

ゲンツェンの論理学：基本定理と無矛盾性証明

ANDOU, Yuuki / 安東, 祐希

(出版者 / Publisher)

法政哲学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of Hosei Society for Philosophy / 法政哲学

(巻 / Volume)

6

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

14

(発行年 / Year)

2010-06

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00008028>

ゲンツェンの論理学

——基本定理と無矛盾性証明——

安 東 祐 希

1 はじめに

本稿は、20 世紀前半の論理学者ゲンツェン (Gerhard Gentzen, 1909-1945) の主要な業績を紹介するものである。また合わせてそれに関連した筆者の研究についても触れている。全体として「法政哲学会第 29 回大会」における講演内容に沿うが、具体例を用いた説明などを加えており、口頭発表時には言及できなかった事項も含まれている。なお、定義や定理の表現からは可能な限り曖昧さを排除しているが、場合によっては細部の正確さよりも概念の把握のしやすさを重視し、例示からの類推を求めることがある。また、証明の詳細については省略し、その方針の説明にとどめている。紹介記事としての役割に鑑みて、定義、定理、証明の記述においては必ずしも厳密性に重きを置かなかった次第である。特に、不完全性定理などにより話題とされることの多い論理学者ゲーデルに比較すると、一般にはその名を目にすることの少ないゲンツェンの仕事について、広く紹介に努めることに一定の意義を見いだすことができると考えた。実際、現代の数理論理学を語る上で、ゲンツェンの創った論理体系や証明した定理を避けて通ることは困難であると言えるほど、彼が論理学に与えた影響は大きい。

本稿の構成は以下の通りである。まず第 2 節において、ゲンツェンが定義した論理体系の一つである「シーケント計算」とは何か、またその体系を用いて証明された彼の「基本定理」はいかなる意味を持つのか、について述べる。さらに、基本定理の証明について概説し、証明図の書き換え手続について触れる。次の第 3 節では、第一階算術の無矛盾性証明を扱う。これはゲンツェンにより初めて示されたものである。ここでは、ゲーデルの不完全性定理との関係を念

頭に置きつつ、何を用いて無矛盾性が証明されているのかについて注目する。最後に第4節において、ゲンツェンが定義したもう一つの論理体系である「自然演繹」とは何か、シーケント計算が創られるに至った経緯とともに述べる。さらに自然演繹体系における基本定理の表現と証明に関する、筆者の研究内容についても付け加える。なお、第2節と第3節はそれぞれゲンツェンの論文 [3] と [4, 5] を、第4節はゲンツェン [3]、プラヴィッツ [10, 11] および安東 [1] を基としている。

2 シーケント計算と基本定理

ゲンツェンは 1935 年に発表された論文 [3] において、二つの新しい論理体系を導入した。それらは「自然演繹」および「シーケント計算」と呼ばれるものであり、後にさまざまな論理がそれらの上で表現されるようになった。ゲンツェンは、この二つの体系どちらの形式においても、古典論理および直観主義論理の第一階述語論理体系を定義している。自然演繹における古典論理と直観主義論理の第一階述語論理体系はそれぞれ NK (natürlicher klassischer Kalkül) および NJ (natürlicher intuitionistischer Kalkül) と表され、シーケント計算におけるそれらはそれぞれ LK (logistischer klassischer Kalkül) および LJ (logistischer intuitionistischer Kalkül) と表される。さらにゲンツェンは同論文において、シーケント計算の体系 LK と LJ に関する「基本定理 (Hauptsatz)」を証明した。以下、本節においてはシーケント計算および基本定理について述べる。なお、自然演繹については第4節において取り扱う。

シーケント (Sequenz, sequent) とは前提および結論を表す論理式の列からなる形式的表現であり、一般に次のような形をした文字列である。

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_\nu$$

なお、直観主義論理 LJ においては、 $\nu \leq 1$ とする。ここで、各 $\mathfrak{A}_i$ および $\mathfrak{B}_j$ はそれぞれ論理式（命題の形式的表現となる文字列）であり、カンマ (,) および矢印 ($\rightarrow$) はシーケントの表記のために用いられる補助記号である。上記のシーケントの内容的意味は、 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_\mu$ の全てを仮定すれば、 $\mathfrak{B}_1$ 、

$\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{B}_\nu$ の少なくとも一つを導くことができる、ということであり、それは論理式 $(\mathfrak{A}_1 \& \dots \& \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{B}_\nu)$ の意味するところと同じである。ただし、 $\&$ 、 $\supset$ 、 $\vee$ はそれぞれ連言、含意、選言を表す論理記号である。

シーケント計算における証明図とは、定められたいくつかの推論規則に従ってシーケントを配置して得られる木構造であり、その葉となる端点には公理として定義されたシーケントが配置されている形式的な図のことである。公理となるシーケントの形は $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ であり、推論規則は一つまたは二つの上式とよばれるシーケントと一つの下式とよばれるシーケントをもち、上式から下式が得られるということを意味する。また推論規則は構造的な規則と論理的な規則に分類されるが、論理的な規則は各論理記号 ($\&$ [連言]、 $\vee$ [選言]、 $\supset$ [含意]、 $\neg$ [否定]、 $\forall$ [全称量化]、 $\exists$ [存在量化]) に対して二種ずつ与えられ、下式の $\rightarrow$ の左または右に位置する論理式の一つ（最も外側に位置するもの）にその論理記号が導入された形となっている。なお、証明図の結論、すなわち木構造の根であるシーケントを終式とよぶ。次の図式は LK における証明図の例である。

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow A}{\rightarrow A, \neg A} \text{ (}\neg\text{右)} \quad \frac{B \rightarrow B}{\neg B, B \rightarrow} \text{ (}\neg\text{左)} \\
 \hline
 \neg A \supset \neg B, B \rightarrow A \text{ (}\supset\text{左)} \\
 \frac{\neg A \supset \neg B, B \rightarrow A}{B, \neg A \supset \neg B \rightarrow A} \text{ (換左)} \\
 \frac{B, \neg A \supset \neg B \rightarrow A}{\neg A \supset \neg B \rightarrow B \supset A} \text{ (}\supset\text{右)} \quad \frac{B \rightarrow B \quad A \rightarrow A}{B \supset A, B \rightarrow A} \text{ (}\supset\text{左)} \\
 \hline
 \neg A \supset \neg B, B \rightarrow A \text{ (切断)}
 \end{array}
 \quad [\text{図 1}]$$

この証明図において、公理として配置されているシーケントの出現は4つ、また推論規則の適用は7つである。推論規則の適用箇所にはそれぞれ用いられている規則の種類が括弧の中に表示してあるが、それらのうち、構造的な規則は「換左」と「切断」であり、それ以外は論理的な規則である。

一般に、論理的な推論規則と構造的な推論規則はそれぞれ全部で12種類と7種類あるが、そのうち、ここでは特に「切断」について述べる。切断 (Schnitt, cut) とは、図式 $\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda}$ で表される推論規則である。ただし、 Γ 、 Θ 、 Δ 、 Λ はそれぞれ論理式の（空を許す）有限列とし、 $\mathfrak{D}$ は論理式とする。なお、 $\mathfrak{D}$ はこの切断における「切断論理式」とよばれる。

さて、切断の意味するところは三段論法である。実際、先の一般図式において、 Γ と Δ をそれぞれちょうど一つの論理式 A と B からなる列、 Θ と Δ はともに空列とし、さらに $\mathcal{D}$ を論理式 C とすれば、 $\frac{A \rightarrow C \quad C \rightarrow B}{A \rightarrow B}$ となる。一般の場合でも、シーケントの意味内容からすれば、切断とは本質的に三段論法であることがわかる。この切断に関して、ゲンツェンは 1935 年に次の「基本定理」を証明した。

定理 1 (Gentzen[3]). 第一階述語論理体系 LK および LJ において、任意に与えられた証明図から、同じシーケントを終式にもち、かつ切断を含まない証明図を構成するような手続きを、定義することができる。

この基本定理は「切断除去定理」ともよばれる。証明図から切断の規則を取り除ける、ということを主張するからである。このことを少々乱暴に表現すると、三段論法を用いずとも演繹は成り立つ、となる。もちろんこれは三段論法すなわち切断の他に、いかなる推論規則を用意するかに依存する。つまり、LK と LJ においては切断以外の推論規則がそれぞれの論理を表現するために十分なものとなっているわけである。

では、基本定理の意義は何であろうか。切断は使わなくてもよい、すなわち切断以外の推論規則が論理を表現するために十分である、ということからは何が得られるのであろうか。それは、切断以外の推論規則がもつ、上式と下式に関する次の性質に着目することにより理解される。すなわち、切断以外の推論規則においては、上式に現れるどの論理式についても、下式に現れるいずれかの論理式の部分論理式となっている、という性質である。ここで、ある論理式の部分論理式とは、その論理式を構成する過程において用いられる論理式、例えば $A \& (B \vee C)$ における A や $(B \vee C)$ 、さらには B や C および $A \& (B \vee C)$ 自身である。

ここで、シーケント計算の証明図は終式を根とする木構造をなしていたから、切断を含まない証明図に現れるどの論理式についても、終式に現れるいずれかの論理式の部分論理式となることがわかる。一方で、証明図が切断を含む場合

には、一般にはそのような性質は満たされない。例えば、[図1]の証明図において、 A と B が命題変数記号であるとすれば、この証明図の終式に現れる論理式の部分論理式は全部で5つ、すなわち $\neg A \supset \neg B$ 、 $\neg A$ 、 $\neg B$ 、 A および B であり、論理式 $B \supset A$ はそれらの中には入らない。ところが、この論理式は切断論理式として証明図に現れる。これは、証明図が示すべき目標である終式の内部に含まれていない論理式を、終式を導くための途中段階においては一時的に用いている、といえる。

証明図に現れるそのような箇所を、証明における「回り道」などと称することがあるが、ゲンツェンの基本定理は、いかなる証明図からも回り道を取り除くことができる、ということを意味するのである。さらに標語的に表現すれば、目標を示すことができる場合には、目標の中に含まれるものだけで証明を組み立てることができる、ということを主張する定理であるといえる。ただし、目標の中に含まれるもの、すなわち終式に現れる論理式の部分論理式は、一般には有限個とは限らないことに注意する必要がある。述語論理においては、量子子を含む論理式の部分論理式は一般に無限に存在するからである。

さて、基本定理の証明の方針は次の通りである。与えられた証明図を Π とおくとき、 Π と同じ終式をもち、切断を一つも含まない証明図 Π' を得ることができる、ということを示すため、証明図の書き換え手続を定義する。その書き換え手続を Π に対して繰り返して適用して、証明図の列 $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots$ をつくれば、その列は必ず有限の長さで停止し、最後の証明図は切断を含まない、つまり最後の証明図を Π' とすればよい、ということがわかる。そのように書き換え手続を定義するのである。

ここでは、ゲンツェンの定義した書き換え手続の詳細については述べない。ただ、その定義に従って、例えば[図1]の証明図を書き換えてゆくと、どのような証明図の列ができるかを示すこととする。

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{\rightarrow A, \neg A \quad \neg B, B \rightarrow} \\
 \frac{}{\neg A \supset \neg B, B \rightarrow A} \\
 \frac{B \rightarrow B \quad \frac{}{B, \neg A \supset \neg B \rightarrow A} \quad A \rightarrow A}{B, \neg A \supset \neg B \rightarrow A} \text{ (切断)} \\
 \frac{}{\neg A \supset \neg B, B \rightarrow A}
 \end{array}$$

[図2]

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{\rightarrow A, \neg A \quad \neg B, B \rightarrow} \\
 \frac{}{\neg A \supset \neg B, B \rightarrow A} \\
 \frac{B \rightarrow B \quad \frac{}{B, \neg A \supset \neg B \rightarrow A} \quad A \rightarrow A}{B, \neg A \supset \neg B \rightarrow A} \text{ (切断)} \\
 \frac{}{\neg A \supset \neg B, B \rightarrow A}
 \end{array}$$

[図3]

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{\rightarrow A, \neg A \quad \neg B, B \rightarrow} \\
 \frac{}{\neg A \supset \neg B, B \rightarrow A} \\
 \frac{B \rightarrow B \quad \frac{}{B, \neg A \supset \neg B \rightarrow A} \quad A \rightarrow A}{B, \neg A \supset \neg B \rightarrow A} \text{ (切断)} \\
 \frac{}{\neg A \supset \neg B, B \rightarrow A}
 \end{array}$$

[図4]

与えられた [図 1] の証明図を書き換えて [図 2]、さらにそれを書き換えて [図 3] の証明図を経て、最終的に切断を一つも含まない [図 4] の証明図に至る列ができる。途中で切断の個数が増える、あるいは証明図の高さが増す、ということ ([図 2]) もありうるが、結局は切断のない、つまり回り道のない証明図が得られるのである。

なお、基本定理によって除去される回り道はあくまでも切断の推論規則である。それ以外にも証明図において冗長な部分は存在しうるが、それらについては必要に応じて別途取り扱うことになる。例えば [図 4] の証明図では最下部の 2 つの推論図を取り除いても、つまり上部 3 段からなる証明図としても、同じ終式に至る証明図となる。また、その最も単純な証明図はそもそも [図 1] の左上 3 段に現れていたわけであるが、そのようなこと、すなわち同じ終式に至る切断無しの証明図が当初与えられた証明図の部分として存在していることは、一般には期待できない。

ところで、基本定理の証明においては、証明図の書き換え手続を定義し、それが必ず有限回で停止することを示す必要があるが、この停止性の証明に用いられるのが、順序数の上の帰納法である。これについては、無矛盾性証明の場合とともに次節において言及する。

3 第一階算術の無矛盾性証明

ゲンツェンの基本定理は、その後さまざまに応用されることとなった。また $LK \cdot LJ$ 以外の論理体系においても切断除去定理が成り立つか否か研究された。それらを含め、ゲンツェンが基本定理の証明において創りだしたシーケント計算の体系およびその上の証明図の書き換え手続と、その停止性を示すために用いられた証明図と順序数を対応させる手法は、広く論理学の発展に寄与している。

さてゲンツェンは基本定理のあと、引き続いて第一階算術 PA の無矛盾性を証明したが、そこでも基本定理における切断除去の方法が応用されている。ここで、 PA は、本質的には解析学を含まない、無限集合に関する演算を含まない算術であるが、自然数の上の数学的帰納法は有している。本節の主題はこの

ゲンツェンによる無矛盾性証明であるが、その意義を考察するにあたっては、ゲーデルの不完全性定理との関係に触れざるをえない。

ゲーデルの不完全性定理から、PA の無矛盾性は PA の中では証明できないことが導かれる。これをもって、全数学の無矛盾性を証明しようとしたