誘導型モデルによるデフォルト相互依存を考慮したクレジット・デリバティブの評価

茨田, 佳明 / BARADA, Yoshiaki

(発行年 / Year)
2012-03-24
(学位授与年月日 / Date of Granted)
2012-03-24
(学位名 / Degree Name)
修士(工学)
(学位授与機関 / Degree Grantor)
法政大学 (Hosei University)

2011 年度修士論文　　　　　　　　法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

誘導型モデルによるデフォルト相互依存を考慮したクレジット・デリバティブの評価

10R6210　茨田佳明（バラダ ヨシアキ）

指導教授　浦谷規

概要

本論文はある企業がデフォルトしたという出来事が、他の企業のデフォルトのしやすさに影響を与えるというデフォルトの相互依存について分析、考察をしたものである。デフォルト・リスクのある複数の資産を対象とするクレジット・デリバティブの評価においては、はじめに個別の資産のハザード率をモデル化してから評価するボトムアップアプローチと複数の資産を 1 つの過程と考え、その過程のハザード率過程を先に決めてしまうトップダウンアプローチの 2 つの考え方がある。本論文ではこの 2 つそれぞれのアプローチにおけるデフォルトの相互依存について分析を行った。前者については個別資産のハザード率過程に正の相関を持たせた場合にそれぞれのイールド・スプレッドにどのような相関が現れるのかということやデフォルト間隔にどのような影響があるのかということを調べた。ハザード率過程に Vasicek タイプと CIR タイプを用いて理論的な部分やコンピューター上での実験をした。後者においては Hawkes 過程を用いて、パラメータによるインデックス・スワップの価格の変化について考察を行った。また、インデックス・スワップに対する risk-minimizing 戦略と呼ばれるヘッジ戦略についても述べる。

目次

1　はじめに

2008 年、アメリカ第 4 位の規模を誇っていた巨大証券会社リーマン・ブラザーズが破綻した。破綻の背景には、同社がサブプライム証券化商品の評価損等で経営が悪化し、同年 6 月 16 日に発表した四半期ベースの赤字転落を機に株価が下落し始め、資金の引き上げに見舞われたことがあった。リーマン・ブラザーズは、金融派生商品 (デリバティブ) 取引市場における、大きな取引主体であったため、同社の取引の相手方は、先物、オプションなどの巨額の金融派生商品取引を非常に短期間で清算する必要が迫られ、大きな混乱を招いた。また、リーマン・ブラザーズの経営危機とほぼ同時に、アメリカのトップクラスの保険会社である AIG が資金繰り難に陥った。AIG は CDS 市場におけるプロテクションの売り手としてのプレゼンスが大きく、破綻すると多数に上る取引相手方への影響が大きいことなどから、連邦準備理事会が 850 億ドルの貸出ファシリティ設定を発表するなどにより、当局に救済された。バーナンキ議長は 2009 年 3 月の上院予算委での答弁で 「AIG は数百万人の保険加入者、デリバティブやクレジット保険の数千の取引相手を抱え、かつ、 金融機関との数多の取引を行っている、世界最大の保険会社の破綻は, 世界の金融システムの安定性に破壊的な影響を与えると考えた」と述べている。リーマン・ブラザーズ破綻のようにひとつの出来事が連鎖的に周辺へ波及し被害を拡大させた例は過去にもいくつかある。1970 年の鉄道会社ペン・セントラル社の大型倒産や 1987 年のブラックマンデー、2001 年から 2002 年にかけての IT バブル崩壊。このような連鎖への不安は、現在も金融市場に影を落としている。ギリシャ破綻問題である。ひとつの国の破綻が周辺の連鎖破綻に繋がるという懸念である。これらの事象から、破綻つまりデフォルトの相互依存を考慮に入れたモデルによる金融商品の評価に対する研究が必要だと考える。CDS をはじめとするデフォルトに関連した金融商品の評価においては、その相互依存というものを考慮に入れたモデルの導入が重要になると考える。本論文では、いくつかのシミュレーションを通して、デフォルトの相互依存を考慮に入れた場合のクレジット・デリバティブの評価への分析、考察を行う。

本論文では誘導型モデルを中心に進める。それは、デフォルトという事象は、どちらかといえば突然起こるというのが実感としてあるからである。デフォルトを表現するモデルの代表的なものには、誘導型モデルの他に構造型モデルというものがある。構造型モデルは企業資産価値がある値に到達した時刻をデフォルト時刻とするモデルである。つまり、企業資産価値を観測可能とし、その価値を見ることで、企業のデフォルトはある程度予知できるものであると考えているモデルである。一方、誘導型モデルはデフォルトを予測不可能な事象として扱っているモデルである。つまりデフォルトをポアソン事象として捉えるモデルである。このモデルでは、デフォルト事象の起こりやすさを示すポアソン過程のハザード率過程をどのように設定するかで、その後の金融商品の評価に影響を与える。CREST [3] では構造型モデルにおけるデフォルトの相互依存に関して分析を行っている。企業資産価値過程に相関を持たせた場合、CDS 価格にどのような影響が出るかということをシミュレーションによって明らかにしている。しかしながら、企業の資産価値というものを常に観測することは、いわゆるインサイダー的な立場でない限り通常は無理である。そのような構造型モデルの実務で使用する際の問題点やデフォルトの予測不可能性を考えると、構造型モデルではなく誘導型モデルでの分析が必要であると考える。よって、本論文では誘導型モデル中心に議論を進め、複数のハザード率過程を導入してシミュレーションを行う。前半ではデフォルト・リスクのある個別資産のハザード率過程を設定してイールド・スプレッドの分析を行い、後半はトップ・ダウンアプローチと呼ばれるデフォルト・リスクのある複数の資産をひとまとめにしたポートフォリオ全体のハザード率過程を導入し、そのポートフォリオ全体の評価を行う。具体的な金融商品としてはインデックス・スワップである。複数資産をまとめたハザード率過程として Errais et al. [9] で紹介されている Hawkes 過程を用いた。

また、金融商品の価格付けは将来発生する支出額をその価格を元手に複製できることが重要である。そのため本論文の最後に Hawkes 過程を用いた場合のヘッジ戦略について述べる。Møller et al. [7] では risk-minimizing 戦略を適用することで、生命保険会社が契約者からもらった保険料を資金に将来必要になる保険金を複製する戦略を具体的に与えている。本論文で扱うインデックス・スワップも企業がデフォルトしたらその損失額を支払うという企業版の生命保険のようなものだと考えられるため、risk-minimizing 戦略を適用可能と考えられる。

第 2 章ではハザード率過程を定義し、デフォルト・リスクのある社債の価格を与える。第 3 章では Vasicek タイプ、CIR タイプのハザード率過程を用いて累積生存確率、イールド・スプレッドの計算を行う。また、ハザード率過程に相関を入れた場合のイールド・スプレッドの相関について述べる。第 4 章では、クレジット・デフォルト・スワップの価格について Vasicek タイプ、CIR タイプに関して述べる。第 5 章では Hawkes 過程を定義し、デフォルト数過程や累積損失過程の期待値を計算する。また、拡張過程を導入し、その影響について考察する。第 5 章では Hawkes 過程を用いた場合のインデックス・スワップの価格付けをする。第 7 章ではインデックス・スワップのヘッジ戦略について述べる。第 8 章では、結論と今後の課題について述べる。

2 Duffie-Singleton の公式

デフォルトという事象を数学的に表現する方法として、デフォルトがある確率分布に従うランダムな停止時刻で発生すると考えるアプローチがある。ここでは、このような問題を検討する際に必要となる、数学的なフレームワークについて検討する。最終的には、デフォルトの可能性のある債券価格を表す Duffie-Singleton の公式を示す。

2.1 ハザード率

デフォルト等の何かが発生する時刻はランダムであるので、それを τ とおくと τ は非負の実数の値をとる確率変数となる。

$$f(t) = P[\tau \geq t],$$

とおくと、$f : [0, \infty) \to [0, 1]$ は $f(0) = 1, \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ を満たす単調減少関数となる。f が正値、すなわち任意の t に対して $f(t) > 0$、かつ連続微分可能であるとき、

$$h(t) = -\frac{d}{dt} \log f(t),$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
P[\tau \geq t] = f(t) &= \exp\left(\log f(t) - \log f(0)\right) \\
&= \exp\left\{[\log f(s)]_0^t\right\} \\
&= \exp\left(\int_0^t (\log f(s))' ds\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right)
\end{aligned}$$

特に $s > t$ のとき、

$$\begin{aligned} P[\tau > s|\tau > t] &= \frac{P[(\tau > s) \cap \ P(\tau > t)]}{P[\tau > t]} \\ &= \frac{P[\tau > s]}{P[\tau > t]} \\ &= \frac{\exp\left(-\int_0^s h(u)du\right)}{\exp\left(-\int_0^t h(u)du\right)} \\ &= \exp\left(-\int_t^s h(u)du\right), \end{aligned} \tag{1}$$

となり、この関数 $h(t)$ をハザード率と呼ぶ。

2.2 ハザード率過程

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{\tau>0}, P)$ をフィルター付の完備な確率空間とする。すなわち、$N' \subset N \in \mathcal{F}$ で N が $P-$ 零集合 $(P(N) = 0)$ ならば $N' \in \mathcal{F}, P(N') = 0$ を満たす。

定義 2.1 $\mathcal{B}$ をボレル集合族とする。確率過程 $\{X_t\}$ がフィルトレーション $\mathcal{F}_t$ に関して発展的可測であるとは任意の t を止めたとき、任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega; X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$$

となることである。

τ を停止時刻とする。このとき、もし $h : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ が発展的可測な確率過程であって $s > t$ のときに

$$\mathit{1}_{\{\tau>t\}} P[\tau \geq s|\mathcal{F}_t] = \ \mathit{1}_{\{\tau>t\}} \cdot E\left[\exp\left(-\int_t^s h(u)du\right)|\mathcal{F}_t\right], \tag{2}$$

となるときに、(1) 式との類似性からしばしば h を一般化されたハザード率と呼ぶ。ただ、(2) 式が成立するためには強い仮定が必要となる。次節以降、それについて述べる。

2.3 弱ブラウン・フィルトレーション

定義 2.2 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の d 次元強ブラウン・フィルトレーションであるとは、以下の条件 (1), (2) を満たすことである。(1) : $\mathcal{G}_0 = \{B \in \mathcal{F}; P(B) = 0 \text{ または } 1\}$、(2) : $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上のある d 次元ブラウン運動 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ が存在して、$\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_0 \vee \sigma\{W_s; s \in [0,t]\}$ とする。

定義 2.3 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の d 次元弱ブラウン・フィルトレーションであるとは、以下の条件 (1), (2) を満たすことである。(1) : $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の完備で右連続なフィルトレーションである、(2) : d 次元の $P - \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ ブラウン運動 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ で以下の条件 (R) を満たすものが存在する。条件 (R) : 任意の 2 乗可積分な $P - \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ マルチンゲール Z_t に対して、$\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ 可予測な確率過程 $f : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ で、

$$E\left[\int_0^T |f(t)|^2 dt\right] < \infty, \qquad T > 0,$$

および

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f(s)dW_s, \qquad t \in [0, \infty),$$

を満たすものが存在する。

ブラウン・フィルトレーションについて以下のことが成り立つ。

定理 2.1 (楠岡 et al.[2] : 定義 B.3) $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ は完備で右連続なフィルトレーションとする。このとき以下の (1), (2) が成り立つ。(1) もし $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上のブラウン・フィルトレーションであれば、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の弱ブラウン・フィルトレーションでもある。(2) Q が $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度で P と互いに絶対連続であるとする。$\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の弱ブラウン・フィルトレーションであれば、$\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上においても弱ブラウン・フィルトレーションである。$\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の弱ブラウン・フィルトレーションであっても、必ずしも $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上のブラウン・フィルトレーションとは限らない。

2.4 標準モデル

$\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の d 次元弱ブラウン・フィルトレーションとする。$\tau : \Omega \to [0, \infty)$ はランダムな時刻であり、τ の確率分布は連続、すなわち $P[\tau = t] = 0, t \geq 0$ とする。フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ を

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{G}_t \vee \sigma\{\tau \wedge t\}, \qquad \mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \tilde{\mathcal{F}}_s,$$

で定義する。$N_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$ とおき、さらに次の条件を仮定する。なお $\{N_t\}$ は右連続左極限をもつ確率過程であり、

$$N_{t-} = \lim_{s\uparrow t} N_s.$$

と定義する。

仮定 2.1 (楠岡 et al.[2] : 仮定 B.4(M − 1)) $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}-$ 可予測な非負値の確率過程 h が存在して、

$$M_t = N_t - \int_0^t (1 - N_{s-})h_s ds,$$

は $P - \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ マルチンゲールである。

仮定 2.2 (楠岡 et al.[2] : 仮定 B.4(M − 2)) 任意の $P - \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ マルチンゲールは、$P - \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ マルチンゲールである。

ここで、累積ハザード過程 Λ_t と確率過程 X_t を

$$\Lambda_t = \int_0^t h_s ds,$$
$$X_t = \exp(\Lambda_t)(1 - N_t),$$

で定義する。

定義 2.4 $X = \{I(t); t \geq 0\}$ を適合過程とする。$\tau_n \uparrow \infty (n \to \infty)$ となる停止時刻列 $\{\tau_n; n \in \mathbb{N}\}$ が存在し、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{I(t \wedge \tau_n); t \geq 0\}$ が一様可積分マルチンゲールとなるとき、I を局所マルチンゲールという。

命題 2.1 (楠岡 et al.[2] : 命題 B.5) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は $\{\mathcal{F}_t\}-$ 局所マルチンゲールである。

(証明) 次のように確かめられる。

$$X_t = \exp(\Lambda_t)(1-N_t)$$

ジャンプ過程に対する伊藤の公式より

$$\begin{aligned}
&= \exp(\Lambda_0)(1-N_0) + \int_0^t \exp(\Lambda_{s-})d(1-N_s) + \int_0^t (1-N_s)d\exp(\Lambda_s) \\
&= X_0 + \int_0^t \exp(\Lambda_{s-})d(1-N_s) + \int_0^t (1-N_{s-})d\exp(\Lambda_s).
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
dX_t &= X_{t-}h_t dt - \exp(\Lambda_t)dN_t \\
&= \exp(\Lambda_{t-})(1-N_{t-})h_t dt - \exp(\Lambda_t)dN_t \\
&= -\exp(\Lambda_t)\{dN_t - (1-N_{t-})h_t dt\} \\
&= -X_{t-}dM_t,
\end{aligned}$$

であるから

$$X_t = X_0 - \int_0^t X_{s-}dM_s,$$

となり、仮定 2.1 より $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は $\{\mathcal{F}_t\}-$ 局所マルチンゲールとなる。 □

命題 2.2 (楠岡 et al.[2] : 命題 B.6) $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ が $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}-$ 局所マルチンゲールならば、$\{Z_t X_t\}_{t\geq 0}$ は $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$ 局所マルチンゲールである。

(証明)$\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ が弱ブラウン・フィルトレーションであるので、$\{Z_t\}_{t\geq 0}$ は連続過程となる。よって

$$\begin{aligned}
[Z,X]_t &= \sum_{0\leq s\leq t} \Delta Z_s \Delta X_s \\
&= \sum_{0\leq s<\tau} \Delta Z_s \Delta X_s + \sum_{\tau\leq s\leq t} \Delta Z_s \Delta X_s.
\end{aligned}$$

第一項目は X_t が連続な関数であるため 0、第二項目は明らかに 0。よって

$$[Z,X]_t = 0,$$

となり、ジャンプ過程に対する伊藤の公式より

$$Z_t X_t = Z_0 X_0 + \int_0^t X_{s-}dZ_s + \int_0^t Z_{s-}dX_s,$$

となるから、仮定 2.1 より $\{Z_t X_t\}_{t\geq 0}$ は $\{\mathcal{F}_t\}-$ 局所マルチンゲールである。 □

命題 2.3 (楠岡 et al.[2] : 命題 B.7) $s\geq 0$ とし、Z は有界で $\mathcal{G}_s-$ 可測であるとする。このとき

$$E[Z_s(1-N_s)|\mathcal{F}_t] = (1-N_t)E\left[Z_s \exp\left(-\int_t^s h_u du\right)|\mathcal{G}_t\right], \qquad 0\leq t\leq s.$$

(証明) 次のように示すことができる。$s \geq t$ に対して

$$\tilde{Z}_t = E[Z_s \exp(-\Lambda_s)|\mathcal{G}_t],$$

とおくと $\{\tilde{Z}_t\}_{t\geq 0}$ は $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}-$ マルチンゲールであるので、命題 2.2 より $\{\tilde{Z}_t X_t\}_{t\geq 0}$ は $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$ 局所マルチンゲールである。また、Λ_t は $\mathcal{G}_t-$ 可測であるので

$$\begin{aligned}
|\tilde{Z}_t X_t| &= |E[Z_s \exp(-\Lambda_s)|\mathcal{G}_t] \cdot \exp(\Lambda_t)(1-N_t)| \\
&= |E[Z_s \exp(-(\Lambda_s - \Lambda_t))|\mathcal{G}_t](1-N_t)| \\
&= |E[Z_s \exp(-(\Lambda_s - \Lambda_t))|\mathcal{G}_t]|(1-N_t) \\
&\leq E[|Z_s||\mathcal{G}_t] < \infty, \qquad a.s.,
\end{aligned}$$

である。よって $\{\tilde{Z}_t X_t\}$ は有界であるので、$\{\tilde{Z}_t X_t\}_{t\in[0,s]}$ は $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,s]}-$ マルチンゲールである。また、

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_s &= Z_s \exp(-\Lambda_s), \\
\tilde{Z}_s X_s &= Z_s(1-N_s),
\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
E[Z_s(1-N_s)|\mathcal{F}_t] &= E[\tilde{Z}_s X_s|\mathcal{F}_t] \\
&= \tilde{Z}_t X_t \\
&= (1-N_t)E[Z_s \exp(-(\Lambda_s - \Lambda_t))|\mathcal{G}_t] \\
&= (1-N_t)E\left[Z_s \exp\left(-\int_t^s h_u du\right)|\mathcal{G}_t\right],
\end{aligned}$$

が得られる。 □

系 2.1 (楠岡 et al.[2] : 系 B.8)

$$P(\tau > s|\mathcal{F}_t) = (1-N_t)E\left[\exp\left(-\int_t^s h_u du\right)|\mathcal{G}_t\right], \qquad 0 \leq t \leq s.$$

(証明) 命題 2.3 において、$Z = 1$ とする。

$$\begin{aligned}
E[(1-N_s)|\mathcal{F}_t] = E[\ \mathit{1}_{\tau>s}|\mathcal{F}_t] &= \ P(\tau > s|\mathcal{F}_t) \\
&= (1-N_t)E\left[\exp\left(-\int_t^s h_u du\right)|\mathcal{G}_t\right], \qquad 0 \leq t \leq s.
\end{aligned}$$

□

系 2.2 (楠岡 et al.[2] : 系 B.9) $s \geq 0, Z_s$ が $\mathcal{G}_s-$ 可測で可積分ならば、

$$E[Z_s(1-N_s)|\mathcal{F}_t] = (1-N_t)E\left[Z_s \exp\left(-\int_t^s h_u du\right)|\mathcal{G}_t\right], \qquad 0 \leq t \leq s.$$

(証明) 次のように示すことができる。

$$Z_s^n = (Z_s \wedge n) \vee (-n),$$

とおけば、Z_s^n は有界で $\mathcal{G}_s-$ 可測である。したがって、$n \to \infty$ とすればよい。 □

命題 2.4　(楠岡 et al.[2] : 命題 B.10) $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ が $\{\mathcal{G}_t\}-$ 可予測で

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\right]<\infty,\qquad T>0.$$

ならば

$$E\left[\int_t^T Y_s dN_s|\mathcal{F}_t\right]=(1-N_t)E\left[\int_t^T h_s Y_s\exp\left(-\int_t^s h_u du\right)ds|\mathcal{G}_t\right],\qquad 0\leq t\leq T.$$

(証明)Y を正の部分と負の部分に分けて考えることにより、$Y\geq 0$ としてよい。$Y\wedge n, n\to\infty$ で Y を近似できるので Y は有界としてよい。

$$\begin{aligned}&\int_t^T Y_s dM_s+\int_t^T Y_s(1-N_s)h_s ds\\&=\int_t^T Y_s(dN_s-(1-N_{s-})h_s ds)+\int_t^T Y_s(1-N_s)h_s ds\\&=\int_t^T Y_s dN_s,\end{aligned}$$

となるが、

$$E\left[\int_t^T Y_s dM_s|\mathcal{F}_t\right]=0,$$

であるから、

$$E\left[\int_t^T Y_s dN_s|\mathcal{F}_t\right]=\int_t^T E[Y_s h_s(1-N_s)|\mathcal{F}_t]ds,$$

が得られる。この式の $Y_s h_s$ は $\mathcal{G}_s-$ 可測で可積分であり、右辺の積分の内部は、系 2.2 より

$$E[Y_s h_s(1-N_s)|\mathcal{F}_t]=(1-N_t)E\left[Y_s h_s\exp\left(-\int_t^s h_u du\right)|\mathcal{G}_t\right],$$

であるので、

$$\begin{aligned}E\left[\int_t^T Y_s dN_s|\mathcal{F}_t\right]&=\int_t^T(1-N_t)E\left[Y_s h_s\exp\left(-\int_t^s h_u du\right)|\mathcal{G}_t\right]ds\\&=(1-N_t)E\left[\int_t^T Y_s h_s\exp\left(-\int_t^s h_u du\right)ds|\mathcal{G}_t\right].\end{aligned}$$

□

2.5　標準モデルとデフォルトの可能性のある債券

この節では、デフォルトの可能性のある債券の価格について考える。最初に、デフォルトの有無によってペイオフが変わる以下のような金融商品を例に、一般的にどのようなことが問題となるかを検討する。2.3 節の設定のもとで、P をリスク中立確率とし、τ をデフォルト時刻とする。また X は確率変数、$\{L_t\}_{t\geq 0}$ は

$\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}-$ 可予測な確率過程とする。満期を T とし、T までにデフォルトしなければ満期 T に X だけ受け取れ、満期 T 前にデフォルトしたならば、デフォルト時点 τ で L_τ だけ受け取れる金融商品があるとする。この商品を無裁定の枠組みで評価すると、時点 t での価格 $p(t)$ は次のように与えられる。

$$p(t) = 1_{\{\tau>t\}} E^P\left[\exp\left(-\int_t^\tau r_s ds\right) L_\tau \cdot 1_{\{t\leq\tau\leq T\}} + \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) X \cdot 1_{\{\tau>T\}} | \mathcal{F}_t\right].$$

ただし、r は短期金利過程である。ここで、$r : [0,\infty)\times\Omega \to [0,\infty)$ は、$\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}-$ 可予測な確率過程であり、$\tau \leq t$ のときは時点 t においてこの商品は無価値であるため、 $1_{\{\tau>t\}}$ がかけられていると考えることができる. L, X が有界であれば、命題 2.3 と命題 2.4 より、$N_t = 1_{\{\tau\leq t\}}$ を用いて表すと

$$\begin{aligned}
p(t) &= 1_{\{\tau>t\}} E^P\left[\exp\left(-\int_t^\tau r_s ds\right) L_\tau \cdot 1_{\{t\leq\tau\leq T\}} + \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) X \cdot 1_{\{\tau>T\}} | \mathcal{F}_t\right] \\
&= (1-N_t)\cdot E^P\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) L_s dN_s + \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) X\cdot(1-N_T) | \mathcal{F}_t\right] \\
&= (1-N_t)\cdot E^P\Bigg[\int_t^T h_s L_s \exp\left(-\int_t^s h_u du\right)\cdot\exp\left(-\int_t^s r_u du\right) ds \\
&\qquad + X\cdot\exp\left(-\int_t^T h_u du\right)\cdot\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) | \mathcal{G}_t\Bigg] \\
&= (1-N_t)\cdot E^P\left[\int_t^T h_s L_s \exp\left(-\int_t^s (h_u+r_u) du\right) ds + X\cdot\exp\left(-\int_t^T (h_u+r_u) du\right) | \mathcal{G}_t\right].
\end{aligned}$$

満期 T の社債があり、この社債は時刻 T までにデフォルトが起こらなければ、時刻 T に 1 を受け取り、時刻 τ $(\tau \leq T)$ にデフォルトが起きたら、デフォルトが起こる直前の債券価格 $B(\tau-, T)$ に回収率 δ_τ $(0 < \delta_\tau \leq 1)$ を掛け合わせた $\delta_\tau B(\tau-, T)$ が回収額であるとする。$\{\delta_\tau\}$ は $\{\mathcal{G}_t\}-$ 可予測と仮定する。また、$\{\mathcal{G}_t\}-$ 可予測過程 $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ が存在して

$$B(t,T) = Y_t, \qquad t < \tau,$$

が成り立つと仮定する。$0 \leq Y_t \leq 1$ と仮定する。前の例で、$X = 1$、$L_t = \delta_t Y_t$ とおくと、この社債の時刻 t での価格 $B(t,T)$ は、$t < \tau$ のとき

$$B(t,T) = E\left[\int_t^T h_s Y_{s-}\delta_s \exp\left(-\int_t^s (h_u+r_u)du\right) ds + \exp\left(-\int_t^T (h_u+r_u)du\right) | \mathcal{G}_t\right],$$

となる。ここで

$$\int_t^T h_s Y_{s-}\delta_s \exp\left(-\int_t^s (h_u+r_u)du\right) ds + \exp\left(-\int_t^T (h_u+r_u)du\right) \leq 1 + \sup_{t\leq s\leq T} \delta_s,$$

となり、有界であることに注意して

$$Z_t = E\left[\int_0^T h_s Y_{s-}\delta_s \exp\left(-\int_0^s (h_u+r_u)du\right) ds + \exp\left(-\int_0^T (h_u+r_u)du\right) | \mathcal{G}_t\right],$$

とおくと、$\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$ は $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}-$ マルチンゲールとなる。また、(3) 式より

$$\begin{aligned}
Y_t = E\Bigg[&\int_0^T h_s Y_{s-}\delta_s \exp\left(-\int_0^s (h_u + r_u)du\right)\cdot \exp\left(\int_0^t (h_u+r_u)du\right) ds \\
&- \int_0^t h_s Y_{s-}\delta_s \exp\left(-\int_0^s (h_u + r_u)du\right)\cdot \exp\left(\int_0^t (h_u+r_u)du\right) ds \\
&+ \exp\left(-\int_0^T (h_u+r_u)du\right)\cdot \exp\left(\int_0^t (h_u+r_u)du\right) |\mathcal{G}_t\Bigg] \\
= \exp&\left(\int_0^t (h_u+r_u)du\right)\left\{Z_t - \int_0^t h_s Y_{s-}\delta_s \exp\left(-\int_0^s (h_u+r_u)du\right)ds\right\},
\end{aligned}$$

と表すことができる。したがって、Y の線形積分方程式

$$\exp\left(-\int_0^t (h_u+r_u)du\right) Y_t = Z_t - \int_0^t h_s Y_s \delta_s \exp\left(-\int_0^s (h_u+r_u)du\right) ds,$$

を得る。

$$V_t = \exp\left(\int_0^t \delta_s h_s ds\right)\exp\left(-\int_0^t (r_u+h_u)du\right) Y_t,$$

とおくと、$0 \le V_t \le 1$,

$$\begin{aligned}
dV_t &= \delta_t h_t V_t dt + \exp\left(\int_0^t \delta_s h_s ds\right)\left(dZ_t - h_t Y_t \delta_t \exp\left(-\int_0^t (h_u+r_u)du\right)dt\right) \\
&= \exp\left(\int_0^t \delta_s h_s ds\right) dZ_t,
\end{aligned}$$

となり、$\{V_t\}_{t\in[0,T]}$ は $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}-$ マルチンゲールとなる。$Y_T = 1$ より、

$$\begin{aligned}
V_T &= \exp\left(\int_0^t \delta_s h_s ds\right)\exp\left(-\int_0^t (r_u+h_u)du\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^T (r_s + (1-\delta_s)h_s)ds\right),
\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
B(t,T) = Y_t& \\
&= \exp\left(-\int_0^t (r_s+(1-\delta_s)h_s)ds\right)\cdot Y_t \cdot \exp\left(\int_0^t (r_s+(1-\delta_s)h_s)ds\right) \\
&= V_t \cdot \exp\left(\int_0^t (r_s+(1-\delta_s)h_s)ds\right) \\
&= E\left[V_T \cdot \exp\left(\int_0^t (r_s+(1-\delta_s)h_s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right] \\
&= E\left[\exp\left(-\int_0^T (r_s+(1-\delta_s)h_s)ds\right)\cdot \exp\left(\int_0^t (r_s+(1-\delta_s)h_s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right] \\
&= E\left[\exp\left(-\int_t^T (r_s+(1-\delta_s)h_s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right],
\end{aligned}$$

となる。

定理 2.2　(楠岡 et al.[2] : P.153) $t < \tau$ のとき、満期 T の社債の価格 $B(t,T)$ は

$$B(t,T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T (r_s + (1-\delta_s)h_s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right].$$

これが Duffie-Singleton の公式である。本論文ではこの公式を念頭に置いて、ハザード率過程を具体的にモデル化していくことにする。

3　累積生存確率とイールド・スプレッド

この章では、ハザード率過程 $h(t)$ と累積生存確率 $P_{h_0}[\tau > t]$、およびクレジット・リスクのある債券の利回りとデフォルト・リスクのない債券の利回りの格差であるイールド・スプレッド $y(t,T)$ との関係を見ていくことにする。累積生存確率 $P_{h_0}[\tau > t]$ とハザード率過程 $h(t)$ の間には、

$$P_{h_0}[\tau > t] = E_{h_0}\left[\exp\left(-\int_0^t h(u)du\right)\right], \tag{3}$$

という関係があることが分かる。また、デフォルト・リスクのない債券の価格 $Z(t,T)$ を

$$Z(t,T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right],$$

と定義する。このとき、

$$B(t,T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T (r(s) + (1-\delta)h(s))ds\right)|\mathcal{G}_t\right]$$

$r(t), h(t)$ が互いに独立であると仮定すると

$$= Z(t,T)\cdot E\left[\exp\left(-\int_t^T (1-\delta)h(s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right].$$

このとき、イールド・スプレッド $y(t,T)$ は

$$\begin{aligned}
y(t,T) &= -\frac{1}{T-t}\log\frac{B(t,T)}{Z(t,T)} \\
&= -\frac{1}{T-t}\log E\left[\exp\left(-\int_t^T (1-\delta)h(s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right], \\
-(T-t)y(t,T) &= \log E\left[\exp\left(-\int_t^T (1-\delta)h(s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right], \\
\exp\left(-(T-t)y(t,T)\right) &= E\left[\exp\left(-\int_t^T (1-\delta)h(s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right],
\end{aligned}$$

で表現され、$h(t)$ のマルコフ性が仮定されれば

$$\exp\left(-(T-t)y(t,T)\right) = E_{h(t)}\left[\exp\left(-\int_0^{T-t} (1-\delta)h(s)ds\right)\right].$$

定理 3.1　(楠岡 et al.[2] : 定理 2.1) 確率過程 $h(t)$ が次の確率微分方程式を満たすとする。

$$dh(t) = m(h(t), t)dt + \sigma(h(t), t)dW_t, \qquad h(0) = h_0 \geq 0.$$

ただし、$m(x,t), \sigma(x,t)$ は

$$\begin{aligned} m(x,t) &= m_1(t) + m_2(t)x, \\ \sigma(x,t)^2 &= \sigma_1(t) + \sigma_2(t)x, \end{aligned}$$

という形で表される関数とする。ここで、$m_i(t), \sigma_i(t)(i=1,2)$ は、確定的な関数で、

$$m_1(t) - m_2(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)^{-1} \geq 0, \qquad t \in [0,T],$$

を満たすものとする。このとき、非負の定数 μ に対して

$$E_{h(t)}\left[\exp\left(-\mu\int_0^{T-t} h(u)du\right)\right] = \exp(-\phi(t,T) - \psi(t,T)h_(t)),$$

が成り立つ。ただし、$\phi(t,T), \psi(t,T)$ は、次の連立常微分方程式の解とする。

$$\begin{cases} \phi'(t,T) = -\frac{1}{2}\sigma_1(t)\psi^2(t,T) + m_1(t)\psi(t,T), \\ \psi'(t,T) = -\frac{1}{2}\sigma_2(t)\psi^2(t,T) + m_2(t)\psi(t,T) + \mu, \\ \phi(0,0) = \psi(0,0) = 0. \end{cases}$$

(証明) 時点 t と初期時点のハザード率過程の値 h_0 の関数 $u(t,h_0)$ を

$$u(t,h_0) = E_{h_0}\left[\exp\left(-\mu\int_0^t h(u)du\right)\right],$$

と定義する。また、

$$M_t = E\left[\exp\left(-\mu\int_0^T h(u)du\right)|\mathcal{G}_t\right],$$

とおくと、$\{M_t\}$ は $\mathcal{G}_t-$ マルチンゲールとなる。このとき、$h(t)$ のマルコフ性から

$$\begin{aligned} M_t &= E\left[\exp\left(-\mu\int_0^t h(u)du\right)\cdot\exp\left(-\mu\int_t^T h(u)du\right)|\mathcal{G}_t\right] \\ &= \exp\left(-\mu\int_0^t h(u)du\right)\cdot E\left[\exp\left(-\mu\int_t^T h(u)du\right)|\mathcal{G}_t\right] \\ &= \exp\left(-\mu\int_0^t h(u)du\right)\cdot E_{h(t)}\left[\exp\left(-\mu\int_0^{T-t} h(u)du\right)\right] \\ &= \exp\left(-\mu\int_0^t h(u)du\right)\cdot u(T-t, h(t)), \end{aligned}$$

と表すことができる。伊藤の公式を利用すると

$$
\begin{aligned}
dM_t &= \exp\left(-\mu\int_0^t h(u)du\right)\cdot\Bigg(-\mu h(t)u(T-t,h(t))dt \\
&\quad -\frac{\partial u}{\partial t}(T-t,h(t))dt + \frac{\partial u}{\partial h}(T-t,h(t))dh(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}(T-t,h(t))d\langle h\rangle_t\Bigg) \\
&= \exp\left(-\mu\int_0^t h(u)du\right)\cdot\Bigg(-\mu h(t)u(T-t,h(t))dt \\
&\quad -\frac{\partial u}{\partial t}(T-t,h(t))dt + \frac{\partial u}{\partial h}(T-t,h(t))\left\{m(h(t),t)dt + \sigma(h(t),t)dW_t\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}(T-t,h(t))\left\{\sigma^2(h(t),t)dt\right\}\Bigg) \\
&= \exp\left(-\mu\int_0^t h(u)du\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial h}(T-t,h(t))\cdot\sigma(h(t),t)dW_t \\
&\quad +\exp\left(-\mu\int_0^t h(u)du\right)\Bigg\{ -\mu h(t)u(T-t,h(t)) \\
&\quad -\frac{\partial u}{\partial t}(T-t,h(t)) + m(h(t),t)\frac{\partial u}{\partial h}(T-t,h(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(h(t),t)\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}(T-t,h(t))\Bigg\}dt,
\end{aligned}
$$

となり、$\{M_t\}$ はマルチンゲールであることから、任意の $t\in[0,T]$ に対して、

$$
-\mu h(t)u(T-t,h(t)) - \frac{\partial u}{\partial t}(T-t,h(t)) + m(h(t),t)\frac{\partial u}{\partial h}(T-t,h(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(h(t),t)\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}(T-t,h(t)) = 0.
$$

