

発散のないmodelの試作(12)

Furuoya, Izumi / 古尾谷, 泉

(出版者 / Publisher)

法政大学多摩研究報告編集委員会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学多摩研究報告 / 法政大学多摩研究報告

(巻 / Volume)

25

(開始ページ / Start Page)

47

(終了ページ / End Page)

57

(発行年 / Year)

2010-05-30

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00008172>

発散のない model の試作 (XII)

古尾谷 泉

An attempt toward a non-divergent model (XII)

Izumi FURUOYA

1. はじめに

この論文での目的は、いわゆる発散の困難の問題が内在しない物理理論を作る試みである。我々の理論は、相対論の論理構造を雛形にして、それを、更に、発展させた多次元理論である。

光の速さはどの慣性系から測っても同じである。この実験結果から、相対論が生まれ、絶対的な慣性系の存在は否定される。このことは、二つの慣性系は homogeneous Lorentz 変換 —— これは光の速さを変えない変換である —— で互いに移りうることを意味する。すなわち、相対論における物理空間は光の速さを不変とする symmetry を備えた空間なのである。我々の理論では、論理構造上、相対論における光速不変の原理は、電子の電荷の恒常的不変性の要請で置き換えられる。我々の理論では、電子の電荷の値は、古典論の意味で、相互作用の強さによって変ってはならない不変量なのである。このことは、おそらく、物理的真空には相互作用の強さによる違いはなく、真空はすべて等価である、ことを意味するものであろうか。我々の理論では、自由な電子に電磁場との相互作用を incorporation する操作は電荷の値を不変とする変換によりなされる。このようにして、我々の物理空間は電荷の値を不変とする symmetry を備えた空間となる。

このような symmetry を持つ空間は数多く存在するであろうが、ここでは、最も簡単であらうと考えられる空間を一つ選択して、以下のことを示す。

- 1) 質量の自己 energy の発散の問題は存在しない。我々の理論では、摂動論における二次の発散積分は収束することを、具体的に、scalar 粒子の場合について示す。
- 2) 物質の基本的な構成粒子である fermion についての質量公式を提唱する。lepton と quark の質量の測定値の対数値は、世代に対して plot すると、ほぼ、直線上に乗ることがわかる。我々の得た質量公式はこの傾向を示す。しかし、同一世代内の vertical 方向の質量の違い、すなわち、二種の lepton , up quark および down quark 間の mass splitting についての説明は、現在、出来ていない。
- 3) 我々の model space に拡張された Dirac equation には、自然に parity を破る項が入っている。これが根源的な parity violation の origin の説明になるか？これは、2)の質量の fine structure の問題と共に、今後の研究課題の一つである。

2. 電荷の不変性の要請 および その数学的表現

自由な電子の energy と momentum を (E, \mathbf{p}) とし、また、その質量を m_0 とすると、それらは

$$m_0^2 = E^2 - \mathbf{p}^2, \quad (2-1)$$

で関係づけられる。自由な電子と電磁場との相互作用は、電磁場の potential を (ϕ, A_i) , $i = 1, 2, 3$ とすると、 (E, \mathbf{p}) に minimal な置き換え

$$E \rightarrow E - e\phi \quad \text{および} \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A} \quad (2-2)$$

を行うことによって得られる。また、電磁場と相互作用している電子の質量を m とすると、これらは

$$m^2 = (E - e\phi)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2. \quad (2-3)$$

で関係づけられる。ここで注意すべきは、自由な電子の質量と電磁場と相互作用している粒子の質量とは等しくない、すなわち、

$$m_0 \neq m, \quad (2-4)$$

となるはずである。より正確にいえば、自由な粒子の質量 m_0 は測定可能な量ではない。しかし、これらは等しくないと考えるのが妥当であろう。例えば、 π^+ 中間子の質量の測定値は π^0 のそれとは異なる。また、 $m = m_0$ とすると、Eq.(2-1)とEq.(2-3)とは、互いに、Lorentz 変換で変換可能となる。相互作用と座標変換とは本質的に異なるので、 $m = m_0$ は正しくないと考えるべきであろう。

これらのことを踏まえて、電子の電荷密度について考えよう。ここでは、考え方を簡単にするために、量子力学で扱い、電子は一体近似で考えよう。自由な電子の Dirac equation は

