このような性質をもつペナルティ関数を特に正確なペナルティ関数(exact penalty function)と呼ぶことがある。

また、ペナルティ関数 $F_r$ には微分不可能な点が存在するが、固定した方向ベクトル $d$ に関する微分、すなわち方向微係数

$$F_r'(x; d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} [F_r(x + td) - F_r(x)]/t$$

は全ての点 $x$ と方向 $d$ に対して存在することが知られている。ここで、ペナルティ・パラメータ $r$ は十分に大きい値に固定されているものとし、2次計画問題(B.22)の目的関数の係数行列 $B^{(k)}$ は正定値対称であると仮定する。そのとき問題(B.22)の最適解 $d^{(k)}$ に対して次の不等式が成り立つことが知られている。

$$F_r'(x^{(k)}; d^{(k)}) < 0$$

これはベクトル $d^{(k)}$ が点 $x^{(k)}$ における関数 $F_r$ の降下方向になっていることを示しているので、 $d^{(k)}$ の方向に沿って直線探索を行うことにより

$$F_r(x^{(k)} + t^{(k)}d^{(k)}) < F_r(x^{(k)}) \quad (\text{B.25})$$

を満たすステップ幅 $t^{(k)} > 0$ を見つけることができる。したがって、次の反復点を

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t^{(k)}d^{(k)}$$

で定めれば、目的関数の列 $\{F_r(x^{(k)})\}$ は単調に減少する。さらに適当な仮定のもとで、任意の初期点に対して、生成された点列 $\{x^{(k)}\}$ の集積点が問題(B.1)のキューン・タッカー条件(B.2)~(B.4)を満たすことが証明できる。

正確なペナルティ関数 $F_r$ を用いることはもうひとつの利点がある。一般に、元の問題(B.1)に実行可能解が存在しても、ある反復において、2次計画問題(B.22)が実行可能でなくなる場合がある。そのようなときには、問題(B.22)のかわりに次の2次計画問題を考えればよい。

$$\begin{aligned} \text{目的関数:} & \quad \nabla f(x^{(k)})^T d + \frac{1}{2} d^T B^{(k)} d + r [\sum_{i=1}^{m_e} (\xi_i + \eta_i) + \sum_{i=m_e+1}^m \zeta_i] \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件:} & \quad c_i(x^{(k)}) + \nabla c_i(x^{(k)})^T d + \xi_i - \eta_i = 0, & i = 1, 2, \dots, m_e \\ & \quad c_i(x^{(k)}) + \nabla c_i(x^{(k)})^T d + \zeta_i \geq 0, & i = m_e + 1, \dots, m \\ & \quad \xi_i \geq 0, \quad \eta_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m_e \\ & \quad \zeta_i \geq 0, & i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

ここで $\xi_i, \zeta_i, \eta_i$ は人為変数である。この問題は、ペナルティ関数 $F_r$ の第1項を $x^{(k)}$ における2次近似で、第2項を1次近似で置き換えた関数

$$\begin{aligned} \bar{F}_r(x^{(k)}, d) = & \quad f(x^{(k)}) + \nabla f(x^{(k)})^T d + \frac{1}{2} d^T B^{(k)} d \\ & + r \left[ \sum_{i=1}^{m_e} |c_i(x^{(k)}) + \nabla c_i(x^{(k)})^T d| + \sum_{i=m_e+1}^m \min\{0, c_i(x^{(k)}) + \nabla c_i(x^{(k)})^T d\} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

を制約なしで最小化する問題と等価である。このことより、問題(B.26)には常に最適解  $d^{(k)}$  が存在し、それが  $F_r$  の降下方向になることが容易に確かめられる。したがって、この場合も方向  $d^{(k)}$  にそって直線探索を行うことによりペナルティ関数  $F_r$  の値を減少させることができる。

この節のしめくくりとして、直線探索の実際の計算手順について述べる。ここでは、SQP 法の大域的収束性を保証するため、式(B.25)より少し強い条件

$$F_r(x^{(k)} + td^{(k)}) < F_r(x^{(k)}) + \beta t [\bar{F}_r(x^{(k)}, d^{(k)}) - F_r(x^{(k)})] \quad (\text{B.28})$$

を満たすようなステップ幅  $t=t^{(k)}$  を用いて

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t^{(k)} d^{(k)}$$

を決定する。ただし、 $\beta$  は  $0 < \beta < 1$  を満たすパラメータである。 $\bar{F}_r(x^{(k)}, d^{(k)})$  の定義式(B.27)より、不等式(B.28)の [ ] の右辺の内は、点  $x^{(k)}$  から  $x^{(k)} + d^{(k)}$  に変化したときの関数  $F_r$  の値の減少量に対する推定量を表しており、十分小さいステップ幅  $t$  に対して不等式(B.28)は必ず成立する。

さらに、準ニュートン法本来の超 1 次収束性を得るには、ステップ幅  $t=1$  が採用できるときにはそうするのが最も好ましいということを考えて、簡単な直線探索が構成する。

#### B.2.4 大域的収束性と超 1 次収束性の両立

前節の結果によって SQP 法に大域的収束性をもたせることが可能になったが、その収束の速さは、どうであろうか。これまでも指摘したようにステップ幅  $t^{(k)}$  が 1 のとき点  $x^{(k+1)}$  ( $x^{(k)} + d^{(k)}$ ) は準ニュートン法に対応する反復公式(B.12)によって定まるものと同一視できる。したがって、 $x^{(k)}$  が最適解  $x^*$  に十分近いときに  $t=1$  が常に不等式(B.28)を満たし、ステップ幅として選ばれるならば、適当な仮定のもとで、生成される点列は解に超 1 次収束することがいえる。ところが実際には、正確なペナルティ関数  $F_r$  に基づいてステップ幅を決定したとき、 $x^{(k)}$  が  $x^*$  にどれ程近くても、また行列  $B^{(k)}$  がヘッセ行列  $\nabla^2 L(x^*, u^*)$  のどんな良い近似になっていても、 $t=1$  が不等式(B.28)を満たさないような例がいくらでも存在する。さらにその時、ステップ幅  $t^{(k)}$  を非常に小さくしなければ不等式(B.28)が満たされないならば、生成される点列は解に収束するものの、その収束速度が極端に低下し準ニュートン法が本来持っている超 1 次収束性が失われてしまう。

このような現象を調べてみると、特に点  $x^{(k)}$  が実行可能領域の境界の近くにあつて、点  $x^{(k)} + d^{(k)}$  における問題(B.1)の制約条件の満足度が点  $x^{(k)}$  のときに比べ低下する場合におきることがわかる。したがって、このような難点を解消するためには、元の制約条件を点  $x^{(k)} + d^{(k)}$  よりも高い精度で満たすようなベクトル  $d$  を得る必要がある。そこで、問題(B.1)の目的関数と制約条件の双方を点  $x^{(k)}$  において 2 次近似した

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & \nabla f(x^{(k)})^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^{(k)}) d \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件: } & c_i(x^{(k)}) + \nabla c_i(x^{(k)})^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 c_i(x^{(k)}) d = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_e \\ & c_i(x^{(k)}) + \nabla c_i(x^{(k)})^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 c_i(x^{(k)}) d \geq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

を考える。この問題の解を  $\hat{d}^{(k)}$  とすれば、 $x^{(k)}$  が元の問題(B.1)の実行可能領域の境界上にあるとき、 $x^{(k)} + \hat{d}^{(k)}$  は問題(B.1)の制約条件を 2 次のオーダーで近似的に満たす。したがって、このような部分問題を逐次解くことにより、上に述べたステップ幅が極端に小さくなるという現象を回避でき、大域的収束性と超 1 次収

束の両立が可能となることが期待できる。

ところが、問題(B.29)はもはや 2 次計画問題ではなく、また各関数のヘッセ行列を含んでいるので、実際にはあまり取り扱いやすい問題ではない。そこで問題(B.29)を直接解く代わりに、2 次計画問題(B.22)の解  $d^{(k)}$ とそれに対応するラグランジュ乗数  $u^{(k+1)}$ をまず求め、次に問題(B.29)の解と近似的に等しい最適解を持つような 2 次計画部分問題を  $d^{(k)}$ と  $u^{(k+1)}$ に基づいて構成することを考える。

以下では表記を簡単にするため

$$g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}), \quad G^{(k)} = \nabla^2 f(x^{(k)}), \quad c_i^{(k)} = c_i(x^{(k)}), \quad g_i^{(k)} = \nabla c_i(x^{(k)}), \quad G_i^{(k)} = \nabla^2 c_i(x^{(k)})$$

とおく。そのとき問題(B.29)に対するキューン・タッカー条件は、

$$g^{(k)} + G^{(k)}d - \sum_{i=1}^m u_i(g_i^{(k)} + G_i^{(k)}d) = 0$$

$$c_i^{(k)} + (g_i^{(k)})^T d + \frac{1}{2}d^T G_i^{(k)}d = 0, \quad i = 1, \dots, m_e$$

$$c_i^{(k)} + (g_i^{(k)})^T d + \frac{1}{2}d^T G_i^{(k)}d \geq 0, \quad u_i \geq 0,$$

$$u_i \left[ c_i^{(k)} + (g_i^{(k)})^T d + \frac{1}{2}d^T G_i^{(k)}d \right] = 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m$$