つまり

$$
\frac{\partial u}{\partial t}(T-t,h(t)) = m(h(t),t)\frac{\partial u}{\partial h}(T-t,h(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(h(t),t)\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}(T-t,h(t)) - \mu h(t)u(T-t,h(t)),
$$

を満たさなければならない。ここで、

$$
u(T-t,h(t)) = \exp(-\phi(t,T) - \psi(t,T)h(t)),
$$

という形でかけるとすると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \{-\phi'(t,T) - \psi'(t,T)h(t)\}u(T-t,h(t)), \\
\frac{\partial u}{\partial h} &= -\psi(t,T)u(T-t,h(t)), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial h^2} &= \psi^2(t,T)u(T-t,h(t)),
\end{aligned}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
\{-\phi'(t,T) - \psi'(t,T)h(t)\}u(T-t,h(t)) &= \{m_1(t) + m_2(t)h(t)\}\{-\psi(t,T)u(T-t,h(t))\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\{\sigma_1(t) + \sigma_2(t)h(t)\}\cdot\psi^2(t,T)u(T-t,h(t)) \\
&\quad - \mu h(t)u(T-t,h(t)), \\
\{-\phi'(t,T) - \psi'(t,T)h(t)\}u(T-t,h(t)) &= \left\{-m_1(t)\psi(t,T) + \frac{1}{2}\sigma_1(t)\psi^2(t,T)\right\}u(T-t,h(t)) \\
&\quad + \left\{-m_2(t)\psi(t,T) + \frac{1}{2}\sigma_2(t)\psi^2(t,T) - \mu\right\}h(t)\cdot u(T-t,h(t)).
\end{aligned}
$$

$u(0,x)=1$ より $\phi(0,0)=\psi(0,0)=0$ に注意すると、

$$\begin{cases}\phi'(t,T) = -\frac{1}{2}\sigma_1(t)\psi(t,T)^2 + m_1(t)\psi(t,T),\\ \psi'(t,T) = -\frac{1}{2}\sigma_2(t)\psi(t,T)^2 + m_2(t)\psi(t,T) + \mu,\\ \phi(0,0) = \psi(0,0) = 0.\end{cases}$$

という形に帰着する。 □

3.1 Vasicek タイプ・モデル

ここでは、Vasicek タイプ・モデルのハザード率過程を適用する。

$$dh(t) = c(m - h(t))dt + \sigma dW_t, \qquad h(0) = h_0. \tag{4}$$

$c>0$ は平均への回帰スピード、m は平均的なハザード率を表し、W_t は標準ブラウン運動、$\sigma>0$ は拡散係数である。定理 3.1 に $m_1 = cm, m_2 = -c, \sigma_1 = \sigma^2, \sigma_2 = 0$ を代入し、連立微分方程式を解くと以下の結果を得る。ただし $h(t)$ の非負性は満たされないため、厳密な意味では正しい数学的主張とはいえないことに注意する必要がある。

命題 3.1 Vasicek タイプ・モデルのハザード率過程を仮定した場合の累積生存確率 $P_{h_0}[\tau > t]$ は、

$$\begin{aligned} P_{h_0}[\tau > t] &= E_{h_0}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{c}(e^{-ct}-1)\left(h_0 - m - \frac{\sigma^2}{4c^2}(e^{-ct}-3)\right) - t\left(m - \frac{\sigma^2}{2c^2}\right)\right], \end{aligned} \tag{5}$$

で与えられる。ただし、左辺は 1 を超える可能性があることに注意する必要がある。また、デフォルト時間 τ の密度関数は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(1 - P_{h_0}[\tau > t]) &= \left\{e^{-ct}h_0 - (e^{-ct}-1)m - \frac{\sigma^2}{2c^2}(e^{-ct}-1)^2\right\} \\ &\quad \times \exp\left[\frac{1}{c}(e^{-ct}-1)\left(h_0 - m - \frac{\sigma^2}{4c^2}(e^{-ct}-3)\right) - t\left(m - \frac{\sigma^2}{2c^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

(証明) 定理 3.1 における $m_1 = cm, m_2 = -c, \sigma_1 = \sigma^2, \sigma_2 = 0$ を代入することで次の連立微分方程式を得る。

$$\begin{cases}\phi'(0,t) = -\frac{1}{2}\sigma^2\psi^2(0,t) + cm\psi(0,t),\\ \psi'(0,t) = -c\psi(0,t) + \mu,\\ \phi(0,0) = \psi(0,0) = 0.\end{cases}$$

上記の連立微分方程式の第二式に関して

$$\begin{aligned} &\frac{(-c\psi(0,t)+\mu)'}{-c\psi(0,t)+\mu}\cdot\frac{1}{-c} = 1, \\ &(\log|-c\psi(0,t)+\mu|)' = -c, \\ &-c\psi(0,t)+\mu = e^{-ct+D}. \end{aligned}$$

$\psi(0,0)=0$ より $\mu = e^D$ なので

$$\begin{aligned} &-c\psi(0,t)+\mu = e^{-ct}\cdot\mu, \\ &\psi(0,t) = \frac{1}{c}\mu(1-e^{-ct}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\phi'(0,t) &= -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{c^2}\mu^2(1-e^{-ct})^2 + cm\cdot\frac{1}{c}\mu(1-e^{-ct}),\\
\phi(0,t) &= \int_0^t -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{c^2}\mu^2(1-e^{-cs})^2 ds + \int_0^t cm\cdot\frac{1}{c}\mu(1-e^{-cs})ds\\
&= -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{c^2}\mu^2\int_0^t(1-2e^{-cs}+e^{-2cs})ds + m\mu\int_0^t(1-e^{-cs})ds\\
&= -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{c^2}\mu^2\left\{\left(t+\frac{2}{c}e^{-ct}-\frac{1}{2c}e^{-2ct}\right)-\left(\frac{2}{c}-\frac{1}{2c}\right)\right\} + m\mu\left\{\left(t+\frac{1}{c}e^{-ct}\right)-\frac{1}{c}\right\}.
\end{aligned}
$$

μ =1 を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\phi(0,t) &= -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{c^2}\left\{\left(t+\frac{2}{c}e^{-ct}-\frac{1}{2c}e^{-2ct}\right)-\left(\frac{2}{c}-\frac{1}{2c}\right)\right\} + m\left\{\left(t+\frac{1}{c}e^{-ct}\right)-\frac{1}{c}\right\},\\
\psi(0,t) &= \frac{1}{c}(1-e^{-ct}),
\end{aligned}
$$

を得る。

$$
\begin{aligned}
P_{h_0}[\tau > t] &= E_{h_0}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)\right]\\
&= \exp(-\phi(t)-\psi(t)h_0)\\
&= \exp\Bigg(-\frac{1}{c}(1-e^{-ct})h_0\\
&\qquad + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{c^2}t + \frac{\sigma^2}{c^3}e^{-ct} - \frac{\sigma^2}{4c^3}e^{-2ct} - \frac{3\sigma^2}{4c^3} - mt - \frac{1}{c}m(e^{-ct}-1)\Bigg)\\
&= \exp\left(\frac{1}{c}(e^{-ct}-1)(h_0-m) - t\left(m-\frac{\sigma^2}{2c^2}\right) - \frac{\sigma^2}{4c^2}\cdot\frac{1}{c}(e^{-ct}-3)(e^{-ct}-1)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{c}(e^{-ct}-1)\left(h_0-m-\frac{\sigma^2}{4c^2}\frac{1}{c}(e^{-ct}-3)\right) - t\left(m-\frac{\sigma^2}{2c^2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

□

命題 3.2　時点 t での満期 T の債券のイールド・スプレッド $y(t,T)$ は、

$$
\begin{aligned}
\exp\left(-(T-t)y(t,T)\right) &= E\left[\exp\left(-\int_t^T(1-\delta)h(s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right]\\
&= \exp\Bigg[\frac{1}{c}(e^{-c(T-t)}-1)\left((1-\delta)(h(t)-m) - \frac{\sigma^2}{4c^2}(1-\delta)^2(e^{-c(T-t)}-3)\right)\\
&\qquad -(T-t)\left((1-\delta)m - \frac{\sigma^2}{2c^2}(1-\delta)^2\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{7}
$$

で与えられる。

(証明) 次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
\exp\left(-(T-t)y(t,T)\right) &= E\left[\exp\left(-\int_t^T(1-\delta)h(s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right]\\
&= E_{h(t)}\left[\exp\left(-\int_0^{T-t}(1-\delta)h(s)ds\right)\right]\\
&= \exp(-\phi(t,T)-\psi(t,T)h(t)).
\end{aligned}
$$

命題 3.1 の証明において $\mu = 1-\delta$ とした $\phi(t,T), \psi(t,T)$ を代入すると、命題の結果を得る。 □

3.2 CIR タイプ・モデル

CIR タイプ・モデルでは以下のハザード率過程を仮定する。

$$dh(t) = c(m - h(t))dt + \sigma\sqrt{h(t)}dW_t, \qquad h(0) = h_0.$$

この場合は、初期値 h_0 が正であれば $h(t)$ の非負性は満たされる。

命題 3.3 CIR タイプ・モデルのハザード率過程を仮定した場合の累積生存確率 $P_{h_0}[\tau > t]$ は、

$$\begin{aligned} P_{h_0}[\tau > t] &= E_{h_0}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)\right] \\ &= \exp(-cm\phi_{0,1}(0,t) - \psi_{0,1}(0,t)h_0). \end{aligned} \tag{8}$$

ただし

$$\begin{aligned} \phi_{0,1}(0,t) &= -\frac{2}{\sigma^2}\log\frac{2\gamma e^{\frac{c+\gamma}{2}t}}{\gamma - c + e^{\gamma t}(\gamma + c)}, \\ \psi_{0,1}(0,t) &= \frac{2(e^{\gamma t} - 1)}{\gamma - c + e^{\gamma t}(\gamma + c)}, \qquad \gamma = \sqrt{c^2 + 2\sigma^2}. \end{aligned}$$

また、デフォルト時間 τ の密度関数は、

$$\frac{d}{dt}(1 - P_{h_0}[\tau > t]) = -(X(t) + Y(t)) \cdot P_{h_0}[\tau > t]. \tag{9}$$

ただし、

$$\begin{aligned} X(t) &= \left[\frac{2cm}{\sigma^2}\left\{\frac{1}{2}(c+\gamma) - \frac{\gamma(\gamma + c)e^{\gamma t}}{\gamma - c + e^{\gamma t}(\gamma + c)}\right\}\right], \\ Y(t) &= -\frac{2h_0\gamma e^{\gamma t}}{\gamma - c + e^{\gamma t}(\gamma + c)} + \frac{2h_0(e^{\gamma t} - 1)\gamma e^{\gamma t}(\gamma + c)}{(\gamma - c + e^{\gamma t}(\gamma + c))^2}. \end{aligned}$$

(証明) まず次の形の式を計算するところから始める。

$$E\left[\exp(-\lambda h(t)) \cdot \exp\left(-\mu\int_0^t h(s)ds\right)\right].$$

ここで $\lambda \geq 0$ は定数とする。上の式を時点 t と初期時点のハザード率過程の値 h_0 の関数とみなして、

$$F(t, h_0) = E\left[\exp(-\lambda h(t)) \cdot \exp\left(-\mu\int_0^t h(s)ds\right)\right],$$

と定める。一方、この関数がある連続微分可能な関数 $\phi(0,t), \psi(0,t)$ を用いて

$$F(t, h_0) = \exp(-\phi(0,t) - \psi(0,t)h_0)$$

と表すことができるとすると、$\phi(0,t), \psi(0,t)$ は次の連立微分方程式を満たさなければならない。

$$\begin{cases} \phi'(0,t) = -cm\psi(0,t), \\ \psi'(0,t) = -\frac{1}{2}\sigma^2\psi^2(0,t) - c\psi(0,t) + \mu, \\ \phi(0,0) = 0, \psi(0,0) = \lambda. \end{cases}$$

第二式に関して

$$\frac{d\psi(0,t)}{dt} = -\frac{1}{2}\sigma^2\psi^2(0,t) - c\psi(0,t) + \mu,$$
$$t + D = \int \frac{1}{-\frac{1}{2}\sigma^2\psi(0,t)^2 - c\psi(0,t) + \mu} d\psi(0,t).$$

右辺の被積分関数の分母に関して、

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sigma^2\psi^2(0,t) - c\psi(0,t) + \mu &= -\frac{1}{2}\sigma^2\left(\psi^2(0,t) + \frac{2c}{\sigma^2}\psi(0,t)\right) + \mu \\
&= -\frac{1}{2}\sigma^2\left(\psi(0,t) + \frac{c}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{c^2}{2\sigma^2} + \mu \\
&= -\frac{1}{2}\sigma^2\left\{\left(\psi(0,t) + \frac{c}{\sigma^2}\right)^2 - \left(\frac{c^2}{\sigma^4} + \frac{2\mu}{\sigma^2}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\sigma^2\left\{\left(\psi(0,t) + \frac{c}{\sigma^2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{c^2 + 2\sigma^2\mu}}{\sigma^2}\right)^2\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\sigma^2\left\{\left(\psi(0,t) + \frac{c}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{c^2 + 2\sigma^2\mu}}{\sigma^2}\right)\left(\psi(t) + \frac{c}{\sigma^2} - \frac{\sqrt{c^2 + 2\sigma^2\mu}}{\sigma^2}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

$\sqrt{c^2 + 2\sigma^2\mu} = \gamma$ とおくと

$$= -\frac{1}{2}\sigma^2\left\{\left(\psi(0,t) + \frac{c+\gamma}{\sigma^2}\right)\left(\psi(0,t) + \frac{c-\gamma}{\sigma^2}\right)\right\}.$$

また、

$$\frac{1}{\left(\psi(0,t) + \frac{c+\gamma}{\sigma^2}\right)\left(\psi(0,t) + \frac{c-\gamma}{\sigma^2}\right)} = \frac{-\sigma^2}{2\gamma}\left\{\frac{1}{\psi(0,t) + \frac{c+\gamma}{\sigma^2}} - \frac{1}{\psi(0,t) + \frac{c-\gamma}{\sigma^2}}\right\}.$$

よって、

$$\begin{aligned}
t + D &= \int \frac{1}{-\frac{1}{2}\sigma^2\psi^2(0,t) - c\psi(0,t) + \mu} d\psi(0,t) \\
&= -\frac{2}{\sigma^2}\int \frac{1}{\left(\psi(0,t) + \frac{c+\gamma}{\sigma^2}\right)\left(\psi(0,t) + \frac{c-\gamma}{\sigma^2}\right)} d\psi(0,t) \\
&= -\frac{2}{\sigma^2}\cdot\frac{-\sigma^2}{2\gamma}\int\left(\frac{1}{\psi(0,t) + \frac{c+\gamma}{\sigma^2}} - \frac{1}{\psi(0,t) + \frac{c-\gamma}{\sigma^2}}\right) d\psi(0,t) \\
&= \frac{1}{\gamma}\cdot\log\left|\frac{\psi(0,t) + \frac{c+\gamma}{\sigma^2}}{\psi(0,t) + \frac{c-\gamma}{\sigma^2}}\right|, \\
e^{t+D} &= \left(\frac{\psi(0,t) + \frac{c+\gamma}{\sigma^2}}{\psi(0,t) + \frac{c-\gamma}{\sigma^2}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \\
e^{\gamma(t+D)} &= \frac{\psi(0,t) + \frac{c+\gamma}{\sigma^2}}{\psi(0,t) + \frac{c-\gamma}{\sigma^2}}, \\
\psi(0,t) &= \frac{c + \gamma - (c-\gamma)e^{\gamma(t+D)}}{\sigma^2(e^{\gamma(t+D)} - 1)}.
\end{aligned}$$

$\psi(0,0)=\lambda$ より

$$e^{\gamma D}=\frac{\lambda+\frac{c+\gamma}{\sigma^2}}{\lambda+\frac{c-\gamma}{\sigma^2}},$$

$$\begin{aligned}\psi(0,t)&=\frac{c+\gamma-(c-\gamma)e^{\gamma t}\cdot\frac{\lambda+\frac{c+\gamma}{\sigma^2}}{\lambda+\frac{c-\gamma}{\sigma^2}}}{\sigma^2(e^{\gamma t}\cdot\frac{\lambda+\frac{c+\gamma}{\sigma^2}}{\lambda+\frac{c-\gamma}{\sigma^2}}-1)}\\&=\frac{\{\sigma^2\lambda+(c-\gamma)\}(c+\gamma)-(c-\gamma)e^{\gamma t}\{\sigma^2\lambda+(c+\gamma)\}}{\sigma^2e^{\gamma t}\{\sigma^2\lambda+(c+\gamma)\}-\sigma^2\{\sigma^2\lambda+(c-\gamma)\}}\\&=\frac{\sigma^2\{\lambda(c+\gamma)+2\mu(e^{\gamma t}-1)+\lambda(\gamma-c)e^{\gamma t}\}}{\sigma^2\{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1)+\gamma-c+e^{\gamma t}(c+\gamma)\}}\\&=\frac{\lambda\{c+\gamma+(\gamma-c)e^{\gamma t}\}+2\mu(e^{\gamma t}-1)}{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1)+\gamma-c+e^{\gamma t}(c+\gamma)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(0,t)&=cm\int\psi(t)dt\\&=cm\int\frac{c+\gamma-(c-\gamma)e^{\gamma(t+D)}}{\sigma^2(e^{\gamma(t+D)}-1)}dt\\&=cm\int\frac{1}{\sigma^2}\left\{-(c+\gamma)-\frac{2e^{\gamma(t+D)}\gamma}{1-e^{\gamma(t+D)}}\right\}dt\\&=cm\left(\frac{1}{\sigma^2}\left\{-t(c+\gamma)+2\log|1-e^{\gamma(t+D)}|\right\}+A\right).\end{aligned}$$

$\phi(0,0)=0$ より

$$A=-\frac{2}{\sigma^2}\log|1-e^{\gamma D}|,$$

$$\begin{aligned}\phi(0,t)&=cm\left(\frac{1}{\sigma^2}\left\{-t(c+\gamma)+2\log|1-e^{\gamma(t+D)}|\right\}-\frac{2}{\sigma^2}\log|1-e^{\gamma D}|\right)\\&=cm\left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)\left\{\log|1-e^{\gamma D}|+\frac{(c+\gamma)t}{2}-\log|1-e^{\gamma t}e^{\gamma D}|\right\}\\&=cm\left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)\left\{\log\left|1-\frac{\lambda+\frac{c+\gamma}{\sigma^2}}{\lambda+\frac{c-\gamma}{\sigma^2}}\right|+\frac{(c+\gamma)t}{2}-\log\left|1-e^{\gamma t}\cdot\frac{\lambda+\frac{c+\gamma}{\sigma^2}}{\lambda+\frac{c-\gamma}{\sigma^2}}\right|\right\}\\&=cm\left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)\left\{\log\left|\frac{2\gamma e^{\frac{c+\gamma}{2}t}}{e^{\gamma t}(\sigma^2\lambda+c+\gamma)-\sigma^2\lambda+\gamma-c}\right|\right\}.\end{aligned}$$

つまり、

$$E\left[\exp(-\lambda h(t))\cdot\exp\left(-\mu\int_0^t h(s)ds\right)\right]=\exp(-cm\cdot\phi_{\lambda,\mu}(0,t)-\psi_{\lambda,\mu}(0,t)h_0).\tag{10}$$

ただし、

$$\begin{aligned}&\phi_{\lambda,\mu}(0,t)=-\frac{2}{\sigma^2}\left\{\log\frac{2\gamma e^{\frac{c+\gamma}{2}t}}{e^{\gamma t}(\sigma^2\lambda+c+\gamma)-\sigma^2\lambda+\gamma-c}\right\},\\&\psi_{\lambda,\mu}(0,t)=\frac{\lambda\{c+\gamma+(\gamma-c)e^{\gamma t}\}+2\mu(e^{\gamma t}-1)}{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1)+\gamma-c+e^{\gamma t}(c+\gamma)},\\&\gamma=\sqrt{c^2+2\sigma^2\mu}.\end{aligned}$$

ここで、累積生存確率の計算に戻る。(10) 式において、$\lambda = 0, \mu = 1$ とすることで累積生存確率を計算できる。 □

命題 3.4　時点 t での満期 T の債券のイールド・スプレッド $y(t,T)$ は、

$$\begin{aligned}\exp\left(-(T-t)y(t,T)\right) &= E\left[\exp\left(-\int_t^T (1-\delta)h(s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right]\\ &= \exp(-cm\cdot\phi_{0,1-\delta}(t,T) - \psi_{0,1-\delta}(t,T)h(t)).\end{aligned}\tag{11}$$

ただし

$$\begin{aligned}\phi_{0,1-\delta}(t,T) &= -\frac{2}{\sigma^2}\log\frac{2\gamma e^{\frac{c+\gamma}{2}(T-t)}}{\gamma - c + e^{\gamma(T-t)}(\gamma+c)},\\ \psi_{0,1-\delta}(t,T) &= \frac{2(1-\delta)(e^{\gamma(T-t)}-1)}{\gamma - c + e^{\gamma(T-t)}(\gamma+c)}, \qquad \gamma = \sqrt{c^2+2(1-\delta)\sigma^2}.\end{aligned}$$

(証明) (10) 式において、$\lambda = 0, \mu = 1-\delta$ とすることで計算できる。 □

3.3　フォワード生存確率

当節以降、前節までに説明したモデルに関してパラメータを変化させた場合のその影響を見ていく。この節では、フォワード生存確率を見ていく。

ただし、ここで Vasicek タイプ・モデルにおける注意すべき点を述べる。Vasicek タイプ・モデルを紹介したときにも述べたが、(4) 式は非負性を保証されていない。これは、パラメータの数値次第で累積生存確率が 1 を超えてしまうことを示唆している。図 1 は、(5) 式をもとに累積生存確率を計算したものである。ここで、

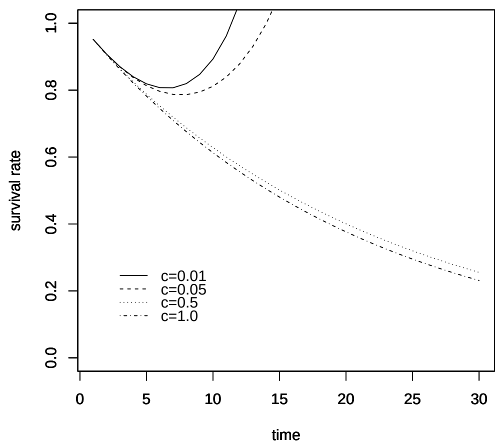


図 1　Vasicek タイプ・モデルの累積生存確率

$m = 0.05, \sigma = 0.05$ である。横軸の単位は年である。図 1 より時間が経つにつれて累積生存確率が 1 を超えてしまうことがある。ただし、c、つまり平均に回帰する強さ、が大きくなるにつれてその傾向は薄れていって

いることも確認できる。パラメータの数値選択次第で、非負性の欠如の問題を排除できるだろう。また、ここから Vasicek タイプ・モデルと CIR タイプ・モデルの計算結果を掲載していくが、パラメータは適当に設定したものであるため、両モデル・タイプの比較はできない。両モデル・タイプの比較に関しては 3.7 節で扱うことにする。では、まずはじめにフォワード生存確率を計算していくことにする。フォワード生存確率とは、将来のある時点からある期間の間に生存している確率のことで

$$P[\tau > s|\tau > t] = \frac{P[\tau > s]}{P[\tau > t]}$$

で計算される。本論文では 1 年ごとの 1 年間に生存している確率を計算して図にまとめた。この節での基本パラメータは、Vasicek タイプ・モデルの場合は $c = 0.5, m = 0.05, \sigma = 0.03, hazardstart = 0.05$、Vasicek タイプ・モデルの場合は $c = 0.5, m = 0.05, \sigma = 0.15, hazardstart = 0.05$ とする。$hazardstart$ はハザード率過程の初期値である。図 2、図 3 は平均回帰水準 c を変化させたときのフォワード生存確率を表したものであ

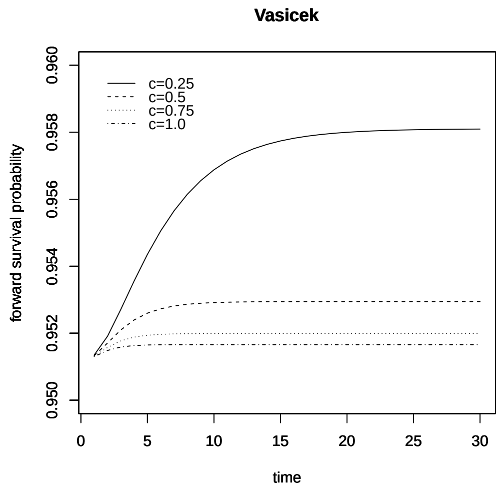


図 2 Vasicek タイプ・モデルのフォワード生存確率と平均回帰水準 c

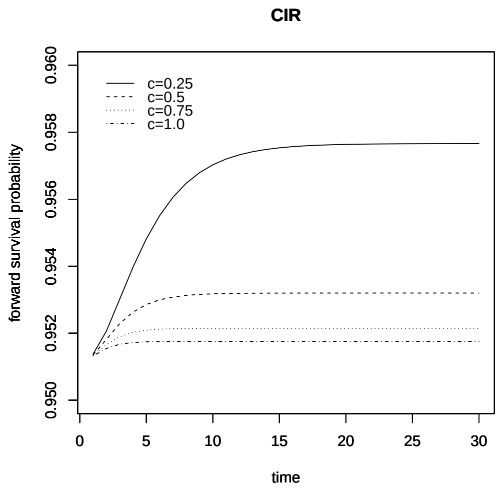


図 3 CIR タイプ・モデルのフォワード生存確率と平均回帰水準 c

る。まず両図より時間が経過するにつれてフォワード生存確率は増加しているのが分かる。また、c が小さくなるにつれて増加傾向が強くなっていることが分かる。図 4、図 5 は拡散係数 σ を変化させたときのフォワード生存確率を表したものである。σ が大きくなるにつれてフォワード生存確率の増加傾向が強くなることが分かる。平均回帰水準 c が小さくなる、または、σ が大きくなるとハザード率過程 $h(t)$ の分散が大きくなり、$-\int_t^s h(u)du$ の分散も大きくなる。その結果、生存確率も大きくなる。次にハザード率過程の初期値を変化したときのフォワード生存確率を観察してみる。図 6、図 7 より初期値 $hazardstart$ が平均的ハザード率 m よりも小さい場合フォワード生存確率は時間とともに減少し、大きい場合は上昇する。低格付けされている債券は時間が経過していくにつれて信用力が回復していき、高格付けされている債券は時間とともにデフォルトリスクが上昇していく様子を表現しているといえる。

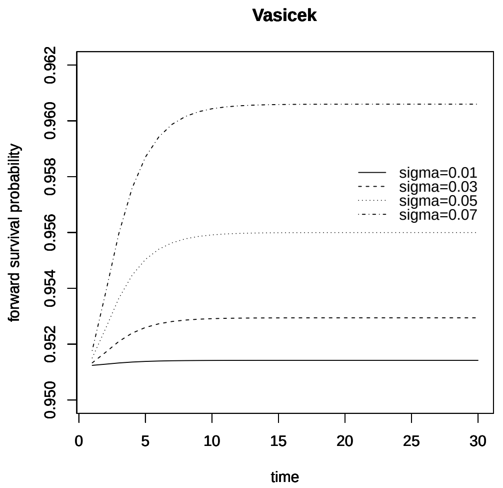


図 4　Vasicek タイプ・モデルのフォワード生存確率と拡散係数 σ

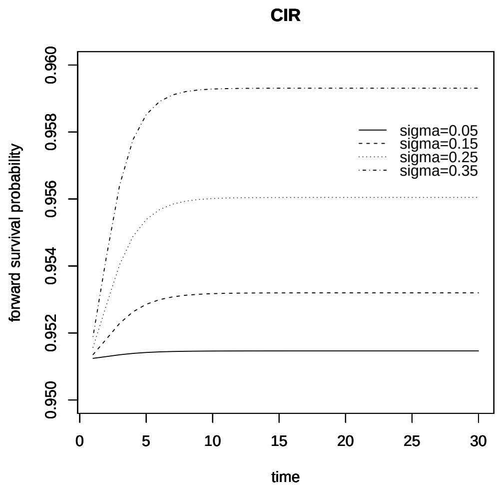


図 5　CIR タイプ・モデルのフォワード生存確率と拡散係数 σ

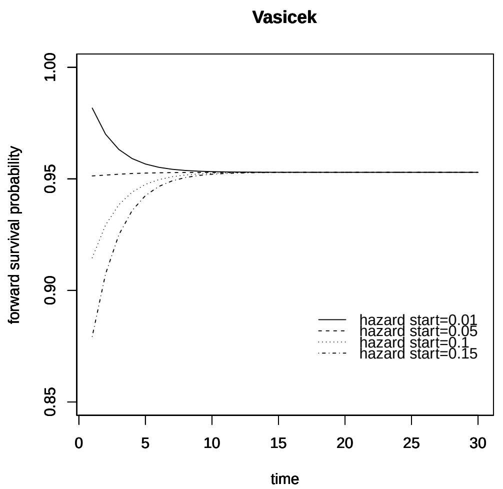


図 6　Vasicek タイプ・モデルのフォワード生存確率と初期値 $hazardstart$

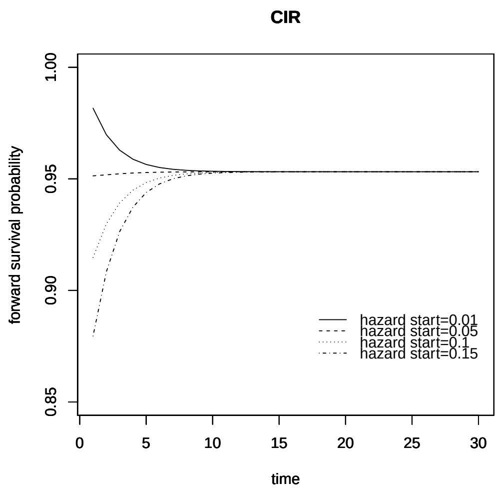
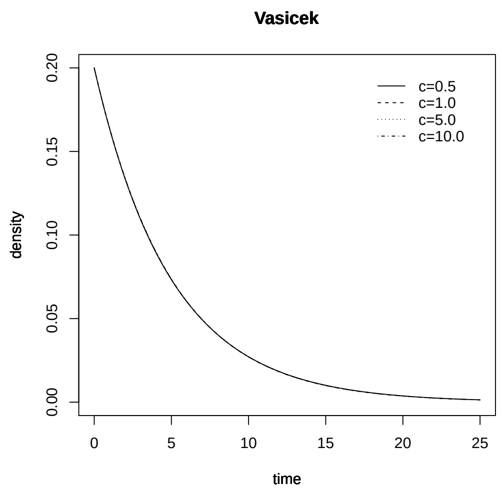


図 7　CIR タイプ・モデルのフォワード生存確率と初期値 $hazardstart$

3.4　デフォルト時刻の密度関数

この節では、(6) 式、(9) 式を参考にデフォルト時刻の密度関数を観察してみることにする。基本パラメータは、Vasicek タイプ・モデルの場合 $c = 0.5, m = 0.2, \sigma = 0.03, hazardstart = 0.2$、CIR モデル・タイプの場合 $c = 0.5, m = 0.2, \sigma = 0.15, hazardstart = 0.2$ とする。図 8、図 9 は平均回帰水準 c を変化させたときの密度関数を表している。2 つの図を見る限り本論文でのパラメータでは c の変化による密度関数での違い



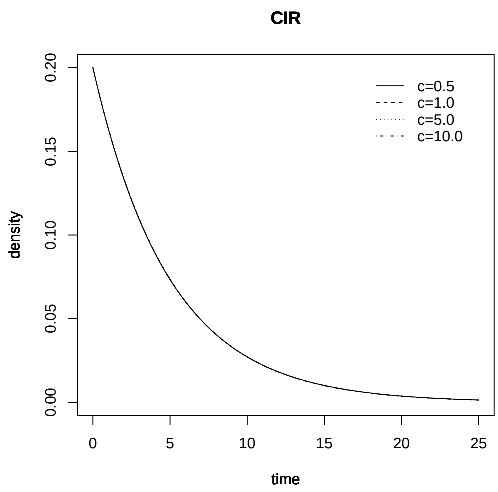
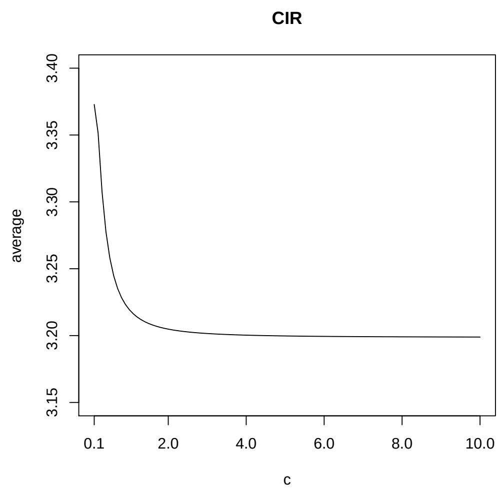


図 8　Vasicek タイプ・モデルのデフォルト時刻の密度関数と平均回帰水準 c

図 9　CIR タイプ・モデルのデフォルト時刻の密度関数と平均回帰水準 c

は見られない。図 10、図 11 はデフォルト時刻の平均と標準偏差の変化を見たものである。c が大きくなるほ



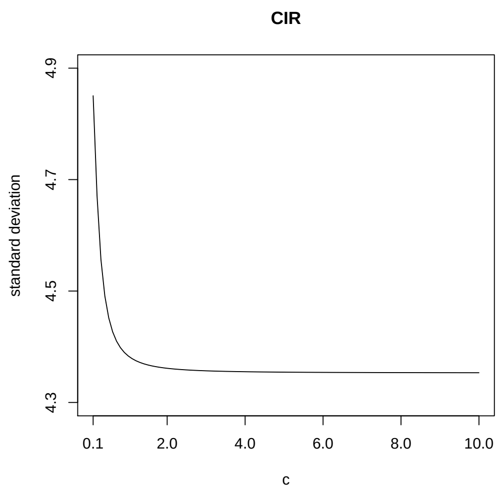


図 10　CIR タイプ・モデルのデフォルト時刻の平均と平均回帰水準 c

図 11　CIR タイプ・モデルのデフォルト時刻の標準偏差と平均回帰水準 c

どデフォルト時刻の平均と標準偏差は減少していく。図 3 から c が大きいとフォワード生存確率の上昇傾向が弱いことをみたが、その分早い時期にデフォルトするリスクを考慮する必要があるようである。図 12、図 13 は拡散係数 σ を変化させたとき密度関数がどのように変化するのかを示したものである。拡散係数 σ が大きくなるほど裾が厚くなっているのが分かる。拡散係数 σ が大きいほど長時間デフォルトするリスクを考える必要があり、小さいほど短い時間でのデフォルトするリスクを気にする必要がある。図 14、図 15 はデフォルト時刻の平均と標準偏差の変化を見たものである。図 5 から σ が小さいほどフォワード生存確率の上昇傾向

