

発散のないmodelの試作(11)

Furuoya, Izumi / 古尾谷, 泉

(出版者 / Publisher)

法政大学多摩研究報告編集委員会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学多摩研究報告 / 法政大学多摩研究報告

(巻 / Volume)

24

(開始ページ / Start Page)

133

(終了ページ / End Page)

142

(発行年 / Year)

2009-05-30

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00008177>

発散のないmodelの試作 (XI)

古尾谷 泉

An attempt toward a non-divergent model (XI)

Izumi FURUOYA

1. はじめに

素粒子論（場の理論）の摂動計算における中間状態の事象は不確定性原理により支配される微小な領域での話である。そこでは、energy にゆらぎが生じて、仮想的に粒子が生れたり消えたりしている。この量子効果によって、古典的場からのずれが生じる（古典的な場とは量子化された場の operator の期待値と考える）。このずれの一例として、vacuum polarization による Coulomb potential からのずれがある。このずれは Uehling の potential として知られている。このずれの生じる空間はごく狭くて電子の Compton wave length 程度の広がりである。このことから、Coulomb の法則は低 energy 領域で日常的なスケールでは正しく成立していると考えてよからう。

外場すなわち、古典的場が存在するときには、電子は外場の衣をまとうことになる（bound^{注)}

interaction approximation)。このとき、電子の loop は、Fig.1で示されるような衣をまとった電子の loop となる。外場 $\varphi_\mu(x)$ が存在するときの電子の propagation function $G(x, x')$ は外場と相互作用している Dirac 方程式

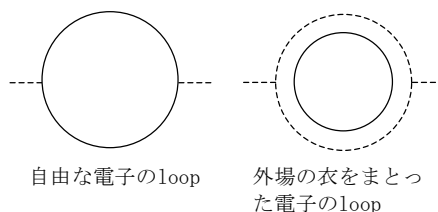


図 1

$$(\gamma^\mu(\partial_\mu + ie\varphi_\mu) + m)G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (1)$$

の解であたえられる。一般には、Eq.(1)の explicit な解を見つけることは困難であり、特殊な場合を除いて、そのような解は見い出されていない。自由場の propagation function は2点

注) J. M. Jauch and F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, 1976, Springer-Verlag.

の差の関数 $G(x-x')$ であるが、Eq.(1)の解は2つの点 x と x' とに別個に依存する。すなわち、 $G(x,x')$ は8個の変数 x, x' すべてに独立に依存する関数である。ここで注意しておきたいのは、 $G(x,x')$ は外場 $\phi_\mu(x)$ の強さによって変化するであろう、その結果、外場が存在するときの vacuum polarization は、同様に、外場の強さによって変化するであろうという点である。そして、この dynamical な量子効果は常について回り、けっして切り離すことは出来ないのである。このように考えてくると、外場と相互作用している電子の電荷は外場の強さによって、その値が変化することが予測される。しかし、その変化の大きさについては具体的な計算例について調べたわけではないので、それがどの程度のものなのか、現時点では判然としない。今後、このことを調べる必要があろう。しかし、発散の問題は高 energy 領域での話であり、その energy 領域ではこの変化が有意であることを前提にして議論をすすめることにしよう。

このような場合には、電磁場や Dirac 方程式等の基礎方程式は、これらの量子効果のかげにかくれてしまっていて、その真の姿を見ることは出来ないであろう。また、外場の強さによって電荷の値が変化してしまうとなると、力等の物理の基本単位は決定出来なくなってしまうのではないか。このように考えてくると、現在の理論は、その内部に理論上の矛盾を含んでいることになる。そこで、このように基礎理論の真の姿は見えないのであるから、現在の理論が再現出来る実験値の精度を乱さない範囲内で、我々は現在の基礎理論を修正することを試みよう。