となるが、これはさらに次のように書き換えることができる。

$$g^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m u_i G_i^{(k)}d + \left( G^{(k)} - \sum_{i=1}^m u_i G_i^{(k)} \right) d - \sum_{i=1}^m u_i (g_i^{(k)} + \frac{1}{2} G_i^{(k)}d) = 0$$

$$c_i^{(k)} + \left( g_i^{(k)} + \frac{1}{2} G_i^{(k)}d \right)^T d = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_e$$

(B.30)

$$c_i^{(k)} + \left( g_i^{(k)} + \frac{1}{2} G_i^{(k)}d \right)^T d \geq 0, \quad u_i \geq 0,$$

$$u_i \left[ c_i^{(k)} + \left( g_i^{(k)} + \frac{1}{2} G_i^{(k)}d \right)^T d \right] = 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m$$

ここで、2 次計画問題(B.22)の最適解  $d^{(k)}$ とラグランジュ乗数  $u^{(k+1)}$ を用いてベクトル  $p^{(k)}$ と  $a_i^{(k)}$ を次のように定義する。

$$p^{(k)} = g^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m u_i^{(k+1)} (\tilde{g}_i^{(k)} - g_i^{(k)}) \quad (B.31)$$

$$a_i^{(k)} = \frac{1}{2} (\tilde{g}_i^{(k)} + g_i^{(k)}), \quad i = 1, \dots, m \quad (B.32)$$

ただし  $\tilde{g}_i^{(k)} = \nabla c_i(x^{(k)} + d^{(k)})$ である。ベクトル  $d^{(k)}$ が小さいときには

$$\tilde{g}_i^{(k)} - g_i^{(k)} = \nabla c_i(x^{(k)} + d^{(k)}) - \nabla c_i(x^{(k)}) \cong G_i^{(k)}d^{(k)}$$

であるから、式(B.31)(B.32)で定義された  $p^{(k)}$ と  $a_i^{(k)}$ に対して近似的に

$$p^{(k)} \cong g^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m u_i^{(k+1)} G_i^{(k)}d^{(k)} \quad (B.33)$$

$$a_i^{(k)} \cong g_i^{(k)} + \frac{1}{2} G_i^{(k)} d^{(k)} \quad (\text{B.34})$$

なる関係が成り立つ。また問題(B.22)の目的関数の係数行列  $B^{(k)}$  に対しては近似的に

$$B^{(k)} \cong G^{(k)} - \sum_{i=1}^m u_i^{(k+1)} G_i^{(k)} \quad (\text{B.35})$$

が成立していると考えれば、式(B.33)~(B.35)と式(B.30)の比較より、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} p^{(k)} + B^{(k)} d - \sum_{i=1}^m u_i a_i^{(k)} &= 0 \\ c_i^{(k)} + (a_i^{(k)})^T d &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_e \\ c_i^{(k)} + (a_i^{(k)})^T d &\geq 0, \quad u_i \geq 0, \\ u_i [c_i^{(k)} + (a_i^{(k)})^T d] &= 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

ところが、式(B.36)は2次計画問題

$$\begin{aligned} \text{目的関数:} \quad & (p^{(k)})^T d + \frac{1}{2} d^T B^{(k)} d \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件:} \quad & c_i(x^{(k)}) + (a_i^{(k)})^T d = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_e \\ & c_i(x^{(k)}) + (a_i^{(k)})^T d \geq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

に対するキューン・タッカー条件に他ならないので、結局、問題(B.29)は2次計画問題(B.22)の解に基づいて定義された新しい2次計画問題(B.37)と近似的に同等であることがわかる。

ここで、2次計画問題(B.37)の最適解をあらためて  $\hat{d}^{(k)}$  と書くことにすれば、 $p^{(k)}$  と  $a_i^{(k)}$  が式(B.33)(B.34)を満たすことから、 $\|d^{(k)}\|$  が十分小さいときには、 $\hat{d}^{(k)}$  と  $d^{(k)}$  はほとんど等しいと考えることができる。したがって、 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \hat{d}^{(k)}$  で定義される反復法は  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$  と同じような早い局所的収束性を持つはずである。また、上で考察したように、 $\hat{d}^{(k)}$  は問題(B.29)の近似解とみなせるので、 $x^{(k)}$  が問題(B.1)の実行可能領域の境界上にあるときには、点  $x^{(k)} + \hat{d}^{(k)}$  はその制約条件を2次のオーダーで満たし、その結果、ペナルティ関数  $F_r$  の値を減少させるものと期待できる。

以上の考察から、ベクトル  $\hat{d}^{(k)}$  を用いて直線探索を行えば、 $x^{(k)}$  が最適解に十分近いときにはステップ幅を常に1と選ぶことができ、その結果、SQP法の大域的収束性を損なうことなく超1次収束性が得られるはずである。ただし、ベクトル  $\hat{d}^{(k)}$  に対して必ずしも

$$F_r'(x^{(k)}; \hat{d}^{(k)}) < 0$$

が成り立つとは限らないので、 $\hat{d}^{(k)}$  をそのまま直線探索の方向とするのは適切ではない。よって、ここでは

$$x(t) = x^{(k)} + t d^{(k)} + t^2 (\hat{d}^{(k)} - d^{(k)}) \quad (\text{B.38})$$

で定義される曲線上での1次探索を行い(図B.1参照)、式(B.28)に対応する条件

$$F_r(x(t)) < F_r(x^{(k)}) + \beta t [F_r(x^{(k)}, d^{(k)}) - F_r(x^{(k)})] \quad (\text{B.39})$$

を満たすようなステップ幅を求め、

$$x^{(k+1)} = x(t^{(k)})$$

とおくことにする。



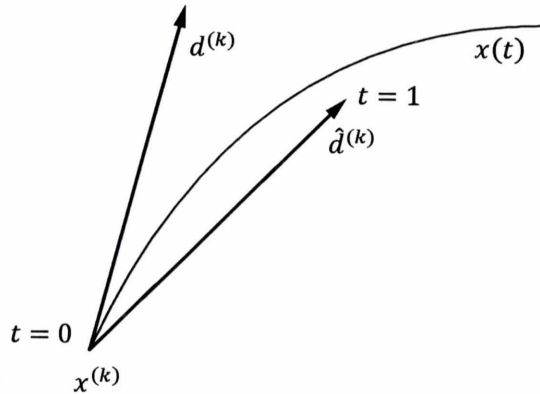
図 B.1 曲線  $x(t)$ 

図 B.1 からわかるように、 $t$  が十分小さいときに  $x(t) \approx x^{(k)} + td^{(k)}$  であるから、式(B.28)と同様、不等式(B.39)も十分小さい任意の  $t$  に対して成立する。このことから、上のように修正した SQP 法が大域的収束性を持つことが示される。また、式(B.38)より、 $x(1) = x^{(k)} + \hat{d}^{(k)}$  であるから、曲線  $x(t)$  上で 1 次探索を行った大域的収束性だけでなく、準ニュートン法が本来もっている速い局所的収束性、すなわち超 1 次収束性も継承することが証明できる。

### B.2.5 逐次 2 次計画法のアルゴリズム

前節の方法をそのまま実行すると、各反復で次の点  $x^{(k+1)}$  を決定するために二つの部分問題(B.22)(B.37)を解くことになる。しかし、第 2 の問題(B.37)は、部分問題(B.22)の解  $d^{(k)}$  を探索方向としたとき、ステップ幅  $t^{(k)}$  が極端に小さくなってしまいうような場合に対処するために導入したものであるから、実際には問題(B.37)の解  $\hat{d}^{(k)}$  は必要なときだけ計算すれば十分である。特に、そのような事態が発生するのは、現在の点  $x^{(k)}$  が実行可能領域のほぼ境界上にあり、かつ点  $x^{(k)} + d^{(k)}$  における有効制約条件に対する近似度が不十分な場合であることに注意すれば、次の二つの条件が同時に成立するときに限って部分問題(B.37)の解を計算するのが適当と考えられる。

$$J_\varepsilon(x^{(k)}) \triangleq \{i \mid |c_i(x^{(k)})| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m\} \neq \emptyset \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \left| c_i(x^{(k)}) + (a_i^{(k)})^T d^{(k)} - c_i(x^{(k)} + d^{(k)}) \right| \mid i \in J_\varepsilon(x^{(k)}) \right\} \\ & < \sigma \max \left\{ \left| c_i(x^{(k)}) + \nabla c_i(x^{(k)})^T d^{(k)} - c_i(x^{(k)} + d^{(k)}) \right| \mid i \in J_\varepsilon(x^{(k)}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