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\phi(x) = 0, \quad (2-5)$$

である。このとき、自由な電子の電荷電流密度を (J^μ_{free}) , $\mu = 0, 1, 2, 3$, とすると、これらは

$$J^\mu_{free} = e\bar{\phi}(x)\gamma^\mu\phi(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2-6)$$

であたえられる。これらのうち、時間成分 $e\rho = j^0_{free}$ は自由な電子の電荷密度であり、また、 j^i_{free} , $i = 1, 2, 3$, は電流密度を表わす。これらの (j^μ_{free}) は homogeneous Lorentz 変換に対して four-vector をなす。一方、電子が電磁場と相互作用している時の Dirac equation は

$$(\gamma_\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m)\phi(x) = 0, \quad (2-7)$$

である。このときの電荷電流密度を j^μ_{int} , $\mu = 0, 1, 2, 3$, と書けば、これらは

$$j^\mu_{int} = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2-8)$$

であたえられる。

電磁場との相互作用があるときの電荷電流密度は、小さな coupling constant e で展開した摂動論で計算すると、輻射補正の量子効果によって、 (j^μ_{int}) は (j^μ_{free}) とは異なった値をもつが、仮に、これらの量子効果が無視できたとしても、Eq.(2-5)とEq.(2-7)とは本質的に異なるのであるから、 $\psi \neq \phi$ となり、当然、これら二つの値は異なるはずである。すなわち、

$$\rho_{int} \neq \rho_{free} \quad , \quad (2-9)$$

となるはずである。しかし、我々の理論ではEq.(2-9)を否定する。我々の理論では、電子の電荷の値は相互作用の大きさによって、その値を変えてはならないのである。このことは、我々の理論では、相互作用の有る無しに関わらず、電子の電荷の値は変わらないことをいみしている。本来、自由な粒子は、単独では、測定にはかからない。また、輻射補正の様な量子効果を切り離すことは、現実には、不可能なのである。したがって、我々の要請は観測に基づいた要請ではなく理論上の要請なのである。

ここで、裸の自由な粒子の方程式、例えば、Klein-Gordon equation や Dirac equation など、また、それらから派生した量から組み立てられた物理量などから成る理論を基礎理論と呼ぶことにしよう。基礎理論の要素は直接測定に関わるものではない。それらは相互作用を通してのみ測定可能なのである。数学的に言えば、これらは observable を展開するための基底なのである。これらのことから、諸々の物理事象に関して、測定値をうまく説明している理論値の精度をみださない範囲内で、基礎理論は修正可能であろう。我々の新しい理論では、その基礎理論において

古典論の意味で、電子の電荷の値は相互作用の強さによって変ってはならない恒常的不変量である。

という要請をおく。

次に、上述の我々の要請の数学的表現をもとめよう。上で議論したように、このことを行うには、従来の4次元 Minkowski space では狭すぎる。一般的には、4次元 Minkowski space を含む空間であれば、どのような次元の空間でも選択の可能性はあるのだが、その選択された空間が物理的に妥当なものであるかどうかは、観測に基づいて判断されなければならない。しかし、ここでは、そのような空間を探す前に、取り扱いが容易になるように、電荷密度を最も一般的な形に書き直しておこう。電荷電流密度は homogeneous Lorentz 変換に対して four-vector をなすが、電荷密度 $e\rho (=j^0)$ はこの four-vector の一成分であるので、Lorentz 変換によって、その値は変わってしまう。従って、 ρ の値についての議論は、座標系を固定して、その固定された座標系で議論することも出来よう。しかし、ここでは、より一般的に、電荷の値を Lorentz 座標系によらない相対論的に不変な形に書き直しておこう。固定された座標系で $e\rho$ である電荷密度は、座標変換をすると、 $e\sqrt{\eta_{\alpha\beta}j^\alpha j^\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, ただし、 $\eta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, は Minkowski metric tensor である、と書ける。しかし、我々はこの形を直接使用することはできない。なぜならば、前にもふれたように、4次元 Minkowski space 内で、minimal な相互作用の incorporation, すなわち、Eq.(2-2) の置き換えに対して、電子の電荷の値を保持することは不可能だからである。これは Eq.(2-2) にたいして、 $m = m_0$ とはならないのと同じ理由による。そこで、我々は物理空間の次元を4次元より上げなければならない。この上げられた空間は4次元以上であれば何次元でもよいであろうが、4次元 Minkowski space を含んでいなければならないであろう。ここでは、その上げられた空間を、一般に、 n 次元($n \geq 5$)としておこう。そこで、この上げられた空間に一般化された電荷密度は、4次元 Minkowski space における形を拡張して、 $e\sqrt{g_{\lambda\mu}j^\lambda j^\mu}$, $\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$, と書ける。ただし、 $g_{\lambda\mu}$, および、 j^λ は、それぞれ、この拡張された空間における metric tensor, および、電荷電流密度である。このようにして、拡張された空間における電荷の恒常的不変性の要請とは