我々の model では、古典的な意味で、いいかえると、基礎理論について電荷の値は相互作用によって変わってはならない恒常的不変量であるという要請をおく。この要請の数学的表現は以下である。まず、Minkowski space における荷電粒子の電荷電流密度を $j^\alpha, \alpha=0,1,2,3$ とし、電荷密度 $e\rho(\rho=j^0)$ を相対論的に拡張して、それを $e\sqrt{\eta_{\alpha\beta}j^\alpha j^\beta}$ とする。ここで、 $\eta_{\alpha\beta}$ は Minkowski metric tensor である。次に、Minkowski space の次元を拡張して、この拡張された空間内に定曲率 $1/a$ をもつ超曲面をうめ込む。そして、この超曲面上に電荷電流密度を導入して、それを j^λ とする。ここで、 λ はこの超曲面上の座標の成分の添字であり、一般的には n 次元としてよい。更に、相対論的電荷密度 $e\sqrt{\eta_{\alpha\beta}j^\alpha j^\beta}$ をこの超曲面上に拡張して、それを $e\sqrt{g_{\lambda\mu}j^\lambda j^\mu}$ とする。ここで、 $g_{\lambda\mu}$ はこの超曲面上に付与された基本 metric tensor である。最後にこの拡張された電荷密度が不変、すなわち

$$e\sqrt{g_{\lambda\mu}j^\lambda j^\mu} = \text{一定}, \quad (2)$$

となるような仕方で、我々の model space に相互作用を導入する。そして、このようにして作られた超曲面を我々の物理空間、すなわち、我々の model space とする。

2. 我々の model space、相互作用および gauge 変換

第一章で述べた電荷に関する要請を満たす空間を具体的に以下のように設定する。ここで提唱する空間は一例にすぎず、この空間の選択は一意ではない。他にも、いろいろなタイプの空間は考えられるであろう。ここでは、それらのうちで一番簡単であろうと思われる空間を選ぶことにする。

まず、6次元 Minkowski space を考える。そして、その空間内に以下の定曲率5次元超曲面をうめ込み、この超曲面を我々の物理空間、すなわち、我々の model space とする。次に、この超曲面上に直交座標系を設置し、その座標を $(\xi, \mathbf{x})$ とする。ここで、 $x^0 = t$ および $\mathbf{x} = x, y, z$ である。また、 ξ は我々の model space に新しく導入された extra な座標である。更に、この超曲面上に不変2次形式

$$ds^2 = d\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{a}}(-dx^{0^2} + d\mathbf{x}^2), \quad (3)$$

があたえられているものとする。したがって我々の model space における基本 metric tensor は

$$(g_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -e^{-\frac{2\xi}{a}} & & & \\ & & e^{-\frac{2\xi}{a}} & & \\ & & & e^{-\frac{2\xi}{a}} & \\ & & & & e^{-\frac{2\xi}{a}} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

となる。

次に、 M を質量の次元をもつ定数として

$$q_\xi = M \frac{d\xi}{ds}, \quad q_0 = M \frac{dt}{ds} \quad \text{および} \quad q_x = M \frac{dx}{ds}, \quad (5)$$

とおく。これらは我々の model space における5-vector を成す。 (q_ξ, q_0, q_x) は Eq.(3) と Eq.(5) とから

$$M^2 = q_\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{a}}(-q_0^2 + q_x^2), \quad (6)$$

を満たさなければならない。

このことから、 (j^λ) , $\lambda = \xi, x^0, x$ は我々の model space の 5-vector であるから Eq.(6) を満たさなければならない。すなわち

$$j_\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{a}}(-j_0^2 + j_x^2) = M = \text{const}, \quad (7)$$

でなければならない。Eq.(7) は Eq.(2) の一般化された電荷の不変性の表現をみたしている。

ここで、しばらく、従来の理論に話を戻すことにしよう。 $(E, \mathbf{p})$ を energy と momentum とし、また、 m_0 を自由粒子の質量とすると energy 保存則から

$$m_0^2 = E^2 - \mathbf{p}^2, \quad (8)$$

である。次に荷電粒子と電磁場との相互作用は、 $(\phi, \mathbf{A})$ を電磁場の potential とすると $(E, \mathbf{p})$ に置きかえ

$$E \rightarrow E - e\phi \quad \text{および} \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}, \quad (9)$$

を行えばえられる。このとき、粒子の質量を m とすると energy 保存則により

$$m^2 = (E - e\phi)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2, \quad (10)$$

をみtas。ここで、注意しておきたいのは、一般には Eq.(8) における m_0 と Eq.(10) における m とは別のものである、すなわち、 $m_0 \neq m$ でなければならないということである。一般の教科書、例えば Schiff の量子力学の教科書では同じに書かれている。では何故違わなければならないのか、その理由は以下である。もし、 $m_0 = m$ とすると、Eq.(8) と Eq.(10) とから

$$m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = (E - e\phi)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2, \quad (11)$$