ただし  $\varepsilon$  は十分に小さい整数であり、 $\sigma$  は  $0 < \sigma < 1$  であるような定数とする。

ところで、これまではペナルティ・パラメータ  $r$  の値は十分大きいものと仮定してきたが、実際計算において、 $r$  の値をどの程度大きく選べばよいか前もって知ることは一般に不可能である。本研究では問題(B.22)のキューン・タッカー条件を満たすベクトルを  $(x^{(k)}, u^{(k+1)})$  としたとき、すべての  $k$  と  $i$  に対して  $r > |u^{(k+1)}|$  が成立すれば、 $d^{(k)}$  はペナルティ関数  $F_r$  の点  $x^{(k)}$  における降下方向になり、生成される点列  $\{x^{(k)}\}$  は適当な条件の下で  $x^*$  に収束するという事実を考慮して、次式によりパラメータ  $r$  を反復ごとに更新してゆくことにする。

$$r := \begin{cases} \max\{u_i^{(k+1)} \mid i = 1, 2, \dots, m\} + \rho, & r < \max\{u_i^{(k+1)} \mid i = 1, 2, \dots, m\} \text{ のとき} \\ r, & \text{それ以外} \end{cases} \quad (\text{B.42})$$

ただし  $\rho > 0$  は適当な定数である。生成されるラグランジュ乗数の列  $\{u^{(k)}\}$  が有限ならば、 $r$  の値が実際に変更されるのはたかだか有限回であり、反復が十分に進行したあとは  $r$  は一定値をとる。

以下に SQP 法のアルゴリズムを簡単にまとめる。

— 逐次 2 次計画法 SQP —

- [1] 適当な初期点  $x^{(0)}$ 、正定値対称行列  $B^{(0)}$ 、ペナルティ・パラメータ  $r > 0$  を選び、 $k := 0$  とおく。
- [2] 2 次計画問題(B.22)を解いて  $(d^{(k)}, u^{(k+1)})$  を求める。問題(B.22)が実行可能解をもたないときは、2 次計画問題(B.26)を解いて  $(d^{(k)}, u^{(k+1)})$  を求める。
- [3] 式(B.42)によりペナルティ・パラメータ  $r$  を更新する。ステップ[2]で  $d^{(k)}$  が問題(B.26)から定められていたならば、ステップ[5]へ進む。
- [4] 式(B.40)(B.41)が成立するならば、ステップ[6]へ進む。
- [5] 方向  $d^{(k)}$  に関する直線探索を行い、式(B.28)を満たすステップ幅  $t^{(k)}$  を求める。 $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}d^{(k)}$  とおいてステップ[8]へ進む。
- [6] 2 次計画問題(B.37)の解  $\hat{d}^{(k)}$  を計算する
- [7] 式(B.38)で定義される曲線  $x(t)$  上で 1 次元探索を行って、式(B.39)を満たすステップ幅  $t^{(k)}$  を求め、 $x^{(k+1)} := x(t^{(k)})$  とおく。
- [8] 公式(B.21)を用いて行列  $B^{(k)}$  を更新する  $k := k + 1$  としてステップ[2]へ戻る。

### B.3 2 次計画問題に対する双対法

本節では 2 次計画問題に対する双対法について述べる。2 次計画問題はポートフォリオ選択問題など重要な応用分野を持つだけでなく、一般の非線形計画問題の反復解法における部分問題としてもよく用いられている。この問題に対して数多くの解法が開発されているが、本論文では D.Goldfarb と A.Idnani によって提案された双対法を使用している。その基本的な考え方と実際の計算方法について説明する。

#### B.3.1 最適性条件と J-最適解

一般に 2 次計画問題は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & c^T x + \frac{1}{2} x^T G x \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件: } & a_i^T x = b_i, & i = 1, 2, \dots, m_e \\ & a_i^T x \geq b_i, & i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

ここで  $a_i$  と  $c$  は  $n$  次元ベクトル。 $b_i$  は実数、 $G$  は  $n \times n$  対称行列、 $T$  は転置記号である。ただし、等式制約条件を全く含まないような問題に対しては  $m_e = 0$ 、不等式制約条件を含まないような問題に対しては  $m = m_e$  と考える。以下では、等式制約条件と不等式制約条件の添字集合をそれぞれ

$$E = \{1, 2, \dots, m_e\}, \quad K = \{m_e + 1, m_e + 2, \dots, m\}$$

と表すことにする。

以下では、行列  $G$  は正定値、すなわち任意の  $n$  次元ベクトル  $x \neq 0$  に対して  $x^T G x > 0$  であると仮定する。

そのとき、問題(B.43)は凸計画問題であるから、 $x$ が問題(B.43)の最適解であるための必要十分条件は、 $x$ とラグランジュ乗数  $v=(v_1, v_2, \dots, v_m)$ が次のキューン・タッカー条件(B.44)~(B.46)を満足することである。

$$c + Gx - \sum_{i=1}^m v_i a_i = 0 \quad (\text{B.44})$$

$$a_i^T x = b_i, \quad i \in E \quad (\text{B.45})$$

$$a_i^T x \geq b_i, \quad v_i \geq 0, \quad v_i(a_i^T x - b_i) = 0, \quad i \in K \quad (\text{B.46})$$

式(B.45)(B.46)に示すように、等式制約に対応するラグランジュ乗数  $v_i(i \in E)$ には符号の制限はないが、不等式制約に対応するラグランジュ乗数  $v_i(i \in K)$ は非負であり、さらに最適解において等号が成立していない制約条件に対応するラグランジュ乗数の値は0でなければならない。

ここで、以下において使用する用語をいくつか定義する。

任意の点 $x$ に対して  $a_i^T x = b_i$ が成立するような制約条件の部分集合を点 $x$ における有効集合(active set)と呼ぶ(この定義では、点 $x$ の問題(B.43)に対する実行可能性を前提としていないことに注意)。また、添字集合 $J$ において、ベクトル  $a_i(i \in J)$ が1次独立ならば、集 $J$ は独立であるという。

添字集合  $S \cup K \subset E$ を用いて定義される次の2次計画問題を部分問題  $P(S)$ と呼ぶ。

$$\begin{aligned} P(S) \quad \text{目的関数:} \quad & c^T x + \frac{1}{2} x^T G x \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件:} \quad & a_i^T x = b_i, \quad i \in S \cap E \\ & a_i^T x \geq b_i, \quad i \in S \cap K \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

また、添字集合  $j \subset S$  部分問題  $P(S)$ の最適解  $x$ における独立な有効集合であるとき、 $x$ を $J$ -最適解と呼ぶ。

点 $x$ が添字集合 $J$ に対する $J$ -最適解ならば、それは部分問題  $P(J)$ の最適解でもあるから、問題  $P(J)$ に対する次のキューン・タッカー条件を満足する。

$$c + Gx - \sum_{i \in J} v_i a_i = 0 \quad (\text{B.47})$$

$$a_i^T x = b_i, \quad i \in J \cap E \quad (\text{B.48})$$

$$a_i^T x \geq b_i, \quad v_i \geq 0, \quad v_i(a_i^T x - b_i) = 0, \quad i \in J \cap K \quad (\text{B.49})$$

もちろん、 $J$ -最適解はもとの問題(B.43)に対して実行可能とは限らない。しかしながら、式(B.44)~(B.46)と式(B.47)~(B.48)を比較すると、 $J$ -最適解  $x$ が添字集合 $J$ 以外の問題(B.43)の制約条件をすべて満たすときには、 $x$ は問題(C.43)の最適解になっていることがわかる。(キューン・タッカー条件(B.44)~(B.46)において、すべての  $i \notin J$  に対して  $v_i = 0$  と考えればよい)。

上に述べた最適性の条件を少し違った角度から見てみよう。独立有効集合 $J$ に対してベクトル  $a_i(i \in J)$ を列とするような  $n \times |J|$  行列を  $A_J$ で表し( $|J|$ は集合 $J$ の要素数)、さらに  $A_J$ の一般逆行列を

$$A_J^+ = (A_J^T G^{-1} A_J)^{-1} A_J^T G^{-1} \quad (\text{B.50})$$

で定義する。 $A_J^+$ は  $n \times |J|$  行列であり、 $A_J^+ A_J = I$ を満足するが、一般に  $A_J A_J^+ \neq I$ である。

今、目的関数の勾配ベクトルを

$$g(x) = c + Gx \quad (\text{B.51})$$

と書き、 $|J|$ 次元ベクトル  $v_J(x)$ を

$$v_j(x) = A_j^+ g(x) \quad (\text{B.52})$$

に定めれば、容易に確かめられるように、 $x$  が  $J$ -最適解のとき、 $v_j(x)$  は部分問題  $P(J)$  も対するキューン・タッカー条件(B.47)～(B.49)を満足するラグランジュ乗数  $v_i$  のベクトルになっている。したがって、 $J$ -最適解  $x$  においては次の(B.53)(B.54)が成立する。

$$g(x) - A_j v_j(x) = 0 \quad (\text{B.53})$$

$$v_i(x) \geq 0, \quad i \in J \cap K \quad (\text{B.54})$$

また  $n \times n$  行列  $H_j$  を

$$H_j = G^{-1}(I - A_j A_j^+) \quad (\text{B.55})$$

で定義すれば、式(B.53)が成立することと

$$H_j g(x) = 0 \quad (\text{B.56})$$

が成立することは等価であることもわかる。

### B.3.2 双対法

以下、問題(B.43)の目的関数を

$$F(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T G x$$

と表す。双対法は、独立有効集合  $c$  の列と、それに対応する  $J$ -最適解の列を生成する方法であり、その大筋は次のように書ける。

— 双対法 QPDUAL —

- [1] 適当な有効集合  $J$  に対する  $J$ -最適解を計算し、それを初期解とする。
- [2]  $x$  が問題(B.43)の実行可能解ならば停止( $x$ は最適解)。そうでなければ、点  $x$  が満たしていない制約条件の添字  $s \notin J$  をひとつ選ぶ。
- [3] 部分問題  $P(J \cup \{s\})$  が実行不可能ならば停止(問題(B.43)は実行不可能)。そうでなければステップ[4]へ
- [4]  $J' \subseteq J$  を満たし、かつ独立であるような制約条件の添字集合  $J' \cup \{s\}$  に対する  $(J' \cup \{s\})$ -最適解  $x'$  で  $F(x') > F(x)$  を満足するものを見つける。  $J := J' \cup \{s\}, x := x'$  においてステップ[2]へ戻る。

行列  $G$  の正定値性の仮定より、問題(B.43)が実行可能なとき、それは必ずただひとつの最適解  $x^*$  を持つ。また、任意の独立有効集合  $J$  に対して、部分問題  $P(J)$  の実行可能領域は問題(B.43)のそれを含むので(つまり、制約条件が緩和されているので)、 $J$ -最適解  $x$  は不等式  $F(x) \leq F(x^*)$  を満足する。したがって、上の手続きで生成される  $J$ -最適解の目的関数値は、下から問題(B.43)の最小値  $F(x^*)$  に近づいてゆく。さらに、ステップ[4]において新たな独立有効集合が得られるたびに目的関数値が狭義に単調増加することと、有効集合が有限個しか存在しないことから、この手続きは有限回の反復で終了する。

上のアルゴリズムを具体的に説明する。以下、議論を簡単にするため、等式制約の集合  $E$  は独立であると仮定する。ステップ[1]では、 $J := E$  とおいた部分問題  $P(J)$  の最適解を計算して、それを初期解とするのが便利である。その結果、以下に述べる添字集合  $J$  の構成法により、アルゴリズムの生成するどの点におい

ても、すべての等式制約が満たされ、有効集合  $J$  は必ず  $E$  を含む。 $J=E$  のとき、明らかに  $J \cap K = \emptyset$  であるから、式(B.47)~(B.49)より部分問題  $P(J)$  に対するキューン・タッカー条件は次のように表すことができる。

$$Gx - A_J v_J = -c \quad (\text{B.57})$$

$$A_J^T x = b_J \quad (\text{B.58})$$

ただし  $v_J$  と  $b_J$  はそれぞれ  $v_i (i \in J)$  と  $b_i (i \in J)$  を成分とする  $|J|$  次元ベクトルを表す。

今  $G$  は正定値と仮定しているから、 $G^{-1}$  が存在し、式(B.57)(B.58)を満たす  $x$  と  $v_J$  は次のように直接計算できる。

$$x = (A_J^+)^T b_J - H_J c \quad (\text{B.59})$$

$$v_J = (A_J^T G^{-1} A_J)^{-1} b_J + A_J^+ c \quad (\text{B.60})$$

ただし、 $A_J^+$  と  $H_J$  はそれぞれ式(B.50)(B.55)で定義される行列であり、それらの計算方法については省略する。

次にステップ[2]を考える。まず、各制約条件に対して、 $c_i(x)$  を

$$c_i(x) = a_i^T x - b_i \quad (\text{B.61})$$

で定義する。上にも述べたように、どの反復においても常に  $E \subseteq J$  となることから、 $i \in J$  は  $i \in K$  であることを意味している。よって  $J$ -最適解  $x$  が問題(B.43)の最適解であることと、 $c_i(x) > 0$  がすべての  $i \in J$  に対して成り立つことは等価である。したがって、もし  $x$  が最適解でなければ

$$c_s(x) < 0 \quad (\text{B.62})$$

を満たす  $s \in J$  が少なくともひとつは存在する。理論上、ステップ[2]で選ばれる  $s$  は式(B.62)を満たすようなものであればどれもよいが、アルゴリズムの計算効率を考慮すれば

$$c_s(x) = \min\{c_i(x) | i \in J\} < 0 \quad (\text{B.63})$$

によって  $s$  を決定するのが妥当と考えられる。

次にステップ[3]と[4]をまとめて説明する。まず  $n$  次元列ベクトル  $z$  と  $|J|$  次元ベクトル  $r$  を式(B.55)の  $H_J$  と式(B.50)の  $A_J^+$  を用いて、それぞれ

$$z = H_J a_s \quad (\text{B.64})$$

$$r = A_J^+ a_s \quad (\text{B.65})$$

で定義する。ここで、 $H_J$  の定義式(B.55)より、 $z=0$  となることと、ベクトル  $a_s$  がベクトル  $a_i (i \in J)$  の 1 次結合で表されることは等価であり、よって、 $z \neq 0$  ならば  $a_s$  は  $\{a_i | i \in J\}$  と独立であるという事実注意到しておく。以下、 $z \neq 0$  と  $z=0$  の二つの場合に分けて考える。

#### (a) $z \neq 0$ のとき

上に述べたように、 $a_s$  は  $\{a_i | i \in J\}$  と独立となるから、 $J$  自身の独立性より  $J \cup \{s\}$  も独立となる。したがって、 $\bar{J} := J \cup \{s\}$  とおけば、 $n \times (|J| + 1)$  行列  $\bar{A}_J = [A_J, a_s]$  に対しても、式(B.50)(B.52)(B.55)と同様  $\bar{A}_J^+, \bar{v}_J, \bar{H}_J$  が定義できる。

ここで、次の関係が成立しているものとする。

$$H_J g(x) = 0 \quad (\text{B.66})$$

$$v_i(x) \geq 0, \quad i \in \bar{J} \cap K \quad (\text{B.67})$$

特にアルゴリズムのステップ[2]からステップ[3]に入った時点では、 $v_j(\bar{x})$ の成分のうち添字集合  $J$  に対応する部分は、式(B.52)で与えられる  $v_j(x)$ に等しく、また添字  $s$  に対しては  $v_s(x)=0$  であるから、式(B.66)(B.67)は確かに成立している。(式(B.66)は  $v_s(x)=0$  より添字集合  $\bar{J}$  に対しても式(B.53)が成り立つこと、及び式(B.53)と式(B.56)が等価であることから成立する。)

また、式(B.61)で定義した  $c_i(x)$ に対して

$$c_i(x) = 0, \quad i \in J \quad (\text{B.68})$$

であり、さらに添字  $s$  に対しては不等式(B.62)が成り立っているものとする。特に、ステップ[2]からステップ[3]にはいった時点では、 $x$  は  $J$ -最適解であるから、式(B.68)が満たされていることは明らかである。

このように、 $x$  は添字  $s$  に対応する不等式制約条件を満たしていないことを除いて、 $\bar{J}$ -最適解であるための条件(B.66)~(B.68)をすべて満たしている(式(B.53)(B.54)参照)。以下では、独立な添字集合  $J \cup \{s\}$  に対して、式(B.66)~(B.68)と式(BR.62)を満たすような  $x$  を一般に  $(J, s)$ -準最適解と呼ぶ。

さて、ここで点  $x$  から式(B.64)で定義されるベクトル  $z=H_J a_s$  の方向に  $t(\geq 0)$ だけ進んだ点

$$\bar{x} = x + tz \quad (\text{B.69})$$

を考える。式(B.51)(B.55)(B.64)(B.65)(B.69)より

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) &= g(x) + tGH_J a_s \\ &= g(x) + t(I - A_J A_J^+) a_s \\ &= g(x) + t(a_s - A_J r) \end{aligned}$$

であるから  $(|J|+1)$ 次元ベクトル  $\bar{r}$  を

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.70})$$

で定義すれば

$$g(\bar{x}) = g(x) + tA_J \bar{r} \quad (\text{B.71})$$

と表すことができる。さらに、 $H_J \bar{A}_J = 0$  であるから、式(B.66)(B.71)より

$$H_J g(\bar{x}) = 0 \quad (\text{B.72})$$

が成り立つ。また、 $A_J^+ A_J = I$  であるから、式(B.52)(B.71)より

$$v_j(\bar{x}) = A_J^+ g(\bar{x}) = v_j(x) - t\bar{r}$$

となるが、式(B.70)より各成分は

$$v_i(\bar{x}) = v_i(x) - t r_i, \quad i \in J \quad (\text{B.73})$$

$$v_s(\bar{x}) = v_s(x) + t \quad (\text{B.74})$$

と表される。さらに、各制約条件に対して、式(B.68)と  $H_J \bar{A}_J = 0$  により

$$c_j(\bar{x}) = c_j(x) + tA_J^T z = 0 \quad (\text{B.75})$$

$$c_s(\bar{x}) = c_s(x) + t a_s^T z \quad (\text{B.76})$$

が成立する。また、式(B.50)(B.55)より、 $H_J = H_J G H_J$  であるから、式(B.64)と行列  $G$  の正定値性より

$$a_s^T z = a_s^T H_J a_s = a_s^T H_J G H_J a_s = z^T G z > 0 \quad (\text{B.77})$$

が成り立つ。以上の議論から、式(B.69)のように点  $x$  からベクトル  $z$  の方向に動くとき、任意の  $t \geq 0$  に対し

て式(B.72)(B.75)が満たされることがわかる。さらに、

$$t_1 = \min\{v_i(x)/r_i | r_i > 0, i \in J \cap K\} \quad (\text{B.78})$$

$$t_2 = -c_s(x)/a_s^T z \quad (\text{B.79})$$

とおけば(ただし、 $r_i > 0$  を満たす  $i \in J \cap K$  が存在しないときには、 $t_1 = \infty$  と定義する)、式(B.67)および式(B.62), (B.67)より  $t_1 \geq 0$  かつ  $t_1 > 0$  である。また、式(B.67)(B.73)(B.74)より、 $0 \leq t \leq t_1$  の範囲内では

$$v_i(\bar{x}) \geq 0, \quad i \in \bar{J} \cap K \quad (\text{B.80})$$

であり、式(B.76)より、 $t = t_2$  となったとき

$$c_s(\bar{x}) = 0 \quad (\text{B.81})$$

が成り立つ。ここで次の二つの場合が考えられる。

(a-1)  $t \geq t_2$  のとき

この場合、

$$\bar{x} = x + t_2$$

は式(B.72)(B.75)(B.80)(B.81)を満たすので  $(J \cup \{s\})$ -最適解であり、さらに目的関数に対しても

$$F(\bar{x}) - F(x) = \left( \frac{1}{2} t_2 + v_s(x) \right) t_2 a_s^T z \quad (\text{B.82})$$

となるから、式(B.77)より  $F(\bar{x}) > F(x)$  が成り立つ。よってアルゴリズムのステップ[4]の条件が満たされるので、 $x := \bar{x}$ ,  $J := J \cup \{s\}$  と更新を行った後、ステップ[2]へ戻ればよい。

(a-2)  $t < t_2$  のとき

この場合には、式(B.69)の  $t$  の値を増加させていったとき、式(B.81)が満たされる前に、 $t > t_1$  となった時点で

$$t_1 = v_k(x)/r_k \quad (\text{B.83})$$

であるような添字  $k \in J \cap K$  に対して式(B.80)が満たされなくなってしまうので、 $t_1$  を超えて  $t$  の値を増加させることはできない。そこで、添字集合  $J$  から  $k$  を取り除き、あらたに添字集合  $\bar{J} := J - \{k\}$  を考えると、式(B.72)(B.75)および式(B.73)(B.78)より

$$\bar{x} = x + t_1$$

は  $(\bar{J}, s)$ -準最適解になっていることがわかる。したがって、この場合には  $t = t_1$  として  $x := \bar{x}$ , と  $J := \bar{J}$  更新したのち、 $z$  と  $r$  を式(B.64)(B.65)によって計算し、ふたたびステップ[3]・[4]を実行する。

(b)  $z = 0$  のとき

まず式(B.55)(B.64)(B.65)より

$$z = G^{-1}(a_s - A_j r)$$

であるから、 $z = 0$  は

$$a_s = A_j r \quad (\text{B.84})$$

と等価であることに注意。ここで、(b)をさらに次の二つの場合に分けて考える。

(b-1) すべての  $i \in J \cap K$  に対して  $r_i \leq 0$  が成り立つとき

部分問題  $P(J \cup \{s\})$  は少なくともひとつの実行可能解  $y$  をもつと仮定すれば、式(B.61)より

$$c_i(y) = 0, \quad i \in J \cap E \quad (\text{B.85})$$

$$c_i(y) \geq 0, \quad i \in J \cap K \quad (\text{B.86})$$

$$c_s(y) \geq 0 \quad (\text{B.87})$$

であるが、 $x$  が  $J$ -最適解であることから

$$c_i(x) = 0, \quad i \in J \quad (\text{B.88})$$

が成り立っているので、これと式(B.85)(B.86)より

$$a_i^T(y - x) = 0, \quad i \in J \cap E \quad (\text{B.89})$$

$$a_i^T(y - x) \geq 0, \quad i \in J \cap K \quad (\text{B.90})$$

が成立する。一方、式(B.62)(B.84)(B.87)より

$$\begin{aligned} 0 &< c_s(y) - c_s(x) \\ &= a_s^T(y - x) \\ &= r^T A_J^T(y - x) \\ &= \sum_{i \in J \cap E} r_i a_i^T(y - x) + \sum_{i \in J \cap K} r_i a_i^T(y - x) \end{aligned}$$

となるが、これは式(B.89)(B.90)およびすべての  $i \in J \cap K$  に対して  $r_i \leq 0$  であるという(b-1)の条件に矛盾する。したがって、部分問題  $P(J \cup \{s\})$  は実行可能解をもたない。これは元の問題(B.43)も実行可能でないことを意味しているので計算を終了する。

(b-2)  $r_i > 0$  であるような  $i \in J \cap K$  が存在するとき

式(B.84)はベクトル  $a_s$  が  $\{a_i | i \in J\}$  の 1 次結合で表されることを意味しているので、集合  $J \cup \{s\}$  は独立ではない。(このことはまた、(b-2)がアルゴリズムのステップ[2]からステップ[3]にはいった時点でのみ起こりうることをしめしているので、そのとき  $x$  は  $J$ -最適解になっている。)そこで、新たな添字集合  $J'$  に対する  $J'$ -最適解を得るためには、現在の  $J$  から要素をひとつ取り除いて独立集合を作る必要がある。 $J$  から取り除く要素を  $k \in J$  とし、 $J' = J - \{k\}$  とおけば、式(B.84)は

$$a_k = \frac{1}{r_k} \left( a_s - \sum_{i \in J'} r_i a_i \right)$$

と書き換えられる。この関係から、

$$A_J v_J(x) = \frac{v_k(x)}{r_k} a_s + \sum_{i \in J'} \left( v_i(x) - \frac{v_k(x)}{r_k} r_i \right) a_i \quad (\text{B.91})$$

が成り立つので、

$$\bar{v}_i = v_i(x) - (v_k(x)/r_k)r_i, \quad i \in J' \quad (\text{B.92})$$



$$\bar{v}_s = v_k(x)/r_k \quad (\text{B.93})$$

おき、さらに  $\bar{J} := \bar{J} \cup \{s\}$  とすれば、式(B.53)(B.91)より

$$g(x) - A_{\bar{J}} \bar{v}_{\bar{J}} = 0$$

すなわち

$$H_{\bar{J}} g(x) = 0 \quad (\text{B.94})$$

が得られる。そこで、 $J$  から取り除く要素  $k$  として

$$v_k(x)/r_k = \min\{v_i(x)/r_i \mid r_i > 0, i \in J \cap K\} \quad (\text{B.95})$$

であるような、 $k \in J \cap K$  を選ぶことにしておけば、式(B.92)(B.93)より

$$\bar{v}_i \geq 0, \quad i \in \bar{J} \cap K \quad (\text{B.96})$$

が満たされる。ここで、式(B.92)(B.93)で定義された  $\bar{v}_{\bar{J}}$  に対して

$$\bar{v}_{\bar{J}} = v_{\bar{J}}(x) = A_{\bar{J}}^+ g(x) \quad (\text{B.97})$$

が成り立つことに注意すると、式(B.94)(B.96)より、 $x$  は  $(\bar{J}, s)$ -準最適解になっていることがわかる。よって、このときは  $x$  の値を変えずに、 $v_i(x)$  と  $J$  を  $v_i(x) := \bar{v}_i, J := \bar{J}$  とそれぞれ更新してから、 $z$  と  $r$  を式(B.64)(B.65)によって計算し、あらためてステップ[3]・[4]を実行する。

上に述べた事柄をまとめると次のようになる。ステップ[2]からステップ[3]にはいったとき、(b-1)ならば問題が実行不可能であるから停止する。(a)の場合には現在の  $x$  が  $(J, s)$ -準最適解であることが保証されるが、特に(a-1)のときにはステップ[4]で新たな  $J$ -最適解が得られるのでステップ[2]へ戻る。このようにして新たな  $J$ -最適解が得られた反復を完全反復(full step)という。

逆に、(a-2)のときには、有効集合の要素をひとつ取り除くことにより新たな  $(J, s)$ -準最適解が得られえるので、ふたたびステップ[3]・[4]を実行する。また、(b-2)の時には  $J \cup \{s\}$  が独立ではないので、独立性を保つため  $J$  から要素を一つ取り除く。その結果、新しい  $(J, s)$ -準最適解が得られるので、ふたたびステップ[3]・[4]を実行する。よって、(a-2)と(b-2)は、 $x$  の値が前者では一般に変化するのに対して後者では変化しないという点を除いて、同じ操作を実行することになる。このように、 $J$ -最適解が得られず、かわりに新たな  $(J, s)$ -準最適解が得られるような反復を不完全反復(partial step)と呼ぶ。

双対法を実現したアルゴリズムは有限回の反復で、問題(B.43)の最適解を得るか、または問題(B.43)が実行可能でないことを見出す。このアルゴリズムでは、途中の反復で得られている点は元の問題(B.43)の実行可能解ではない。すなわち、このアルゴリズムが生成する点列は実行可能領域の外側から最適解に近づき、それが実行可能領域に達したところで最適解が得られたことになる。

このことを見るために、下記の例題 B.1 に対してアルゴリズムを適用したときに生成される点列  $\{x^{(k)}\}$  を図 B.2 に示す。ここで、①で表された直線は第 1 制約条件に対応している。図からわかるように、 $x^{(1)}$  は  $\{3\}$ -最適解、 $x^{(2)}$  は  $\{2, 3\}$ -最適解、 $x^{(4)}$  は  $\{1, 2\}$ -最適解であり、特に最後の点  $x^{(4)}$  はこの問題の最適解になっている。また、第 1 反復、第 2 反復、第 4 反復はいずれも完全反復であるが、第 3 反復  $x^{(2)} \rightarrow x^{(3)}$  は(b-2)の場合に対応する不完全反復であり、変数  $x$  の値は変化しない。

◆ 例題 B.1      目的関数 :  $\frac{1}{2}(5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2) - 95x_1 - 105x_2 \rightarrow \text{最少}$

制約条件 :  $-x_1 - 2x_2 \geq -10 \quad \dots \textcircled{1}$

$-3x_1 - x_2 \geq -15 \quad \dots \textcircled{2}$

$-2x_1 - 3x_2 \geq -30 \quad \dots \textcircled{3}$       (B.98)

$15x_1 - 13x_2 \geq 0 \quad \dots \textcircled{4}$

$x_1 \geq 0 \quad \dots \textcircled{5}$

$x_2 \geq 0 \quad \dots \textcircled{6}$

ここで、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{6}$ で表された直線は第 $\textcircled{1} \sim \textcircled{6}$ 制約条件に対応している。

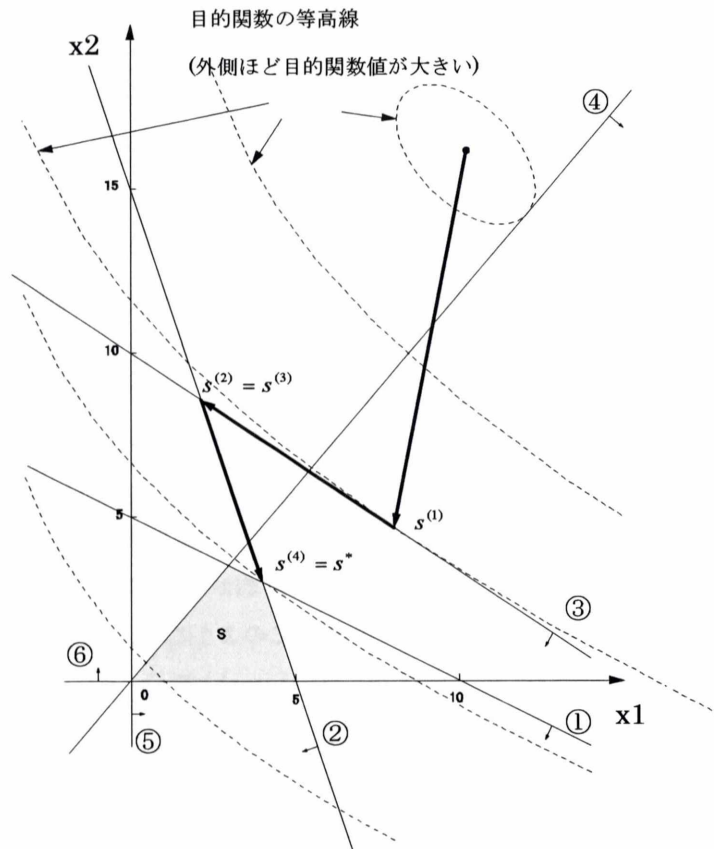


図 B.2 例題 B.1 の問題に対して生成される点列 $\{x^{(k)}\}$ (ただし、 $S$  は実行可能領域)

## 付録 C

### 半剛接立体骨組の要素剛性マトリックスの詳細

#### C.1 半剛接立体骨組の要素剛性マトリックス

まず、梁の解析に用いる座標系としては図 C.1 に示すような梁の図心軸を  $z$  軸とし断面の慣性主軸方向  $x, y$  を軸とする右手系直交  $x, y, z$  座標系を用いる。また梁要素の左端断面の図心を座標原点とする局所座標系で定式化する。半剛接立体骨組の要素剛性マトリックスの詳細に関しては、文献<sup>(24)</sup>を参照されたい。

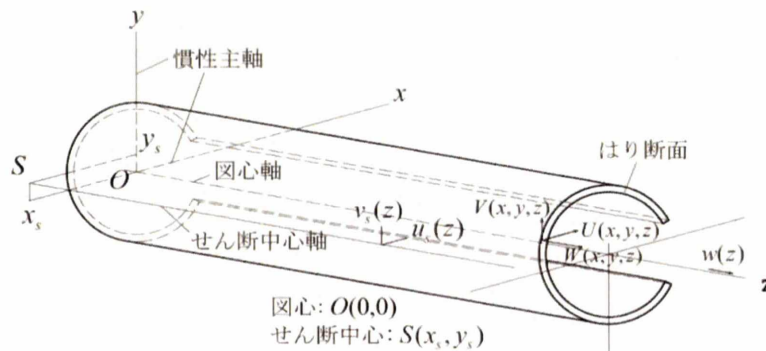


図 C.1 梁の解析に用いる座標系および変位成分

##### C.1.1 軸要素

今回の研究においては軸要素に関しては剛接合としているが、ここでは既存研究で用いられたように、軸要素も半剛接合とした場合について説明する。

図 C.2 に示したような要素左端を座標原点とし図心軸を  $z$  軸とする局所座標系を設定する。また軸の両端に剛性が  $\alpha_{zA}$ ,  $\alpha_{zB}$  で長さを  $l$  と仮定した軸ばねが付加されている。

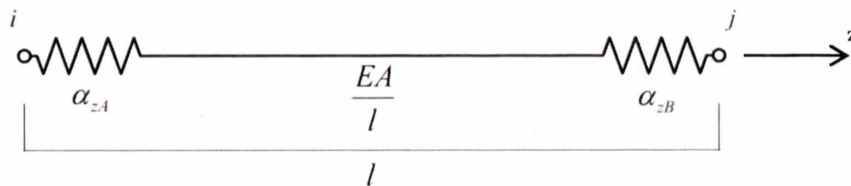


図 C.2 軸要素



$$\lambda_{yra} = \lambda_{yrb} = \frac{lk_{yra}}{lk_{yra} + 6EI_x} \quad (C.4)$$

$$\lambda_{xs} = \frac{k_{xs}l^3}{k_{xs}l^3 + 12EI_x}$$

ただし  $\lambda_{yra}, \lambda_{yrb}, \lambda_{xs}$  の取りうる値は  $0 < \lambda \leq 1$  であり、1 のとき剛接を表す。

次に x 軸まわりの曲げ変形について考える。

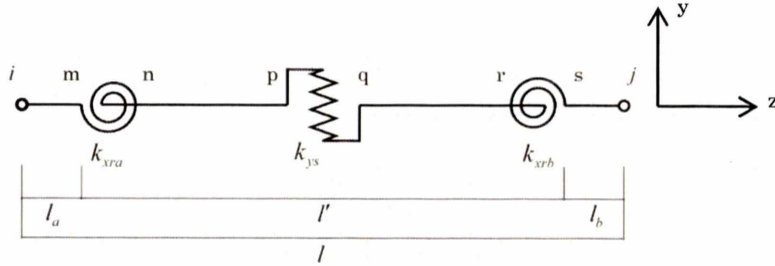


図 C.4 x 軸まわりの曲げ要素

x 軸まわりの曲げ要素の剛性マトリクス  $[k_y^e]$  は

$$[k_y^e] = \begin{bmatrix} k_{x11} & & & & & & & & \\ k_{x21} + k_{x11}l_a & k_{x22} + 2k_{x21}l_a + k_{x11}l_a^2 & & & & & & & \\ -k_{x11} & -k_{x21} - k_{x11}l_a & & & k_{x11} & & & & \\ k_{x41} + k_{x11}l_b & k_{x42} + k_{x41}l_a + k_{x21}l_b + k_{x11}l_al_b & -k_{x41} - k_{x11}l_b & k_{x44} + 2k_{x41}l_b + k_{x11}l_b^2 & & & & & \\ & & & & & & & & & & \text{sym} \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

$$k_{x11} = \frac{12EI_{yy}}{l^3} \lambda_{xs} (\lambda_{yra} + \lambda_{yrb} + 4\lambda_{yra}\lambda_{yrb}) / R_x$$

$$k_{x21} = -\frac{12EI_{yy}}{l^2} \lambda_{yra}\lambda_{ys} (1 + 2\lambda_{yrb}) / R_x$$

$$k_{x22} = \frac{6EI_{yy}}{l'} \lambda_{yra} (\lambda_{yrb} + 2\lambda_{ys} + \lambda_{ys}\lambda_{yrb}) / R_x$$

$$k_{x31} = -k_{x11} \quad k_{y32} = -k_{y21} \quad k_{x33} = -k_{x11}$$

$$k_{x41} = -\frac{12EI_{yy}}{l^2} \lambda_{yrb}\lambda_{ys} (1 + 2\lambda_{yra}) / R_x$$

$$k_{x42} = \frac{6EI_{yy}}{l'} \lambda_{yra}\lambda_{yrb} (-1 + 3\lambda_{ys}) / R_x$$

$$k_{x43} = -k_{x41} \quad k_{x44} = \frac{6EI_{yy}}{l'} \lambda_{yrb} (\lambda_{yra} + 2\lambda_{ys} + \lambda_{ys}\lambda_{yra}) / R_x \quad R_x = \lambda_{yrb} + 2\lambda_{ys} + \lambda_{yrb}\lambda_{ys} + \lambda_{yra} \{1 - 4\lambda_{yrb}(\lambda_{xs} - 1) + \lambda_{xs}\}$$

ここで軸ばね剛性  $\lambda_{yra}, \lambda_{yrb}, \lambda_{ys}$  を次式のように表す。

$$\lambda_{yra} = \lambda_{yrb} = \frac{lk_{yra}}{lk_{yra} + 6EI_x} \quad (C.6)$$

$$\lambda_{ys} = \frac{k_{ys}l^3}{k_{ys}l^3 + 12EI_x}$$

ただし  $\lambda_{yra}, \lambda_{yrb}, \lambda_{ys}$  の取りうる値は  $0 < \lambda \leq 1$  であり、1 のとき剛接を表す。

C.1.3 ねじり要素

梁のねじれ変形はサンブナンねじれを用いる。

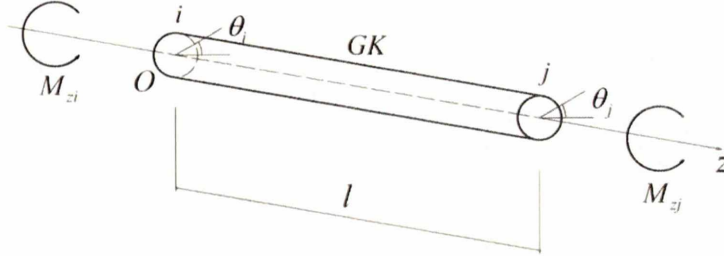


図 C.5 Saint-Venant ねじり要素

ねじり要素の剛性マトリクス $[k_{\theta}^e]$ は次式のようにになる。

$$[k_{\theta}^e] = \frac{GK}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{C.7}$$

ここで K は Saint-Venant のねじり定数と呼ばれる。

C.1.4 半剛接立体骨組の要素剛性マトリクス

三次元梁において梁要素には軸方向変形 2 軸まわりの曲げ変形およびねじり変形が生じる。前述の軸要素、曲げ要素およびねじり要素の剛性マトリクス $[k_w^e] \cdot [k_u^e] \cdot [k_v^e]$ および $[k_{\theta}^e]$ を次のように組み合わせることにより三次元梁要素の局所座標系に対する剛性方程式が次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} k_u^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_v^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_w^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\theta}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s\} \\ \{v_s\} \\ \{w\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_u\} \\ \{f_v\} \\ \{f_w\} \\ \{f_{\theta}\} \end{Bmatrix} \tag{C.8}$$

ここに $\{f_w\}^T = \{P_i \ P_j\}$   $\{f_{\theta}\}^T = \{M_{zi} \ M_{zj}\}$ でそれぞれ軸方向力ねじりモーメントの等価節点力である。ところで式(C.8)の節点変位ベクトルおよび等価節点力ベクトルの順序は梁要素を一つの構造要素として全体座標系に組み込むときに必要となる座標変換を組織的に行う場合に不便である。そのため節点変位ベクトルとして次の順序で考える。

$$\{d_e\}^T = \{u_{si} \ v_{si} \ w_{si} \ -v'_{si} \ u'_{si} \ \theta_i \ u_{sj} \ v_{sj} \ w_{sj} \ -v'_{sj} \ u'_{sj} \ \theta_{sj}\} \tag{C.9}$$

この順序で式(C.8)の剛性方程式を書き換え三次元梁要素の剛性マトリクス $[\bar{k}_e]$ を具体的な形で表現すると次式が得られる。



ここに

$$\begin{aligned}
 \overline{k'_{11}} &= k'_{y11} & \overline{k'_{22}} &= k'_{x11} & \overline{k'_{33}} &= k'_{ww} & \overline{k'_{42}} &= k'_{x21} + k'_{x11}l_a & \overline{k'_{44}} &= k'_{x22} + 2k'_{x21}l_a + k'_{x11}l_a^2 \\
 \overline{k'_{51}} &= k'_{y21} + k'_{y11}l_a & \overline{k'_{55}} &= k'_{y22} + 2k'_{y21}l_a + k'_{y11}l_a^2 & \overline{k'_{71}} &= -k'_{y11} \\
 \overline{k'_{75}} &= -k'_{y21} - k'_{y11}l_a & \overline{k'_{77}} &= k'_{y11} & \overline{k'_{84}} &= -k'_{x21} - k'_{x11}l_a & \overline{k'_{88}} &= k'_{x11} \\
 \overline{k'_{93}} &= -k'_{ww} & \overline{k'_{99}} &= k'_{ww} & \overline{k'_{102}} &= k'_{x41} + k'_{x11}l_b & \overline{k'_{104}} &= k'_{x42} + k'_{x41}l_a + k'_{x21}l_b + k'_{x11}l_a l_b \\
 \overline{k'_{108}} &= -k'_{x41} - k'_{x11}l_b & \overline{k'_{1010}} &= k'_{x41} + 2k'_{y41}l_b + k'_{x11}l_b^2 & \overline{k'_{111}} &= k'_{y41} + k'_{y11}l_b \\
 \overline{k'_{115}} &= k'_{y42} + k'_{y41}l_a + k'_{y21}l_b + k'_{y11}l_a l_b & \overline{k'_{117}} &= -k'_{y41} - k'_{y11}l_b & \overline{k'_{1111}} &= k'_{y41} + 2k'_{y41}l_b + k'_{y11}l_b^2 \\
 \overline{k'_{66}} &= -\frac{GK}{l^2} dlng & \overline{k'_{126}} &= \frac{GK}{l^2} dlng & \overline{k'_{1212}} &= -\frac{GK}{l^2} dlng
 \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
 k'_{ww} &= \frac{EA}{l^2(2-\lambda_A)^2} \{-\lambda_A dlng(2-\lambda_A) + 2\lambda'_A l\} & k'_{y11} &= 24EI_{xx}\lambda_{xs} \left\{ \frac{(1+4\lambda_{yra})\lambda'_{yra}}{R_y l^3} - \frac{(\lambda_{yra} + 2\lambda_{yra}^2)(R'_y l + 3l'R_y)}{R_y^2 l^4} \right\} \\
 k'_{y21} &= 12EI_{xx}\lambda_{xs} \left\{ \frac{(1+4\lambda_{yra})\lambda'_{yra}}{R_y l^2} - \frac{(\lambda_{yra} + 2\lambda_{yra}^2)(R'_y l + 2l'R_y)}{R_y^2 l^3} \right\} & k'_{y31} &= -k'_{y11} & k'_{y32} &= -k'_{y21} & k'_{y33} &= k'_{y11} \\
 k'_{y22} &= 6EI_{xx} \left\{ \frac{2\lambda'_{yrb}\{\lambda_{xs} + \lambda_{yrb}(1+\lambda_{xs})\}}{R_y l} - \frac{\lambda_{yra}\{2\lambda_{xs} + \lambda_{yrb}(1+\lambda_{xs})\}(R'_y l + l'R_y)}{R_y^2 l^2} \right\} & \lambda_{yra} &= \lambda_{yrb} \text{のとき、} & k'_{y41} &= k'_{y21} \\
 k'_{y42} &= 6EI_{xx}(-1+3\lambda_{xs}) \left\{ \frac{2\lambda_{yra}\lambda'_{yra}}{R_y l} - \frac{\lambda_{yra}^2(R'_y l + l'R_y)}{R_y^2 l^2} \right\} & k'_{y43} &= -k'_{y41} & \lambda_{yra} &= \lambda_{yrb} \text{のとき、} & k'_{y44} &= k'_{y22} \\
 R'_y &= 2\lambda_{yra}\{1+\lambda_{xs} - 4\lambda_{yra}(\lambda_{xs}-1)\} \text{ただし、} & \lambda_{yra} &= \lambda_{yrb} & k'_{x11} &= \frac{24EI_{yy}}{R_x l^4} \lambda_{ys}(\lambda_{xra} + 2\lambda_{xra}^2)(-R'_x l - 3l'R_x) \\
 k'_{x21} &= \frac{12EI_{yy}}{R_x^2 l^3} \lambda_{xra}\lambda_{ys}(1+2\lambda_{xra})(\lambda_{ys}l + 2l'R_x) & k'_{x21} &= -\frac{6EI_{yy}}{R_x^2 l^2} \lambda_{xra}(\lambda_{xrb} + 2\lambda_{ys} + \lambda_{ys}\lambda_{xrb})(R'_x l + l'R_x) \\
 k'_{x31} &= -k'_{x11} & k'_{x32} &= -k'_{x21} & k'_{x33} &= k'_{x11} & \lambda_{xra} &= \lambda_{xrb} \text{のとき、} & k'_{x41} &= k'_{x21} \\
 k'_{x42} &= -\frac{6EI_{yy}}{R_x^2 l^2} \lambda_{xra}\lambda_{xrb}(-1+3\lambda_{ys})(R'_x l + l'R_x) & k'_{x43} &= -k'_{x41} & \lambda_{xra} &= \lambda_{xrb} \text{のとき、} & k'_{x44} &= k'_{x22}
 \end{aligned}$$



## 付録 D 木質構造物の構造設計

### D.1 部材の設計

個材座屈が全体座屈に先行しないよう、木質構造設計基準・同解説<sup>(25)</sup>を基準に、部材に各部材に生じる力は式(D.1)・式(D.2)を満たすような制約条件を設定した。ただし、式(D.1)・式(D.2)中の許容引張応力度  $f_t$ ・許容引張応力度  $f_c$ ・許容曲げ応力度  $f_b$  は第 3 章の解析に使用したベイマツにおいては、12.8[N/mm<sup>2</sup>], 11.2[N/mm<sup>2</sup>], 16.5[N/mm<sup>2</sup>]とする<sup>(26)</sup>。

(i)引張を伴う引張材

$$\left(\frac{N}{A_e f_t}\right) + \left(\frac{M}{Z_e f_b}\right) \leq 1 \quad \text{式(D.1)}$$

N	: 設計用軸方向引張力	[N]
A <sub>e</sub>	: 有効断面積	[mm <sup>2</sup> ]
M	: 設計用曲げモーメント	[N・mm]
Z <sub>e</sub>	: 有効断面係数	[mm <sup>3</sup> ]
f <sub>t</sub>	: 許容引張応力度	[N/mm <sup>2</sup> ]
f <sub>b</sub>	: 許容曲げ応力度	[N/mm <sup>2</sup> ]

(ii)曲げを伴う圧縮材

$$\left(\frac{N}{A_e \eta f_c}\right) + \left(\frac{M}{Z_e f_b}\right) \leq 1 \quad \text{式(D.2)}$$

N	: 設計用軸方向引張力	[N]
A <sub>e</sub>	: 有効断面積	[mm <sup>2</sup> ]
M	: 設計用曲げモーメント	[N・mm]
Z <sub>e</sub>	: 有効断面係数	[mm <sup>3</sup> ]
f <sub>c</sub>	: 許容引張応力度	[N/mm <sup>2</sup> ]
f <sub>b</sub>	: 許容曲げ応力度	[N/mm <sup>2</sup> ]

$\eta$  : 座屈低減定数(細長比 $\lambda$ に応じて決定する)

$$\lambda \leq 30 \quad \eta = 1$$

$$30 < \lambda \leq 100 \quad \eta = 1.3 - 0.01\lambda$$

$$100 < \lambda \quad \eta = 3000/\lambda^2$$

## D.2 接合部の設計

第 2.3 節においては曲げ要素についての定式化を説明したが、松野の研究においては軸要素についても定式化しており、式(D.3)のようになる。めり込み軸方向剛性  $K_{\text{軸}}$  [kN/m] は、ボルト長・ボルト径あたりの木材めり込み剛性  $k_{0i}$  [kN/m]、ボルト本数  $n$  を用いて評価することができる。

$$K_{\text{軸}} = \alpha_{ak} \times k_{0i} \times \beta_{ak} \times n \times L_b \times D_b \quad \text{式(D.3)}$$

$\alpha_{ak}$  : ボルト長・ボルト径あたりの木材めり込み剛性に関する影響係数(実験定数)

$$\alpha_{mk} = 0.85$$

$\beta_{ak}$  : ボルト本数に関する影響係数(実験定数)

$$\beta_{ak} = \frac{1}{2n} + 0.3$$

$n$  : ボルト本数

$k_{0i}$  : 木材繊維方向に対するボルト長・ボルト径のめり込み剛性[kN/m]

$L_b$  : 木材中のボルト長(木材幅)[m]

$D_b$  : ボルト径[m]

## 参考文献

- (1) 農林水産省,<http://www.maff.go.jp/j/council/seisaku/kikaku/goudou/04/index.html>
- (2) 佐々木睦朗：建築と構造合理性、建築技術、No.671,pp.84-89、2005
- (3) 宮崎県木材協同組合連合会,<http://www.miyazaki-mokuzai.or.jp/main.htm>
- (4) 竹中工務店,<http://www.takenaka.co.jp/>
- (5) 伊東豊雄建築設計事務所,<http://www.toyo-ito.co.jp/>
- (6) 郡谷徒知宏,小河利行,桑田真理子,剛接合単層ラチスドーム弾塑性座屈荷重評価—形状初期不整による座屈荷重低減率について—,日本建築学科器大会学術講演梗概集,1999.9,pp887-888
- (7) 小河利行,加藤史郎,五十畑徹,熊谷知彦,荷重不整および形状初期不整を有する単層 HP ラチスシェルの座屈挙動と耐力評価,日本建築学会構造系論文集,第 560 号,pp139-145,2002
- (8) Analysis based evaluation for buckling loads of two-way elliptic paraboloidal single layer lattice domes, Shiro Kato, Tetsuo Yamashita, Shouji Nakazawa, Yun-beom Kim, Atsushi Fujibayashi, Journal of Constructional Steel Research 63,pp1219-1227,2007
- (9) 藤林篤史,中澤祥二,加藤史郎,樋口直也,山下哲郎,今野岳,半剛接推動型単層直交格子ドームの耐力推定,日本建築学会大会学術講演梗概集,2007,pp771 - 772
- (10) 松野浩一,木材めり込み性状を考慮した木造単層スペースフレーム構造の研究,法政大学大学院博士学位論文,1995
- (11) 小河利行,大崎純,立石理恵,線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化,日本建築学会構造系論文集,第 570 号,pp129-136,2003
- (12) 小林勇也,線形座屈荷重係数最大化を目的とした自由曲面ラチスシェル構造の形態創生に関する研究,法政大学大学院修士論文,2009 年度
- (13) 高橋智也,半剛接合部を有する自由曲面の形態デザインに関する研究,法政大学卒業論文,2005
- (14) 鈴木彩子,木造ラチスシェルに関する研究—線形座屈荷重係数最大化による形態創生、及び接合部におけるガタの影響—,法政大学卒業論文,2009
- (15) 坪井善勝,名須川良平,建築雑誌,vol103,No1276, pp8,1988
- (16) 空間構造の数値解析ガイドライン,日本建築学会,pp110,2001
- (17) MIDAS/Gen のユーザーマニュアル,株式会社 MIDASIT
- (18) 加藤史郎,庄村昌明,接合部の曲げ剛性が円形平面状の単層ラチスドームの座屈荷重に与える影響,日本建築学会構造系論文集,第 465 号,pp97-107,1994
- (19) 木質構造設計基準・同解説 第 2 刷,日本建築学会,pp217,2009
- (20) 木質構造接合部設計マニュアル,日本建築学会, pp203,2009
- (21) 平井卓郎,沢田稔,側板に鋼板を用いたボルト接合部のせん断耐力,木材学会誌,vol28,No11,pp685-695
- (22) 木質構造設計基準・同解説 第 2 刷,日本建築学会

- 
- (23) 木村俊彦,自由曲面シェル構造の形状と厚み分布の同時決定による構造形態創生に関する研究,名古屋大学大学院修士論文,2007,pp7-32
- (24) 藤谷義信,藤井大地,野中哲也,パソコンで解く骨組の静的・動的・弾塑性解析,丸善,pp48-63,2001
- (25) 木質構造設計基準・同解説,第2刷,日本建築学会,2009,pp208-209
- (26) 木質構造設計基準・同解説,第2刷,日本建築学会,2009,pp403

## 謝辞

本論文をまとめるにあたり、多くの方々にご指導、ご助言、ご協力を賜りました。その全ての方々に感謝の意を謹んで示し、謝辞と致します。

はじめに、この研究テーマを決定するにあたり、法政大学教授の佐々木睦朗教授には、私の未熟な考えで多々、ご迷惑をかけてしまうことがありましたが、終始真摯に相談に応じていただき、感謝の言葉を申し上げます。さらに、世界の第一線で活躍されている構造デザイナーとしての情熱を間近で感じさせて頂き、今後建築に携わる者として、大変参考になり、今後の指針の一つとなりました。ここに改めて心から厚く御礼申し上げます。

そして、吉田長行教授、坪井善隆教授には本論文の副査としての貴重なご意見はもちろんの事、授業における興味深い話により研究への熱意に触れ、まだまだ未熟ではありますが、本論文を完成させることができました。ここに深く感謝を申し上げます。

また、佐々木研究室の諸先輩方には、外部の大学より編入し、何もわからない私の突拍子もない質問にも根気強くご説明いただき、大変感謝しています。特に、本年度の卒業論文・修士論文より本格的に木質構造を導入するにあたって、数年前に木質構造に関する研究をされていた高橋智也先輩には何度も相談に応じていただきありがとうございました。

さらに、同輩の皆さんとは互いの研究のみならず様々なことについて議論し、多くの刺激を受けました。また、同研究班の中川君・鈴木さん・大石君・森君には頼りない先輩であり、何かと助けていただき、本当にありがとうございました。中でも同研究班と他の研究班の方とともに研究の疑問を解決したことは印象的であり、本当に感謝しています。そして同室の吉田研究室の方とも公私ともに仲良くしていただき、本当に充実した学生生活でした。

皆さんがそれぞれの道でご活躍することを期待しています。

最後に、多大な理解と協力をしてくれた家族に心から感謝致します。

2011年2月  
熊川 恵理子