$$e^2 g_{\lambda\mu} j^\lambda j^\mu = \text{constant}, \quad \lambda, \mu = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad (2-10)$$

であるとしよう。これが我々の要請の数学的表現である。我々の model では、相互作用の強さが変化しても、Eq.(2-10) の条件は保持されなければならない。逆にいえば、我々の model における基礎理論では、Eq.(10) の条件を満たすようなかたちで minimal な相互作用を incorporation しなければならないのである。

3. 我々の model space における電荷の不変性

この章では、我々が提唱してきた model space が電荷の不変性の条件、Eq.(2-10)を満たしていることを示そう。我々の model space における不変無限小距離は

$$-ds^2 = d\xi^2 + \exp(-2\xi/a) (-dt^2 + dx^{i2}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3-1)$$

である。したがって、model space の基本計量 tensor は

$$(g_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\exp(-2\xi/a) & & & & \\ & \exp(-2\xi/a) & & & \\ & & \exp(-2\xi/a) & & \\ & & & \exp(-2\xi/a) & \\ \xi & t & x & y & z \end{pmatrix}, \quad (3-2)$$

となる。

次に、 μ を mass の次元をもつ量として、我々の model space における energy momentum を

$$E = q_0 = \mu dt/ds, \quad q_i = \mu dq_i/ds, \quad i=1,2,3, \quad \text{および} \quad q_\xi = \mu d\xi/ds, \quad (3-3)$$

で定義する。 E は energy であり、 $q_i, i=1,2,3$ は 3次元空間の x,y,z 方向の momentum である。また、 q_ξ は我々の model space に特有な ξ 方向の変位 operator であり、model space における相互作用や parity violation に関するものである。これらの量を用いると Eq.(3-1)は

$$-\mu^2 = q_\xi^2 + \exp(-2\xi/a) (-E^2 + q_i^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3-4)$$

と書ける。ここで注意すべきは、我々の model space における five-vector はすべて、Eq.(3-4)を満たさなければならない、ということである。

我々の model space は 5次元空間なのだから、電荷電流密度は 5成分から成り、それらは、従来の 4次元電荷電流密度の他に ξ 方向の成分 j^ξ を加えて、 $(j^0, j^i, j^\xi), i=1,2,3$ と書こう。これらは model space の five-vector であるから、Eq.(3-4)の関係を満たされなければならない。すなわち、

$$-\mu^2 = j_\xi^2 + \exp(-2\xi/a) (-j_0^2 + j_i^2) = \text{const.}, \quad (3-5)$$

が成立する。metric tensor Eq.(3-2)と Eq.(3-5)とから、Eq.(3-5)は我々の荷電不変性の要請 Eq.(2-10)に他ならないことがわかる。

4. 我々の model space における Klein Gordon equation および Dirac Equation

Eq.(3-4)において

$$E \rightarrow i\partial_0, \quad q_i \rightarrow i\partial_i, \quad \text{および} \quad q_\xi \rightarrow i\partial_\xi, \quad (4-1)$$

と置き換えれば、我々の model space における Klein Gordon equation を得る。 $\phi(tx, \xi)$ を波動関数として Eq.(4-1) の置き換え後、多少変形すれば

$$((\partial_0^2 - \partial_i^2) + \exp(2\xi/a)(\mu^2 - \partial_\xi^2))\phi(tx, \xi) = 0, \quad (4-2)$$

を得る。

次に、我々の model space における Dirac equation を導出しよう。Eq.(3-4)をかきなおすと

$$E^2 = q_i^2 + \exp(2\xi/a)(\mu^2 + q_\xi^2), \quad (4-3)$$

となる。Eq.(4-3)を線形な式に書き直そう。そのためには

$$E = \alpha_i q^i + \exp(\xi/a)(\beta \mu + \alpha_\xi q^\xi), \quad (4-4)$$

と置き、 E^2 が Eq.(4-3)に等しくなるためには、 $(\alpha_i, \beta, \alpha_\xi)$, $i=1,2,3$, が

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 = \beta^2 = \alpha_\xi^2 &= 1 \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = \alpha_i \alpha_\xi + \alpha_\xi \alpha_i = \beta \alpha_\xi + \alpha_\xi \beta = 0, \end{aligned} \quad (4-5)$$

を満たせばよい。これらの $(\alpha_i, \beta, \alpha_\xi)$ は具体的には 4×4 行列で表される。Eq.(4-4)で、Eq.(4-1)の置換をおこなえば、我々の model space に拡張された Dirac equation

$$((\partial_0 - \alpha_i \partial_i) + \exp(\xi/a)(\beta \mu - \alpha_\xi \partial_\xi))\psi(t, x, \xi) = 0, \quad (4-6)$$

を得る。ここで、 $\psi(t, x, \xi)$ は4成分からなる我々の model における spinor 波動関数である。

5. Model space における電子と電磁場との相互作用

素粒子の属性や分類には、物理空間に深く関わっているものが多い。素粒子の spin や parity は Lorentz 群の表現によって分類される。また、基本的な方程式は homogeneous Lorentz 群の表現の generator である。例えば、Klein Gordon 場は Lorentz 群の scalar 表現であり。また、Dirac 場はこの群の spinor 表現である。なかでもきわめつけは電磁場の場合であろう。電磁場は homogeneous Lorentz 群の2階反対称 tensor 場——これは vector 場でもある——で表されるが、この反対称 tensor 場の dual space を導入することで、Maxwell equation は極めて美しい形となる。具体的には、電磁場の二階反対称 tensor 場 F の dual space における対応する場を \underline{F} とすると、Maxwell equation は、微分形式で、 $F = dA$ および $A = A_\mu dx^\mu$ として

$$\begin{aligned} dF &= 0, \\ d\underline{F} &= J, \quad J: \text{電流密度}, \end{aligned} \quad (5-1)$$

と簡潔に書いてしまう。これなどは物理空間が素粒子の属性を決定づけることを示している。このようにして、物理空間とその空間内の変換性が決まると、その空間内の基礎方程式は自然に決まってしまう。このような考えに従って、我々の model space に Maxwell equation を拡張することは容易である。しかし、ここでは、その具体的な議論はしない。しかし、我々の model space に拡張された Maxwell equation の解も、我々の model space の変換に対する二階反

対称 tensor 場であるといつてよからう。そして、これは前にも触れたことだが、この場は vector 場でもあるのである。我々の model space は 5 次元なのだから、vector potential は、従って、5 成分から成る。このことから、従来の 4 成分の potential の他に、更に、新たに、 ξ 方向の成分を一つ加えなければならない。この成分を A_ξ と書くことにしよう。このようにして、我々の model space における電磁場の potential は (ϕ, A_i, A_ξ) , $i=1,2,3$, となる。

我々の model space に電磁場の potential が導入されたので、我々の model space における相互作用は、Eq.(2-2) を拡張して、 (E, q_i, q_ξ) に minimal な置き換え

$$(E, q_i, q_\xi) \rightarrow (E - e\phi, q_i - eA_i, q_\xi - eA_\xi), \quad (5-2)$$

を行うことにより得られるものとしよう。ここで、注意すべきは、 $(E - e\phi, q_i - eA_i, q_\xi - eA_\xi)$ は、我々の model space における five-vector であるから、これらは電荷の不変性の条件を満たさなければならない。すなわち、Eq.(3-4) を不変にしなければならないから

$$\begin{aligned} -\mu^2 &= (p_\xi - eA_\xi)^2 + \exp(-2\xi/a) (-(E - e\phi)^2 + (p_i - eA_i)^2) \\ &= p_{\xi'}^2 + \exp(-2\xi'/a) (-E^2 + p_i^2), \end{aligned} \quad (5-3)$$

が成立する。Eq.(5-3) の右辺の第 2 式において、 ξ' と書いたのは第 1 式とでは ξ の値が異なるからである。Eq.(4-3) を線形な形に書き直した Eq.(4-4) においても、同様にして、Eq.(5-2) の置き換えをおこなうと

$$\begin{aligned} -\beta\mu &= \alpha_\xi (q_\xi - eA_\xi) + \exp(-\xi/a) (-(E - e\phi) + \alpha_i (q_i - eA_i)) \\ &= \alpha_{\xi'} q_{\xi'} + \exp(-\xi'/a) (-E + \alpha_i q_i), \end{aligned} \quad (5-4)$$

が得られる。ここで、 (E, q_i, q_ξ) の operator 性を無視すれば、Eq.(5-4) の右辺第一式を二乗すると、Eq.(4-5) を用いて、Eq.(5-3) の右辺第一式が得られる。

次に、我々の新しい方程式が従来の理論における方程式を含んでいることを示そう。まず、 $\xi=0$, および $q_\xi=0$ と置けば Eq.(4-3) から、 q_i を馴染みのある文字 p_i と書きかえれば

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + \mu^2, \quad (5-5)$$

をえる。また、Eq.(4-4) から

$$E = \alpha_i p_i + \beta\mu, \quad (5-6)$$

を得る。Eq.(5-5)、および、Eq.(5-6) は従来の理論における粒子の energy と momentum の関係式である。更に、 $\xi = 0$, $q_\xi = 0$, $A_\xi = 0$ とおけば Eq.(5-3) の第一式から

$$(E - e\phi)^2 = (p_i - eA_i)^2 + \mu^2. \quad (5-7)$$

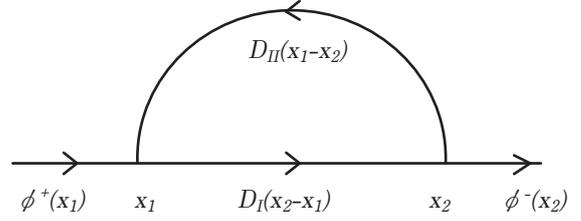
また、Eq.(5-4) の第一式から

$$E - e\phi = \alpha_i (p_i - eA_i) + \beta\mu, \quad (5-8)$$

がえられる。

6. 発散の消失

右の図は中性 scalar 粒子 I が virtual な中性 scalar 粒子 II を放出した後、それを吸収する過程を表す Feynman 図である。この過程は粒子 I の自己 energy の増加をあらわす。この自己 energy を摂動論で計算すると、その値は無
限大になってしまう。その計算には、まず、S-行列を計算する必要がある。図に対する S-行列は摂動の 2 次で



$$\langle f|S|i\rangle = e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 (\phi^-(x_2) D_I(x_2-x_1) D_{II}(x_1-x_2) \phi^+(x_1)), \tag{6-1}$$

で与えられる。ここで、粒子 I と II の質量は同じとして

$$\begin{aligned} \phi^+(x_1) &= \sum_{p_1} (1/2V \omega_{p_1})^{1/2} \exp(-ip_1x_1), \\ \phi^-(x_2) &= \sum_{p_2} (1/2V \omega_{p_2})^{1/2} \exp(ip_2x_2), \\ D_I(x_2-x_1) &= 1/(2\pi)^4 \int d^4k_1 \exp(-ik_1(x_2-x_1))/(k_1^2-m^2), \\ \text{および } D_{II}(x_1-x_2) &= 1/(2\pi)^4 \int d^4k_2 \exp(-ik_2(x_1-x_2))/(k_2^2-m^2), \end{aligned} \tag{6-2}$$

である。Eq.(6-2) を Eq.(6-1) に代入し、Delta 関数

$$\begin{aligned} \int d^4x_2 \exp(i(p_2-k_1+k_2)x_2) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2-k_1+k_2), \\ \int d^4x_1 \exp(i(k_1-k_2-p_1)x_1) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1-k_2-p_1), \end{aligned} \tag{6-3}$$

を用いると

$$\langle f|S|i\rangle = e^2 (1/2V \omega_p) \delta_{p_1, p_2} \delta_{p_1, p} \int d^4k 1/((k^2-m^2)((p-k)^2-m^2)), \tag{6-4}$$

となる。Eq.(6-4) の積分で、被積分関数の次元は k^{-4} であるが、体積積分も d^4k なので、この積分は発散する。特に、粒子 I が無限に重い場合には、粒子 I の反跳は無視出来るから、Eq.(6-4) の 積分の部分は、単に

$$\int d^4k 1/(k^2-m^2). \tag{6-5}$$

となり、発散の度合いは、更に、重篤となる。

次に、我々の model で、この発散の問題を考えよう。ここでは、簡単なので、Eq.(6-5) の積分のみについて考えよう。Eq.(4-2) を書きかえれば

$$-\partial_\xi^2 \psi(\xi) + (\mu^2 + \exp(-2\xi/a)(-q_0^2 + q_i^2)) \psi(\xi) = 0, \tag{6-6}$$

となる。 $\psi(\xi)$ を完全直交基底

$$(\partial_\xi^2 + h^2) \phi_h(\xi) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \phi_h = \exp(-ih\xi)/\sqrt{2\pi}, \tag{6-7}$$

で展開しよう。

$$\psi(\xi) = \sum_{h'} a_{h'} \phi_{h'}(\xi), \quad (6-8)$$

これを Eq.(6-6) に代入すると

$$\sum_{h'} a_{h'} (q_0^2 - q_i^2) \phi_{h'}(\xi) = \sum_{h'} \langle h | \exp(2\xi/a) | h' \rangle (h'^2 + \mu^2), \quad (6-9)$$

となるが、Eq.(6-9) の両辺に左から $\phi_{h'}^*(\xi)$ をかけて積分すれば

$$q_0^2 - q_i^2 = \sum_{h'} b_{h'} \langle h | \exp(2\xi/a) | h' \rangle (h'^2 + \mu^2), \text{ 但し } b_{h'} = a_{h'} / a_h, \quad (6-10)$$

となる。ここで、Eq.(6-10)の matrix element を計算しておこう。

$$\begin{aligned} \langle h | \exp(2\xi/a) | h' \rangle &= (1/2\pi) \int_{-\Lambda_0}^{\Lambda_0} d\xi \exp((i(h-h') + 2/a)\xi) \\ &= (1/2\pi)(1/(i(h-h') + 2/a) (\exp((i(h-h') + 2/a)\Lambda) - \exp((i(h-h') + 2/a)\Lambda_0)), \end{aligned} \quad (6-11)$$

となる。更に、diagonal part のみを取り、 $\Lambda_0 \rightarrow -\infty$ の極限をとれば

$$\langle h | \exp(2\xi/a) | h \rangle = (1/2\pi) (a/2) \exp(2\Lambda/a), \quad (6-12)$$

となる。Eq.(6-12)を導出する際には、Eq.(6-11)において、 $\Lambda_0 \rightarrow -\infty$ としたが、この極限をとる処方とは異なる。これは我々の理論が、未だ、確立しておらず、試行錯誤の段階にあるからで、現時点では、どのような形式が一番妥当なのかはわかっていない。我々の理論は開発途上にあり、その妥当性については、いろいろな角度から検討してみる必要がある。このことはさておき、

$$m^2 = (1/2\pi)(a/2)\mu^2 \exp(2\Lambda/a), \quad (6-13)$$

とおき、Eq.(6-12)、Eq.(6-13) および Eq.(6-10) とから、次の関係式を

$$1/(q_0^2 - q_i^2 - m^2) = (\mu/m)^2 (1/h^2), \quad (6-14)$$

を得る。ここで注意すべきは、Eq.(6-5)における (k_0, k_i) は、互いに独立な変数であり勝手な値をとりうるが、我々の model における、対応する energy-momentum (q_0, q_i) は電荷の不変性の要請により、すなわち、Eq.(6-14)により束縛されていて、勝手な値は取ることが出来ない点である。Eq.(6-14) の両辺を完全直交基底で挟んで、 (q_0, q_i) および h についての和をとれば、

Eq.(6-14)の左辺

$$\begin{aligned} &= \sum_h \sum_{q_0} \sum_{q_i} \langle h, q_0, x_0, q_i, x_i | 1/(q_0^2 - q_i^2 - m^2) | q_i, x_i', q_0, x_0', h, \xi' \rangle \\ &= \sum_h \langle h, \xi | h, \xi' \rangle \sum_{q_0} \sum_{q_i} \langle q_0, x_0, q_i, x_i | 1/(q_0^2 - q_i^2 - m^2) | q_i, x_i', q_0, x_0' \rangle \\ &= \delta(\xi - \xi') \sum_{q_0} \sum_{q_i} \langle q_0, x_0, q_i, x_i | 1/(q_0^2 - q_i^2 - m^2) | q_i, x_i', q_0, x_0' \rangle, \end{aligned} \quad (6-14)$$

となる。一方

Eq.(6-14)の右辺

$$\begin{aligned}
& = (\mu/m)^2 \sum_h \sum_{q_0} \sum_{q_i} \langle h \xi, q_0 x_0, q_i x_i | (1/h^2) | q_i x_i', q_0 x_0', h \xi' \rangle \\
& = (\mu/m)^2 \sum_h \langle h \xi | (1/h^2) | h \xi' \rangle \sum_{q_0} \sum_{q_i} \langle q_0 x_0, q_i x_i | q_i x_i', q_0 x_0' \rangle \\
& = (\mu/m)^2 \sum_h \langle h \xi | (1/h^2) | h \xi' \rangle \delta(x_0 - x_0') \delta(x_i - x_i') \\
& \leq (\mu/m)^2 \delta(\xi - \xi') \delta(x_0 - x_0') \delta(x_i - x_i'), \tag{6-15}
\end{aligned}$$

となる。このようにして、自己energy の発散積分、すなわち、Eq.(6-5)に対応する我々の model space における積分は

$$\begin{aligned}
& \sum_{q_0} \sum_{q_i} \langle q_0 x_0, q_i x_i | 1/(q_0^2 - q_i^2 - m^2) | q_i x_i', q_0 x_0' \rangle \\
& \leq (\mu/m)^2 \delta(\xi - \xi') \delta(x_0 - x_0') \delta(x_i - x_i'),
\end{aligned}$$

となり、この積分は収束する。

7. Fermion の Mass formula

$$\phi(tx \xi) = N \exp(-iEt) \exp(-iq_i x_i) \phi(\xi) \tag{7-1}$$

とおいて、これを Eq.(4-6) に代入すれば

$$(E - \alpha_i q_i) - \exp(\xi/a) (\beta \mu + i \alpha_\xi \partial_\xi) \phi(\xi) = 0, \tag{7-2}$$

を得る。静止系であれば、 $q_i = 0$ であり、また、 E の最小値を m とすれば Eq.(7-2) は

$$m \phi(\xi) = \exp(\xi/a) (\beta \mu + i \alpha_\xi \partial_\xi) \phi(\xi) \tag{7-3}$$

となる。Eq(7-3) を解くために、 $\phi(\xi)$ を直交基底

$$(\partial_\xi^2 + h^2) \phi_h(\xi) = 0, \text{ すなわち、 } \phi_h(\xi) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-ih\xi), \tag{7-4}$$

で展開して

$$\phi(\xi) = \sum_h a_h \phi_h(\xi), \tag{7-5}$$

とし、これを Eq.(7-3) に代入すれば

$$m \sum_h a_h \phi_h(\xi) = \sum_h a_h \exp(\xi/a) (\beta \mu + \alpha_\xi h) \phi_h(\xi), \tag{7-6}$$

を得る。Eq.(7-6) の両辺に $\phi_{h'}^*(\xi)$ をかけて、 ξ で積分すれば

$$m \sum_h a_h \delta_{hh'} = \sum_h a_h \langle h' | \exp(\xi/a) | h \rangle (\beta \mu + \alpha_\xi h), \tag{7-7}$$

となる。 h と h' とを交換して Eq.(7-7)は

$$m = \sum_{h'} b_{h'} \langle h | \exp(\xi/a) | h' \rangle (\beta \mu + h' \alpha \xi), \quad \text{ここで、} b_{h'} = a_{h'} / a_h, \quad (7-8)$$

となる。

ここで matrix element を計算しておこう。

$$\begin{aligned} \langle h | \exp(\xi/a) | h' \rangle &= (1/2\pi) \int_{-\Lambda_0}^{\Lambda_0} d\xi \exp((i(h-h') + 1/a)\xi) \\ &= (1/2\pi) 1/(i(h-h') + 1/a) (\exp((i(h-h') + 1/a)\Lambda) - \exp((i(h-h') + 1/a)\Lambda_0)), \end{aligned} \quad (7-9)$$

ここで、diagonal part のみをとると

$$\langle h | \exp(\xi/a) | h \rangle = (a/2\pi) (\exp(\Lambda/a) - \exp(\Lambda_0/a)), \quad (7-10)$$

となる。これより

$$\Lambda_0 \rightarrow -\infty, \text{ のとき} \quad \langle h | \exp(\xi/a) | h \rangle \rightarrow (a/2\pi) \exp(\Lambda/a), \quad (7-11)$$

となる。更に、 ξ 方向の励起を考えなければ、 $h = 0$ と置いて、Eq.(7-8)より

$$m = (a/2\pi) \beta \mu \exp(\Lambda/a), \quad (7-12)$$

となる。

ここで、曲率半径 a が何らかの理由によって、complex number であると仮定しよう。このとき、 a は c と d とを real number として

$$1/a = c + id, \quad (7-13)$$

と表すことができる。Eq.(7-12)の m を a の代わりに、 c と d とで表せば

$$\begin{aligned} m &= (\beta \mu / 2\pi) (1/\sqrt{c^2+d^2}) \exp(c\Lambda) (\cos(d\Lambda - \delta) + i \sin(d\Lambda - \delta)), \\ &\quad \text{ただし、} \cos \delta = c/\sqrt{c^2+d^2} \end{aligned} \quad (7-14)$$

と書ける。質量は実数でなければならないから、 m の虚数部分は零でなければならない (虚数部分は decay 巾を表す)。すなわち、

$$\sin(d\Lambda - \delta) = 0, \quad (7-15)$$

でなければならない。Eq.(7-15) より

$$d\Lambda - \delta = 2\pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7-16)$$

でなければならない。したがって、 Λ の取りうる値は

$$\Lambda = (2\pi n + \delta)/d, \quad (7-17)$$

に制限される。この Λ を Eq.(7-14) に代入すれば

$$m = K \exp(2\pi(c/d)n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7-18)$$

ここで、

$$K = (\beta \mu) / (2\pi \sqrt{c^2 + d^2}) \exp((c/d)\delta) \quad \text{および} \quad \sin \delta = c/\sqrt{c^2 + d^2}, \quad (7-19)$$

である。Eq.(7-18) の対数をとると

$$\log_e m = \log_e K + (2\pi c/d)n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7-19)$$

となる。

物質の最も基本的な構成粒子である lepton および quark の質量の測定値の対数値を世代に対して plot すると、それぞれはほぼ、直線上に乗ることがわかる。我々の質量公式 Eq.(7-19) は、 n を世代の番号とすれば、この傾向を示している。しかし、同一世代内での up quark, down quark および二種の lepton の質量の違い、すなわち、vertical 方向の質量の fine structure については、我々の model では説明できない。この問題は、今後の研究課題の一つである。

8. Parity Violation

Eq.(4-4) で ξ -方向を量子化して、すなわち、 $q_\xi \rightarrow i\partial_\xi$ と置いて、更に、静止系、すなわち、 $E = m$ 、および $q_i = 0, i=1, 2, 3$ とおけば

$$i\alpha_\xi \partial_\xi \phi(\xi) = (-\mu\beta + m \exp(-\xi/a))\phi(\xi), \quad (8-1)$$

をえる。これは $\alpha_\xi^2 = 1$ であるから

$$i\partial_\xi \phi(\xi) = \alpha_\xi (-\mu\beta + m \exp(-\xi/a))\phi(\xi), \quad (8-2)$$

とも書ける。ここで、 α_ξ は parity violation をあらわす γ^5 -matrix とは

$$\gamma^\xi = \beta \alpha^\xi = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 = -\gamma^5, \quad (8-3)$$

で関係づけられる。このようにして、我々の model では parity violation を表す項が方程式の中に自然に入ってくる。現時点では、これ以上のことは言えないが、これも今後の研究課題の一つである。