となるが、このことは $(E, \mathbf{p})$ と $(E - e\phi, \mathbf{p} - e\mathbf{A})$ とは互に homogeneous Lorentz 変換で移れることになってしまう。相互作用は homogeneous Lorentz 変換と本質量に異なるものなので、これは明らかにおかしい。

次に、我々の model における相互作用について考えよう。そのためには、まず、我々の model space に電磁場の potential を拡張しなければならない。通常の理論で $(\phi, \mathbf{A})$ は Minkowski space の 4-vector である。このことから、我々の model space における電磁場の potential は我々の model space における vector であると仮定するのが自然であろう。そこで、 $(\phi, \mathbf{A})$ のほかに、 ξ 成分 A_ξ を加えて、我々の model space における電磁場の potential を $(\phi, \mathbf{A}, A_\xi)$ としよう。しかし、この論文では、この拡張された potential の従う波動方程式の議論はしない。電磁場の potential が導入されたので、我々の model space における荷電粒子と電磁場との相互作用は Eq.(9) を拡張して、次の置きかえ

$$q_0 \rightarrow Q_0 = q_0 - e\phi, \quad q_x \rightarrow Q_x = q_x - eA_x, \quad \text{および} \quad q_\xi \rightarrow Q_\xi = q_\xi - eA_\xi, \quad (12)$$

で得られると仮定しよう。ここで、 (Q_0, Q_x, Q_ξ) は我々 model space における vector であるから、Eq.(6) の関係をみたさなければならない。これを Eq.(6) とあけてかけば

$$M^2 = q_\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{\alpha}}(-q_0^2 + q_x^2) = Q_\xi'^2 + e^{-\frac{2\xi'}{\alpha}}(-Q_0'^2 + Q_x'^2), \quad (13)$$

なる関係が得られる。Eq.(13) の第 3 式において ξ の値を ξ' とかいたのは、当然、Eq.(13) の第 2 式の ξ と値が異なるからである。Eq.(13) で $\xi = \xi'$ および $q_\xi = Q_\xi$ とおけば

$$-q_0^2 + q_x^2 = -Q_0'^2 + Q_x'^2, \quad (14)$$

となるが、このことは (q_0, q_x) と (Q_0, Q_x) とは互に homogeneous Lorentz 変換で結ばれることを意味する。ここで (q_0, q_x) を静止系にとれば、 $q_0 = m$, $q_x = 0$ となる。また $Q_0 = E$, $Q_x = p$ となる文字に書きかえれば Eq. (14) は

$$m^2 = E^2 - p^2, \quad (15)$$

となり、これは従来の理論における energy 保存則となる。

素粒子論では gauge の考えは重要である。基本的なすべての相互作用は gauge 理論にうけつけられている。そこで、我々の理論における gauge 変換について議論しよう。ここでは $U(1)$ gauge についてのみ考える。量子力学で考えることにして、物質場の波動関数を ϕ とする。また、Eq. (12) で (q_0, q_x, q_ξ) を、それぞれ、微分 operator でおきかえて、共変微分を ($A_0 = \phi$)

$$D_0 = \partial_0 + ieA_0, \quad D_x = \partial_x + ieA_x \quad \text{および} \quad D_\xi = \partial_\xi + ieA_\xi, \quad (16)$$

で定義する。gauge 変換

$$\phi \rightarrow \phi' = S\phi, \quad S = e^{i\theta(x)}, \quad (17)$$

に対して

$$A_0 \rightarrow A_0', \quad A_x \rightarrow A_x' \quad \text{および} \quad A_\xi \rightarrow A_\xi', \quad (18)$$

と変換するとすると、 $\left[S, e^{-\frac{2}{\alpha}\xi} \right] = 0$, とおいてよいから、例えば、 ξ 成分について

$$\begin{aligned} D_\xi \phi &\rightarrow (D_\xi \phi)' = (\partial_\xi + ieA_\xi') S\phi \\ &= S(\partial_\xi + S^{-1}(\partial_\xi S) + ieA_\xi') \phi, \end{aligned} \quad (19)$$