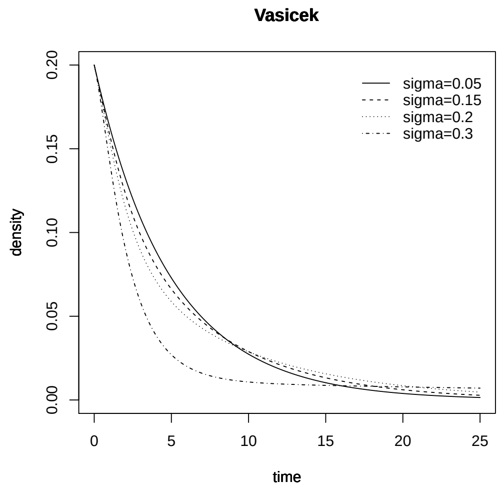


図 12　Vasicek タイプ・モデルのデフォルト時刻の密度関数と拡散係数 σ

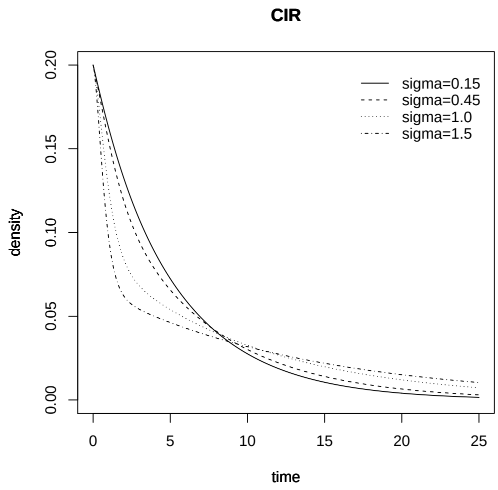


図 13　CIR タイプ・モデルのデフォルト時刻の密度関数と拡散係数 σ

が弱いことをみたが、その分早い時期にデフォルトするリスクを考慮する必要があるようである。続いて、ハ

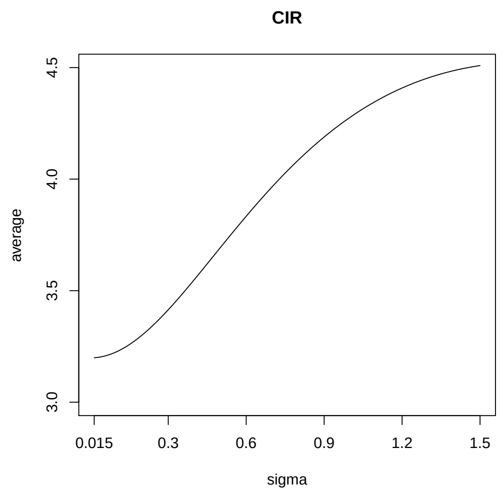


図 14　CIR タイプ・モデルのデフォルト時刻の平均と拡散係数 σ

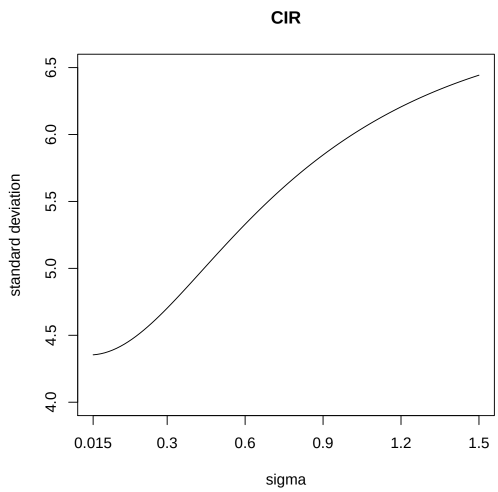
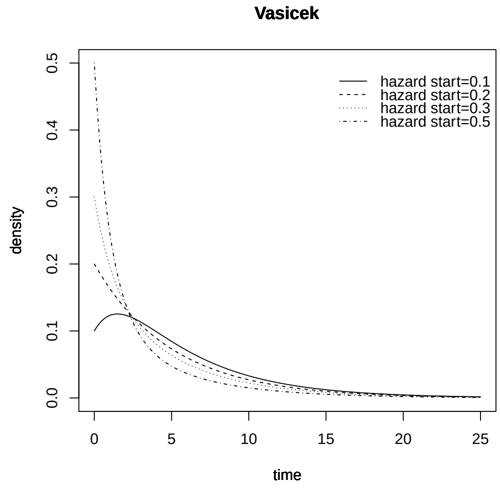


図 15　CIR タイプ・モデルのデフォルト時刻の標準偏差と拡散係数 σ

ザード率過程の初期値 $hazardstart$ を変化させてみる。図 16、図 17 がその様子を示したものである。図 18、図 19 はデフォルト時刻の平均と標準偏差の変化を見たものである。ここで言えることは、単純に低格付けされいている債券は高格付けされている債券よりもデフォルトする時刻が早くなるということだろう。



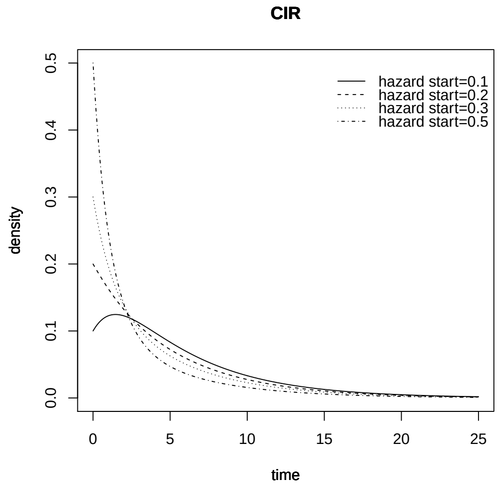
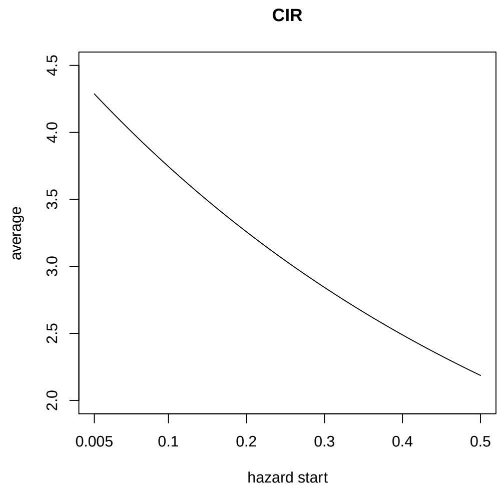


図 16　Vasicek タイプ・モデルのデフォルト時刻の密度関数と初期値 $hazardstart$

図 17　CIR タイプ・モデルのデフォルト時刻の密度関数と初期値 $hazardstart$



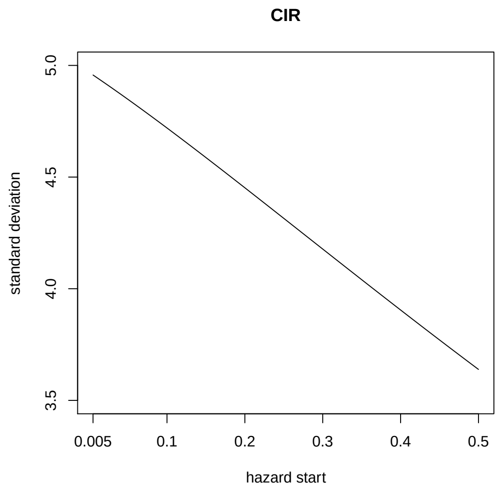


図 18　CIR タイプ・モデルのデフォルト時刻の平均と初期値 $hazardstart$

図 19　CIR タイプ・モデルのデフォルト時刻の平均と初期値 $hazardstart$

3.5　イールドスプレッド

この節では、(11) 式を参考に CIR タイプ・モデルのイールドスプレッドを計算してみることにする。基本パラメータは、$c = 0.5, m = 0.05, \sigma = 0.15, hazardstart = 0.05, \delta = 0.35$ とする。 イールド・スプレッドはデフォルトリスクが大きいほど大きくなると考えられる。よって、3.3 節でのフォワード生存確率と関係が深いはずである。すなわち、フォワード生存確率が小さいほどイールド・スプレッドが大きくなる。図 20 から

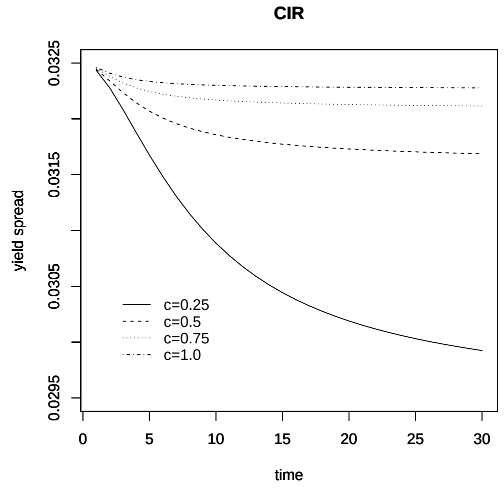


図 20　CIR タイプ・モデルのイールド・スプレッドと平均回帰水準 c

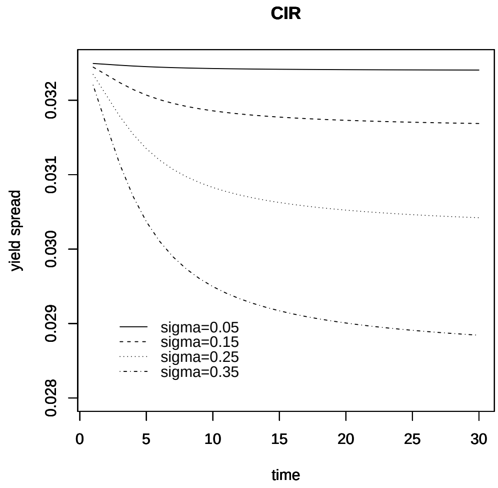


図 21　CIR タイプ・モデルのイールド・スプレッドと拡散係数 σ

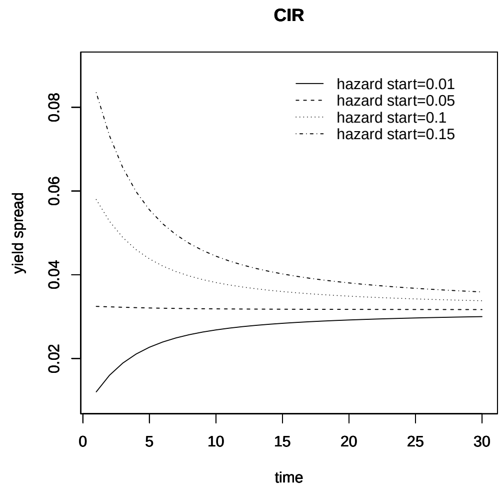


図 22　CIR タイプ・モデルのイールド・スプレッドと初期値 $hazardstart$

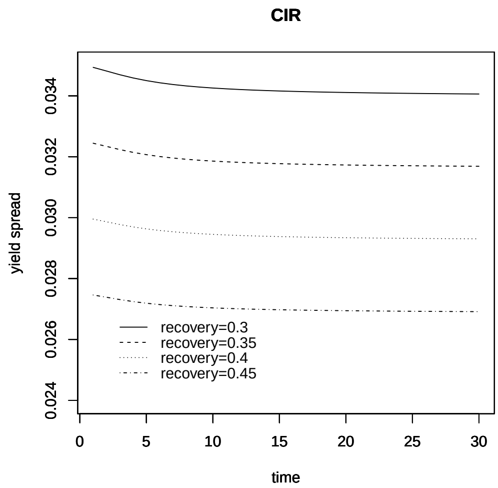


図 23　CIR タイプ・モデルのイールド・スプレッドと回収率 δ

図 22 に関してはその関係が見て取れる。図 22 では、高格付けされている債券のイールド・スプレッドは時間経過とともに上昇し、低格付け債券のイールド・スプレッドは低下している。これは実際の世界でも観察されていることである。図 23 では回収率を変化させたときのイールド・スプレッドを表しているが、回収率が小さいほどデフォルトした際の損失が大きいことからイールド・スプレッドが大きめになるだろうと考えると妥当な結果である。

3.6　イールド・スプレッドと相関

この節では、2 つのハザード率過程に相関を入れたときにイールド・スプレッドにどのような相関が生まれるかを見てみることにする。2 つの満期 5 年の債券のイールド・スプレッドを考える。2 債券とも現在から 1 年はデフォルトしないことを前提にして 1 年後から 5 年間を考える。基本パラメータは $c = 0.5, m = 0.05, hazardstart = 0.05, \delta = 0.35$ とする。ここでは、σ を変化させたときの相関の現れ方も観察する。

債券 A、債券 B のハザード率過程は

Vasicek の場合

$$dh_A(t) = c(m - h_A(t))dt + \sigma(\rho dM_t + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^A),$$
$$dh_B(t) = c(m - h_B(t))dt + \sigma(\rho dM_t + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^B),$$

CIR の場合

$$dh_A(t) = c(m - h_A(t))dt + \sigma\sqrt{h_A(t)}(\rho dM_t + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^A),$$
$$dh_B(t) = c(m - h_B(t))dt + \sigma\sqrt{h_B(t)}d(\rho dM_t + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^B).$$

で ρ は市場のハザード率との相関係数である。この時 M_t は共通のファクター、つまり市場から受ける影響とする。図 24 は CIR モデル・タイプのハザード率過程の相関とイールド・スプレッドの相関の関係を表してい

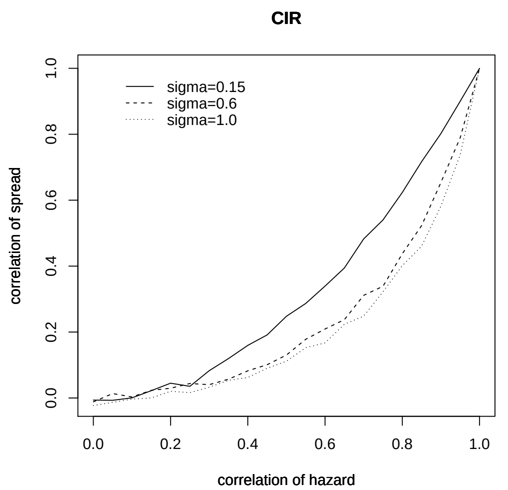


図 24　ハザード率過程の相関とイールド・スプレッドの相関

る。今回の相関の入れ方をした場合、ハザード率過程の相関とイールド・スプレッドの相関は指数的な関係を持っていることが分かる。ハザード率過程の相関が大きい場合はイールド・スプレッドにも大きな相関が表れている。逆に、ハザード率過程の相関が比較的小さい場合には、イールド・スプレッドには相関が表れにくいことが分かる。また、拡散係数 σ が大きくなるほどその傾向が大きくなることが言える。　図 25 から図 35 は、$\sigma = 0.15$ の場合の債券 A と債券 B のイールド・スプレッドを相関係数毎に散布図にまとめたものである。

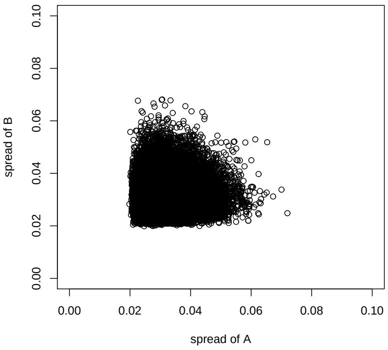


図 25　$\rho = 0$

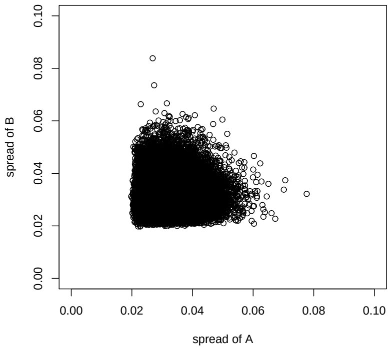


図 26　$\rho = 0.1$

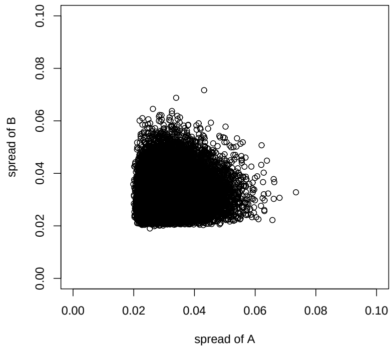


図 27　$\rho = 0.2$

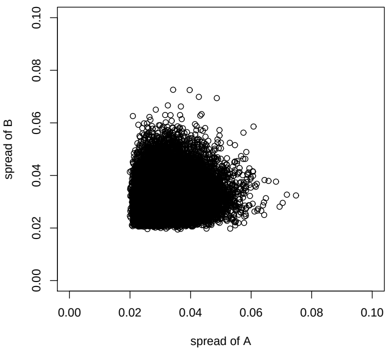


図 28　$\rho = 0.3$

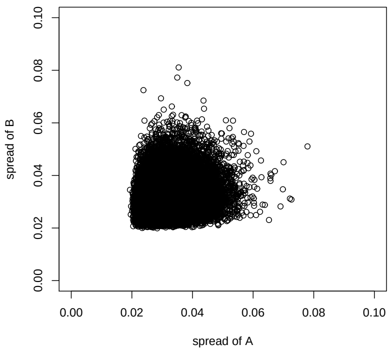


図 29　$\rho = 0.4$

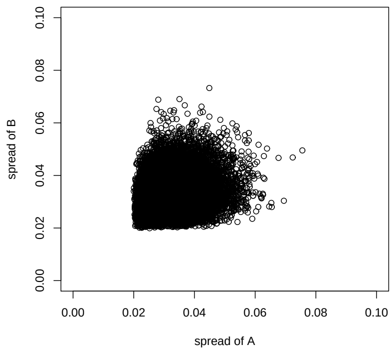


図 30　$\rho = 0.5$

3.7 比較

この節では、Vasicek タイプ・モデルと CIR タイプ・モデルを比較する。比較にあたっては、両モデルのハザード率過程に従うハザード率の長期的な平均と分散が等しくなるようにパラメータを選択する。ハザード率過程に従うハザード率の長期的な平均と分散は、

Vasicek の場合

$$E[h(t)] = (h_0 - m)e^{-ct} + m \quad \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad m,$$
$$Var[h(t)] = \frac{\sigma_{Vas}^2}{2c}(1 - e^{-2ct}) \quad \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{\sigma_{Vas}^2}{2c}.$$

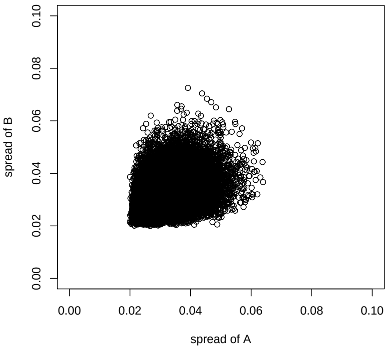


図 31　$\rho = 0.6$

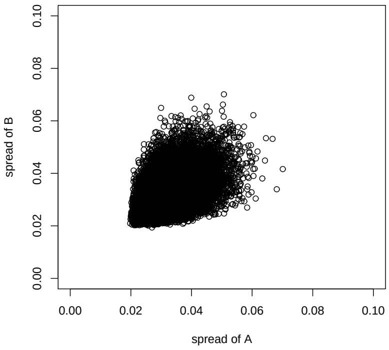


図 32　$\rho = 0.7$

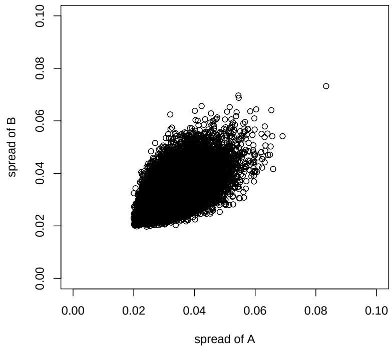


図 33　$\rho = 0.8$

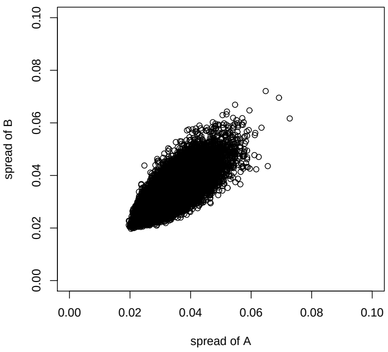


図 34　$\rho = 0.9$

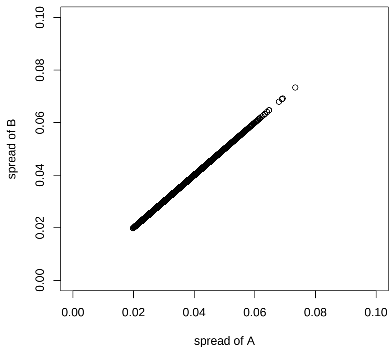


図 35　$\rho = 1.0$

CIR の場合

$$\begin{aligned} E[h(t)] &= (h_0 - m)e^{-ct} + m \quad \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad m, \\ Var[h(t)] &= \frac{\sigma_{CIR}^2}{c}(1 - e^{-ct})\left[h_0 e^{-ct} + \frac{m}{2}(1 - e^{-ct})\right] \quad \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{\sigma_{CIR}^2 m}{2c}. \end{aligned}$$

となる。つまり、

$$\sigma_{Vas} = \sqrt{m}\sigma_{CIR},$$

という関係がある。まず、ハザード率の長期的な平均と分散を一定にして平均回帰水準 c と拡散係数 σ を変化させていった場合の比較を行う。図 36 は、長期的平均を 0.2、長期的分散を $0.01, 0.04$ で固定して平均回帰水準 c と拡散係数 σ を変化させたときの 5 年後の累積生存確率を表したものである。CIR タイプ・モデルのほうがパラメータを変化させたときの累積生存確率の変化の幅が小さい。これは、パラメータを推定した場合、CIR タイプ・モデルのほうが推定誤差の影響を受けにくいことを示唆していると思われる。また、その傾向はハザード率の長期的分散が大ききほど強くなることが図からわかる。次にフォワード生存確率とデフォルト時刻の密度関数を比較する。パラメータは拡散係数 σ 以外のパラメータの値は同一のものを使用し、その

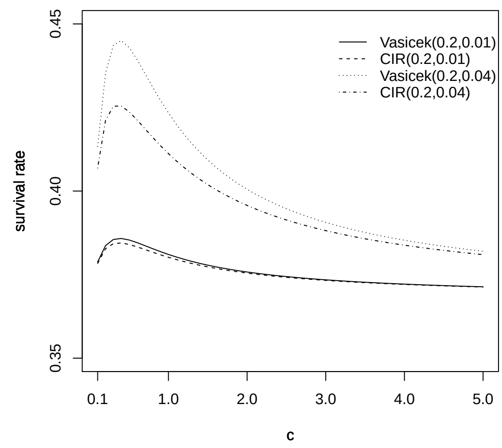


図 36　Vasicek タイプ・モデルと CIR タイプ・モデルの比較-c と σ

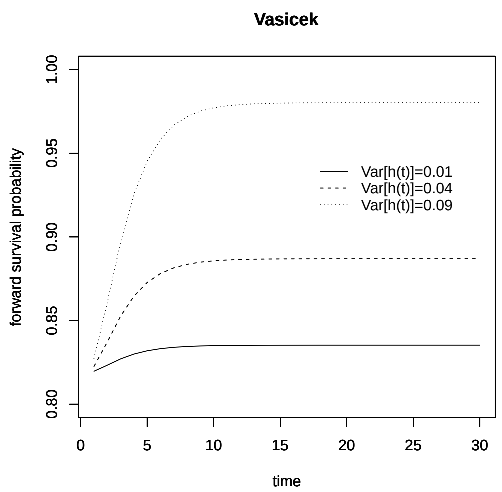


図 37　Vasicek タイプ・モデルのフォワード生存確率と長期的分散

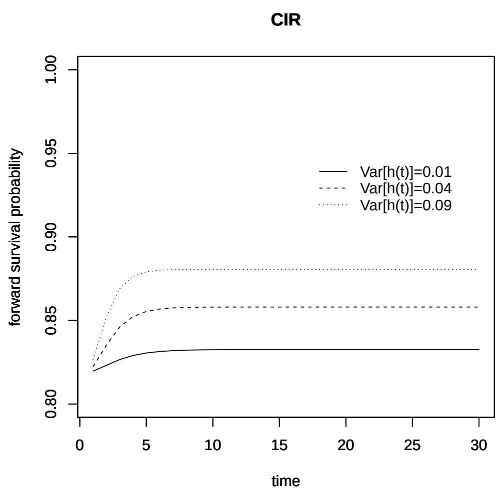


図 38　CIR タイプ・モデルのフォワード生存確率と長期的分散

上で長期的な平均と分散が等しくなるように σ の値を決めることにする。図 37、図 38 は長期的平均を 0.2、長期的分散を $0.01, 0.04, 0.09$、平均回帰水準 c を 0.5 として両モデルのフォワード生存確率を表したものである。同平均、同分散では Vasicek タイプ・モデルのほうが長期的分散が大きくなった場合のフォワード生存確率の増加傾向が強いことが分かる。これは、Vasicek タイプ・モデルの非負性の欠如が理由にあると考えられる。ハザード率過程の分散が大きくなればなるほど、負の値をとる量が増える。その分、生存確率を押し上げられてたと考える。図 39、図 40、図 41 はそれぞれの長期的分散の場合のデフォルト時刻の密度関数を比較したものである。Vasicek タイプ・モデルのほうが早めのデフォルトリスクがあり、その傾向は長期的分散が大きいほど強くなる。次にハザード率過程に相関を入れたときの比較を行う。ここでもパラメータは拡散係数

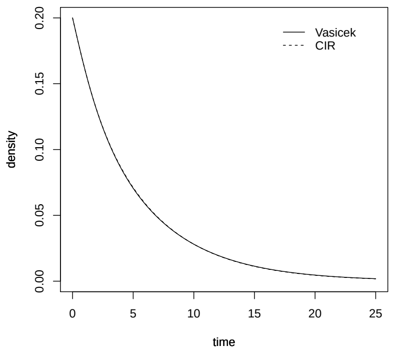


図 39　デフォルト時刻の密度関数-長期的分散 0.01

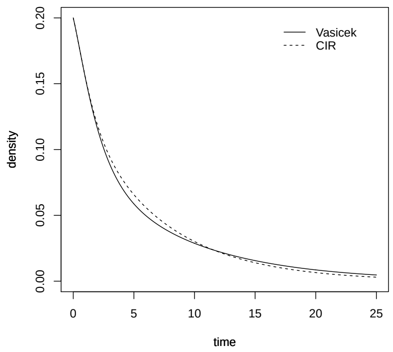


図 40　デフォルト時刻の密度関数-長期的分散 0.04

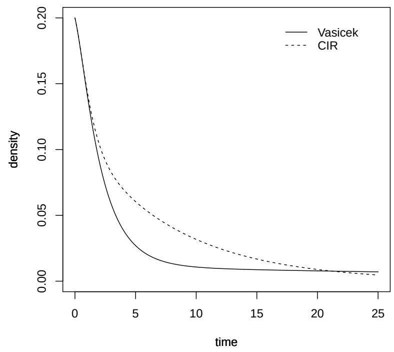


図 41　デフォルト時刻の密度関数-長期的分散 0.09

σ 以外のパラメータの値は同一のものを使用し、その上で長期的な平均と分散が等しくなるように σ の値を決めることにする。図 42、図 43 は長期的平均を 0.2、長期的分散を $0.01, 0.04, 0.09$、平均回帰水準 c を 0.5 としてハザード率過程の相関を大きくしていったときにイールド・スプレッドにどのように相関が現れるかを示している。Vasicek タイプ・モデルのほうは長期的分散が大きくなっても相関の現れ方は変わらないが、CIR タイプ・モデルのほうでは長期的分散を大きくするに従い、上昇するスピードがゆっくりになっていることが分かる。ここで、債券 A と債券 B のハザード率過程を $h_A(t)$、$h_B(t)$ とした場合の $\int_0^t h_A(s)ds$、$\int_0^t h_B(s)ds$

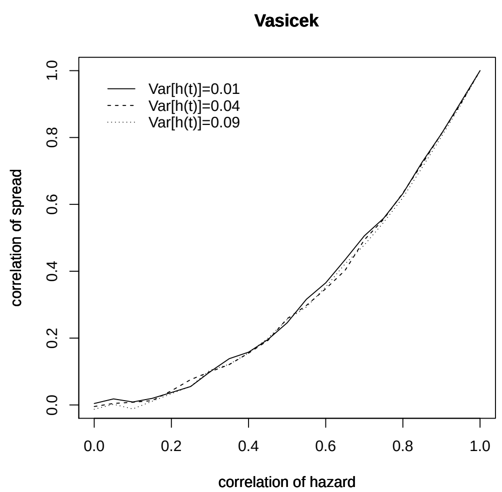


図 42　Vasicek タイプ・モデルのイールド・スプレッドの相関と長期的分散

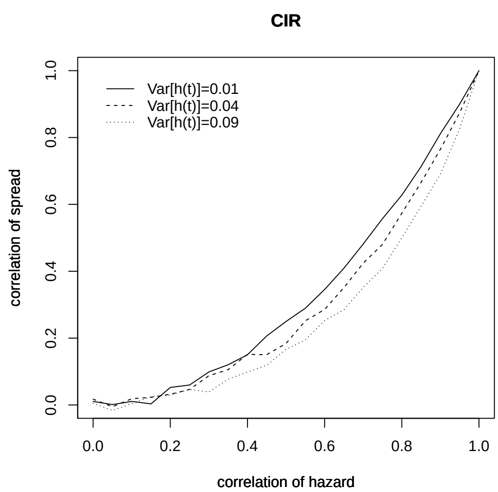


図 43　CIR タイプ・モデルのイールド・スプレッドの相関と長期的分散

の相関係数がどのような式で書けるかを見ていくことにする。まず、Vasicek タイプ・モデルの場合

$$\begin{aligned} dh_A(t) &= c(m - h_A(t))dt + \sigma(\rho dM_t + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^A), \\ dh_B(t) &= c(m - h_B(t))dt + \sigma(\rho dM_t + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^B). \end{aligned} \tag{12}$$

(12) 式に関して両辺を積分すると

$$h_A(t) - h_A(0) = cmt - c\int_0^t h_A(s)ds + \sigma(\rho M_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t^B). \tag{13}$$

ここで、

$$h_A(t) = (h_A(0) - m)e^{-ct} + m + \sigma\int_0^t e^{-c(t-s)}(\rho dM_s + \sqrt{1-\rho^2}dW_s^A). \tag{14}$$

(13) 式、(14) 式より

$$\begin{aligned}
\int_0^t h_A(s)ds &= \frac{1}{c}\left[-h_A(t) + h_A(0) + cmt + \sigma(\rho M_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t^A)\right] \\
&= \frac{1}{c}\Bigg[cmt + (h_A(0)-m)(1-e^{-ct}) - \sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}(\rho dM_s + \sqrt{1-\rho^2}dW_s^A) \\
&\qquad + \sigma(\rho M_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t^A)\Bigg],
\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^t h_A(s)ds\right)^2\right] &= E\Bigg[\frac{1}{c^2}\Bigg[c^2m^2t^2 + (h_A(0)-m)^2(1-e^{-ct})^2 + \sigma^2 e^{-2ct}\int_0^t e^{2cs}ds + \sigma^2 t \\
&\qquad + 2cmt(h_A(0)-m)(1-e^{-ct}) - 2cmt\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}(\rho dM_s + \sqrt{1-\rho^2}dW_s^A) \\
&\qquad + 2cmt\sigma(\rho M_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t^A) \\
&\qquad - 2(h_A(0)-m)(1-e^{-ct})\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}(\rho dM_s + \sqrt{1-\rho^2}dW_s^A) \\
&\qquad + 2(h_A(0)-m)(1-e^{-ct})\sigma(\rho M_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t^A) - 2\sigma^2 e^{-ct}\int_0^t e^{cs}ds\Bigg]\Bigg] \\
&= \frac{1}{c^2}\Bigg[c^2m^2t^2 + (h_A(0)-m)^2(1-e^{-ct})^2 + \sigma^2 e^{-2ct}\cdot\frac{1}{2c}(e^{2ct}-1) + \sigma^2 t \\
&\qquad + 2cmt(h_A(0)-m)(1-e^{-ct}) - 2\sigma^2 e^{-ct}\cdot\frac{1}{c}(e^{ct}-1)\Bigg].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(E\left[\int_0^t h_A(s)ds\right]\right)^2 &= \left(mt + \frac{(h_A(0)-m)(1-e^{-ct})}{c}\right)^2 \\
&= m^2t^2 + \frac{2mt(h_A(0)-m)(1-e^{-ct})}{c} + \frac{(h_A(0)-m)^2(1-e^{-ct})^2}{c^2}.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
Var\left(\int_0^t h_A(s)ds\right) &= E\left[\left(\int_0^t h_A(s)ds\right)^2\right] - \left(E\left[\int_0^t h_A(s)ds\right]\right)^2 \\
&= \frac{1}{c^2}\left[\sigma^2 e^{-2ct}\cdot\frac{1}{2c}(e^{2ct}-1) + \sigma^2 t - \frac{2\sigma^2}{c}e^{-ct}(e^{ct}-1)\right] \\
&= \frac{1}{c^2}\left[\frac{\sigma^2}{2c}(1-e^{-2ct}) + \sigma^2 t - \frac{2\sigma^2}{c}(1-e^{-ct})\right].
\end{aligned}$$

$$Var\left(\int_0^t h_A(s)ds\right) = \frac{\sigma^2}{c^2}\left[\frac{1}{2c}(1-e^{-2ct}-4+4e^{-ct})+t\right]$$
$$= \frac{\sigma^2}{c^2}\left[\frac{1}{2c}(e^{-ct}-1)(e^{-ct}-3)+t\right].$$

同様にすると

$$Var\left(\int_0^t h_B(s)ds\right) = \frac{\sigma^2}{c^2}\left[\frac{1}{2c}(e^{-ct}-1)(e^{-ct}-3)+t\right],$$

を得る。ここでは $h_A(0)=h_B(0)=h_0$ と考える。そして

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^t h_A(s)ds\right)\left(\int_0^t h_B(s)ds\right)\right]\\
&= E\Bigg[\frac{1}{c^2}\Bigg\{cmt+(h_0-m)(1-e^{-ct})-\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^A)+\sigma(\rho M_t+\sqrt{1-\rho^2}W_t^A)\Bigg\}\\
&\quad\times\Bigg\{cmt+(h_0-m)(1-e^{-ct})-\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^B)+\sigma(\rho M_t+\sqrt{1-\rho^2}W_t^B)\Bigg\}\Bigg]\\
&= E\Bigg[\frac{1}{c^2}\Bigg\{c^2m^2t^2+2cmt(h_0-m)(1-e^{-ct})-cmt\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^B)\\
&\quad+cmt\sigma(\rho M_t+\sqrt{1-\rho^2}W_t^B)+(h_0-m)^2(1-e^{-ct})^2\\
&\quad-(h_0-m)(1-e^{-ct})\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^B)\\
&\quad+(h_0-m)(1-e^{-ct})\sigma(\rho M_t+\sqrt{1-\rho^2}W_t^B)\\
&\quad-(h_0-m)(1-e^{-ct})\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^A)\\
&\quad-cmt\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^A)\\
&\quad-\sigma^2e^{-ct}\rho^2\int_0^t e^{cs}ds+cmt\sigma(\rho M_t+\sqrt{1-\rho^2}W_t^A)+(h_0-m)(1-e^{-ct})\sigma(\rho M_t+\sqrt{1-\rho^2}W_t^A)\\
&\quad+\sigma^2e^{-2ct}\rho^2\int_0^t e^{2cs}ds-\sigma^2e^{-ct}\rho^2\int_0^t e^{cs}ds+\sigma^2\rho^2t\Bigg\}\Bigg]\\
&= \frac{1}{c^2}\Bigg[c^2m^2t^2+2cmt(h_0-m)(1-e^{-ct})+(h_0-m)^2(1-e^{-ct})^2\\
&\qquad+\sigma^2e^{-2ct}\rho^2\int_0 te^{2cs}ds-2\sigma^2e^{-ct}\rho^2\cdot\frac{1}{c}(e^{ct}-1)+\sigma^2\rho^2t\Bigg].
\end{aligned}$$

つまり、$h_A(0)=h_B(0)$ より

$$\begin{aligned}
Cov\left(\int_0^t h_A(s)ds,\int_0^t h_B(s)ds\right) &= E\left[\left(\int_0^t h_A(s)ds\right)\left(\int_0^t h_B(s)ds\right)\right]-E\left[\int_0^t h_A(s)ds\right]E\left[\int_0^t h_B(s)ds\right]\\
&= \frac{1}{c^2}\left[\sigma^2e^{-2ct}\rho^2\int_0 te^{2cs}ds-2\sigma^2e^{-ct}\rho^2\int_0 te^{cs}ds+\sigma^2\rho^2t\right]\\
&= \frac{\sigma^2\rho^2}{c^2}\left[t+\frac{1}{2c}e^{-2ct}(e^{2ct}-1)-\frac{2}{c}e^{-ct}(e^{ct}-1)\right]\\
&= \frac{\sigma^2\rho^2}{c^2}\left[\frac{1}{2c}(e^{-ct}-1)(e^{-ct}-3)+t\right].
\end{aligned}$$

となる。よって、相関係数は

$$\rho\left(\int_0^t h_A(s)ds, \int_0^t h_B(s)ds\right) = \frac{Cov\left(\int_0^t h_A(s)ds, \int_0^t h_B(s)ds\right)}{\sqrt{Var\left(\int_0^t h_A(s)ds\right)}\sqrt{Var\left(\int_0^t h_B(s)ds\right)}}$$
$$= \rho^2.$$

次に CIR の場合を考える。

$$\begin{aligned} dh_A(t) &= c(m - h_A(t))dt + \sigma\sqrt{h_A(t)}(\rho dM_t + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^A), \\ dh_B(t) &= c(m - h_B(t))dt + \sigma\sqrt{h_B(t)}(\rho dM_t + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^B). \end{aligned} \tag{15}$$

(15) 式に関して両辺を積分すると

$$h_A(t) - h_A(0) = cmt - c\int_0^t h_A(s)ds + \sigma\int_0^t \sqrt{h_A(s)}(\rho dM_s + \sqrt{1-\rho^2}dW_s^A),$$

となる。つまり

$$\int_0^t h_A(s)ds = \frac{1}{c}\left[-h_A(t) + h_A(0) + cmt + \sigma\int_0^t \sqrt{h_A(s)}(\rho dM_s + \sqrt{1-\rho^2}dW_s^A)\right].$$

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t h_A(s)ds\right)^2\right] &= E\Bigg[\frac{1}{c^2}\Bigg[(h_A(t))^2 + (h_A(0))^2 + c^2m^2t^2 + \sigma^2\int_0^t h_A(s)ds \\ &\quad - 2h_A(t)h_A(0) - 2h_A(t)cmt + 2h_A(0)mct \\ &\quad - 2(h_A(t) - h_A(0) + cmt)\sigma\int_0^t \sqrt{h_A(s)}(\rho dM_s + \sqrt{1-\rho^2}dW_s^A)\Bigg]\Bigg] \\ &= \frac{1}{c^2}\Bigg[E[(h_A(t))^2] + (h_A(0))^2 + c^2m^2t^2 + \sigma^2\int_0^t E[h_A(s)]ds \\ &\quad - 2E[h_A(t)]h_A(0) - 2E[h_A(t)]cmt + 2h_A(0)cmt\Bigg]. \end{aligned}$$

また

$$E\left[\int_0^t h_A(s)ds\right] = \frac{1}{c}\left[-E[h_A(t)] + h_A(0) + cmt\right].$$

よって

$$\begin{aligned} Var\left(\int_0^t h_A(s)ds\right) &= E\left[\left(\int_0^t h_A(s)ds\right)^2\right] - \left(E\left[\int_0^t h_A(s)ds\right]\right)^2 \\ &= \frac{1}{c^2}\left[E[(h_A(t))^2] - (E[h_A(t)])^2 + \sigma^2\int_0^t E[h_A(s)]ds\right]. \end{aligned}$$

同様にして

$$Var\left(\int_0^t h_B(s)ds\right) = \frac{1}{c^2}\left[E[(h_B(t))^2] - (E[h_B(t)])^2 + \sigma^2\int_0^t E[h_B(s)]ds\right],$$

を得る。ここでも $h_A(0)=h_B(0)=h_0$ と考える。そして、

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^t h_A(s)ds\right)\left(\int_0^t h_B(s)ds\right)\right]\\
&\quad = E\left[\frac{1}{c^2}\left\{-h_A(t)+h_0+cmt+\sigma\int_0^t\sqrt{h_A(s)}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^A)\right\}\right.\\
&\qquad\quad \left.\times\left\{-h_B(t)+h_0+cmt+\sigma\int_0^t\sqrt{h_B(s)}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^B)\right\}\right]\\
&\quad = E\left[\frac{1}{c^2}\left[h_A(t)h_B(t)+h_0^2+c^2m^2t^2+\sigma^2\rho^2\int_0^t\sqrt{h_A(s)h_B(s)}ds\right.\right.\\
&\qquad\quad -(h_A(t)+h_B(t))h_0-(h_A(t)+h_B(t))cmt+2h_0cmt\\
&\qquad\quad +h_0\left\{\sigma\int_0^t\sqrt{h_A(s)}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^A)+\sigma\int_0^t\sqrt{h_B(s)}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^B)\right\}\\
&\qquad\quad +cmt\sigma\left\{\int_0^t\sqrt{h_B(s)}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^B)+\int_0^t\sqrt{h_A(s)}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^A)\right\}\\
&\qquad\quad \left.\left.-h_A(t)\sigma\int_0^t\sqrt{h_B(s)}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^B)-h_B(t)\sigma\int_0^t\sqrt{h_A(s)}(\rho dM_s+\sqrt{1-\rho^2}dW_s^A)\right]\right]\\
&\quad = \frac{1}{c^2}\left[E[h_A(t)h_B(t)]+h_0^2+c^2m^2t^2+\sigma^2\rho^2\int_0^t E[\sqrt{h_A(s)h_B(s)}]ds\right.\\
&\qquad\quad \left.-E[h_A(t)+h_B(t)]h_0-E[h_A(t)+h_B(t)]cmt+2h_0cmt\right],
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\int_0^t h_A(s)ds,\int_0^t h_B(s)ds\right) &= E\left[\left(\int_0^t h_A(s)ds\right)\left(\int_0^t h_B(s)ds\right)\right]-E\left[\int_0^t h_A(s)ds\right]E\left[\int_0^t h_B(s)ds\right]\\
&= \frac{1}{c^2}\left[E[h_A(t)h_B(t)]-E[h_A(t)]E[h_B(t)]+\sigma^2\rho^2\int_0^t E[\sqrt{h_A(t)h_B(s)}]ds\right].
\end{aligned}
$$

相関係数は $E[h_A(t)^2]=E[h_B(t)^2], E[h_A(t)]=E[h_B(t)]$ より

$$
\begin{aligned}
\rho\left(\int_0^t h_A(s)ds,\int_0^t h_B(s)ds\right) &= \frac{Cov\left(\int_0^t h_A(s)ds,\int_0^t h_B(s)ds\right)}{\sqrt{Var\left(\int_0^t h_A(s)ds\right)}\sqrt{Var\left(\int_0^t h_B(s)ds\right)}}\\
&= \frac{E[h_A(t)h_B(t)]-(E[h_A(t)])^2+\sigma^2\rho^2\int_0^t E[\sqrt{h_A(t)h_B(s)}]ds}{E[h_A(t)^2]-(E[h_A(t)])^2+\sigma^2\int_0^t E[h_A(s)]ds}.
\end{aligned}
$$

次に、デフォルト時刻の間隔についてみる。債券 A と債券 B のどちらかがデフォルトしてから他方がデフォルトするまでの時刻を観察してみることにする。ここでもパラメータは拡散係数 σ 以外のパラメータの値は同一のものを使用し、その上で長期的な平均と分散が等しくなるように σ の値を決めることにする。図44、図 45 は長期的平均を 0.2、長期的分散を $0.01, 0.04, 0.09$、平均回帰水準 c を 0.5 としてハザード率過程の相関を大きくしていったときにデフォルト間隔がどのようになるかを示している。相関による間隔への影響は弱いように感じる。一方で長期的な分散の変化の影響を受けるようである。長期的な分散が大きくなるにつれて、間隔が狭くなっているのが分かる。分散のパラメータを正しく決定することが重要であることが示唆できる。 図 46 は CIR タイプ・モデルにおいて、はじめの債券がデフォルトした時の生存している債券のハザード率の値と長期的な平均、ここでは $m=0.2$、との差を表している。長期的な分散が大きくなるほど、平均と

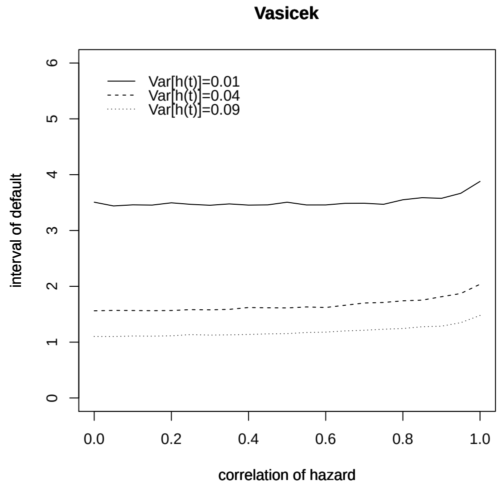


図 44　Vasicek タイプ・モデルのデフォルト間隔と長期的分散

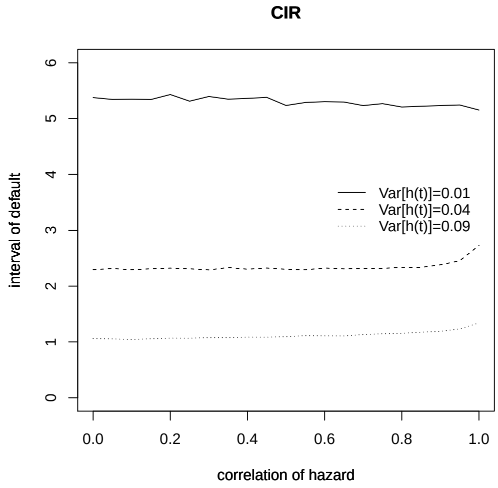


図 45　CIR タイプ・モデルのデフォルト間隔と長期的分散

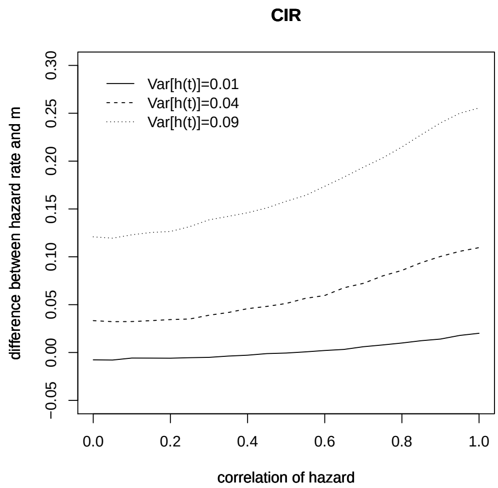


図 46　はじめのデフォルト時における生存債券のハザード率と長期的な平均との差

の差が大きなっていることが分かる。はじめにデフォルトした債券のデフォルト時のハザード率の値は初期値に比べて高くなっていることが想像できるが、分散が大きくなることでその値が引きあげられたと考えられる。2 つの債券のハザード率過程には相関が入っているため、デフォルト債券につられて生存債券のハザード率も引き上げられた可能性が高い。つまり、次のデフォルトが起こるまでの時間を観察しはじめる時点でのハザード率の値が高い可能性が高いことを示している。そのことで、早い段階で次のデフォルトが起こりやすくなっていたと考えられる。

4 クレジット・デフォルト・スワップ

クレジット・デフォルト・スワップのごく単純な例としては、ある企業の債券を保有する A 社がその債券のデフォルト・リスクをヘッジしたいと考えたときに利用するスワップ契約があげられる。A 社は B 社に対し、デフォルトが発生するまで、もしくはスワップの契約期間が終了するまで、保険料に相当する固定のプレミアム契約を定期的に支払い、一方の B 社は、デフォルトがスワップ期間終了前に生じた場合には、参照資産となった債券の回収不能分に相当する額を、次のクーポン支払日時点で A 社に支払うという契約である。この取引の A 社の立場をプロテクションの買手と呼び、B 社の立場をプロテクションの売手と呼ぶ。クレジット・デフォルト・スワップの評価では、プロテクションの買手の価値とプロテクションの売手の価値が均衡するプレミアムを計算することになる。ここでは、参照資産となる債券が一つでありカウンターパーティ・リスクがない場合の、B 社からみたプロテクションの受取サイドの価値とプロテクションの支払サイドの価値についてそれぞれの評価モデルを扱う。

4.1 プロテクションの受取サイド

確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で表す。ここで P はリスク中立確率測度であると仮定する。フィルトレーション $\{\mathcal{G}_t\}$ と $\{\mathcal{F}_t\}$ を 2.4 節の設定どおりに定義する。満期が T である無リスク割引債の t 時点での価格 $Z(t,T)$ を

$$Z(t,T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)|\mathcal{G}_t\right],$$

で表す。ただし、r は無リスクのスポットレート過程である。満期が T であり、n 回の支払日 $t_i(0 < t_i < \cdots < t_n \leq T)$ ごとにデフォルトの保険料に相当する固定プレミアム $p_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ が支払われるクレジット・デフォルト・スワップが契約されているとする。クレジット・デフォルト・スワップでは、デフォルトが発生した時点 τ で契約が終了するので、プロテクションの B 社からみた受取サイドのクレジット・デフォルト・スワップの現在価値 P_F は、$t_i < \tau$ 時点までのプレミアム p_i を割り引いたものの合計になる。

$$P_F = E\left[\sum_{i=1}^n p_i \exp\left(-\int_0^{t_i} r(s)ds\right) \ 1_{\{t_i<\tau\}}\right].$$

ここで、スポットレート過程 $r(t)$ と企業のデフォルト時点 τ は独立であると仮定し、(3) 式を適用すると、

$$\begin{aligned} P_F &= \sum_{i=1}^n p_i E\left[\exp\left(-\int_0^{t_i} r(s)ds\right)\right] E\left[\ 1_{\{t_i<\tau\}}\right] \\ &= \sum_{i=1}^n p_i Z(0,t_i) P[\tau > t_i] \\ &= \sum_{i=1}^n p_i Z(0,t_i) E\left[e^{-\int_0^{t_i} h(s)ds}\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

4.2 プロテクションの支払サイド

もし、債券発行企業がデフォルトした場合、B 社はその債券の回収不能分だけ A 社に対して支払義務が生じる。$B(t)$ をこのクレジット・デフォルト・スワップの対象となった原債券の t 時点での価値であると

し、この債券の発行企業がデフォルトした場合には、デフォルトが起こる直前の債券価格 B($\tau-$) に回収率 δ $(0 < \delta \le 1)$ を掛け合わせた $\delta B(\tau-)$ が A 社の回収可能額であるとする。この債券のクーポン支払日を u_i $(0 < u_1 < u_2 < \cdots < \tau)$ とし、j 番目のクーポン支払日 u_i では b_j のクーポンが受け取れるとする。また、デフォルトの発生が u_{i-1} 時点から u_i 時点の間に発生した場合には、B 社は A 社の回収不能分に相当する $1-\delta B(\tau-)$ の保証を u_i 時点で行わなければならないと仮定する。ただし、モデルの簡易化のために、デフォルト発生から u_i 時点までの金利部分 (無リスク金利) が加算された形で支払われるとする。この場合、クレジット・デフォルト・スワップの対象となった原債券の時点 t での価値 $B(t)$ は、各クーポン支払日ごとのキャッシュフローを評価すればよいので、満期 T 時点 $(= u_n)$ では、クーポンに加えて元本が支払われるとすると

$$B(t) = E\left[\sum_{u_i > t} b_i \exp\left(-\int_t^{u_i} \{r(s) + (1-\delta)h(s)\}ds\right) + 1 \cdot e^{\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{G}_t\right], \tag{17}$$

で計算される。よって、プロテクションの B 社からみた支払サイドのクレジット・デフォルト・スワップの現在価値 P_R は、デフォルト時点で確定した保証額 $1-\delta B(\tau-)$ をデフォルト期間までスポットレート過程で割引いたものの期待値として得られると考えられるので、

$$P_R = E\left[\exp\left(-\int_0^\tau r(s)ds\right)(1-\delta B(\tau-))\ 1_{\{\tau \le T\}}\right],$$

と表現することができる。スポットレート過程 $r(t)$ とハザード率過程 $h(t)$ は独立であるという仮定のもとで、以下でみるように P_R をハザード率過程を用いて表現することができる。

命題 4.1　スポットレート過程 $r(t)$ とハザード率過程 $h(t)$ は独立であるという仮定のもとでのプロテクションの支払サイドのクレジット・デフォルト・スワップの現在価値 P_R は

$$\begin{aligned} P_R = &\int_0^T (1-\delta \cdot Z(t,T)) E\left[h(t) e^{-\int_0^t h(s)ds}\right] Z(0,t)dt \\ &- \delta \sum_{i=1}^n b_i Z(0,u_i) \int_0^{T \wedge u_i} E\left[h(t) e^{-\int_0^t h(s)ds} E\left[e^{\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds} | \mathcal{G}_t\right]\right] dt, \end{aligned} \tag{18}$$

と書ける。

(証明) 次のように計算される。

$$\begin{aligned} P_R &= E\left[\exp\left(-\int_0^\tau r(s)ds\right)(1-\delta B(\tau-))\ 1_{\{\tau \le T\}}\right] \\ &= E\left[\int_0^T \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)(1-\delta B(t-))dN_t\right]. \end{aligned}$$

$B(t)$ は連続なので

$$= E\left[\int_0^T \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)(1-\delta B(t))dN_t\right].$$

命題 2.4 より

$$= (1-N_0) \cdot E\left[\int_0^T h(t)(1-\delta B(t)) \exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right) \cdot \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) dt\right].$$

$N_0 = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
&= E\left[\int_0^T h(t)(1-\delta B(t))\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)\cdot\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\cdot e^{-\int_0^t r(s)ds}dt\right] - E\left[\int_0^T h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\cdot e^{-\int_0^t r(s)ds}\delta B(t)dt\right].
\end{aligned}
$$

$h(t)$ と $r(t)$ は独立なので

$$
= \int_0^T E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right]Z(0,t)dt - \int_0^T E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\cdot e^{-\int_0^t r(s)ds}\delta B(t)\right]dt.
$$

(17) 式より

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right]Z(0,t)dt \\
&\quad -\delta\int_0^T E\Bigg[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\cdot e^{-\int_0^t r(s)ds}\times \\
&\qquad \times E\Bigg[\sum_{u_i>t} b_i\exp\left(-\int_t^{u_i}\{r(s)+(1-\delta)h(s)\}ds\right)+1\cdot e^{\int_t^T r(s)ds}|\mathcal{G}_t\Bigg]\Bigg]dt \\
&= \int_0^T E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right]Z(0,t)dt \\
&\quad -\delta\int_0^T E\left[\sum_{u_i>t} b_i h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}e^{-\int_0^t r(s)ds}e^{-\int_t^{u_i}\{r(s)+(1-\delta)h(s)\}ds}\right]dt \\
&\quad -\delta\int_0^T E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}e^{-\int_0^t r(s)ds}Z(t,T)\right]dt \\
&= \int_0^T E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right]Z(0,t)dt \\
&\quad -\delta\int_0^T \sum_{u_i>t} b_i E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}e^{-\int_0^{u_i} r(s)ds}e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}\right]dt \\
&\quad -\delta\int_0^T E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}e^{-\int_0^t r(s)ds}Z(t,T)\right]dt.
\end{aligned}
$$

$h(t)$ と $r(t)$ は独立なので

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right]Z(0,t)dt \\
&\quad -\delta\int_0^T \sum_{u_i>t} b_i E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}\right]Z(0,u_i)dt \\
&\quad -\delta\int_0^T E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right]Z(t,T)\cdot Z(0,t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_R &= \int_0^T (1-\delta\cdot Z(t,T))E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right] Z(0,t)dt \\
&\quad - \delta\int_0^T \sum_{u_i>t} b_i E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds} E\left[e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]\right] Z(0,u_i)dt \\
&= \int_0^T (1-\delta\cdot Z(t,T))E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right] Z(0,t)dt \\
&\quad - \delta\int_0^T \sum_{i=1}^n b_i E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds} E\left[e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]\right] Z(0,u_i)\ 1_{\{u_i>t\}}dt \\
&= \int_0^T (1-\delta\cdot Z(t,T))E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right] Z(0,t)dt \\
&\quad - \delta\sum_{i=1}^n b_i Z(0,u_i)\int_0^{T\wedge u_i} E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds} E\left[e^{\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]\right] dt.
\end{aligned}
$$

□

4.3 Vasicek タイプ・モデルのハザード率過程の適用

ハザード率過程に Vasicek タイプ・モデルのハザード率過程 (4) 式を仮定した場合のクレジット・デフォルト・スワップの価値評価を考えることにする。まず、受取サイドの現在価値 P_F は、(5) 式と (16) 式より、

$$
P_F = \sum_{i=1}^n p_i Z(0,t_i)\exp\left[\frac{1}{c}(e^{-ct_i}-1)\left(h_0 - m - \frac{\sigma^2}{4c^2}(e^{-ct_i}-3)\right) - t_i\left(m-\frac{\sigma^2}{2c^2}\right)\right],
$$

と表される。一方、支払サイドのデフォルト・スワップの現在価値 P_R については、(18) 式から

$$
E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right],
$$

と

$$
E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds} E\left[e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]\right],
$$

の二つの期待値の計算をする必要があることが分かる。まず、前者については、(6) 式より

$$
\begin{aligned}
E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right] &= -\frac{d}{dt}P[\tau>t] \\
&= \left\{e^{-ct}h_0 - (e^{-ct}-1)m - \frac{\sigma^2}{2c^2}(e^{-ct}-1)^2\right\} \\
&\qquad \times\exp\left[\frac{1}{c}(e^{-ct}-1)\left(h_0-m-\frac{\sigma^2}{4c^2}(e^{-ct}-3)\right) - t\left(m-\frac{\sigma^2}{2c^2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

となることが分かる。一方、後者については、期待値の中の条件付期待値の部分については

$$
\begin{aligned}
&E\left[e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]\\
&=\exp\Bigg[\frac{1}{c}\left\{(e^{-c(u_i-t)}-1)((1-\delta)(h(t)-m))-\frac{\sigma^2}{4c^2}(1-\delta)^2(e^{-c(u_i-t)}-3)\right\}\\
&\qquad-(u_i-t)\left\{(1-\delta)m-\frac{\sigma^2}{2c^2}(1-\delta)^2\right\}\Bigg]\\
&=\exp\Bigg[\frac{1}{c}(e^{-c(u_i-t)}-1)\left\{(1-\delta)(-m)-\frac{\sigma^2}{4c^2}(1-\delta)^2(e^{-c(u_i-t)}-3)\right\}\\
&\qquad-(u_i-t)\left\{(1-\delta)m-\frac{\sigma^2}{2c^2}(1-\delta)^2\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{c}(e^{-c(u_i-t)}-1)(1-\delta)h(t)\Bigg].
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\alpha(u_i-t)&=\frac{1}{c}(e^{-c(u_i-t)}-1)\left\{(1-\delta)m+\frac{\sigma^2}{4c^2}(1-\delta)^2(e^{-c(u_i-t)}-3)\right\}\\
&\qquad+(u_i-t)\left\{(1-\delta)m-\frac{\sigma^2}{2c^2}(1-\delta)^2\right\},\\
\beta(u_i-t)&=-\frac{1}{c}(e^{-c(u_i-t)}-1)(1-\delta),
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
E\left[e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]=\exp\Big(-\alpha(u_i-t)-\beta(u_i-t)h(t)\Big),
$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
&E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}E\left[e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]\right]\\
&=E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\cdot\exp\Big(-\alpha(u_i-t)-\beta(u_i-t)h(t)\Big)\right]\\
&=\exp(-\alpha(u_i-t))\cdot E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\cdot\exp\Big(-\beta(u_i-t)h(t)\Big)\right],
\end{aligned}
$$

と書ける。ここで β を定数とする。次のような式を考える:

$$
E\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)\exp\Big(-\beta h(t)\Big)\right].
$$

この式を時点 t と初期値 $h(0)=h_0$ の関数と考え、

$$
F(t,h_0)=E\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)\exp\Big(-\beta h(t)\Big)|h(0)=h_0\right],
$$

とする。$F(t,h_0)=\exp(-a(t)-b(t)h_0)$ と書けるためには、定理 3.1 より、$a(t),b(t)$ が次の連立微分方程式を満たす連続微分可能な関数である必要がある。

$$
\begin{cases}
a'(t)=-\frac{1}{2}\sigma^2b(t)^2+cmb(t),\\
b'(t)=-cb(t)+1,\\
a(0)=0,b(0)=\beta.
\end{cases}
$$

これは、命題 3.1 の証明において、$\mu=1, b(0)=\beta$ としたものである。よって命題の証明と同様にすると、まず、

$$b(t)=\frac{1}{c}(1-De^{-ct}),$$

を得る。ただし、

$$D=1-c\beta,$$

である。すると

$$a'(t)=-\frac{\sigma^2}{2c^2}(1-De^{-ct})^2+cm\cdot\frac{1}{c}(1-D^{-ct}),$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}
a(t)-a(0)&=-\frac{\sigma^2}{2c^2}\int_0^t(1-De^{-ct})^2ds+m\int_0^t(1-D^{-ct})ds,\\
a(t)&=-\frac{\sigma^2}{2c^2}\left[s+\frac{2D}{c}e^{-cs}-\frac{D^2}{2c}e^{-2cs}\right]_0^t+m\left[s+\frac{1}{c}De^{-cs}\right]_0^t\\
&=-\frac{\sigma^2}{2c^2}\left\{\left(t+\frac{2D}{c}e^{-ct}-\frac{D^2}{2c}e^{-2ct}\right)-\left(0+\frac{2D}{c}-\frac{D^2}{2c}\right)\right\}+m\left\{\left(t+\frac{1}{c}De^{-ct}\right)-\left(0+\frac{1}{c}D\right)\right\}\\
&=-\frac{\sigma^2}{2c^2}\left\{t-\frac{2D}{c}(1-e^{-ct})+\frac{D^2}{2c}(1-e^{-2ct})\right\}+m\left\{t-\frac{1}{c}D(1-e^{-ct})\right\},
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)h(t)\exp\Big(-\beta h(t)\Big)\right]\\
&\quad=-\frac{\partial}{\partial\beta}E\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)\exp\Big(-\beta h(t)\Big)\right]\\
&\quad=-\frac{\partial}{\partial\beta}\exp(-a(t)-b(t)h_0).\\
&\quad=\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}a(t)+\frac{\partial}{\partial\beta}b(t)h_0\right\}\exp(-a(t)-b(t)h_0).
\end{aligned}$$

ここで、$\frac{\partial}{\partial\beta}D=-c$ から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\beta}a(t)&=-\frac{\sigma^2}{2c^2}\left\{2(1-e^{-ct})-D(1-e^{-2ct})\right\}+m(1-e^{-ct}),\\
\frac{\partial}{\partial\beta}b(t)&=e^{-ct},
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right)h(t)\exp\Big(-\beta h(t)\Big)\right]\\
&\quad=\left[-\frac{\sigma^2}{2c^2}\left\{2(1-e^{-ct})-D(1-e^{-2ct})\right\}+m(1-e^{-ct})+e^{-ct}h_0\right]\\
&\qquad\times\exp\left[\frac{\sigma^2}{2c^2}\left\{t-\frac{2D}{c}(1-e^{-ct})+\frac{D^2}{2c}(1-e^{-2ct})\right\}-m\left\{t-\frac{1}{c}D(1-e^{-ct})\right\}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{c}(1-De^{-ct})h_0\right],
\end{aligned}$$

となる。ここまで β を定数としてきたが、実際は $\beta(u_i - t)$ であるので、上式の D を

$$\begin{aligned} D_i(t) &= 1 - c\beta(u_i - t) \\ &= 1 - (1 - e^{-c(u_i - t)})(1 - \delta) \\ &= (1 - \delta)e^{-c(u_i - t)} + \delta, \end{aligned}$$

で置き換える。

$$\begin{aligned} & E\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right) h(t) \exp\Big(-\beta h(t)\Big)\right] \\ &= \left[-\frac{\sigma^2}{2c^2}\left\{2(1 - e^{-ct}) - D_i(t)(1 - e^{-2ct})\right\} + m(1 - e^{-ct}) + e^{-ct}h_0\right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{\sigma^2}{2c^2}\left\{t - \frac{2D_i(t)}{c}(1 - e^{-ct}) + \frac{D_i^2(t)}{2c}(1 - e^{-2ct})\right\} - m\left\{t - \frac{1}{c}D_i(t)(1 - e^{-ct})\right\}\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{1}{c}(1 - D_i(t)e^{-ct})h_0\right] \\ &= \left[(1 - e^{-ct})\left\{m - \frac{\sigma^2}{c^2} + \frac{\sigma^2}{2c^2}D_i(t)(1 + e^{-ct})\right\} + e^{-ct}h_0\right] \\ &\quad \times \exp\left[-\left(m - \frac{\sigma^2}{2c^2}\right)t - \frac{1}{c}D_i(t)(1 - e^{-ct})\left(\frac{\sigma^2}{c^2} - m\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\sigma^2}{4c^3}D_i^2(t)(1 - e^{-2ct}) - \frac{1}{c}(1 - D_i(t)e^{-ct})h_0\right]. \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} & \exp(-\alpha(u_i - t)) \\ &= \exp\left[-\frac{1}{c}(e^{-c(u_i - t)} - 1)\left\{(1 - \delta)m + \frac{\sigma^2}{4c^2}(1 - \delta)^2(e^{-c(u_i - t)} - 3)\right\}\right. \\ &\qquad \left. - (u_i - t)\left\{(1 - \delta)m - \frac{\sigma^2}{2c^2}(1 - \delta)^2\right\}\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{c}(1 - e^{-c(u_i - t)})(1 - \delta)\left\{m + \frac{\sigma^2}{4c^2}(1 - \delta)(e^{-c(u_i - t)} - 3)\right\}\right. \\ &\qquad \left. - (u_i - t)(1 - \delta)\left\{m - \frac{\sigma^2}{2c^2}(1 - \delta)\right\}\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{c}\{(1 - \delta) - (1 - \delta)e^{-c(u_i - t)}\}\left\{m + \frac{\sigma^2}{4c^2}\left\{(1 - \delta)e^{-c(u_i - t)} - 3(1 - \delta)\right\}\right\}\right. \\ &\qquad \left. - (u_i - t)(1 - \delta)\left\{m - \frac{\sigma^2}{2c^2}(1 - \delta)\right\}\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{c}\{(1 - \delta) - D_i(t) + \delta\}\left\{m + \frac{\sigma^2}{4c^2}\left\{D_i(t) - \delta - 3 + 3\delta\right\}\right\}\right. \\ &\qquad \left. - (u_i - t)(1 - \delta)\left\{m - \frac{\sigma^2}{2c^2}(1 - \delta)\right\}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{c}(1 - D_i(t))\left\{-m - \frac{\sigma^2}{4c^2}D_i(t) - (2\delta - 3)\frac{\sigma^2}{4c^2}\right\}\right. \\ &\qquad \left. - (u_i - t)(1 - \delta)\left\{m - \frac{\sigma^2}{2c^2}(1 - \delta)\right\}\right]. \end{aligned}$$

命題 4.2　スポットレート過程 $r(t)$ とハザード率過程 $h(t)$ は独立であるという仮定のもとで、Vasicek タイプ・モデルのハザード率過程を適用したプロテクションの支払サイドのクレジット・デフォルト・スワップの現在価値 P_R は

$$
\begin{aligned}
P_R &= \int_0^T (1-\delta\cdot Z(t,T))E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right]Z(0,t)dt \\
&\quad -\delta\sum_{i=1}^n b_i Z(0,u_i)\int_0^{T\wedge u_i} E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}E\left[e^{\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]\right]dt \\
&= \int_0^T (1-\delta\cdot Z(t,T))\xi(t)Z(0,t)dt-\delta\sum_{i=1}^n b_i Z(0,u_i)\int_0^{T\wedge u_i}\nu(t)dt,
\end{aligned}
$$

と書ける。ただし、

$$
\begin{aligned}
\xi(t) &= \left\{e^{-ct}h_0-(e^{-ct}-1)m-\frac{\sigma^2}{2c^2}(e^{-ct}-1)^2\right\} \\
&\quad \times\exp\left[\frac{1}{c}(e^{-ct}-1)\left(h_0-m-\frac{\sigma^2}{4c^2}(e^{-ct}-3)\right)-t\left(m-\frac{\sigma^2}{2c^2}\right)\right], \\
\nu(t) &= \exp\Bigg[-\frac{1}{c}(1-D_i(t)\left\{-m-\frac{\sigma^2}{4c^2}D_i(t)-(2\delta-3)\frac{\sigma^2}{4c^2}\right\} \\
&\qquad -(u_i-t)(1-\delta)\left\{m-\frac{\sigma^2}{2c^2}(1-\delta)\right\}\Bigg] \\
&\qquad \times\left[(1-e^{-ct})\left\{m-\frac{\sigma^2}{c^2}+\frac{\sigma^2}{2c^2}D_i(t)(1+e^{-ct})\right\}+e^{-ct}h_0\right] \\
&\qquad \times\exp\Bigg[-\left(m-\frac{\sigma^2}{2c^2}\right)t-\frac{1}{c}D_i(t)(1-e^{-ct})\left(\frac{\sigma^2}{c^2}-m\right) \\
&\qquad\qquad +\frac{\sigma^2}{4c^3}D_i^2(t)(1-e^{-2ct})-\frac{1}{c}(1-D_i(t)e^{-ct})h_0\Bigg].
\end{aligned}
$$

4.4　CIR タイプ・モデルのハザード率過程の適用

次にハザード率過程に CIR タイプ・モデルのハザード率過程 (8) 式を仮定した場合のクレジット・デフォルト・スワップの価値評価を考えることにする。まず、受取サイドの現在価値 P_F は、(8) 式と (16) 式より、

$$
P_F=\sum_{i=1}^n p_i Z(0,t_i)\exp(-cm\phi_{0,1}(t)-\psi_{0,1}(t)h_0).
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\phi_{0,1}(t) &= -\frac{2}{\sigma^2}\log\frac{2\gamma e^{\frac{c+\gamma}{2}t}}{\gamma-c+e^{\gamma t}(\gamma+c)}, \\
\psi_{0,1}(t) &= \frac{2(e^{\gamma t}-1)}{\gamma-c+e^{\gamma t}(\gamma+c)},\qquad \gamma=\sqrt{c^2+2\sigma^2},
\end{aligned}
$$

と表される。一方、支払サイドのデフォルト・スワップの現在価値 P_R については、Vasicek の場合と同様に

$$
E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right],
$$

と

$$E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}E\left[e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]\right],$$

の二つの期待値の計算をする必要があることが分かる。まず、前者については、(9) 式より

$$\begin{aligned}E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right] &= -\frac{d}{dt}P[\tau > t] \\ &= -(X(t)+Y(t))\cdot P_{h_0}[\tau > t].\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}X(t) &= \left[\frac{2cm}{\sigma^2}\left\{\frac{c+\gamma}{2}-\frac{\gamma(\gamma+c)e^{\gamma t}}{\gamma-c+e^{\gamma t}(\gamma+c)}\right\}\right], \\ Y(t) &= -\frac{2h_0\gamma e^{\gamma t}}{\gamma-c+e^{\gamma t}(\gamma+c)}+\frac{2h_0(e^{\gamma t}-1)\gamma e^{\gamma t}(\gamma+c)}{(\gamma-c+e^{\gamma t}(\gamma+c))^2},\end{aligned}$$

となることが分かる。一方、後者については、期待値の中の条件付期待値の部分については (11) 式より

$$\begin{aligned}&E\left[e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right] \\ &\qquad = \exp(-\alpha(u_i-t)-\beta(u_i-t)h(t)),\end{aligned}$$

と書ける。ただし、

$$\begin{aligned}\alpha(u_i-t) &= -\frac{2cm}{\sigma^2}\log\frac{2\gamma e^{\frac{c+\gamma}{2}(u_i-t)}}{\gamma-c+e^{\gamma(u_i-t)}(\gamma+c)}, \\ \beta(u_i-t) &= \frac{2(1-\delta)(e^{\gamma(u_i-t)}-1)}{\gamma-c+e^{\gamma(u_i-t)}(\gamma+c)}, \qquad \gamma=\sqrt{c^2+2(1-\delta)\sigma^2}.\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}&E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}E\left[e^{-\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]\right] \\ &\quad = E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\cdot\exp\Big(-\alpha(u_i-t)-\beta(u_i-t)h(t)\Big)\right] \\ &\quad = \exp(-\alpha(u_i-t))\cdot E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\cdot\exp\Big(-\beta(u_i-t)h(t)\Big)\right],\end{aligned}$$

と書ける。ここで、$\beta(u_i-t)=\lambda$ と考えると

$$\begin{aligned}&E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\cdot\exp\Big(-\lambda h(t)\Big)\right] \\ &\qquad = -\frac{\partial}{\partial\lambda}E\left[e^{-\int_0^t h(s)ds}\cdot\exp\Big(-\lambda h(t)\Big)\right].\end{aligned}$$

(10) 式により

$$\begin{aligned}&= -\frac{\partial}{\partial\lambda}\exp(-cm\phi_{\lambda,1}(t)-\psi_{\lambda,1}h_0) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\phi_{\lambda,1}(t)cm+\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi_{\lambda,1}(t)h_0\right)\exp(-cm\phi_{\lambda,1}(t)-\psi_{\lambda,1}h_0),\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$
\begin{aligned}
\phi_{\lambda,1}(t) &= -\frac{2}{\sigma^2}\left\{\log\frac{2\gamma e^{\frac{c+\gamma}{2}t}}{e^{\gamma t}(\sigma^2\lambda+c+\gamma)-\sigma^2\lambda+\gamma-c}\right\},\\
\psi_{\lambda,1}(t) &= \frac{\lambda\{c+\gamma+(\gamma-c)e^{\gamma t}\}+2(e^{\gamma t}-1)}{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1)+\gamma-c+e^{\gamma t}(c+\gamma)},\\
\gamma &= \sqrt{c^2+2\sigma^2},
\end{aligned}
$$

である。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}\phi_{\lambda,1}(t) &= \left(\frac{2}{\sigma^2}\left\{\log(2\gamma e^{\frac{\gamma+c}{2}t})-\log(\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1)+\gamma-c+e^{\gamma t}(\gamma c))\right\}\right)'\\
&= -\frac{2}{\sigma^2}\left\{-\frac{\sigma^2(e^{\gamma t}-1)}{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1)+\gamma-c+e^{\gamma t}(\gamma+c)}\right\}\\
&= \frac{2(e^{\gamma t}-1)}{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1)+\gamma-c+e^{\gamma t}(\gamma+c)}.
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi_{\lambda,1}(t) &= \{\gamma+c+e^{\gamma t}(\gamma-c)\}\{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1)+\gamma-c+e^{\gamma t}(\gamma+c)\}^{-1}\\
&\quad+\{\lambda(\gamma+c+e^{\gamma t}(\gamma-c))+2(e^{\gamma t}-1)\}\\
&\qquad\times\{(-1)\cdot\sigma^2(e^{\gamma t}-1)\cdot[\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1)+\gamma-c+e^{\gamma t}(\gamma c)]^{-2}\}.
\end{aligned}
$$

命題 4.3　スポットレート過程 $r(t)$ とハザード率過程 $h(t)$ は独立であるという仮定のもとで、CIR タイプ・モデルのハザード率過程を適用したプロテクションの支払サイドのクレジット・デフォルト・スワップの現在価値 P_R は

$$
\begin{aligned}
&P_R\\
&= \int_0^T(1-\delta\cdot Z(t,T))E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}\right]Z(0,t)dt\\
&\quad-\delta\sum_{i=1}^n b_iZ(0,u_i)\int_0^{T\wedge u_i}E\left[h(t)e^{-\int_0^t h(s)ds}E\left[e^{\int_t^{u_i}\{(1-\delta)h(s)\}ds}|\mathcal{G}_t\right]\right]dt\\
&= \int_0^T(1-\delta\cdot Z(t,T))[-(X(t)+Y(t))\cdot P_{h_0}[\tau>t]]Z(0,t)dt\\
&\quad-\delta\sum_{i=1}^n b_iZ(0,u_i)\int_0^{T\wedge u_i}\left[\exp(-\alpha(u_i-t))\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\phi_{\lambda,1}(t)cm+\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi_{\lambda,1}(t)h_0\right)\exp(-cm\phi_{\lambda,1}(t)-\psi_{\lambda,1}h_0)\right]dt,
\end{aligned}
$$

となる。ただし、$\lambda=\beta(u_i-t)$.

5　Hawkes 過程

5.1　Hawkes 過程

$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq0},P)$ をフィルトレーション付の確率空間とする。フィルトレーション $\mathcal{F}_t$ は後で説明するデフォルト数過程 N と累積損失過程 L を適合過程とするフィルトレーションとする。デフォルトが起きる時

刻を非負値確率変数 $0 < \tau_1 < \tau_2 \cdots$ で表す。特に $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$ 停止時刻であるとみなしておく。すなわち、デフォルトしたかどうかは、得られる情報の一部であると仮定する。τ_n におけるデフォルトによって発生した損失を確率変数 $l_n \in \mathcal{F}_{\tau_n}$ と定義する。ただし、l_n の密度関数を ν とする。ここで、デフォルト数過程 N を

$$N_t := \sum_{n\geq 1} 1_{\{\tau_n \leq t\}},$$

と定義する。ただし 1 は定義関数とする。累積損失過程 L を

$$L_t := \sum_{n\geq 1} l_n \cdot 1_{\{\tau_n \leq t\}},$$

と定義する。$\int e^{\omega z} d\nu(z)$ が存在し有界であり、その微分 $\int z e^{\omega z} d\nu(z)$ も有界であると仮定する。ただし、ω は複素数とする。ハザード率過程 $h(t)$ を次の確率微分方程式に従う過程とする。

$$dh(t) = k(c - h(t))dt + \eta dL_t. \tag{19}$$

式 (20) の解は

$$h(t) = u(t) + \int_0^t \eta e^{-k(t-s)} dL_s, \tag{20}$$

で与える。ただし $u(t) = c + e^{-kt}(h(0) - c), c > 0, h(0) > 0$ であり、$k \geq 0, \eta \geq 0$ である。$x(t) = c - h(t)$ とおくと

$$dx(t) = -dh(t) = -kx(t)dt - \eta dL_t.$$

$y(t) = e^{kt}x(t)$ とおくと

$$dy(t) = ke^{kt}x(t)dt + e^{kt}dx(t) = -\eta e^{kt} dL_t.$$

両辺を積分すると

$$y(t) = y(0) - \eta \int_0^t e^{kt} dL_t.$$

置き換えていたものを元に戻すと

$$h(t) = u(t) + \int_0^t \eta e^{-k(t-s)} dL_s,$$

を得る。図 47 は (20) 式のサンプルパスを示したものである。また、図 48 はそのサンプルパスにおける累積損失過程である。パラメータは、$\eta = 1.0, k = 2.0, c = h(0) = 0.7$ で損失は $\{0.2, 0.4, 1.0\}$ の値を一様の確率でとるものとする。図 47 を見ると合計で 10 回ジャンプしているのが分かるが、$1, 5, 6$ 回目において大きくジャンプしている。そのときの損失の大きさを見るとその他の時点よりも大きくなっているのが分かる。これは損失が大きい程、ハザード率がより上昇することを表している。この損失の大きさとハザード率の関係は実際の市場でも観察されていることである。また、5 回目のジャンプ以降立て続けにデフォルトが起こっている。連鎖デフォルトをうまく表現されているのが分かる。デフォルト数過程 N と累積損失過程 L がジャンプする時刻は $h(t)$ に依存するわけだが、2 次元過程 $J = (L, N)$ を Hawkes 過程と呼んでいる。

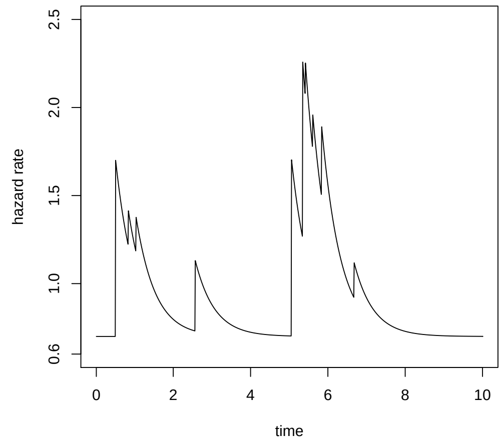


図 47　ハザード率過程のサンプルパス

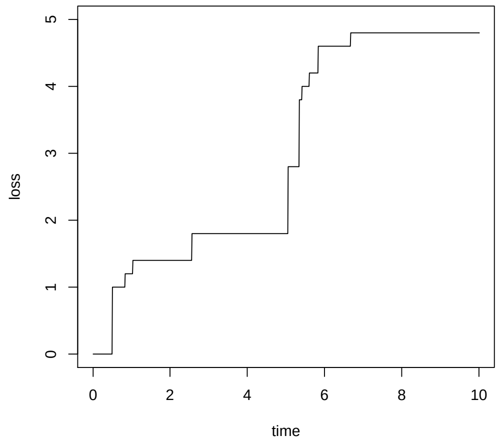


図 48　サンプルパスにおける累積損失過程

命題 5.1　(Errais et al. [9] : Proposition2.1) $Y = (h, J)^\top$ とする。任意の t に対して、

$$E\left[\int_0^t |(\mathcal{D}g)(s, h(s), J_s) - k(c - h(t))g_h(s, h(s), J_s)|ds\right] < \infty,$$

であるとき、任意の $t \leq T$ に対して

$$E[g(T, h(T), J_T)|\mathcal{F}_t] = g(t, h(t), \mathrm{J}_t) + E\left[\int_t^T (\mathcal{D}g)(s, h(s), J_s)ds|\mathcal{F}_t\right], \tag{21}$$

となる。ただし、$g : \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ は h に関して微分可能で

$$(\mathcal{D}g)(\cdot, h, x) = k(c - h)g_h(\cdot, h, x) + h\int [g(\cdot, h + \eta z, x + (z, 1)^\top) - g(\cdot, h, x)]d\nu(z), \tag{22}$$

である。

(証明) Y は有界変動を持つ右連続な過程であることに注意する。

$$dg(t, h(t), J_t) = g_h(t, h(t), J_t)dh(t)^c + \{g(t, h(t), J_t) - g(t-, h(t-), J_{t-})\}dN_t.$$

ただし、h^c はハザード率過程の連続な部分である。両辺を t から T で積分すると

$$g(t, h(t), J_t) - g(0, h(0), J_0) = \int_t^T g_h(s, h(s), J_s)k(c - h(s))ds + \sum_{t<s\leq T} \{g(s, h(s), J_s) - g(s-, h(s-), J_{s-})\},$$

となる。右辺の第 2 項目に関して、

$$\sum_{t<s\leq T} \{g(s, h(s), J_s) - g(s-, h(s-), J_{s-})\} = \int_t^T \{g(s, h(s), J_s) - g(s-, h(s-), J_{s-})\}dN_s.$$

ここで $\{g(t,h(t),J_t)-g(t-,h(t-),J_{t-})\}dM_t = \{g(t,h(t),J_t)-g(t-,h(t-),J_{t-})\}dN_t - \int\{g(s,h(s)+\eta z, J_s+(z,1)^\top)-g(s,h(s),J_s)\}d\nu(z)\cdot\int_0^t h(s)ds$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t<s\leq T}\{g(s,h(s),J_s)-g(s-,h(s-),J_{s-})\}\\
&\quad=\int_t^T\{g(s,h(s),J_s)-g(s-,h(s-),J_{s-})\}dM_s\\
&\qquad+\int_t^T h(s)\int\{g(s,h(s)+\eta z,J_s+(z,1)^\top)-g(s,h(s),J_s)\}d\nu(z)ds.
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
E[g(T,h(T),J_T)|\mathcal{F}_t] = E\Big[&g(t,h(t),J_t)+\int_t^T g_h(s,h(s),J_s)k(c-h(s))ds\\
&+\int_t^T\{g(s,h(s),J_s)-g(s-,h(s-),J_{s-})\}dM_s\\
&+\int_t^T h(s)\int\{g(s,h(s)+\eta z,J_s+(z,1)^\top)-g(s,h(s),J_s)\}d\nu(z)ds\Big].
\end{aligned}
$$

(22) 式より

$$
\begin{aligned}
= E\Big[&g(t,h(t),J_t)+\int_t^T(\mathcal{D}g)(s,h(s),J_s)ds\\
&+\int_t^T\{g(s,h(s),J_s)-g(s-,h(s-),J_{s-})\}dM_s\Big|\mathcal{F}_t\Big].
\end{aligned}
$$

M_t はマルチンゲールであるため、

$$
= g(t,h(t),J_t)+E\Big[\int_t^T(\mathcal{D}g)(s,h(s),J_s)ds|\mathcal{F}_t\Big],
$$

となる。 □

$g(t,h(t),J_t)=h(t)$ とすると

$$
\begin{aligned}
E[(\mathcal{D}g)(s,h(s),J_s)] &= E[k(c-h(s))]+E\left[h(s)\int\eta z d\nu(z)\right]\\
&= kc-kE[h(s)]+\eta\int zd\nu(z)\cdot E[h(s)]\\
&= kc+\mu E[h(s)],
\end{aligned}
\tag{23}
$$

となる。ただし、$\mu=\eta l-k, l=\int zd\nu(z)$ である。l は期待損失を表していることになる。(21) 式より

$$
\begin{aligned}
E[h(t)] &= E[g(t,h(t),J_t)|\mathcal{F}_0]\\
&= g(0,h(0),J_0)+E\left[\int_0^t(\mathcal{D}g)(s,h(s),J_s)ds|\mathcal{F}_0\right].
\end{aligned}
$$

(23) 式より

$$
= h(0)+kct+\mu\int_0^t E[h(s)]ds. \tag{24}
$$

$dE[h(t)] = (kc + \mu E[h(t)])dt, E[h(0)] = h(0)$ であると考え、微分方程式を解くと

$$E[h(t)] = \left(\frac{kc}{\mu} + h(0)\right) e^{\mu t} - \frac{kc}{\mu}, \tag{25}$$

を得る。(25) 式より、$\mu > 0$ のときはハザード率過程の平均は時間と共に指数的に増加する。第 1 項の指数部分が大きくなるためである。$\mu \to 0$ の場合は、(24) 式よりハザード率過程の平均は $h(0) + kct$ に収束し、時間と共に線形的に増加する。$\mu < 0$ の場合は、$\mu < 0$ のときとは逆に指数の部分が時間と共に小さくなり、第 1 項目が 0 に近づいていく。よって、$\lim_{t\to\infty} E[h(t)] = -(kc)/\mu > 0$ となる。図 49 と図 50 は μ がプラスの場合

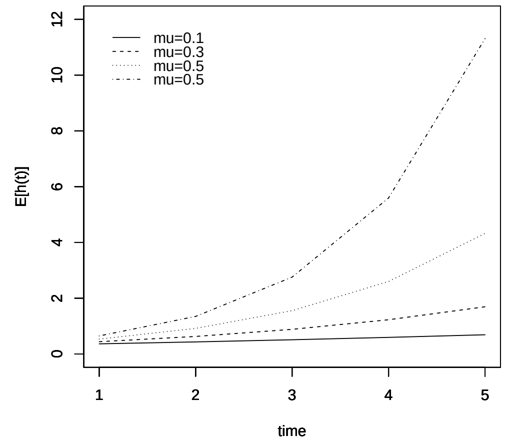


図 49　$\mu > 0$ の場合のハザード率過程の平均

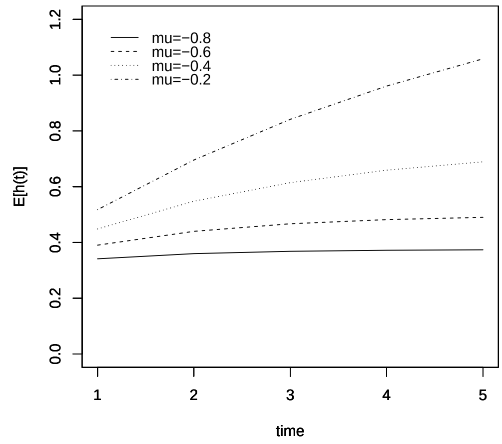


図 50　$\mu < 0$ の場合のハザード率過程の平均

とマイナスの場合に分けてグラフにしたものである。パラメータ設定は、図 49 では $k = 0.1, c = 0.3, h(0) = 0.3, \eta = 1.0, l = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$、図 50 では $k = 1.0, c = 0.3, h(0) = 0.3, \eta = 1.0, l = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ である。$\mu > 0$ であるときというのは、ジャンプし上昇する力 ηl のほうが平均に回帰する力 k よりも強いことを表している。回帰する力が弱いとハザード率が高い時間が長く続く、その分次のデフォルトが起こる可能性が高まる。次々とデフォルトを重ねることにより、指数的な上昇がみられると考えられる。一方、$\mu < 0$ であるときというのは、回帰する力のほうがジャンプによって上昇する力よりも強い。その差が大きければハザード率の平均は緩やかに時間と共に上昇する。しかし、その差が小さくなればなるほど、上昇するスピードが大きくなる。これらの特徴は、損失が大きい状況のなかでは次にデフォルトする可能性が高い水準になるという実際の市場の特徴をうまく表現しているようである。図 51 と図 52 は、初期値を変化させた場合のハザード率過程の平均を示している。パラメータ設定は、図 51 では $k = 0.1, c = 0.3, \eta = 1.0, l = 0.4$、図 52 では $k = 0.1, c = 0.3, \eta = 1.0, l = 0.4$ である。図 51 では、ハザード過程の初期値の違いが時間が経つにつれて大きくなっているのが分かる。一見デフォルトが起こっていなくても、デフォルトの可能性が高まっている状況下で一度どこかでデフォルトが発生した場合、次々とデフォルトする事態が生じることを表している。その被害の大きさは、デフォルトが始まるハザード率の水準が高いほど大きいと考えられる。一方、図 52 では回帰する力が大きいため時間と共にある水準に収束していっているのが分かる。　続いて、$g(t, h(t), J_t) = h^2(t)$

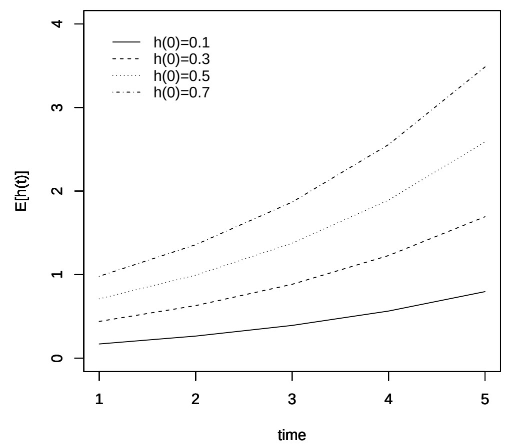


図 51　$\mu > 0$ の場合のハザード率過程の平均と初期値

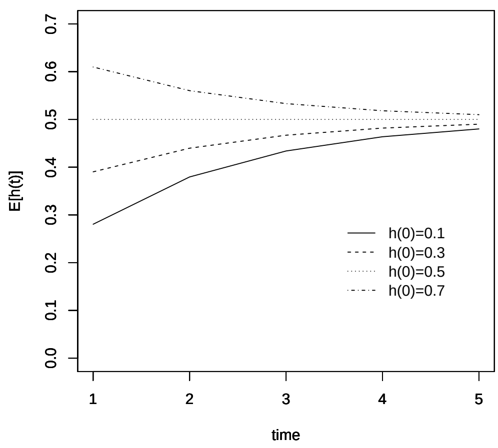


図 52　$\mu < 0$ の場合のハザード率過程の平均と初期値

とすると、

$$\begin{aligned}
E[(\mathcal{D}g)(t,h(t),J_t)] &= E[2h(t)k(c-h(t))] + E\left[h(t)\int [(h(t)+\eta z)^2 - h(t)^2] d\nu(z)\right] \\
&= 2kcE[h(t)] - 2kE[h^2(t)] + \eta^2 \int z^2 d\nu(z)\cdot E[h(t)] + 2\eta \int z d\nu(z)\cdot E[h^2(t)].
\end{aligned}$$

$E[h(t)] = m(t), E[h^2(t)] = v(t)$ とおくと

$$= \left(2kc + \eta^2 \int z^2 d\nu(z)\right) m(t) + 2\left(\eta \int z d\nu(z) - k\right) v(t).$$

(21) 式より

$$\begin{aligned}
E[h^2(t)] &= E[g(t,h(t),J_t)|\mathcal{F}_0] \\
&= g(0,h(0),J_0) + E\left[\int_0^t (\mathcal{D}g)(s,h(s),J_s)ds|\mathcal{F}_0\right] \\
&= h^2(0) + \int_0^t \left(2kc + \eta^2 \int z^2 d\nu(z)\right) m(s)ds + 2\mu \int_0^t v(s)ds.
\end{aligned}$$

$dv(t) = \{\left(2kc + \eta^2 \int z^2 d\nu(z)\right) m(t) + 2\mu v(t)\}dt$ であり、$\rho = 2kc + \eta^2 \int z^2 d\nu(z)$ とすると $dv(t) = (\rho m(t) + 2\mu v(t))dt$ となる。$E[h^2(0)] = h^2(0)$ より

$$\begin{aligned}
e^{-2\mu t} v(t) &= \rho \int_0^t e^{-2\mu s} m(s)ds + h^2(0) \\
&= \rho \int_0^t e^{-2\mu s}\left\{\left(\frac{kc}{\mu} + h(0)\right) e^{\mu s} - \frac{kc}{\mu}\right\} ds + h^2(0) \\
&= \rho \int_0^t \left[\left(\frac{kc}{\mu} + h(0)\right) e^{-\mu s} - \frac{kc}{\mu} e^{-2\mu s}\right] ds + h^2(0) \\
&= \rho \left[-\frac{1}{\mu}\left(\frac{kc}{\mu} + h(0)\right)(e^{-\mu t} - 1) + \frac{kc}{2\mu^2}(e^{-2\mu t} - 1)\right] + h^2(0),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \rho\left[-\frac{1}{\mu}\left(\frac{kc}{\mu}+h(0)\right)(e^{\mu t}-e^{2\mu t})+\frac{kc}{2\mu^2}(1-e^{2\mu t})\right]+e^{2\mu t}h^2(0)\\
&= \frac{1}{\mu^2}\rho\left[(kc+\mu h(0))(e^{2\mu t}-e^{\mu t})+\frac{kc}{2}(1-e^{2\mu t})\right]+e^{2\mu t}h^2(0)\\
&= \frac{1}{2\mu^2}\rho\left[kc(e^{2\mu t}-2e^{\mu t}+1)+2\mu h(0)(e^{2\mu t}-e^{\mu t})\right]+e^{2\mu t}h^2(0)\\
&= \frac{1}{2\mu^2}\left[kc\rho(e^{2\mu t}-2e^{\mu t}+1)+2\mu h(0)e^{\mu t}\rho(e^{\mu t}-1)+2\mu^2e^{2\mu t}h^2(0)\right]\\
&= \frac{1}{2\mu^2}\left[kc\rho(e^{2\mu t}-2e^{\mu t}+1)+2\mu h(0)e^{\mu t}\{\rho(e^{\mu t}-1)+\mu e^{\mu t}h(0)\}\right],
\end{aligned}
$$

を得る。つまり

$$
\begin{aligned}
Var(h(t)) &= v(t)-m^2(t)\\
&= \frac{1}{2\mu^2}\left[kc\rho(e^{2\mu t}-2e^{\mu t}+1)+2\mu h(0)e^{\mu t}\{\rho(e^{\mu t}-1)+\mu e^{\mu t}h(0)\}\right]\\
&\quad -\left\{\left(\frac{kc}{\mu}+h(0)\right)e^{\mu t}-\frac{kc}{\mu}\right\}^2.
\end{aligned}
$$

$\mu<0$ のときの長期的分散は

$$
\lim_{t\to\infty} Var(h(t)) = \frac{kc\eta^2}{2\mu^2}\int z^2 d\nu(z),
$$

となる。$\mu>0$ のときは式より時間と共に指数的に上昇することが分かる。

命題 5.2 (Errais et al. [9] : Proposition2.2) 過程 $J=(L,N)^\top$ は次の関係を満たす。

$$
E[\exp(u\cdot J_T)|\mathcal{F}_t] = \exp(a(t)+b(t)h(t)+u\cdot J_t). \tag{26}
$$

ただし、$t\le T, u\in\mathbb{C}_-^2$ であり、$a(t)=a(u,t,T), b(t)=b(u,t,T)$ は以下の連立微分方程式を満たす。

$$
\begin{cases}
\partial_t b(t) = kb(t)+1-\theta(\eta b(t)+u\cdot(1,0)^\top)\exp(u\cdot(0,1)^\top),\\
\partial_t a(t) = -kcb(t).
\end{cases} \tag{27}
$$

終端条件は $a(T)=b(T)=0$ である。$\mathbb{C}_-^2$ は非正の実部を持つ複素数 $\mathbb{C}_-$ のペアである。また、θ は次のような関数である。

$$
\theta(\omega) = \int e^{\omega z}d\nu(z), \qquad \omega\in\mathbb{C}.
$$

(証明) 固定した $T, u\in\mathbb{C}_-^2$ に対して、関数 $f:[0,T]\times\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}_+\times\mathbb{N})\to\mathbb{C}$ を

$$
f(t,h,x) = E[\exp(u\cdot J_T)|h(t)=h, J_t=x],
$$

と定義する。このとき、

$$
E[\exp(u\cdot J_T)|\mathcal{F}_t] = f(t,h,x)
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
df(t,h(t),J_t) &= f_t(t,h(t),J_t)dt + f_h(t,h(t),J_t)dh^c(t) + [f(t,h(t),J_t) - f(t-,h(t-),J_{t-})]dN_t \\
&= f_t(t,h(t),J_t)dt + f_h(t,h(t),J_t)k(c-h(t))dt + [f(t,h(t),J_t) - f(t-,h(t-),J_{t-})]dN_t \\
&= f_t(t,h(t),J_t)dt + f_h(t,h(t),J_t)k(c-h(t))dt \\
&\quad + [f(t,h(t),J_t) - f(t-,h(t-),J_{t-})]dM_t \\
&\quad + \int [f(t,h(t)+\eta z, J_t + (z,1)^\top) - f(t,h(t),J_t)]d\nu(z)h(t)dt \\
&= f_t(t,h(t),J_t)dt + (\mathcal{D}f)(t,h(t),J_t)dt + [f(t,h(t),J_t) - f(t-,h(t-),J_{t-})]dM_t.
\end{aligned}
$$

$(f(t,h(t),J_t))_{t\le T}$ がマルチンゲールであるためには、第 1,2 項目の dt の係数が 0 になる必要があり、終端条件は $f(T,h(T),J_T) = \exp(u\cdot J_T)$ である。つまり

$$
\begin{cases}
f_t(t,h(t),J_t) + (\mathcal{D}f)(t,h(t),J_t) = 0, \\
f(T,h(T),J_T) = \exp(u\cdot J_T),
\end{cases}
\tag{28}
$$

を満たす必要がある。$w(t,h(t),J_t,u) = f(t,h(t),J_t)e^{-u\cdot J_t}, \bar{z} = (z,1)^\top$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f_t(t,h(t),J_t) + (\mathcal{D}f)(t,h(t),J_t) &= f_t(t,h(t),J_t) + f_h(t,h(t),J_t)k(c-h(t)) \\
&\quad + h(t)\int [f(t,h(t)+\eta z, J_t + (z,1)^\top) - f(t,h(t),J_t)\} d\nu(z) \\
&= e^{u\cdot J_t}w_t(t,h(t),J_t,u) + e^{u\cdot J_t}w_h(t,h(t),J_t,u)k(c-h(t)) \\
&\quad + h(t)\int [e^{u\cdot J_t}\cdot e^{u\cdot\bar{z}}w(t,h(t)+\eta z, J_t+\bar{z},u) - e^{u\cdot J_t}w(t,h(t),J_t,u)]d\nu(z) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
&e^{u\cdot J_t}w_t(t,h(t),J_t,u) + e^{u\cdot J_t}w_h(t,h(t),J_t,u)k(c-h(t)) \\
&\quad + h(t)\int [e^{u\cdot J_t}\cdot e^{u\cdot\bar{z}}w(t,h(t)+\eta z, J_t+\bar{z},u) - e^{u\cdot J_t}w(t,h(t),J_t,u)]d\nu(z) = 0.
\end{aligned}
$$

両辺を $e^{u\cdot J_t}$ で割り、整理すると

$$
\begin{aligned}
&w_t(t,h(t),J_t,u) + w_h(t,h(t),J_t,u)k(c-h(t)) \\
&\quad + h(t)\int [w(t,h(t)+\eta z, J_t+\bar{z},u) - w(t,h(t),J_t,u)]e^{u\cdot\bar{z}}d\nu(z) \\
&\quad + h(t)\int [(e^{u\cdot\bar{z}}-1)w(t,h(t),J_t,u)]d\nu(z) = 0.
\end{aligned}
$$

つまり、(28) 式は以下のように書き換えられる。

$$
\begin{cases}
w_t(t,h(t),J_t,u) + w_h(t,h(t),J_t,u)k(c-h(t)) \\
\qquad +h(t)\int [w(t,h(t)+\eta z, J_t+\bar{z},u) - w(t,h(t),J_t,u)]e^{u\cdot\bar{z}}d\nu(z) \\
\qquad +h(t)\int [(e^{u\cdot\bar{z}}-1)w(t,h(t),J_t,u)]d\nu(z) = 0, \\
w(T,h(T),J_T,u) = 1.
\end{cases}
\tag{29}
$$

$w(t,h(t),J_t,u) = \exp(a(u,t,T) + b(u,t,T)h(t))$ とおくと、$w_t(t,h(t),J_t,u) = \{\partial_t a(u,t,T) + \partial_t b(u,t,T)h(t)\}\exp(a(u,t,T) + b(u,t,T)h(t)), w_h(t,h(t),J_t,u) = b(u,t,T)\exp(a(u,t,T) + b(u,t,T)h(t))$

となり、(29) 式の第 1 式に関して、

$$
\begin{aligned}
&\{\partial_t a(u,t,T) + \partial_t b(u,t,T)h(t)\}e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)} + b(u,t,T)e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)}k(c-h(t)) \\
&\qquad + h(t)\int [e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)(h(t)+\eta z)} - e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)}]e^{u\cdot\bar{z}}d\nu(z) \\
&\qquad + h(t)\int [(e^{u\cdot\bar{z}}-1)e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)}]d\nu(z) = 0.
\end{aligned}
$$

両辺を $\exp(a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t))$ で割ると

$$
\begin{aligned}
&\partial_t a(u,t,T) + \partial_t b(u,t,T)h(t) + b(u,t,T)k(c-h(t)) \\
&\qquad\qquad + h(t)\int (e^{b(u,t,T)\eta z}-1)e^{u\cdot\bar{z}}d\nu(z) + h(t)\int (e^{u\cdot\bar{z}}-1)d\nu(z) = 0,
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
&\partial_t a(u,t,T) + \partial_t b(u,t,T)h(t) = -b(u,t,T)kc \\
&\qquad\qquad\qquad + h(t)\left\{b(u,t,T)k - \int (e^{b(u,t,T)\eta z}-1)e^{u\cdot\bar{z}}d\nu(z) - \int (e^{u\cdot\bar{z}}-1)d\nu(z)\right\},
\end{aligned}
$$

を得る。

$$
\begin{aligned}
\partial_t b(u,t,T) &= b(u,t,T)k - \int (e^{b(u,t,T)\eta z}-1)e^{u\cdot\bar{z}}d\nu(z) - \int (e^{u\cdot\bar{z}}-1)d\nu(z) \\
&= b(u,t,T)k + \int 1 d\nu(z) - \int e^{\eta z b(u,t,T)+u\cdot(z,1)^\top}d\nu(z) \\
&= b(u,t,T)k + 1 - \int e^{\eta z b(u,t,T)+u\cdot(z(1,0)^\top+(0,1)^\top)}d\nu(z) \\
&= b(u,t,T)k + 1 - \int e^{z(\eta b(u,t,T)+u\cdot(1,0)^\top)}d\nu(z)\cdot e^{u\cdot(0,1)^\top} \\
&= kb(u,t,T) + 1 - \theta(\eta b(u,t,T)+u\cdot(1,0)^\top)\exp(u\cdot(0,1)^\top).
\end{aligned}
$$

ここで、$\theta(\omega)$ は

$$
\theta(\omega) = \int e^{\omega z}d\nu(z), \qquad \omega\in\mathbb{C},
$$

である。よって、

$$
\begin{cases}
\partial_t b(u,t,T) = kb(u,t,T) + 1 - \theta(\eta b(u,t,T)+u\cdot(1,0)^\top)\exp((0,1)^\top), \\
\partial_t a(u,t,T) = -kcb(u,t,T).
\end{cases}
$$

を得る。終端条件は $a(u,t,T)=b(u,t,T)=0$ である。$w(t,h(t),J_t,u) = f(t,h(t),J_t)e^{-u\cdot J_t}$ であるため

$$
\begin{aligned}
E[\exp(u\cdot J_T)|\mathcal{F}_t] &= f(t,h(t),J_t) \\
&= w(t,h(t),J_t,u)\cdot e^{u\cdot J_t} \\
&= e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)+u\cdot J_t}.
\end{aligned}
$$

□

命題 5.3 (Errais et al. [9] : Section2.5) (26) 式を u に関して 1 回偏微分して、$u=(0,0)^\top$ とした場合の条件付期待値は $v\in\mathbb{R}^2, t\le T$ に関して

$$E[v\cdot J_T|\mathcal{F}_t]=\mathcal{A}(0,t,T)+\mathcal{B}(0,t,T)h(t)+v\cdot J_t,$$

となる。ただし、$\mathcal{A}(t)=\mathcal{A}(u,t,T),\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}(u,t,T)$ は以下の連立微分方程式を満たす。

$$\begin{cases}\partial_t\mathcal{B}(t) & =k\mathcal{B}(t)-(\eta\mathcal{B}(t)+v\cdot(1,0)^\top)\theta'(\eta b(t)+u\cdot v\cdot(1,0)^\top)e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top}\\ & \qquad -v\cdot(0,1)^\top\theta(\eta b(t)+u\cdot v\cdot(1,0)^\top)e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top},\\ \partial_t\mathcal{A}(t) & =-kc\mathcal{B}(t),\end{cases}\tag{30}$$

終端条件は $\mathcal{A}(T)=\mathcal{B}(T)=0$ である。ここで $\theta'(\omega)$ は、

$$\theta'(\omega)=\int ze^{\omega z}d\nu(z),\qquad \omega\in\mathbb{C},$$

であり、$a(t),b(t)$ は (27) 式を満たす関数とする。

(証明) まず、

$$E[\exp(u\cdot v\cdot J_T)|\mathcal{F}_t]=\exp(a(t)+b(t)h(t)+u\cdot v\cdot J_t),$$

となるような $a(t),b(t)$ が満たす連立微分方程式を求める。$v\in\mathbb{R}^2$ である。命題 5.2 の証明と同様にすると以下のような連立微分方程式を得る。

$$\begin{cases}\partial_t b(t)=kb(t)+1-\int e^{(b(t)\eta+u\cdot v\cdot(1,0)^\top)z}d\nu(z)\cdot e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top},\\ \partial_t a(t)=-kcb(t),\end{cases}\tag{31}$$

終端条件は $a(T)=b(T)=0$ である。続いて

$$\begin{aligned}E[\partial_u\exp(u\cdot v\cdot J_T)|\mathcal{F}_t]&=E[v\cdot J_T\exp(u\cdot v\cdot J_T)|\mathcal{F}_t]\\&=\{\partial_u a(t)+\partial_u b(t)h(t)+v\cdot J_t\}\cdot\exp(a(t)+b(t)h(t)+u\cdot v\cdot J_t),\end{aligned}$$

となるような $\partial_u a(t),\partial_u b(t)$ が満たす連立微分方程式を考えることになるが、これは (31) 式を u で偏微分すれば得ることができる。つまり

$$\begin{cases}\partial_u(\partial_t b(t)) & =k\cdot\partial_u b(t)-(\partial_u b(t)\eta+v\cdot(1,0)^\top)\int z\cdot e^{(b(t)\eta+u\cdot v\cdot(1,0)^\top)z}d\nu(z)\cdot e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top}\\ & \qquad -v\cdot(0,1)^\top\int e^{(b(t)\eta+u\cdot v\cdot(1,0)^\top)z}d\nu(z)\cdot e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top},\\ \partial_u(\partial_t a(t)) & =-kc\cdot\partial_u b(t),\end{cases}$$

を得る。ここで $\partial_u a(t)=\mathcal{A}(t),\partial_u b(t)=\mathcal{B}(t),\theta(\omega)=\int e^{\omega z}d\nu(z),\theta'(\omega)=\int ze^{\omega z}d\nu(z)$ とおくと

$$\begin{cases}\partial_t\mathcal{B}(t) & =k\mathcal{B}(t)-(\eta\mathcal{B}(t)+v\cdot(1,0)^\top)\theta'(\eta b(t)+uv\cdot(1,0)^\top)e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top}\\ & \qquad -v\cdot(0,1)^\top\theta(\eta b(t)+u\cdot v\cdot(1,0)^\top)e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top},\\ \partial_t\mathcal{A}(t) & =-kc\mathcal{B}(t),\end{cases}$$

となる。終端条件は $\mathcal{A}(T)=\mathcal{B}(T)=0$ である。この命題では $u=(0,0)^\top$ を考えたいので

$$\begin{aligned}E[\partial_u\exp(u\cdot v\cdot J_T)|\mathcal{F}_t]|_{u=0}&=E[v\cdot J_T|\mathcal{F}_t]\\&=\{\partial_u a(t)|_{u=0}+\partial_u b(t)|_{u=0}h(t)+v\cdot \mathrm{J}_t\}\cdot\exp(a(t)+b(t)h(t)+u\cdot v\cdot J_t)|_{u=0}.\end{aligned}$$

$u=(0,0)^\top$ のとき (26) 式より $a(t)=b(t)=0$ であるから

$$= \mathcal{A}(0,t,T) + \mathcal{B}(0,t,T)h(t) + v\cdot J_t,$$

を得る。 □

$u=(0,0)^\top$ のとき $a(t)=b(t)=0$ なので、そのときの (30) 式は

$$\begin{cases} \partial_t\mathcal{B}(0,t,T) = k\mathcal{B}(0,t,T) - \left(\eta\mathcal{B}(0,t,T) + v\cdot(1,0)^\top\right)\int zd\nu(z) - v\cdot(0,1)^\top, \\ \partial_t\mathcal{A}(0,t,T) = -kc\mathcal{B}(0,t,T), \end{cases} \tag{32}$$

$l=\int zd\nu(z)$ として整理すると

$$\begin{cases} \partial_t\mathcal{B}(0,t,T) = (k-\eta l)\mathcal{B}(0,t,T) - v\cdot(l,1)^\top, \\ \partial_t\mathcal{A}(0,t,T) = -kc\mathcal{B}(0,t,T), \end{cases}$$

となる。終端条件を $\mathcal{A}(0,T,T)=\mathcal{B}(0,T,T)=0$ として、上の連立微分方程式を解く。$\mu=\eta l-k\neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} \partial_t\mathcal{B}(0,t,T) + \mu\mathcal{B}(0,t,T) &= -v\cdot(l,1)^\top \\ \frac{\partial}{\partial t}(e^{\mu t}\mathcal{B}(0,t,T)) &= -v\cdot(l,1)^\top\cdot e^{\mu t}. \end{aligned}$$

$\mathcal{B}(0,T,T)=0$ より

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{\partial}{\partial s}(e^{\mu s}\mathcal{B}(0,s,T))ds &= -\int_t^T v\cdot(l,1)^\top\cdot e^{\mu s}ds \\ -e^{\mu t}\mathcal{B}(0,t,T) &= -v\cdot(l,1)^\top\left[\frac{1}{\mu}(e^{\mu T}-e^{\mu t})\right] \\ \mathcal{B}(0,t,T) &= \frac{1}{\mu}\cdot v\cdot(l,1)^\top(e^{\mu(T-t)}-1). \end{aligned}$$

次に $\mathcal{A}(0,t,T)$ に関しては

$$\begin{aligned} -\int_t^T \partial_s\mathcal{A}(0,s,T)ds &= -\int_t^T kc\mathcal{B}(0,s,T)ds \\ \mathcal{A}(0,t,T) &= kc\int_t^T \frac{1}{\mu}\cdot v\cdot(l,1)^\top(e^{\mu(T-s)}-1)ds \\ &= -\frac{kc}{\mu}v\cdot(l,1)^\top(T-t) + \frac{kc}{\mu}v\cdot(l,1)^\top e^{\mu T}\int_t^T e^{-\mu s}ds \\ &= -\frac{kc}{\mu}v\cdot(l,1)^\top(T-t) - \frac{kc}{\mu}v\cdot(l,1)^\top\left(\frac{1}{\mu}(1-e^{\mu(T-t)})\right) \\ &= \frac{kc}{\mu}v\cdot(l,1)^\top(-T+t) + \frac{kc}{\mu}v\cdot(l,1)^\top\left(\frac{1}{\mu}(e^{\mu(T-t)}-1)\right) \\ &= \frac{kc}{\mu}v\cdot(l,1)^\top\left\{\frac{1}{\mu}(e^{\mu(T-t)}-1)-T+t\right\}. \end{aligned}$$

まとめると連立微分方程式の解は

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0,t,T) &= \frac{1}{\mu}\cdot v\cdot(l,1)^\top(e^{\mu(T-t)}-1), \\ \mathcal{A}(0,t,T) &= \frac{kc}{\mu}v\cdot(l,1)^\top\left\{\frac{1}{\mu}(e^{\mu(T-t)}-1)-T+t\right\}, \end{aligned}$$

となる。$v=(0,1), J_T=(0,N_T)$ と考えると、つまり $(l,1)^\top=(0,1)^\top$、

$$\mathcal{B}(0,t,T)=\frac{1}{\mu}(e^{\mu(T-t)}-1),$$
$$\mathcal{A}(0,t,T)=\frac{kc}{\mu}\left\{\frac{1}{\mu}(e^{\mu(T-t)}-1)-T+t\right\},$$

よって、

$$\begin{aligned} E[1\cdot N_T|\mathcal{F}_t] &= \mathcal{A}(0,t,T)+\mathcal{B}(0,t,T)h(t)+1\cdot N_t \\ E[N_T|\mathcal{F}_t] &= \frac{kc}{\mu}\left\{\frac{1}{\mu}(e^{\mu(T-t)}-1)-T+t\right\}+\frac{1}{\mu}(e^{\mu(T-t)}-1)h(t)+N_t \\ &= \frac{kc+\mu h(t)}{\mu^2}(e^{\mu(T-t)}-1)-\frac{kc}{\mu}(T-t)+N_t, \end{aligned} \tag{33}$$

となる。また $v=(1,0), J_T=(L_T,0)$ と考えると、つまり $(l,1)^\top=(l,0)^\top$、同様にして

$$\begin{aligned} E[1\cdot L_T|\mathcal{F}_t] &= \mathcal{A}(0,t,T)+\mathcal{B}(0,t,T)h(t)+1\cdot L_t \\ E[L_T|\mathcal{F}_t] &= l\cdot\frac{kc}{\mu}\left\{\frac{1}{\mu}(e^{\mu(T-t)}-1)-(T-t)\right\}+l\cdot\frac{1}{\mu}(e^{\mu(T-t)}-1)h(t)+L_t \\ &= l\cdot\left\{\frac{kc+\mu h(t)}{\mu^2}(e^{\mu(T-t)}-1)-\frac{kc}{\mu}(T-t)\right\}+L_t, \end{aligned} \tag{34}$$

を得る。ちなみに現時点における期待値は

$$\begin{aligned} E[1\cdot N_t|\mathcal{F}_0] &= \mathcal{A}(0,0,t)+\mathcal{B}(0,0,t)h(0)+1\cdot N_0 \\ E[N_t] &= \frac{kc}{\mu}\left\{\frac{1}{\mu}(e^{\mu t}-1)-t\right\}+\frac{1}{\mu}(e^{\mu t}-1)h(0)+0 \\ &= \frac{kc+\mu h(0)}{\mu^2}(e^{\mu t}-1)-\frac{kc}{\mu}t, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} E[1\cdot L_t|\mathcal{F}_0] &= \mathcal{A}(0,0,t)+\mathcal{B}(0,0,t)h(0)+1\cdot L_0 \\ E[L_t] &= l\cdot\frac{kc}{\mu}\left\{\frac{1}{\mu}(e^{\mu t}-1)-t\right\}+l\cdot\frac{1}{\mu}(e^{\mu t}-1)h(0)+0 \\ &= l\cdot\left\{\frac{kc+\mu h(0)}{\mu^2}(e^{\mu t}-1)-\frac{kc}{\mu}t\right\}, \end{aligned} \tag{36}$$

となる。図 53 と図 54 は (35) 式を用いてデフォルト数過程の平均をグラフにしたものである。パラメータ設定は、図 53 では $k=0.1, c=0.3, h(0)=0.3, \eta=1.0, l=0.2,0.4,0.6,0.8$、図 54 では $k=1.0, c=0.3, h(0)=0.3, \eta=1.0, l=0.2,0.4,0.6,0.8$ である。(35) 式からも判断できるが、$\mu>0$ の場合は時間と共に指数的に上昇する。μ が大きいほどデフォルトの数も大きくなる。逆に $\mu<0$ の場合は、(35) 式の第 1 項目が時間と共に 0 に近づくため、全体としては時間と共に線形的に増加する。図 55 と図 56 は、初期値を変化させた場合のデフォルト数過程の平均を示している。パラメータ設定は、図 55 では $k=0.1, c=0.3, \eta=1.0, l=0.4$、図 56 では $k=0.1, c=0.3, \eta=1.0, l=0.4$ である。ハザード率過程の平均のグラフでも見たが、$\mu>0$ の場合は初期値が大きいほどデフォルトが起こり連鎖的にデフォルトがより加速する。$\mu<0$ 場合は、ハザード率がある数値に収束していくので、時間が経過すれば初期値に関係なく一定の割合で増加している。ただ、初期での影響により上下関係は初期値の上下関係と同じである。　図 57 から図 68 は 10 万本のハザード率サンプルパスを発生させて満期時でのデフォルト数の頻度をグラフにしたものである。基本パラメータは、$k=2.0, h(0)=c=0.3, \eta=1.0$、損失は $\{0.4,0.6,0.8,1.0\}$ の値を一様の確率でとるものとする。図では各パ

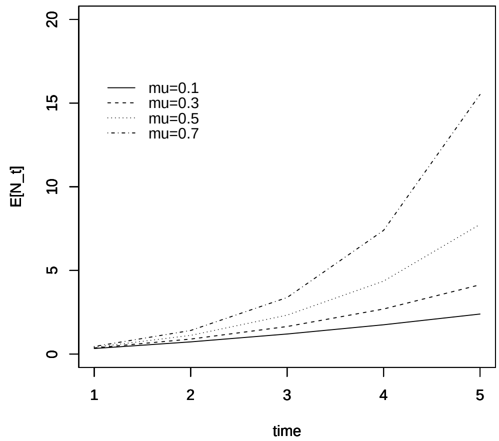


図 53　$\mu > 0$ の場合のデフォルト数過程の平均

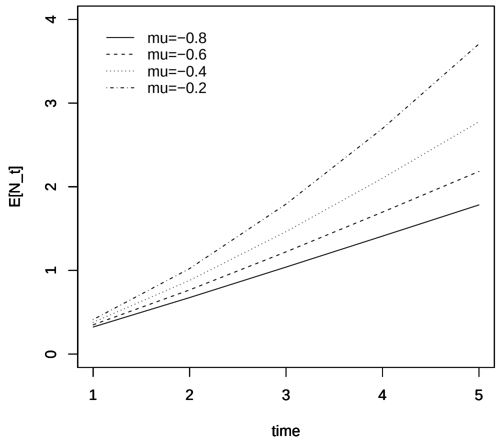


図 54　$\mu < 0$ の場合のデフォルト数過程の平均

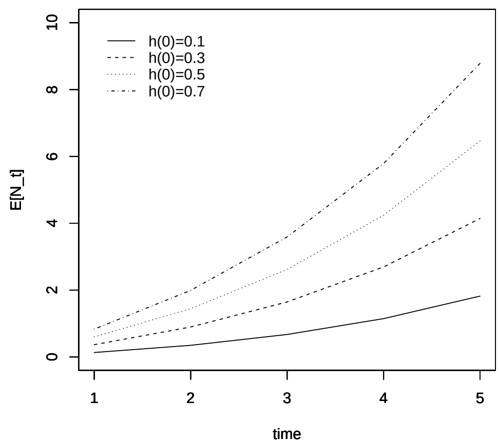


図 55　$\mu > 0$ の場合のデフォルト数過程の平均と初期値

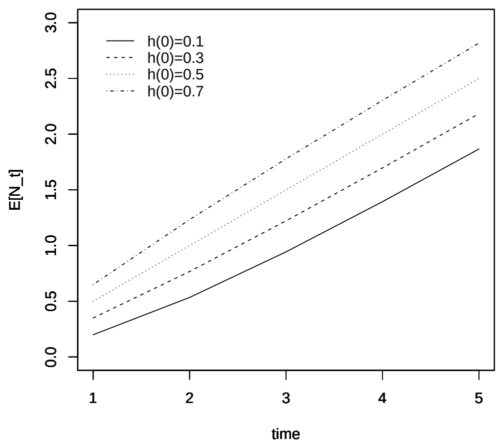


図 56　$\mu < 0$ の場合のデフォルト数過程の平均と初期値

ラメータを変化させた場合の頻度の様子を比較してある。図 57 から図 60 では $k = 1.5, k = 2.0$。図 61 から図 64 では $\eta = 0.5, \eta = 1.0$。図 65 から図 68 では損失の平均 l を変化させており、基本パラメータの場合と損失が $\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ の値を一様の確率でとる場合を比較している。ハザード率過程がより高く上昇し高水準を維持されやすくなるのは、平均回帰水準 k が小さく、ジャンプする割合 η が大きく、そして損失の平均 l が大きい場合である。また、その場合の方がデフォルト数も大きくなると考えられる。図からもそのような特徴が現れていることが分かる。

命題 5.4　(Errais et al. [9] : Section2.6) $v \in (0,1), t \le T$ に対して

$$E[v^{N_T - N_t} | \mathcal{F}_t] = \exp(c(t) + d(t)h(t)),$$

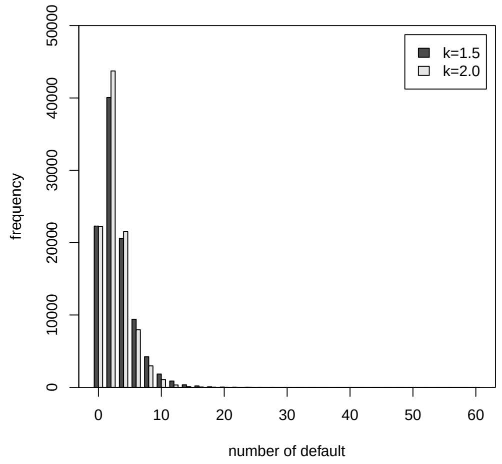


図 57　満期 5 年

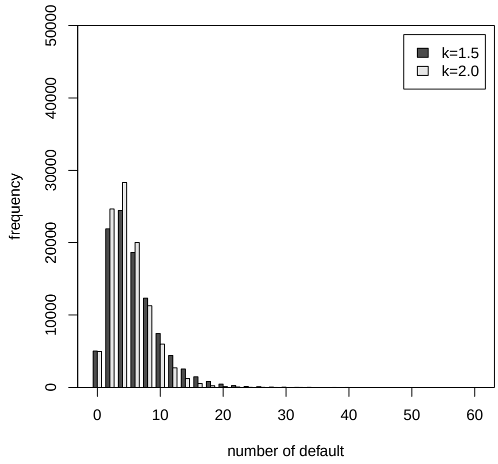


図 58　満期 10 年

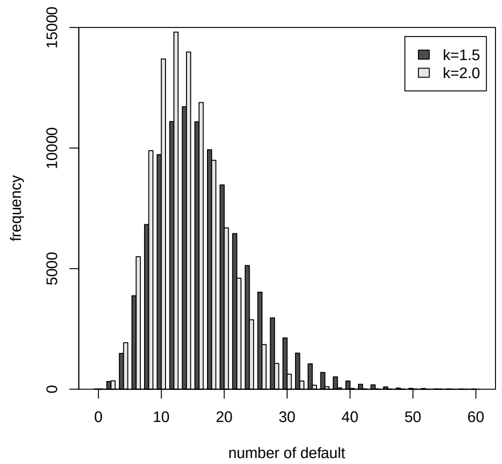


図 59　満期 30 年

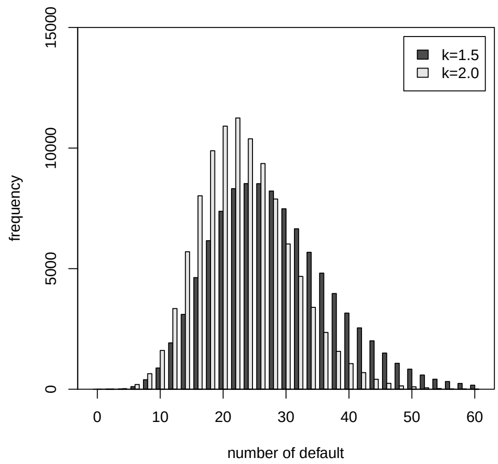


図 60　満期 50 年

が成り立つ。ただし、

$$c(t) = c(v, t, T) = a((0, \log v)^\top, t, T),$$
$$d(t) = d(v, t, T) = b((0, \log v)^\top, t, T),$$

は以下の連立微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} \partial_t d(t) = kd(t) + 1 - v\theta(\eta d(t)), \\ \partial_t c(t) = -kcd(t), \end{cases} \tag{37}$$

で終端条件は $c(T) = d(T) = 0$ である。

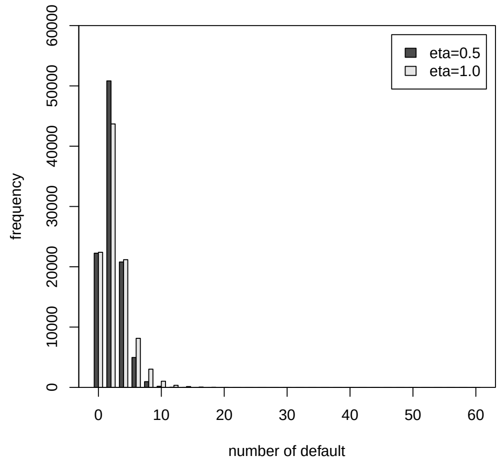


図 61　満期 5 年

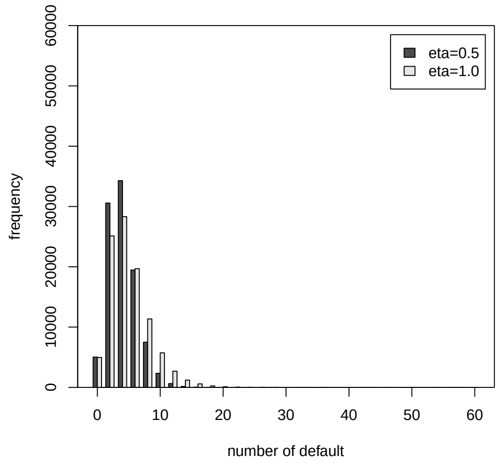


図 62　満期 10 年

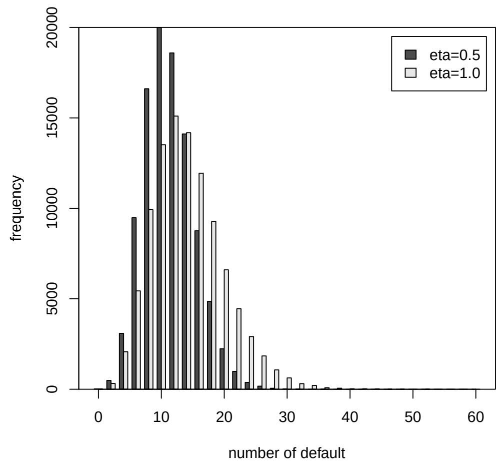


図 63　満期 30 年

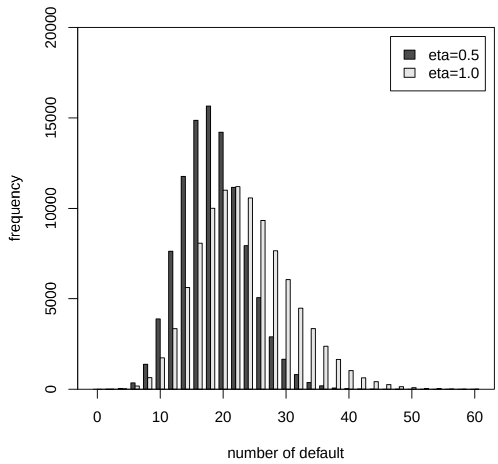


図 64　満期 50 年

(証明) 命題 5.2 において、$u=(0,\log v), J_T=(0,N_T-N_t)^\top$ と考えると

$$\begin{aligned}E[e^{u\cdot(N_T-N_t)}|\mathcal{F}_t] &= E[e^{\log v\cdot(N_T-N_t)}|\mathcal{F}_t]\\ &= \exp(a((0,\log v)^\top,t,T)+b((0,\log v)^\top,t,T)h(t)+(0,\log v)^\top\cdot(0,N_t-N_t)^\top).\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned}E[v^{N_T-N_t}|\mathcal{F}_t] &= \exp(a((0,\log v)^\top,t,T)+b((0,\log v)^\top,t,T)h(t))\\ &= \exp(c(t)+d(t)h(t)).\end{aligned}$$

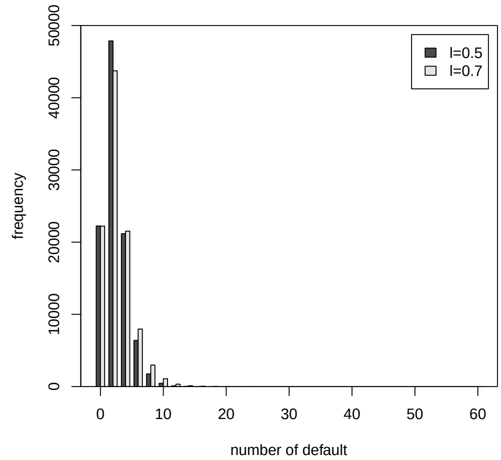


図 65　満期 5 年

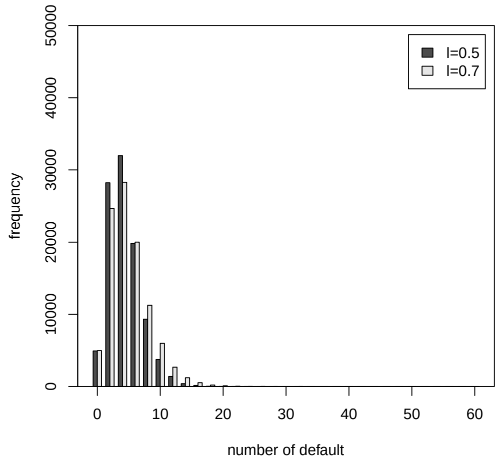


図 66　満期 10 年

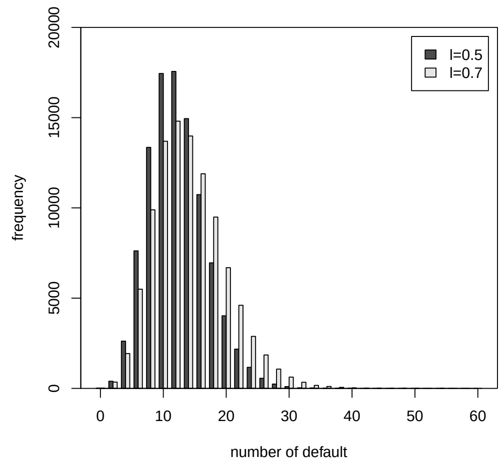


図 67　満期 30 年

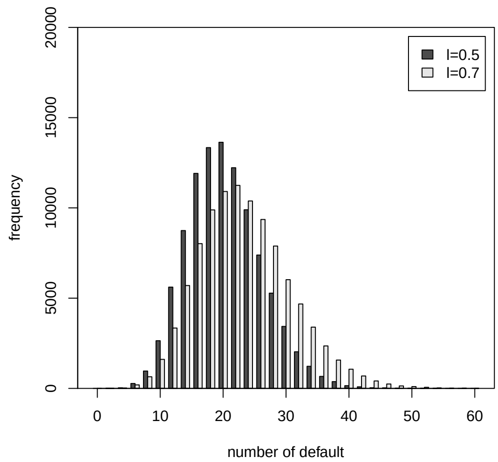


図 68　満期 50 年

$d(t)$ が満たす微分方程式は

$$\begin{aligned}\partial_t b((0, \log v)^\top, t, T) &= k \cdot b((0, \log v)^\top, t, T) + 1 \\ &\quad - \theta(\eta b((0, \log v)^\top, t, T) + (0, \log v)^\top \cdot (1, 0)^\top) \cdot \exp((0, \log v)^\top \cdot (0, 1)^\top) \\ &= k \cdot d(t) + 1 - v\theta(\eta d(t)).\end{aligned}$$

よって、$c(t), d(t)$ が満たす連立微分方程式は

$$\begin{cases} \partial_t d(t) = kd(t) + 1 - v\theta(\eta d(t)), \\ \partial_t c(t) = -kcd(t), \end{cases}$$

で終端条件は $c(T) = d(T) = 0$ である。 □

期待値の定義より

$$E[v^{N_T - N_t}|\mathcal{F}_t] = \sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot P(N_T - N_t = i|\mathcal{F}_t)$$
$$= v^0 \cdot P(N_T - N_t = 0|\mathcal{F}_t) + v^1 \cdot P(N_T - N_t = 1|\mathcal{F}_t) + v^2 \cdot P(N_T - N_t = 2|\mathcal{F}_t) + \cdots . \tag{38}$$

(38) 式を用いると、$i = 0$ のとき

$$P(N_T - N_t = 0|\mathcal{F}_t) = E[v^{N_T - N_t}|\mathcal{F}_t]|_{v=0}.$$

$i = 1$ のとき

$$P(N_T - N_t = 1|\mathcal{F}_t) = \partial_v E[v^{N_T - N_t}|\mathcal{F}_t]|_{v=0}.$$

$i = 2$ のとき

$$P(N_T - N_t = 2|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{2!} \cdot \partial_v^2 E[v^{N_T - N_t}|\mathcal{F}_t]|_{v=0}.$$

$i = 3$ のとき

$$P(N_T - N_t = 3|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{3!} \cdot \partial_v^3 E[v^{N_T - N_t}|\mathcal{F}_t]|_{v=0}.$$

同様にして $i = n$ のときは

$$P(N_T - N_t = n|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{n!} \cdot \partial_v^n E[v^{N_T - N_t}|\mathcal{F}_t]|_{v=0},$$
$$\phi_t(n, T) = \frac{1}{n!} \cdot \partial_v^n \exp(c(v, t, T) + d(v, t, T)h(t))|_{v=0},$$

となる。$i = 0$ のとき

$$\phi_t(0, T) = \exp(c(v, t, T) + d(v, t, T)h(t))|_{v=0}$$
$$= \exp(c(0, t, T) + d(0, t, T)h(t)).$$

$C(t) = c(0, t, T), D(t) = d(0, t, T)$ とおくと

$$= \exp(C(t) + D(t)h(t)).$$

このとき $C(t), D(t)$ が満たす連立微分方程式は (37) 式より

$$\begin{cases} \partial_t D(t) = kD(t) + 1, \\ \partial_t C(t) = -kcD(t), \end{cases}$$

で終端条件は $C(T) = D(T) = 0$ である。この連立微分方程式を解くと

$$D(t) = \frac{1}{k}(e^{-k(T-t)} - 1),$$
$$C(t) = -c(T - t) + \frac{c}{k}(1 - e^{-k(T-t)}),$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}\phi_t(0,T) &= \exp(C(t)+D(t)h(t)) \\ &= \exp\left(-c(T-t)+\frac{c}{k}(1-e^{-k(T-t)})+\frac{1}{k}(e^{-k(T-t)}-1)\cdot h(t)\right) \\ &= \exp\left(\frac{c-h(t)}{k}(1-e^{-k(T-t)})-c(T-t)\right).\end{aligned}$$

$\phi_t(0,T)$ は t 時点において T までにデフォルトが起こらない確率を表している。ここで $Fa\acute{a}\ di\ Bruno's$ 公式を使う。$Fa\acute{a}\ di\ Bruno's$ 公式とは、m 回微分可能な関数 g, f に対して

$$\frac{d^m}{dt^m}g(f(t)) = \sum \frac{m!}{b_1!b_2!\cdot b_m!}g^{(k)}(f(t))\left(\frac{f^{(1)}(t)}{1!}\right)^{b_1}\cdot\left(\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\right)^{b_2}\cdots\cdot\left(\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right)^{b_m}$$

となるというものである。Johnson [12] を参考にした。 ただし、$b_1,\cdots,b_m$ は非負の整数で

$$b_1+2b_2+\cdots+mb_m = m \tag{39}$$

を満たすものである。$k = b_1+b_2+\cdots+b_m$ で $\sum$ は、(39) 式を満たす解の場合の数分足し合わせることを意味する。例えば $m=3$ の場合、

$$b_1+2b_2+3b_3 = 3.$$

この解は次の 3 つである。

$$\begin{aligned} b_1 = b_2 = 0, b_3 = 1 &\Longrightarrow k = 1, \\ b_1 = b_2 = 1, b_3 = 0 &\Longrightarrow k = 2, \\ b_1 = 3, b_2 = b_3 = 0 &\Longrightarrow k = 3. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{d^{(3)}}{dt^{(3)}}g(f(t)) &= \frac{3!}{0!0!1!}g^{(1)}(f(t))\left(\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\right)+\frac{3!}{1!1!0!}g^{(2)}(f(t))\left(\frac{f^{(1)}(t)}{1!}\right)\cdot\left(\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\right) \\ &\quad+\frac{3!}{3!0!0!}g^{(3)}(f(t))\left(\frac{f^{(1)}(t)}{1!}\right)^3 \\ &= g^{(1)}(f(t))f^{(3)}(t)+3f^{(2)}(f(t))f^{(1)}(t)f^{(2)}(t)+g^{(3)}(f(t))(f^{(1)}(t))^3.\end{aligned}$$

この公式を用いると

$$\begin{aligned}\phi_t(n,T) &= \frac{1}{n!}\cdot\partial_v^n\exp(c(v,t,T)+d(v,t,T)h(t))|_{v=0} \\ &= \frac{1}{n!}\sum\frac{n!}{m_1!\cdots m_n!}\exp(c(v,t,T)+d(v,t,T)h(t))|_{v=0}\cdot \\ &\quad\times\left(\frac{\partial_v^1 c(v,t,T)|_{v=0}+\partial_v^1 d(v,t,T)h(t)|_{v=0}}{1!}\right)^{m_1}\cdots\cdot\left(\frac{\partial_v^n c(v,t,T)|_{v=0}+\partial_v^n d(v,t,T)h(t)|_{v=0}}{n!}\right)^{m_n}\end{aligned}$$

$\exp(c(v,t,T)+d(v,t,T)h(t))|_{v=0} = \phi_t(0,T)$ なので

$$\begin{aligned}&= \sum\frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial_v^k c(v,t,T)|_{v=0}+\partial_v^k d(v,t,T)h(t)|_{v=0}}{k!}\right)^{m_k} \\ &= \sum\frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{C_k(t)+D_k(t)h(t)}{k!}\right)^{m_k}\end{aligned}$$

ただし、

$$C_k(t) = \partial_v^k c(v,t,T)|_{v=0},$$
$$D_k(t) = \partial_v^k d(v,t,T)|_{v=0}.$$

(37) 式より

$$\begin{aligned}
\partial_t \partial_v^k d(v,t,T)|_{v=0} &= (k\partial_v^k d(v,t,T) - \partial_v^k v\theta(\eta d(v,t,T)))|_{v=0} \\
&= (k\partial_v^k d(v,t,T) - k\partial_v^{k-1}\theta(\eta d(v,t,T)) - v\partial_v^k \theta(\eta d(v,t,T)))|_{v=0} \\
\partial_t \partial_v^k d(0,t,T) &= k\partial_v^k d(v,t,T)|_{v=0} - k\partial_v^{k-1}\theta(\eta d(v,t,T))|_{v=0} \\
&= k\partial_v^k d(v,t,T)|_{v=0} \\
&\quad - k\sum \frac{(k-1)!}{m_1!\cdots m_k!}\theta^{(m_1+\cdots+m_{k-1})}(\eta d(v,t,T))\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\partial_v^i \eta d(v,t,T)|_{v=0}}{i!}\right)^{m_i} \\
\partial_t D_k(t) &= kD_k(t) - k\sum \frac{(k-1)!}{m_1!\cdots m_k!}\theta^{(m_1+\cdots+m_{k-1})}(\eta D(t))\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\eta D_i(t)}{i!}\right)^{m_i}.
\end{aligned}$$

よって、$C_k(t), D_k(t)$ は以下の連立微分方程式を満たす。

$$\begin{cases}
\partial_t D_k(t) = kD_k(t) - k\sum \frac{(k-1)!}{m_1!\cdots m_k!}\theta^{(m_1+\cdots+m_{k-1})}(\eta D(t))\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\eta D_i(t)}{i!}\right)^{m_i}, \\
\partial_t C_k(t) = -kcD_k(t).
\end{cases}$$

終端条件は $C_k(T) = D_k(T) = 0$ である。

5.2 拡張過程

この章では、ハザード率過程 $h(t)$ が (19) 式より一般的な式に従う場合を考えていく。ここで、X は $\mathbb{R}^d$ の部分集合 D を状態空間とし、確率微分方程式

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW_t + \eta dL_t, \tag{40}$$

の解であるとする。ここで、W は $\mathbb{R}^d$ における $(\mathcal{F}_t)-$ 適合な標準ブラウン運動、$\mu : D \to \mathbb{R}^d, \sigma : D \to \mathbb{R}^{d\times d}$ である。L は純ジャンプ過程で、その計数過程 N の確率的強度は関数 $\lambda : D \to [0,\infty)$ によって $\{\lambda(X(t)) : t \geq 0\}$ から定まり、ジャンプの大きさの分布は $\mathbb{R}^d$ 上の確率分布 ν に従うとする。ここで

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= K_0 + K_1 \cdot x, \quad K = (K_0, K_1) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d}, \\
\sigma^2(x) &= H_0 + H_1 \cdot x, \quad H = (H_0, H_1) \in \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathbb{R}^{d\times d\times d}, \\
\lambda(x) &= I_0 + I_1 \cdot x, \quad I = (I_0, I_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,
\end{aligned}$$

によって定義する。この節では、ハザード率過程 $h(t)$ が (40) 式に従う過程を考える。つまり

$$dh(t) = \mu(h(t))dt + \sigma(h(t))dW_t + \eta dL_t. \tag{41}$$

命題 5.5　過程 $J = (L,N)^\top$ は次の関係を満たす。

$$E[\exp(u \cdot J_T)|\mathcal{F}_t] = \exp(a(t) + b(t)h(t) + u \cdot J_t).$$

ただし、$t \le T, u \in \mathbb{C}_-^2$ であり、$a(t) = a(u,t,T), b(t) = b(u,t,T)$ は以下の連立微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} \partial_t b(t) = -K_1 b(t) - \frac{1}{2} H_1 b^2(t) + I_1 \left(1 - \int e^{\{\eta b(t) + u \cdot (1,0)^\top\} z} d\nu(z) \cdot e^{u \cdot (0,1)^\top}\right) \\ \partial_t a(t) = -K_0 b(t) - \frac{1}{2} H_0 b^2(t) + I_0 \left(1 - \int e^{\{\eta b(t) + u \cdot (1,0)^\top\} z} d\nu(z) \cdot e^{u \cdot (0,1)^\top}\right). \end{cases}$$

終端条件は $a(T) = b(T) = 0$ である。$\mathbb{C}_-^2$ は非正の実部を持つ複素数のペアとする。

(証明) 固定した $T, u \in \mathbb{C}_-^2$ に対して、関数 $f : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ を

$$f(t,h,x) = E[\exp(u \cdot J_T) | h(t) = h, J_t = x]$$

と定義する。このとき、

$$E[\exp(u \cdot J_T) | \mathcal{F}_t] = f(t, h(t), J_t)$$

となる。

$$\begin{aligned} df(t,h(t),J_t) &= f_t(t,h(t),J_t)dt + f_h(t,h(t),J_t) \cdot dh^c(t) + \frac{1}{2} f_{hh}(t,h(t),J_t) d[h^c]_t \\ &\quad + [f(t,h(t),J_t) - f(t-,h(t-),J_{t-})]dN_t \\ &= f_t(t,h(t),J_t)dt + f_h(t,h(t),J_t) \cdot \{(K_0 + K_1 \cdot h(t))dt + (H_0 + H_1 \cdot h(t)) \cdot dW_t\} \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{hh}(t,h(t),J_t)(H_0 + H_1 \cdot h(t))dt \\ &\quad + [f(t,h(t),J_t) - f(t-,h(t-),J_{t-})]dN_t \\ &= f_t(t,h(t),J_t)dt + f_h(t,h(t),J_t) \cdot (K_0 + K_1 \cdot h(t))dt + \frac{1}{2} f_{hh}(t,h(t),J_t)(H_0 + H_1 \cdot h(t))dt \\ &\quad + f_h(t,h(t),J_t) \cdot (H_0 + H_1 \cdot h(t)) \cdot dW_t \\ &\quad + [f(t,h(t),J_t) - f(t-,h(t-),J_{t-})]dM_t \\ &\quad + (I_0 + I_1 \cdot h(t)) \int [f(t, h(t) + \eta z, J_t + (z,1)^\top) - f(t,h(t),J_t)] d\nu(z) dt \end{aligned}$$

$(f(t,h(t),J_t))_{t \le T}$ がマルチンゲールであるためには、第 1,2,3,6 項目の dt の係数が 0 になる必要があり、終端条件は $f(T,h(T),J_T) = \exp(u \cdot J_T)$ である。つまり

$$\begin{cases} f_t(t,h(t),J_t) + f_h(t,h(t),J_t) \cdot (K_0 + K_1 \cdot h(t)) + \frac{1}{2} f_{hh}(t,h(t),J_t)(H_0 + H_1 \cdot h(t)) \\ \qquad + (I_0 + I_1 \cdot h(t)) \int [f(t,h(t)+\eta z, J_t + (z,1)^\top) - f(t,h(t),J_t)] d\nu(z) = 0, \\ f(T,h(t),J_T) = \exp(u \cdot x), \end{cases} \tag{42}$$

を満たす必要がある。$w(t,h(t),J_t,u) = f(t,h(t),J_t)e^{-u \cdot J_t}, \bar{z} = (z,1)^\top$ とおくと、

$$\begin{aligned} & f_t(t,h(t),J_t) + f_h(t,h(t),J_t)(K_0 + K_1 \cdot h(t)) + \frac{1}{2} f_{hh}(t,h(t),J_t)(H_0 + H_1 \cdot h(t)) \\ &\qquad + (I_0 + I_1 \cdot h(t)) \int [f(t,h(t)+\eta z, J_t + (z,1)^\top) - f(t,h(t),J_t)] d\nu(z) = 0, \\ \Longleftrightarrow & e^{u \cdot J_t} w_t(t,h(t),J_t,u) + e^{u \cdot J_t} w_h(t,h(t),J_t,u)(K_0 + K_1 \cdot h(t)) + \frac{1}{2} w_{hh}(t,h(t),J_t,u)(H_0 + H_1 \cdot h(t)) \\ &\qquad + (I_0 + I_1 \cdot h(t)) \int [e^{u \cdot J_t} \cdot e^{u \cdot \bar{z}} w(t,h(t)+\eta z, J_t + \bar{z}, u) - e^{u \cdot J_t} w(t,h(t),J_t,u)] d\nu(z) = 0, \end{aligned}$$

となる。

両辺を $e^{u\cdot J_t}$ で割り、整理すると

$$\begin{aligned}
&w_t(t,h(t),J_t,u)+w_h(t,h(t),J_t,u)(K_0+K_1\cdot h(t))+\frac{1}{2}w_{hh}(t,h(t),J_t,u)(H_0+H_1\cdot h(t))\\
&\quad+(I_0+I_1\cdot h(t))\int[w(t,h(t)+\eta z,J_t+\bar{z},u)-w(t,h(t),J_t,u)]e^{u\cdot\bar{z}}d\nu(z)\\
&\quad+(I_0+I_1\cdot h(t))\int[(e^{u\cdot\bar{z}}-1)w(t,h(t),J_t,u)]d\nu(z)=0.
\end{aligned}$$

つまり、(42) 式は以下のように書き換えられる。

$$\begin{cases}
w_t(t,h(t),J_t,u)+w_h(t,h(t),J_t,u)(K_0+K_1\cdot h(t))+\frac{1}{2}w_{hh}(t,h(t),J_t,u)(H_0+H_1\cdot h(t))\\
\qquad+(I_0+I_1\cdot h(t))\int[w(t,h(t)+\eta z,J_t+\bar{z},u)-w(t,h(t),J_t,u)]e^{u\cdot\bar{z}}d\nu(z)\\
\qquad+(I_0+I_1\cdot h(t))\int[(e^{u\cdot\bar{z}}-1)w(t,h(t),J_t,u)]d\nu(z)=0.\\
w(T,h(T),J_T,u)=1.
\end{cases} \tag{43}$$

$w(t,h(t),J_t,u)=\exp(a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t))$ とおくと、$w_t(t,h(t),J_t,u)=\{\partial_t a(u,t,T)+\partial_t b(u,t,T)h(t)\}\exp(a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)), w_h(t,h(t),J_t,u)=b(u,t,T)\exp(a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t))$ となり、(43) 式の第 1 式に関して、

$$\begin{aligned}
&\{\partial_t a(u,t,T)+\partial_t b(u,t,T)h(t)\}e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)}+b(u,t,T)e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)}(K_0+K_1\cdot h(t))\\
&\quad+\frac{1}{2}b^2(u,t,T)e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)}(H_0+H_1\cdot h(t))\\
&\quad+(I_0+I_1\cdot h(t))\int[e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)(h(t)+\eta z)}-e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)}]e^{u\cdot\bar{z}}d\nu(z)\\
&\quad+(I_0+I_1\cdot h(t))\int[(e^{u\cdot\bar{z}}-1)e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)}]d\nu(z)=0.
\end{aligned}$$

両辺を $\exp(a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t))$ で割ると

$$\begin{aligned}
&\partial_t a(u,t,T)+\partial_t b(u,t,T)h(t)+b(u,t,T)(K_0+K_1\cdot h(t))+\frac{1}{2}b^2(u,t,T)(H_0+H_1\cdot h(t))\\
&\quad+(I_0+I_1\cdot h(t))\int(e^{b(u,t,T)\eta z}-1)e^{u\cdot\bar{z}}d\nu(z)+(I_0+I_1\cdot h(t))\int(e^{u\cdot\bar{z}}-1)d\nu(z)=0,
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
&\partial_t a(u,t,T)+\partial_t b(u,t,T)h(t)\\
&\quad=-K_0b(u,t,T)-\frac{1}{2}H_0b^2(u,t,T)-I_0\int(e^{\eta\cdot z\cdot b(u,t,T)+u\cdot\bar{z}}-1)d\nu(z)\\
&\qquad-\left\{K_1b(u,t,T)+\frac{1}{2}H_1b^2(u,t,T)+I_1\int(e^{\eta\cdot z\cdot b(u,t,T)+u\cdot\bar{z}}-1)d\nu(z)\right\}h(t),
\end{aligned}$$

を得る。よって、

$$\begin{cases}
\partial_t b(u,t,T)=-K_1b(u,t,T)-\frac{1}{2}H_1b^2(u,t,T)-I_1\int(e^{\eta\cdot z\cdot b(u,t,T)+u\cdot\bar{z}}-1)d\nu(z),\\
\partial_t a(u,t,T)=-K_0b(u,t,T)-\frac{1}{2}H_0b^2(u,t,T)-I_0\int(e^{\eta\cdot z\cdot b(u,t,T)+u\cdot\bar{z}}-1)d\nu(z),
\end{cases}$$

を得る。終端条件は $a(u,t,T)=b(u,t,T)=0$ である。$w(t,h(t),J_t,u)=f(t,h(t),J_t)e^{-u\cdot J_t}$ であるため

$$\begin{aligned}
E[\exp(u\cdot J_t)|\mathcal{F}_t]&=f(t,h(t),J_t)\\
&=w(t,h(t),J_t,u)\cdot e^{u\cdot J_t}\\
&=e^{a(u,t,T)+b(u,t,T)h(t)+u\cdot J_t}.
\end{aligned}$$

$\square$

ここから、ハザード率過程 $h(t)$ が以下の式に従うとする。

$$dh(t) = k(c - h(t))dt + \sigma\sqrt{h(t)}dW_t + \eta dL_t. \tag{44}$$

(44) 式は (40) 式において、$K_0 = kc, K_1 = -k, H_0 = 0, H_1 = \sigma^2, I_0 = 0, I_1 = 1$ と置いたものである。図 69

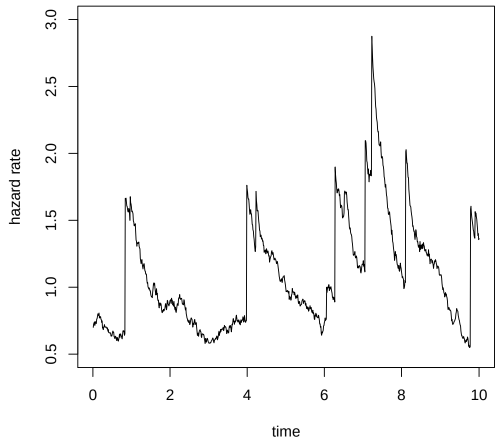


図 69　ハザード率過程のサンプルパス

はハザード率過程が (44) 式に従う場合のサンプルパスである。パラメータは、$\eta = 1.0, k = 2.0, c = h(0) = 0.7, \sigma = 0.2$ で損失は $\{0.2, 0.4, 1.0\}$ の値を一様の確率でとるものとした。命題 5.5 より以下が成り立つ。

命題 5.6　ハザード率過程 $h(t)$ が (44) 式に従うとき、過程 $J = (L, N)^\top$ は次の関係を満たす。

$$E[\exp(u \cdot J_T)|\mathcal{F}_t] = \exp(a(t) + b(t)h(t) + u \cdot J_t). \tag{45}$$

ただし、$t \leq T, u \in \mathbb{C}^2_-$ であり、$a(t) = a(u, t, T), b(t) = b(u, t, T)$ は以下の連立微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} \partial_t b(t) = kb(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 b^2(t) + \left(1 - \int e^{\{\eta b(t) + u\cdot(1,0)^\top\}z} d\nu(z) \cdot e^{u\cdot(0,1)^\top}\right), \\ \partial_t a(t) = -kcb(t). \end{cases}$$

終端条件は $a(T) = b(T) = 0$ である。

また、命題 5.3 と同様にして次の結果を得る。

命題 5.7　(45) 式を u に関して 1 回偏微分して、$u = (0,0)^\top$ とした場合の条件付期待値は $v \in \mathbb{R}^2, t \leq T$ に関して

$$E[v \cdot J_T|\mathcal{F}_t] = \mathcal{A}(0, t, T) + \mathcal{B}(0, t, T)h(t) + v \cdot J_t$$

となる。ただし、$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(u, t, T), \mathcal{B}(t) = \mathcal{B}(u, t, T)$ は以下の連立微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{B}(t) & = k\mathcal{B}(t) - \sigma^2 \mathcal{B}(t) \cdot b(t) - (\eta\mathcal{B}(t) + v \cdot (1,0)^\top)\theta'(\eta b(t) + u \cdot v \cdot (1,0)^\top)e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top} \\ & \quad -v \cdot (0,1)^\top \theta(\eta b(t) + u \cdot v \cdot (1,0)^\top)e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top}, \\ \partial_t \mathcal{A}(t) & = -kc\mathcal{B}(t), \end{cases} \tag{46}$$

終端条件は $\mathcal{A}(T)=\mathcal{B}(T)=0$ である。ここで $\theta'(\omega)$ は、

$$\theta'(\omega)=\int ze^{\omega z}d\nu(z), \qquad \omega\in\mathbb{C},$$

であり、$a(t),b(t)$ は (45) 式を満たす関数とする。

(証明) まず、

$$E[\exp(u\cdot v\cdot J_T)|\mathcal{F}_t]=\exp(a(t)+b(t)h(t)+u\cdot v\cdot J_t)$$

となるような $a(t),b(t)$ が満たす連立微分方程式を求める。$v\in\mathbb{R}^2$ である。命題 5.5 の証明と同様にし、$K_0=kc,K_1=-k,H_0=0,H_1=\sigma^2,I_0=0,I_1=1$ を代入すると以下のような連立微分方程式を得る。

$$\begin{cases}\partial_t b(t)=kb(t)-\frac{1}{2}\sigma^2b^2(t)+\left(1-\int e^{\{\eta b(t)+u\cdot v\cdot(1,0)^\top\}z}d\nu(z)\cdot e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top}\right),\\ \partial_t a(t)=-kcb(t).\end{cases}\tag{47}$$

終端条件は $a(T)=b(T)=0$ である。続いて

$$\begin{aligned}E[\partial_u\exp(u\cdot v\cdot J_T)|\mathcal{F}_t]&=E[v\cdot J_T\exp(u\cdot v\cdot J_T)|\mathcal{F}_t]\\&=\{\partial_u a(t)+\partial_u b(t)h(t)+v\cdot J_t\}\cdot\exp(a(t)+b(t)h(t)+u\cdot v\cdot J_t),\end{aligned}$$

となるような $\partial_u a(t),\partial_u b(t)$ が満たす連立微分方程式を考えることになるが、これは (47) 式を u で偏微分すれば得ることができる。つまり

$$\begin{cases}\partial_u(\partial_t b(t)) &= k\cdot\partial_u b(t)-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot 2\cdot\partial_u b(t)\cdot b(t)\\ &\qquad -(\partial_u b(t)\eta+v\cdot(1,0)^\top)\int z\cdot e^{(b(t)\eta+u\cdot v\cdot(1,0)^\top)z}d\nu(z)\cdot e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top}\\ &\qquad -v\cdot(0,1)^\top\int e^{(b(t)\eta+u\cdot v\cdot(1,0)^\top)z}d\nu(z)\cdot e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top}\\ \partial_u(\partial_t a(t)) &= -kc\cdot\partial_u b(t),\end{cases}$$

を得る。ここで $\partial_u a(t)=\mathcal{A}(t),\partial_u b(t)=\mathcal{B}(t),\theta(\omega)=\int e^{\omega z}d\nu(z),\theta'(\omega)=\int ze^{\omega z}d\nu(z)$ とおくと

$$\begin{cases}\partial_t\mathcal{B}(t) &= k\mathcal{B}(t)-\sigma^2\mathcal{B}(t)\cdot b(t)\\ &\qquad -(\eta\mathcal{B}(t)+v\cdot(1,0)^\top)\theta'(\eta b(t)+u\cdot v\cdot(1,0)^\top)e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top}\\ &\qquad -v\cdot(0,1)^\top\theta(\eta b(t)+u\cdot v\cdot(1,0)^\top)e^{u\cdot v\cdot(0,1)^\top},\\ \partial_t\mathcal{A}(t) &= -kc\mathcal{B}(t),\end{cases}$$

となる。終端条件は $\mathcal{A}(T)=\mathcal{B}(T)=0$ である。この命題では $u=(0,0)^\top$ を考えたいので

$$\begin{aligned}E[\partial_u\exp(u\cdot v\cdot J_T)|\mathcal{F}_t]|_{u=0}&=E[v\cdot J_T|\mathcal{F}_t]\\&=\{\partial_u a(t)|_{u=0}+\partial_u b(t)|_{u=0}h(t)+v\cdot J_t\}\cdot\exp(a(t)+b(t)h(t)+u\cdot v\cdot J_t)|_{u=0}.\end{aligned}$$

$u=0$ のとき (45) 式より $a(t)=b(t)=0$ であるから

$$=\mathcal{A}(0,t,T)+\mathcal{B}(0,t,T)h(t)+v\cdot J_t,$$

を得る。 □

$u=(0,0)^\top$ のとき $a(t)=b(t)=0$ なので、そのときの (46) 式は

$$\begin{cases}\partial_t\mathcal{B}(0,t,T)=k\mathcal{B}(0,t,T)-(\eta\mathcal{B}(0,t,T)+v\cdot(1,0)^\top)\int zd\nu(z)-v\cdot(0,1)^\top,\\ \partial_t\mathcal{A}(0,t,T)=-kc\mathcal{B}(0,t,T),\end{cases}$$

$l = \int z d\nu(z)$ として整理すると

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{B}(0,t,T) = (k - \eta l)\mathcal{B}(0,t,T) - v \cdot (l,1)^\top, \\ \partial_t \mathcal{A}(0,t,T) = -kc\mathcal{B}(0,t,T), \end{cases} \tag{48}$$

となる。終端条件は $\mathcal{A}(0,T,T) = \mathcal{B}(0,T,T) = 0$ である。(48) 式は (32) 式と同じである。つまり、ハザード率過程にブラウン運動の項がプラスされても、デフォルト数過程 N、累積損失過程 L の期待値は同じものになることを示している。さらに、このことは後で紹介するインデックス・スワップのスプレッドが変わらないことも示している。ただし、これは期待値的にという意味で等しいことであり、数値のばらつきに関しては変化をもたらすことになる。 図 70, 図 71, 図 72, 図 73 は 10 万本のハザード率サンプルパスを発生させ

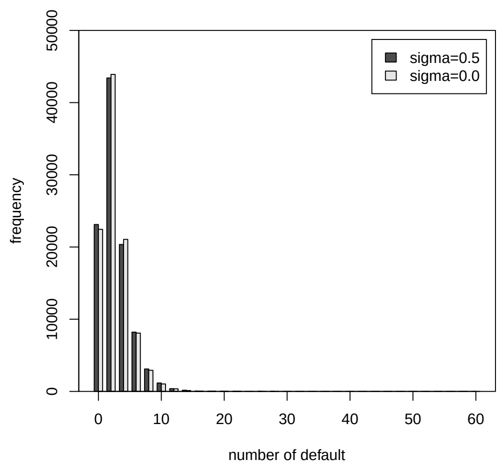


図 70　満期 5 年

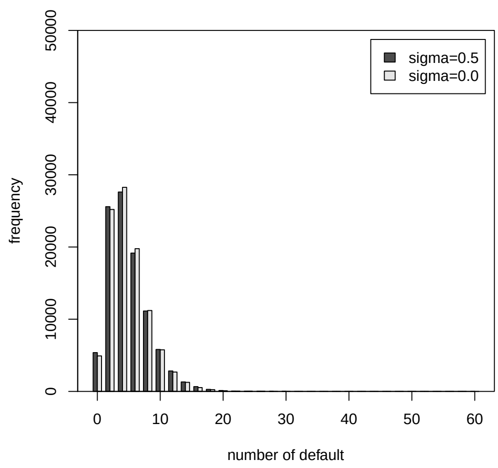


図 71　満期 10 年

てデフォルト数の頻度をグラフにしたものである。パラメータは、$k = 2.0, h(0) = c = 0.3, \eta = 1.0$、損失は $\{0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$ の値を一様の確率でとるものとする。σ は 0 と 0.5 を採用した。どの満期においても、$\sigma = 0.5$ のほうが裾の度数が $\sigma = 0$ よりも大きくなっていることが分かる。標準偏差の値は $\sigma = 0$ のときは満期 5 年から順に $2.13, 3.15, 5.62, 7.32$、$\sigma = 0.5$ のときは $2.20, 3.25, 5.80, 7.54$ であった。わずかであるが σ によってデフォルト数のばらつきが大きくなっていることが分かる。最大のデフォルト数は $\sigma = 0$ のときは満期 5 年から順に $22, 26, 55, 64$、$\sigma = 0.5$ のときは $28, 30, 56, 66$ であった。図 74 はデフォルト間隔と σ との関係を表したものである。パラメータは、$k = 2.0, h(0) = c = 0.3, \eta = 1.0$、満期は 10 年とした。各 σ 毎に 100 万個のデフォルト間隔データの期待値を計算したものをグラフにしてある。σ が大きくなればデフォルト間隔が短くなっていることが分かる。ハザード率過程はデフォルトによりジャンプした後、k により c に回帰することになるが σ が 0 の場合や小さい値である場合よりも σ が大きい場合のほうがブラウン運動のプラスの変動によりジャンプの効果を保ちやすくなる。その結果、次のデフォルトがより早く起こる可能性が高まったと考えられる。ただ、デフォルト数のばらつきの時と同様、その影響は軽微なものである。

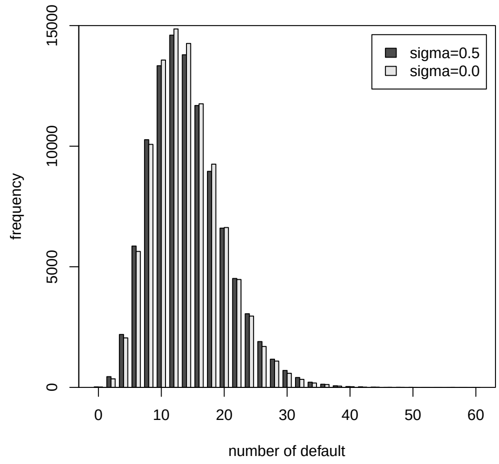


図 72　満期 30 年

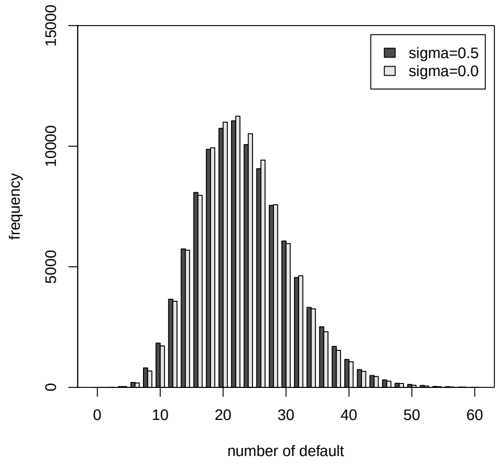


図 73　満期 50 年

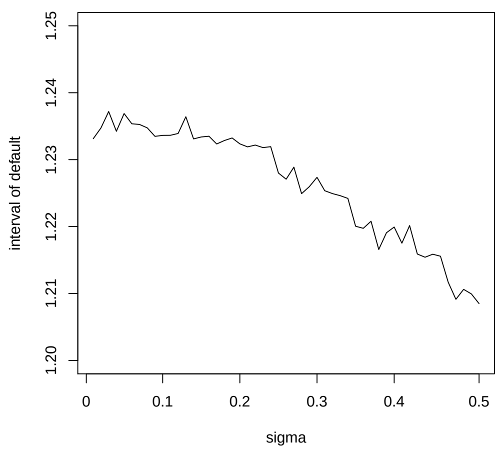


図 74　デフォルト間隔の平均と σ

6　インデックス・スワップの価格付け

この章では、インデックス・スワップの価格付けを行う。Errais et al. [10] を参考にした。インデックス・スワップとは、対象にしているポートフォリオにデフォルトが生じる毎に、損失額を補填してもらうかわりに前もって決められた時点においてポートフォリオのデフォルトに対する保険料のような意味合いを持つプレミアムを支払うという CDS 契約の一種である。N_t を対象とするポートフォリオにおける時点 t までの累積デフォルト数を表す確率過程とする。また、L_t を時点 t までの累積デフォルト損失額を記録する確率過程とする。ポートフォリオは n 個の個別 CDS から構成され、それぞれの想定元本は I/n と均一であると仮定する。

満期 T 及びプレミアム支払日 t_m は共通とする。

6.1 プロテクションの支払サイド

はじめにデフォルトが発生した時に支払を行うプロテクションの支払サイドの t 時点における価値 $D(t)$ について考えることにする。プロテクションの支払サイドにおいてのインデックス・スワップの価値は、発生しうる損失額を割り引いたものの満期 T までの合計のリスク中立確率測度のもとでの期待値と考えられる。よって、$D(t)$ は以下の式で書ける。$\mathcal{F}_t$ は r_t, N_t, L_t を適合過程とするフィルトレーションである。ここでは金利 r は定数とする。

$$D(t) = E\left[\int_t^T e^{-r(s-t)} dL_s|\mathcal{F}_t\right]. \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
D(t) &= E\left[\int_t^T e^{-r(s-t)} dL_s|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[\int_t^T \left(r\cdot e^{-r(s-t)}L_s - r\cdot e^{-r(s-t)}L_s + e^{-r(s-t)}\frac{dL_s}{ds}\right) ds|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[\int_t^T \left(-r\cdot e^{-r(s-t)}L_s + e^{-r(s-t)}\frac{dL_s}{ds}\right) ds|\mathcal{F}_t\right] + E\left[\int_t^T r\cdot e^{-r(s-t)}L_s ds|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[\left[e^{-r(s-t)}L_s\right]_t^T|\mathcal{F}_t\right] + r\int_t^T e^{-r(s-t)}E[L_s|\mathcal{F}_t]ds \\
&= E\left[e^{-r(T-t)}L_T|\mathcal{F}_t\right] - E\left[e^{-r(t-t)}L_t|\mathcal{F}_t\right] + r\int_t^T e^{-r(s-t)}E[L_s|\mathcal{F}_t]ds \\
&= e^{-r(T-t)}E\left[L_T|\mathcal{F}_t\right] - L_t + r\int_t^T e^{-r(s-t)}E[L_s|\mathcal{F}_t]ds.
\end{aligned} \tag{50}$$

また、金利を r_t として時間と共に確率的に変動する過程とすると、

$$\begin{aligned}
D(t) &= E\left[\int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} dL_s|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[\int_t^T \left(r_s\cdot e^{-\int_t^s r_u du}L_s - r_s\cdot e^{-\int_t^s r_u du}L_s + e^{-\int_t^s r_u du}\frac{dL_s}{ds}\right) ds|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[\int_t^T \left(-r_s\cdot e^{-\int_t^s r_u du}L_s + e^{-\int_t^s r_u du}\frac{dL_s}{ds}\right) ds|\mathcal{F}_t\right] + E\left[\int_t^T r_s\cdot e^{-\int_t^s r_u du}L_s ds|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[\left[e^{-\int_t^s r_u du}L_s\right]_t^T|\mathcal{F}_t\right] + \int_t^T E\left[r_s\cdot e^{-\int_t^s r_u du}L_s|\mathcal{F}_t\right] ds
\end{aligned}$$

金利 r_t と損失過程 L_t が独立だと仮定すると

$$\begin{aligned}
&= E\left[e^{-\int_t^T r_u du}L_T|\mathcal{F}_t\right] - E\left[e^{-\int_t^t r_u du}L_t|\mathcal{F}_t\right] + \int_t^T E\left[r_s\cdot e^{-\int_t^s r_u du}|\mathcal{F}_t\right]E[L_s|\mathcal{F}_t]ds \\
&= E\left[e^{-\int_t^T r_u du}|\mathcal{F}_t\right]E\left[L_T|\mathcal{F}_t\right] - L_t + \int_t^T E\left[r_s\cdot e^{-\int_t^s r_u du}|\mathcal{F}_t\right]E[L_s|\mathcal{F}_t]ds.
\end{aligned}$$

を得る。

定理 6.1　インデックス・スワップのプロテクション支払サイドの t 時点における価値 $D(t)$ は、金利を一定にした場合は

$$D(t) = e^{-r(T-t)} E\left[L_T|\mathcal{F}_t\right] - L_t + r\int_t^T e^{-r(s-t)} E[L_s|\mathcal{F}_t] ds.$$

金利が時間に依存し、金利と損失が独立の場合、

$$D(t) = E\left[e^{-\int_t^T r_u du}|\mathcal{F}_t\right] E\left[L_T|\mathcal{F}_t\right] - L_t + \int_t^T E\left[r_s \cdot e^{-\int_t^s r_u du}|\mathcal{F}_t\right] E[L_s|\mathcal{F}_t] ds,$$

となる。

6.2　プロテクションの受取サイド

続いて、プロテクションの受取サイドでのインデックス・スワップの価値を考えることにする。プロテクションの受取サイドでは、プレミアムの支払日 t_m 時点毎での残存想定元本の合計にプレミアム率を掛けたものを満期 T までのプレミアム支払日分足し合わせたものの期待値と考えることにすると、t 時点での受取サイドでのインデックス・スワップの価値 $P(t)$ は

$$P(t) = E\left[\sum_{t_m \geq t} e^{-r(t_m - t)} S(t) \cdot \bar{\alpha}_m \cdot I_{t_m}|\mathcal{F}_t\right]$$

となる。ただし、$S(t)$ はプレミアム率である。$\bar{\alpha}_m$ はプレミアム支払日の間隔を表しており、例えば 3 か月毎であれば $\bar{\alpha}_m = 1/4$ となる。また、I_t は t 時点における残存想定元本の合計であり

$$I_t = I \cdot \left(1 - \frac{N_t}{n}\right) = \frac{I}{n} \cdot (n - N_t).$$

である。

$$\begin{aligned} P(t) &= E\left[\sum_{t_m \geq t} e^{-r(t_m - t)} S(t) \cdot \bar{\alpha}_m \cdot I_{t_m}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E\left[\sum_{t_m \geq t} e^{-r(t_m - t)} S(t) \cdot \bar{\alpha}_m \cdot I \cdot \left(1 - \frac{N_{t_m}}{n}\right)|\mathcal{F}_t\right] \\ &= S(t) \cdot I \cdot \sum_{t_m \geq t} e^{-r(t_m - t)} \cdot \bar{\alpha}_m \cdot \left(1 - \frac{1}{n} E[N_{t_m}|\mathcal{F}_t]\right). \end{aligned} \tag{51}$$

ちなみに、金利 r_t が時間と共に確率的変動し、金利 r_t とデフォルト回数過程 N_t が独立である場合は

$$P(t) = S(t) \cdot I \cdot \sum_{t_m \geq t} E[e^{-\int_t^{t_m} r_u du}|\mathcal{F}_t] \cdot \bar{\alpha}_m \cdot \left(1 - \frac{1}{n} E[N_{t_m}|\mathcal{F}_t]\right).$$

となる。

定理 6.2　インデックス・スワップのプロテクション受取サイドの t 時点における価値 $P(t)$ は、金利を一定にした場合は

$$P(t) = S(t) \cdot I \cdot \sum_{t_m \geq t} e^{-r(t_m - t)} \cdot \bar{\alpha}_m \cdot \left(1 - \frac{1}{n} E[N_{t_m}|\mathcal{F}_t]\right).$$

金利が時間に依存し、金利とデフォルト回数が独立である場合は

$$P(t) = S(t) \cdot I \cdot \sum_{t_m \geq t} E[e^{-\int_t^{t_m} r_u du} | \mathcal{F}_t] \cdot \bar{\alpha}_m \cdot \left(1 - \frac{1}{n} E[N_{t_m} | \mathcal{F}_t]\right),$$

となる。

6.3 スプレッド

(50) 式、(51) 式より、t 時点でのスプレッド (プレミアム率)$S(t)$ は $D(t) = P(t)$ を満たす $S(t)$ となる。

定理 6.3 (i) 金利が一定の場合のインデックス・スワップの t 時点でのスプレッド $S(t)$ は、

$$S(t) = \frac{e^{-r(T-t)} E\left[L_T | \mathcal{F}_t\right] - L_t + r \int_t^T e^{-r(s-t)} E[L_s | \mathcal{F}_t] ds}{I \cdot \sum_{t_m \geq t} e^{-r(t_m - t)} \cdot \bar{\alpha}_m \cdot \left(1 - \frac{1}{n} E[N_{t_m} | \mathcal{F}_t]\right)},$$

となる。(ii) 金利が時間に依存し、金利とデフォルト回数、損失が独立の場合のインデックス・スワップの t 時点でのスプレッド $S(t)$ は、

$$S(t) = \frac{E\left[e^{-\int_t^T r_u du} | \mathcal{F}_t\right] E\left[L_T | \mathcal{F}_t\right] - L_t + \int_t^T E\left[r_s \cdot e^{-\int_t^s r_u du} | \mathcal{F}_t\right] E[L_s | \mathcal{F}_t] ds}{I \cdot \sum_{t_m \geq t} E[e^{-\int_t^{t_m} r_u du} | \mathcal{F}_t] \cdot \bar{\alpha}_m \cdot \left(1 - \frac{1}{n} E[N_{t_m} | \mathcal{F}_t]\right)}.$$

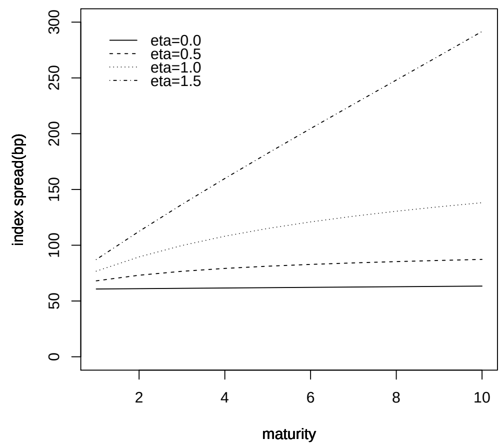


図 75 インデックス・スワップのスプレッドと η

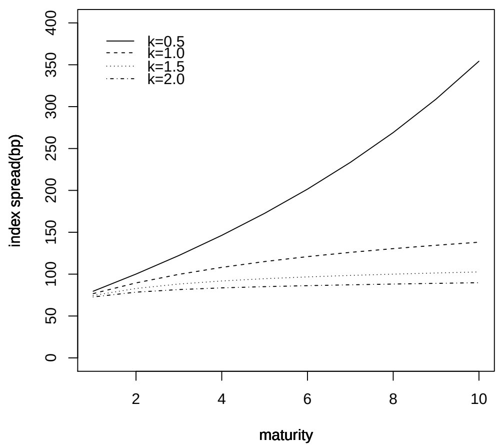


図 76 インデックス・スワップのスプレッドと k

ここからハザード率が (19) 式に従うインデックス・スワップのスプレッド $S(0)$ を計算していく。金利は一定とする。$S(0)$ は、(35) 式、(36) 式より

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{e^{-rt} E\left[L_t | \mathcal{G}_0\right] - L_0 + r \int_0^t e^{-rs} E[L_s | \mathcal{G}_0] ds}{I \cdot \sum_{t_m \geq 0} e^{-r \cdot t_m} \cdot \bar{\alpha}_m \cdot \left(1 - \frac{1}{n} E[N_{t_m} | \mathcal{G}_0]\right)} \\ &= \frac{e^{-rt} \cdot l \cdot \left(\frac{kc + \mu h(0)}{\mu^2}(e^{\mu t} - 1) - \frac{kc}{\mu} t\right) + r \int_0^t e^{-rs} \cdot l \cdot \left(\frac{kc + \mu h(0)}{\mu^2}(e^{\mu s} - 1) - \frac{kc}{\mu} s\right) ds}{I \cdot \sum_{t_m \geq 0} e^{-r \cdot t_m} \cdot \bar{\alpha}_m \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{kc + \mu h(0)}{\mu^2}(e^{\mu \cdot t_m} - 1) - \frac{kc}{\mu} t_m\right)\right)}. \end{aligned} \tag{52}$$

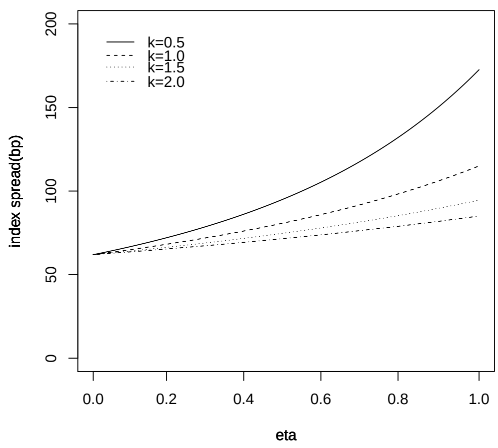


図 77　インデックス・スワップのスプレッドと η と k

図 75, 図 76, 図 77 は η や k によってインデックス・スワップのスプレッドがどのように変化するかを表したものである。図 75, 図 76 における基本パラメータは、$r = 0.05, \bar{\alpha}_m = 0.25, n = 100, I = 100, k = 1.0, h(0) = c = 1.0, l = 0.6, \eta = 1.0$ で満期 T を 1 年から 10 年としている。図 75, 図 76 より、η が大きく、k が小さいほどスプレッドの値は大きくなっていることが分かる。η が大きければデフォルトにより発生した損失に対して大きな割合でハザード率をジャンプさせることになりその後のデフォルトの起こりやすさが大きくなる。逆に k が大きい場合は、ハザード率がジャンプしても回帰するスピードが速くなり、その後のデフォルトが起こる機会が減ることになる。図 77 は図 75, 図 76 と同じ基本パラメータとし、満期 T を 5 年としたものである。図 77 は図 75, 図 76 をまとめたようなものである。η が大きく、k が小さいほどスプレッドの値は大きくなっていることが分かる。図 78, 図 79 は、図 77 における (52) 式の分母、分子の値を示したものである。図 78 は分子、図 79 は分母の値の変化を見ている。分母分子とも図 77 で見た、η が大きく、k が小さいほどスプレッドの値は大きくなる性質を説明できる変化をしている。ただ、分子の方が分母よりも大きな変化をしていることが分かる。分子にはベーシス・ポイント換算のために (52) 式の値を 10^4 倍してある。これは、デフォルトの回数について考える必要もあるが、それ以上にデフォルト時の損失額について考えることが重要になることを示しており、累積損失額過程のパラメータ推定に気を付ける必要があることが示唆できる。ここで、(20) 式を使いインデックスの中でのデフォルト時刻について見てみる。図 80 は、デフォルトが起きてから次のデフォルトが起こるまでの時間を表したグラフである。縦軸が時間を表しており、「デフォルトが起きた時刻」－「その前のデフォルト時刻」の値の平均値をシミュレーションにより求めたものである。また、図 81 は、始めのデフォルトが起こりハザード率がジャンプしてから k によって元の水準に戻ってくるまでの時間を表したグラフである。図 80 と同様に縦軸が時間を表しており、「$|h(t) - c| < 0.0001$ になった時刻」－「始めのジャンプが起きた時刻」の平均値をシミュレーションにより求めたものである。例えば、図 47 では時刻 4.5 に始めのデフォルトが起き、時刻 8.0 あたりで元の水準に回帰している。$8.0 - 4.5 = 3.5$ が図 81 で見たい時間となる。ハザード率過程が (20) 式に従うとし、パラメータは、$c = h(0) = 0.7$ で損失は $\{0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$ の値を一様の確率でとるものとした。η が大きい程ハザード率が大きく上昇しデフォルトが起こる可能性も高くなり、短期間でのデフォルト、長期間のデフォルト連鎖が起こり易くなっていることが分かる。η の大きさ

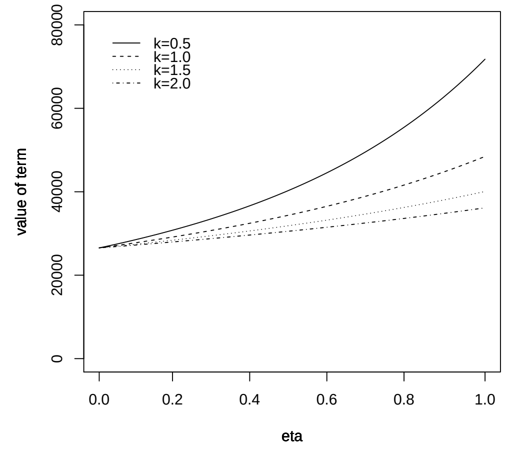


図 78　プロテクションの支払サイド

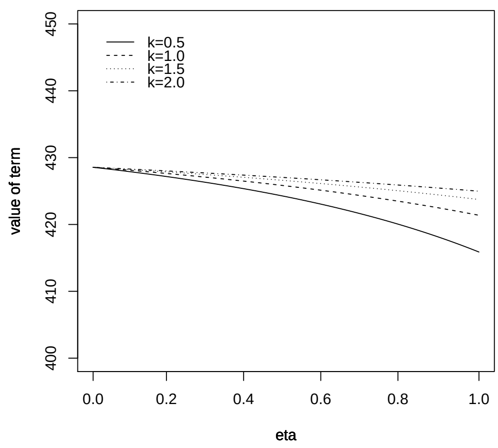


図 79　プロテクションの受取サイド

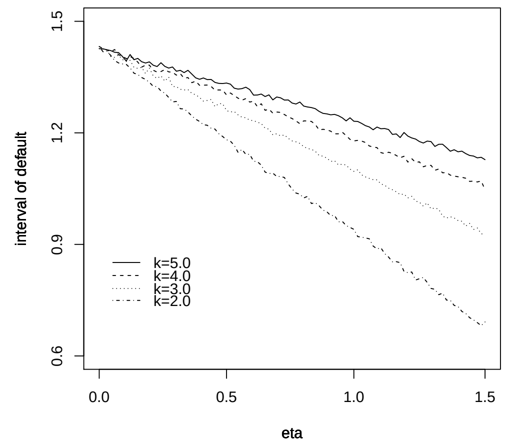


図 80　デフォルト間隔と η と k

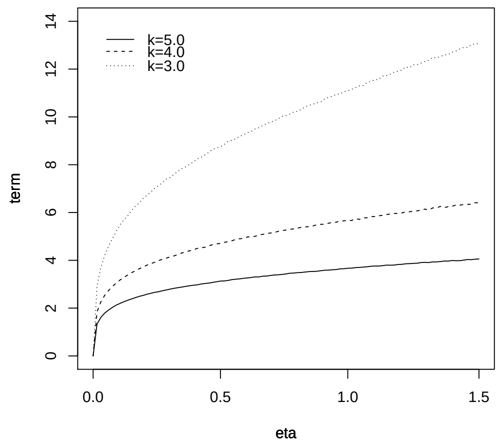


図 81　連鎖デフォルト期間と η と k

はポートフォリオ内のデフォルト相互関係の強さや企業間の関係の強さを表していると考えられる。η が大きいポートフォリオ内では短期間でのデフォルト連鎖が起こる危険があり、またその連鎖状態は企業の相互関係の強さからなかなか消えることはなく、長時間に渡りジワジワとデフォルト被害が拡大する危険が大きいということが示唆できる。また、図 77, 図 80, 図 81 から、k が小さい時ほど η の値による変化が大きいことが分かる。このことから、ハザード率過程の分散や分散が大きい時の k や η の推定精度に注意しなければならないということが言える。

7 ヘッジ戦略

この章では、プロテクションの支払側が補填するであろう累積損失額をヘッジする方法について述べる。ヘッジング手法の一つである risk-minimizing を扱うことにする。主に Møller [13] を参考にした。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間、$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ をフィルトレーションとする。P はリスク中立測度である。また $X = (X_t)_{0\le t\le T}$ を局所二乗可積分で局所マルチンゲールな過程とする。X はヘッジングに使われるリスク資産の割引価格過程として用いる。戦略を $\varphi = (\xi, \gamma)$ と定義し、$\mathcal{L}^2(P_X)$ を

$$E\left[\int_0^T \xi_u^2 d\langle X\rangle_u\right] < \infty,$$

を満たす過程 ξ の空間とする。ここで $\langle X\rangle$ は X の二次変分を表す。ξ_t は t 時点でのリスク資産の保有量、γ_t は t 時点での割引預金高とする。ここで $\varphi_t = (\xi_t, \gamma_t)$ で作られたポートフォリオの価値過程を

$$V_t(\varphi) = \xi_t X_t + \gamma_t, \qquad 0 \le t \le T, \tag{53}$$

と定義する。また、A を二乗可積分であり右連続で左極限を持つ過程とする。この過程 A はヘッジする側のプロテクションの受け手への累積割引支出額を表すものとする。例えば

$$A_t = -\kappa + 1_{\{t\ge T\}}H, \qquad 0 \le t \le T,$$

とした場合、ヘッジ側は 0 時点でプロテクションの受け手から κ を受け取り、満期 T に H をプロテクションの受け手へ払うということを表していることになる。さらに、ヘッジに必要となるコストとプロテクションの受け手への支出額の累積過程として $C(\varphi) = (C_t(\varphi))_{0\le t\le T}$ を用意する。つまり次のような過程である。

$$\Delta C_t(\varphi) = C_{t+\Delta t}(\varphi) - C_t(\varphi) = (\xi_{t+\Delta t} - \xi_t)X_{t+\Delta t} + (\gamma_{t+\Delta t} - \gamma_t) + A_{t+\Delta t} - A_t.$$

式 (53) より

$$\begin{aligned}\Delta C_t(\varphi) &= (\xi_{t+\Delta t}X_{t+\Delta t} + \gamma_{t+\Delta t}) - (\xi_t X_t + \gamma_t) - \xi_t X_{t+\Delta t} + \xi_t X_t + A_{t+\Delta t} - A_t \\ &= V_{t+\Delta t}(\varphi) - V_t(\varphi) - \xi_t(X_{t+\Delta t} - X_t) + A_{t+\Delta t} - A_t.\end{aligned}$$

両辺の極限をとると

$$dC_t(\varphi) = dV_t(\varphi) - \xi_t dX_t + dA_t,$$

両辺を時刻 t から満期 T まで積分すると

$$C_T(\varphi) - C_t(\varphi) = V_T(\varphi) - V_t(\varphi) - \int_t^T \xi_u dX_u + A_T - A_t, \tag{54}$$

を得る。初期値 $C_0(\varphi)$ は

$$C_0(\varphi) = V_0(\varphi) + A_0,$$

で与えられる。ここで、リスク過程 $R_t(\varphi)$ を

$$R_t(\varphi) = E[(C_T(\varphi) - C_t(\varphi))^2|\mathcal{F}_t],$$

と定義する。$V_T(\varphi)=0$ と考えるとリスク過程 $R_t(\varphi)$ は「時刻 t と満期 T でのプロテクションの受け手への支出額の累積額の差」と「時刻 t でのポートフォリオの価値と戦略 φ における取引収益の合計」の差のばらつきの大きさを表しているといえる。つまり、リスク過程 $R_t(\varphi)$ の値を小さくすることは将来、支払いに必要になる金額とその時点で所持している資金の差のばらつきを減らすことと同じである。

定義 7.1 (Møller[13] : DefinitionA.2) 戦略 $\varphi=(\xi,\gamma)$ が任意の $t\in[0,T]$ で $V_T(\varphi)=V_T(\hat{\varphi})\quad P-a.s.$, $s\le t$ に対して $\xi_s=\hat{\xi_s}$, $s<t$ に対して $\gamma_s=\hat{\gamma_s}$ を満たす $\hat{\varphi}=(\hat{\xi},\hat{\gamma})$ に対して $R_t(\hat{\varphi})\ge R_t(\varphi)$ となるとき、φ を risk-minimizing 戦略という。また、$V_T(\varphi)=0$ である φ を 0-admissible と呼ぶ。

命題 7.1 (Møller[13] : LemmaA.4) φ が risk-minimizing 戦略であるならば、$C_t(\varphi)$ はマルチンゲールとなる。

(証明) 次のように確かめられる。

$$\begin{aligned}E[(C_T(\hat{\varphi})-C_t(\hat{\varphi}))^2|\mathcal{F}_t]&=E[C_T^2(\hat{\varphi})|\mathcal{F}_t]-2C_t(\hat{\varphi})E[C_T(\hat{\varphi})|\mathcal{F}_t]+E[C_t^2(\hat{\varphi})|\mathcal{F}_t]\\&=(C_t(\hat{\varphi})-E[C_T(\hat{\varphi})|\mathcal{F}_t])^2-Var(C_T|\mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

つまり

$$C_t(\hat{\varphi})=E[C_T(\hat{\varphi})|\mathcal{F}_t],$$

のとき、$R_t(\hat{\varphi})$ は最小になる。つまり $C_t(\hat{\varphi})$ はマルチンゲールとなる。 □

次に記述する Galtchouk-Kunita-Watanabe 分解は risk-minimizing 戦略を構築する上で重要である。

命題 7.2 (Cont et al. [6] : Proposition10.4) $(X_t)_{0\le t\le T}$ をリスク中立測度 P に関して二乗可積分マルチンゲールである過程とする。このとき X_t の過去情報に依存する確率変数 $\hat{U}$ に対して戦略 $(\xi^U)_{0\le t\le T}$ が一意に存在し、以下のように書き表すことができる。

$$\hat{U}=E^Q[\hat{U}]+\int_0^T\xi_t^U dX_t+H^U,\quad probability\quad 1.$$

ここで、H^U は X_t に関する確率積分に直交する確率変数である。確率変数 S,W が直交するとは $E[SW]=0$ を表す。

マルチンゲール過程 A^* を次のように定義する。

$$A_t^*=E[A_T|\mathcal{F}_t],\qquad 0\le t\le T.$$

A^* はマルチンゲールであることと Galtchouk-Kunita-Watanabe 分解より

$$A_t^*=E[A_T|\mathcal{F}_t]=A_0^*+\int_0^t\xi_u^A dX_u+H_t^A,\tag{55}$$

を得る。ここで H^A は X_t に関する確率積分に直交する平均 0 マルチンゲールな確率変数である。

定理 7.1 (Møller[13] : Theorem2.1) 過程 A に対する戦略として、次のように与えられる $0-$admissible な risk-minimizing 戦略 $\varphi=(\xi,\gamma)$ が一意に存在する。

$$(\xi_t,\gamma_t)=(\xi_t^A,A_t^*-A_t-\xi_t^A X_t),\qquad 0\le t\le T.$$

また、そのときのリスク過程 $R_t(\hat{\varphi})$ は

$$R_t(\hat{\varphi}) = E[(H_T^A - H_t^A)^2 | \mathcal{F}_t], \tag{56}$$

で与えられる。

(証明) 次のように得られる。

$$\begin{aligned} A_T = E[A_T|\mathcal{F}_T] &= A_0^* + \int_0^T \xi_u^A dX_u + H_T^A \\ &= A_0^* + \int_0^t \xi_u^A dX_u + \int_t^T \xi_u^A dX_u + H_T^A + (H_t^A - H_t^A). \end{aligned}$$

(55) 式より整理すると

$$= A_t^* + \int_t^T \xi_u^A dX_u + (H_T^A - H_t^A). \tag{57}$$

任意の $0-$admissible な戦略 $\tilde{\varphi} = (\tilde{\xi}, \tilde{\gamma})$ に対して、(54) 式より

$$C_T(\tilde{\varphi}) - C_t(\tilde{\varphi}) = V_T(\tilde{\varphi}) - \int_0^T \tilde{\xi}_u dX_u + A_T - \left(V_t(\tilde{\varphi}) - \int_0^t \tilde{\xi}_u dX_u + A_t \right),$$

(57) 式より

$$= V_T(\tilde{\varphi}) - \int_0^T \tilde{\xi}_u dX_u + A_t^* + \int_t^T \xi_u^A dX_u + (H_T^A - H_t^A) - \left(V_t(\tilde{\varphi}) - \int_0^t \tilde{\xi}_u dX_u + A_t \right),$$

$0-$admissible 、すなわち $V_T(\tilde{\varphi}) = 0$ より整理すると

$$= (A_t^* - A_t - V_t(\tilde{\varphi})) + (H_T^A - H_t^A) + \int_t^T (\xi_u^A - \tilde{\xi}_u) dX_u,$$

を得る。

$$\begin{aligned} R_t(\tilde{\varphi}) = E[(C_T(\tilde{\varphi}) - C_t(\tilde{\varphi}))^2|\mathcal{F}_t] &= E\bigg[(A_t^* - A_t - V_t(\tilde{\varphi}))^2 + (H_T^A - H_t^A)^2 + \int_t^T (\xi_u^A - \tilde{\xi}_u)^2 d\langle X\rangle_u \\ &\quad + 2(A_t^* - A_t - V_t(\tilde{\varphi}))\cdot(H_T^A - H_t^A) + 2\int_t^T (\xi_u^A - \tilde{\xi}_u) dX_u \cdot (H_T^A - H_t^A) \\ &\quad + 2(A_t^* - A_t - V_t(\tilde{\varphi}))\cdot \int_t^T (\xi_u^A - \tilde{\xi}_u) dX_u |\mathcal{F}_t\bigg], \end{aligned}$$

X,H^A のマルチンゲール性と H^A と X_t に関する確率積分の直交性より

$$= (A_t^* - A_t - V_t(\tilde{\varphi}))^2 + E\left[(H_T^A - H_t^A)^2|\mathcal{F}_t\right] + E\left[\int_t^T (\xi_u^A - \tilde{\xi}_u)^2 d\langle X\rangle_u |\mathcal{F}_t\right].$$

戦略 $\tilde{\varphi}$ が関わっているのは第 1 項目と第 3 項目である。ヘッジ戦略によってリスク過程 $R_t(\tilde{\varphi})$ を最小にするためには、任意の t に対して

$$V_t(\tilde{\varphi}) = A_t^* - A_t, \qquad \tilde{\xi}_t = \xi_t^A,$$

とすればよい。つまり

$$R_t(\tilde{\varphi}) = E\left[(H_T^A - H_t^A)^2 | \mathcal{F}_t\right],$$

となる。risk-minimizing な戦略の一意性に関しては、もし $\hat{\varphi}$ が $0-$ admissible で risk-minimizing 戦略であるなら $\hat{\varphi}$ は $R_0(\cdot)$ を最小にする。よって $\hat{\xi}_t = \xi_t^A$. さらに $C_t(\hat{\varphi})$ のマルチンゲール性より

$$C_t(\hat{\varphi}) = E[C_T(\hat{\varphi})|\mathcal{F}_t],$$

$$V_t(\hat{\varphi}) - \int_0^t \hat{\xi}_u dX_u + A_t = E\left[V_T(\hat{\varphi}) - \int_0^T \hat{\xi}_u dX_u + A_t^* + \int_t^T \xi_u^A dX_u + (H_T^A - H_t^A)|\mathcal{F}_t\right],$$

X_t と H_t^A のマルチンゲール性より

$$V_t(\hat{\varphi}) - \int_0^t \hat{\xi}_u dX_u + A_t = E\left[V_T(\hat{\varphi}) - \int_0^t \hat{\xi}_u dX_u + A_t^* |\mathcal{F}_t\right],$$

$\hat{\varphi}$ が $0-$ admissible であるため

$$V_t(\hat{\varphi}) - \int_0^t \hat{\xi}_u dX_u + A_t = -\int_0^t \hat{\xi}_u dX_u + A_t^*,$$

$$V_t(\hat{\varphi}) = A_t^* - A_t, \tag{58}$$

となり、$V(\varphi)$ の定義より $\hat{\gamma}_t = V_t(\hat{\varphi}) - \hat{\xi}_t X_t$ なので、$\hat{\gamma}_t = A_t^* - A_t - \hat{\xi}_t X_t$ となる。 □

(58) 式より

$$V_t(\hat{\varphi}) = A_t^* - A_t = E[A_T|\mathcal{F}_t] - A_t = E[A_T - A_t|\mathcal{F}_t].$$

これは、戦略 $\hat{\varphi}$ が「時刻 t でのポートフォリオの価値は時刻 t における満期までに必要になるプロテクションの受け手への支出額の期待値と等しくなるということ」を保証していることを示している。

インデックス・スワップのヘッジ戦略を導き出したい場合は、まずインデックス・スワップに関する A^* を考え、その Galtchouk-Kunita-Watanabe 分解を導き出せばよい。

8 おわりに

第 3 章でハザード率過程に相関を持たせた場合、Vasicek タイプ・モデルと CIR タイプ・モデルではイールド・スプレッドへの相関の現れ方が異なることを見た。Vasicek タイプ・モデルの場合はハザード率過程の拡散係数 σ の値の大きさに影響を受けないが CIR タイプ・モデルの場合は影響を受ける。σ の値が大きい場合ほど、イールド・スプレッドの相関が小さい状態でもハザード率過程の相関を大きく捉えることになる。ここで、σ を不況時に高騰する株価のボラティリティと同じようなものと考える。すると不況時には σ の値は大きくなると考えられる。CIR タイプ・モデルを用いた場合、同じイールド・スプレッドの相関を得たとき、不況時ほど大きなハザード率過程の相関を得ることになる。つまり、Vasicek タイプ・モデルよりも CIR タイプ・モデルを用いた場合の方が不況時のデフォルトの相互依存の高まりをしっかり捉えられるということになる。また、デフォルト時刻の間隔についてのシミュレーションでは、デフォルト間隔はハザード率過程の長期的分散に大きく影響を受けることを見た。一方でブラウン運動へ相関を入れた影響は強くは現れなかった。リーマン・ショックにおいてはリーマン・ブラザーズが破綻したことを受けて、他社の破綻危険度が高まった考えられる。そう考えると、今回のような、企業のハザード率過程が相関を持って日々連動するが、一方が破綻した影響を他方のハザード率過程に反映しない相関の入れ方ではなく、日々相関を持って連動もするし、破綻が起

きればその影響を受けてハザード率過程がジャンプするような相関の入れ方の方がいいように考えられる。ハザード率過程のモデルとしては、今回扱った Vasicek や CIR の式に破綻が起きた時に上昇する複合ポアソン過程からなるジャンプ項を加えたようなものがいいのではいなかと考える。今後はハザード率過程にそのような affine jump diffusion モデルを用いた分析が必要である。

第 6 章では Hawkes 過程を用いたインデックス・スワップの評価について考察した。スプレッド計算においてはプロテクションの支払側にとって重要な累積損失額過程のパラメータ推定を慎重に行う必要があることを述べた。本論文では、パソコン上でのシミュレーションを中心に分析を行ったが、実際に金融機関などで使用する場合はパラメータ推定は必須である。今後はそのパラメータ推定をどのようにしていくかという研究も進めていく必要がある。拡張過程のところでは、スプレッド計算においてはブラウン運動の項はその値に影響を与えず、本論文でのパラメータ設定ではデフォルト回数の標準偏差への影響も軽微なものであると述べた。スプレッド計算のみに注目すればハザード率過程を複雑なものにする必要はないようである。しかし、軽微ではあるものの「ばらつき」には影響を与えることを考えると、その辺りの研究もしなければならない。例えば、最後に触れたヘッジ戦略である。ヘッジ戦略ではブラウン運動の項の影響が出てくると考えている。特に定理 7.1 のリスク過程 $R_t(\hat{\varphi})$ が σ の値によってどのように変化するかに注目したい。最後に、このヘッジ戦略に関する課題について、これまでに得られている結果を述べる。

金利 $r(t)$ がリスク中立確率の下、次の確率微分方程式を満たすとする。

$$dr(t) = m(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dW_t^r.$$

ただし、$m(r(t), t)$ と $\sigma(r(t), t)$ は

$$m(r(t), t) = m_{r1}(t) + m_{r2}(t) \cdot r(t),$$
$$\sigma^2(r(t), t) = \sigma_{r1}(t) + \sigma_{r2}(t) \cdot r(t),$$

という形で表される関数とする。ここで $m_{ri}(t), \sigma_{ri}(i = 1, 2)$ は、確定的な関数で

$$m_{r1}(t) - m_{r2}(t)\sigma_{r1}(t)\sigma_{r2}^{-1}(t) \geq 0, \qquad t \in [0, T],$$

を満たすものとする。また、インデックス全体のハザード率過程 h(t) は (44) 式と同様の確率微分方程式

$$dh(t) = k(c - h(t))dt + \sigma\sqrt{h(t)}dW_t^h + \eta dL_t,$$

を満たすとする。W_t^r と W_t^h は標準ブラウン運動である。また、L_t は確率的変動強度 $h(t)$ を持つ計数過程 N_t に従う純ジャンプ過程である。$\mathcal{H}_t$ をハザード率過程から生成されるフィルトレーション、$\mathcal{G}_t$ を W_t^r から生成されるフィルトレーションとする。W_t^r,W_t^h,N_t,L_t は互いに独立しているとする。満期 T のデフォルト・フリーな割引債の t 時点の価格 $P(t, T)$ を

$$P(t, T) = \mathrm{E}\left[e^{-\int_t^T r(u)du}|\mathcal{G}_t\right],$$

と定義する。$r(t)$ のマルコフ性を仮定した場合、定理 3.1 より

$$P(t, T) = \mathrm{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)|\mathcal{G}_t\right] = \exp(-\phi_r(t, T) - \psi_r(t, T)r(t)),$$

が成り立つ。ただし、$\phi_r(t, T), \psi_r(t, T)$ は以下の連立微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} \phi_r'(t, T) = -\frac{1}{2}\sigma_{r1}(t)\psi_r^2(t, T) + m_{r1}(t)\psi_r(t, T), \\ \psi_r'(t, T) = -\frac{1}{2}\sigma_{r2}(t)\psi_r^2(t, T) + m_{r2}(t)\psi_r(t, T) + 1, \\ \phi_r(0, 0) = \psi_r(0, 0) = 0. \end{cases}$$

伊藤の公式より

$$
\begin{aligned}
dP(t,T) &= \frac{\partial}{\partial t}P(t,T)dt + \frac{\partial}{\partial r}P(t,T)dr(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}P(t,T)d\langle r\rangle_t \\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial t}\phi_r(t,T) + \frac{\partial}{\partial t}\psi_r(t,T)r(t)\right\}P(t,T)dt - \psi_r(t,T)\cdot P(t,T)dr(t) + \frac{1}{2}\psi_r^2(t,T)\cdot P(t,T)d\langle r\rangle_t.
\end{aligned}
$$

$\phi_r(t,T), \psi_r(t,T)$ が満たす連立微分方程式より

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\frac{1}{2}\sigma_{r1}(t)\psi_r^2(t,T) + m_{r1}(t)\psi_r(t,T) - \left\{\frac{1}{2}\sigma_{r2}(t)\psi_r^2(t,T) - m_{r2}(t)\psi_r(t,T) - 1\right\}r(t)\right]P(t,T)dt \\
&\quad - \psi_r(t,T)\cdot P(t,T)\cdot\left\{(m_{r1}(t) + m_{r2}(t)r(t))dt + \sqrt{\sigma_{r1}(t) + \sigma_{r2}(t)r(t)}dW_t^r\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\psi_r^2(t,T)\cdot P(t,T)\cdot(\sigma_{r1}(t) + \sigma_{r2}(t)r(t))dt \\
&= r(t)\cdot P(t,T)dt - \psi_r(t,T)\cdot P(t,T)\cdot\sigma(r(t),t)dW_t^r,
\end{aligned}
$$

となる。過程 $B(t)$ を

$$
B(t) = e^{\int_0^t r(u)du}, \qquad B(0) = 1,
$$

と定義する。割引過程 $P^*(t,T)$ を

$$
P^*(t,T) = \frac{P(t,T)}{B(t)},
$$

と定義すると

$$
dP^*(t,T) = -\psi_r(t,T)\cdot P^*(t,T)\cdot\sigma(r(t),t)dW_t^r, \tag{59}
$$

となる。(59) 式より

$$
-\sigma(r(t),t)dW_t^r = \frac{1}{\psi_r(t,T)\cdot P^*(t,T)}dP^*(t,T).
$$

ここでインデックスにおいての A^* について考えることにする。$\tilde{A}$ をプロテクションへの累積支払額だと考えると

$$
\begin{aligned}
A_t^* &= \mathrm{E}\left[A_T|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^\tau r(u)du}d\tilde{A}(\tau)|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \int_0^t e^{-\int_0^\tau r(u)du}d\tilde{A}(\tau) + \mathrm{E}\left[\int_{(t,T]} e^{-\int_0^\tau r(u)du}d\tilde{A}(\tau)|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \int_0^t e^{-\int_0^\tau r(u)du}d\tilde{A}(\tau) + e^{-\int_0^t r(u)du}\cdot\mathrm{E}\left[\int_{(t,T]} e^{-\int_t^\tau r(u)du}d\tilde{A}(\tau)|\mathcal{F}_t\right],
\end{aligned}
$$

を得る。$\mathcal{F}_t$ は $\mathcal{H}_t$ と $\mathcal{G}_t$ を集めたフィルトレーションである。$\tilde{A}$ は以下の確率微分方程式に従うとする。

$$
\tilde{A}(t) = -S(0)\cdot\bar{\alpha}\cdot I\cdot\sum_{0\le t_i\le t}\left(1 - \frac{N_{t_i}}{n}\right) + L_t.
$$

ただし、$S(0)$ は 0 時点、つまり契約時に決めたプレミアム、$\bar{\alpha}$ はプレミアム支払の間隔、I は元本合計、N_t はデフォルト数過程、n はインデックス内の企業数、L_t は累積損失額、t_i をプレミアム支払日とする。条件付期待値の部分を

$$
D(t,r(t),h(t)) = \mathrm{E}\left[\int_{(t,T]} e^{-\int_t^\tau r(u)du}d\tilde{A}(\tau)|\mathcal{F}_t\right],
$$

と定義する。このとき A^* の Galtchouk-Kunita-Watanabe 分解は次のように与えられる。ただし $z(t)$ は t 時点における損失額を表す確率変数である。

$$A_t^* = \mathrm{E}[A_T|\mathcal{F}_t] = A_0^* + \int_0^t \xi_s^A dP^*(s,T) + H_t^A$$

ただし

$$\begin{aligned}
A_0^* &= -S(0)\cdot I\cdot\bar{\alpha} + D(0, r(0), h(0)),\\
\xi_t^A &= -B^{-1}(s)\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial r}D(t, r(t), h(t))}{\psi_r(t,T)\cdot P^*(t,T)},\\
H_t^A &= \int_0^t B^{-1}(s)\cdot\frac{\partial}{\partial h}D(s, r(s), h(s))\cdot\sigma\sqrt{h(s)}dW_s^h\\
&\quad + \int_0^t B^{-1}(s)\cdot\left\{\left[D(s, r(s), h(s)) - D(s-, r(s-), h(s-))\right] + z(s)\right\}dM_s.
\end{aligned}$$

ここまでが、これまでに得られている結果である。しかし、この結果に対する数学的な確認はとれていないため、直近の課題はその確認をすることである。

参考文献

[1] 植林茂：バブル崩壊後のわが国金融危機といわゆるリーマンショックの比較-金融危機における政府, 中央銀行の役割についての考察-, 社会科学論集, 第 131・第 132 合併号, 2011.

[2] 楠岡成雄, 青沼君明, 中川秀敏：クレジット・リスク・モデル, 金融財政事情研究会, 2001.

[3] CREST 「複雑な金融商品の数学的構造と無限次元解析」: Black-Cox モデルとジャンプ過程についてのいくつかの数値実験と考察, 2011.

[4] 多和田茉莉子：CDS 価格決定における相関の影響, 法政大学卒業論文, 2011.

[5] 深尾光洋：サブプライムローン問題と金融市場, 学術の動向, 2009.

[6] Cont, R., Tankov, P. : Financial Modeling With Jump Processes. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2003.

[7] Dahl, M., Møller, T. : Valuation and hedging of life insurance liabilities with systematic mortality risk,Insurance: Mathematics and Economics 39, 193-217, 2006.

[8] Duffie, D., Kenneth J. Singleton : Credit risk: pricing, measurement, and management, Princeton University Press, 2003.

[9] Errais, E., Giesecke, K., Goldberg, L. : Affine point processes and portfolio credit risk, SIAM J, Financial Math, 1, 642-665, 2010.

[10] Errais, E., Giesecke, K., Goldberg, L. : Pricing credit from the top down with affine point processes, 2006

[11] Jeanblanc, M., M.Yor, and M.Chesney : Mathematical Methods for Financial Markets, Berlin: Springer, 2006.

[12] Johnson, WP. : The Curious History of Fa á di Bruno's Formula, The American Mathematical Monthly, 2002.

[13] Møller, T. : Risk-minimizing hedging strategies for insurance payment processes,Finance Stochast. 5, 419-446, 2001.