となるが、 A_ξ が

$$A_\xi' = A_\xi - \frac{i}{e} S^{-1}(\partial_\xi S), \quad (20)$$

と変換すれば

$$(D_\xi \phi)' = S(D_\xi \phi), \quad (21)$$

となる。2回の微分に対しては

$$\begin{aligned} (D_\xi^2 \phi)' &= D_\xi' (D_\xi \phi)' \\ &= (\partial_\xi + ieA_\xi') S(D_\xi \phi) \\ &= S D_\xi (D_\xi \phi) = S(D_\xi^2 \phi), \end{aligned} \quad (22)$$

となる。他の成分についても同様な式が得られる。

3. 我々の model における scalar 粒子 の propagator および hierarchy structure

我々の model における scalar 粒子の wave equation は

$$\left\{ (\partial_\xi^2 - \frac{4}{a} \partial_\xi) + e^{-\frac{2\xi}{a}} (-\partial_0^2 + \partial_x^2) \right\} \phi(\xi x^0 \mathbf{x}) = 0, \quad (23)$$

である。ここで、取り扱いを簡単にするために、Eq.(23) の左辺の小括弧の中の $-\frac{4}{a} \partial_\xi$ の項は小さいので無視しよう。この近似のもとで Eq.(23) は次の 2 つの式に分離できる。

$$\begin{cases} (\partial_\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{a}} \mu) \phi(\xi) = 0, & (24) \\ (\partial_0^2 - \partial_x^2 + \mu) \phi(x^0 \mathbf{x}) = 0, & (25) \end{cases}$$

Eq.(24) は我々の model に特徴的な式である。一方、Eq.(25) は通常の energy と momentum を関係づける式である。

次に $\phi(x^0 \mathbf{x})$ および $\phi(\xi)$ を展開するための基底を導入しよう。Eq.(25) は更に 2 つの式に分離出来る。 $\phi(x^0 \mathbf{x}) = \phi(x^0) \phi(\mathbf{x})$ において、Eq.(25) に代入すると

$$(\partial_0^2 + q_0^2) \phi_{q_0}(x^0) = 0 \quad \text{および} \quad (\partial_x^2 + q_x^2) \phi_{q_x}(\mathbf{x}) = 0, \quad (26)$$

となる。ここで、 q_0 と q_x はそれぞれ energy と momentum であり

$$q_0^2 = q_x^2 + \mu \quad (27)$$

をみたす。Eq.(26) の解は、箱内での boundary condition を課して完全直交基底となる。

$$\phi_{q_0}(x^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iq_0 x^0} \quad \text{および} \quad \phi_{q_x}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iq_x \mathbf{x}}, \quad (28)$$

更に、我々の model space に新しい量子数 h を導入して、 $\phi_h(\xi)$ を方程式

$$(\partial_\xi^2 + h^2) \phi_h(\xi) = 0, \quad (29)$$

の解とすれば、規格化を行って、

$$\phi_h(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ih\xi}, \quad (30)$$

となる。以上、まとめて、

$$\int \phi_{q_0}^*(x^0) \phi_{q_0}(x^0) dx^0 = \delta_{q_0' q_0}, \quad \sum_{q_0} \phi_{q_0}(x^0) \phi_{q_0}^*(x^{0'}) = \delta(x^0 - x^{0'}), \quad (31)$$

$$\int \phi_{q_x}^*(\mathbf{x}) \phi_{q_x}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{q_x' q_x}, \quad \sum_{q_x} \phi_{q_x}(\mathbf{x}) \phi_{q_x}^*(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (32)$$

および

$$\int \phi_h^*(\xi) \phi_h(\xi) d\xi = \delta_{h'h}, \quad \sum_h \phi_h(\xi) \phi_h^*(\xi') = \delta(\xi - \xi'), \quad (33)$$

をうる。

Eq.(24) の $\phi(\xi)$ を直交基底 Eq.(30) で展開しよう。

$$\phi(\xi) = \sum_h a_h \phi_h(\xi), \quad (34)$$

これを Eq.(24) に代入し、Eq.(29) を用いると

$$(\partial_\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{a}} \mu) \phi(\xi) = \sum_h a_h ((-)\hbar^2 + e^{-\frac{2\xi}{a}} \mu) \phi_h(\xi) = 0, \quad (35)$$

となる。Eq.(35) の左から $\phi_h^*(\xi)$ をかけ、 ξ で積分し、Eq.(33) を使うと

$$\sum_h a_h ((-)\hbar^2 \delta_{hh'} + \langle h' | e^{-\frac{2\xi}{a}} | h \rangle \mu) = 0, \quad (36)$$

を得る。Eq.(36) は、 h と h' とを入れかえて、書きかえれば

$$\hbar^2 = \sum_{h'} b_{h'} \langle h | e^{-\frac{2\xi}{a}} | h' \rangle \mu, \quad b_{h'} \equiv \frac{a_{h'}}{a_h}, \quad (37)$$

となる。

ここで、matrix element を計算しておこう。Eq.(30) を使って

$$\begin{aligned} \langle h | e^{-\frac{2\xi}{a}} | h' \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda_0}^\Lambda d\xi e^{(i(h'-h)-\frac{2}{a})\xi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(h'-h)-\frac{2}{a}} (e^{(i(h'-h)-\frac{2}{a})\Lambda} - e^{(i(h'-h)-\frac{2}{a})\Lambda_0}), \end{aligned} \quad (38)$$

をうる。 $\Lambda \rightarrow \infty$ とすると

$$\langle h | e^{-\frac{2\xi}{a}} | h' \rangle_{\Lambda \rightarrow \infty} = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{i(h'-h)-\frac{2}{a}}, e^{(i(h'-h)-\frac{2}{a})\Lambda_0}, \quad (39)$$

となる。ここで、diagonal part のみを考えれば、

$$\langle h | e^{-\frac{2\xi}{a}} | h \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{2} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0}, \quad (40)$$

となる。Eq.(27)、Eq.(37) および Eq.(40) とから

$$\hbar^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{2} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} (q_0^2 - q_x^2), \quad (41)$$

を得る。Eq.(41) の逆数をとれば

$$\frac{1}{q_0^2 - q_x^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{2} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} \frac{1}{h^2}, \quad (42)$$

となる。

次に、Eq.(42) の運動量空間での期待値をとろう。Eq.(42) の左辺について、

$$\begin{aligned} & \sum_{hq_0q_x} |h\xi\rangle |q_0x^0\rangle |q_x x\rangle \frac{1}{q_0^2 - q_x^2} \langle x'q_x | \langle x^0q_0 | \langle \xi'h | \\ &= \sum_h |h\xi\rangle \langle \xi'h | \sum_{q_0q_x} |q_0x^0\rangle |q_x x\rangle \frac{1}{q_0^2 - q_x^2} \langle x'q_x | \langle x^0q_0 | \\ &= \delta(\xi - \xi') \sum_{q_0q_x} |q_0x^0\rangle |q_x x\rangle \frac{1}{q_0^2 - q_x^2} \langle x'q_x | \langle x^0q_0 |, \end{aligned} \quad (43)$$

となる。一方、Eq.(42) の右辺は、Eq.(31) と Eq.(32) とから

$$\begin{aligned} & \sum_{hq_0q_x} |h\xi\rangle |q_0x^0\rangle |q_x x\rangle \frac{1}{h^2} \langle x'q_x | \langle x^0q_0 | \langle \xi'h | \\ &= \sum_h |h\xi\rangle \frac{1}{h^2} \langle \xi'h | \sum_{q_0q_x} |q_0x^0\rangle |q_x x\rangle \langle x'q_x | \langle x^0q_0 | \\ &= \sum_h |h\xi\rangle \frac{1}{h^2} \langle \xi'h | \delta(x^0 - x^0') \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (44)$$

となるから、Eq.(43)、Eq.(44)および Eq.(42) から、

$$\begin{aligned} & \sum_{q_0q_x} |q_0x^0\rangle |q_x x\rangle \frac{1}{q_0^2 - q_x^2} \langle q_0x^0' | \langle q_x x' | \delta(\xi - \xi') \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{a}{2} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} \sum_h |h\xi\rangle \frac{1}{h^2} \langle h\xi' | \delta(x^0 - x^0') \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (45)$$

をうる。一方、

$$\sum_h |h\xi\rangle \frac{1}{h^2} \langle h\xi' | \leq \sum_h |h\xi\rangle \langle h\xi' | = \delta(\xi - \xi'), \quad (46)$$

であるから、Eq.(45) より

$$\begin{aligned} & \sum_{q_0q_x} |q_0x^0\rangle |q_x x\rangle \frac{1}{q_0^2 - q_x^2} \langle q_0x^0' | \langle q_x x' | \delta(\xi - \xi') \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{a}{2} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} \delta(x^0 - x^0') \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (47)$$

となる。このように我々の model では、4次元時空 Minkowski 空間における propagator の発散はおきないことが示された。

次に、素粒子物理学における階層構造について、我々の model で議論しよう。その前に、使用する式をなじみのある文字に書きかえておこう。Eq.(41) で、 $q_0 = E$ および $\mathbf{q} = \mathbf{P}$ とおきかえて変形すれば

$$E^2 = \mathbf{P}^2 + 2\pi \frac{2}{a} e^{\frac{2}{a}\Lambda_0} h^2, \quad (48)$$

とかける。Eq.(48) が shell 上にあるときの h を h_0 とし、また、

$$m_0^2 = 2\pi \frac{2}{a} h_0^2, \quad (49)$$

とおけば、 m_0 は定数であり、Eq.(48) は

$$E^2 = \mathbf{P}^2 + m_0^2 e^{\frac{2}{a}\Lambda_0}, \quad (50)$$

となる。静止系をとれば、 $\mathbf{P} = 0$ であり、また粒子の質量を m とすれば、 $E^2 = m^2$ となる。このことと Eq.(50) とから

$$m^2 = m_0^2 e^{\frac{2}{a}\Lambda_0}, \quad (51)$$

となる。

ここで、我々の model space における curvature a が complex number であると仮定しよう。この場合、 α と β とを定数として

$$\frac{2}{a} = \alpha + i\beta, \quad (52)$$

とおける。このとき、

$$e^{\frac{2}{a}\Lambda_0} = e^{(\alpha+i\beta)\Lambda_0} = e^{\alpha\Lambda_0} e^{i\beta\Lambda_0}, \quad (53)$$

となるが、 m が粒子の質量であるとする、 m は real number でなければならない。したがって

$$e^{i\beta\Lambda_0} = 1, \quad (54)$$

でなければならない。このとき、Eq.(54) から

$$\beta\Lambda_0 = 2\pi n, \text{ すなわち、 } \Lambda_0 = 2\pi \frac{1}{\beta} n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (55)$$

となるが、Eq.(55) の Λ_0 を Eq.(51) に代入すれば

$$m^2 = m_0^2 e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (56)$$

をうる。Eq.(56) の対数をとれば、

$$\log_e m = \log_e m_0 + \frac{\pi\alpha}{\beta} n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (57)$$

となる。但し、ここで、 m_0^2 は $1/a$ を含んでいるので、complex number であり、正しくは、Eq.(57) は多少、修正しなければならない。しかし、この場合、修正された式は m_0 の定義をかきかえれ

ば、同じ形の式になることを示すことが出来る。Eq.(57) は我々の model における scalar 粒子の質量公式である。

素粒子物理学において、lepton と 3 種の flavor quark に関して、それぞれの質量の対数値を、世代に対して plot すると、それらはそれぞれ直線上に乗ることは知られている。我々の導出した質量公式は boson についての公式であるので、Eq.(57) は fermion の場合書き直さなければならぬ。我々の model では粒子の生成について、Higgs 粒子の媒介は必要としない。しかし、Higgs 粒子の存在を否定するものではないであろう。現在 fermion の質量の生成に関して、Higgs 粒子による理論は成功していない。

Appendix

Eq.(48) より

$$m^2 = 2\pi h_0^2 \frac{2}{a} e^{\frac{2}{a}\Lambda_0}, \quad (\text{A-1})$$

である。また、Eq.(52) の式

$$\frac{2}{a} = \alpha + i\beta, \quad (\text{A-2})$$

を用いると

$$\frac{2}{a} e^{\frac{2}{a}\Lambda_0} = e^{\alpha\Lambda_0} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{i(\beta\Lambda_0 + \delta)}, \quad (\text{A-3})$$

但し、
$$\sin\delta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \text{および} \quad \cos\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (\text{A-4})$$

となる。質量が real number であることから、

$$e^{i(\beta\Lambda_0 + \delta)} = 1, \quad (\text{A-5})$$

でなければならないから、これより

$$\Lambda_0 = \frac{1}{\beta}(2\pi n - \delta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A-6})$$

をうる。これを Eq.(A-1) に代入して

$$m^2 = m_0^2 e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A-7})$$

但し、
$$m_0^2 = 2\pi h_0^2 e^{-\frac{\alpha}{\beta}\delta} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (\text{A-8})$$

をうる。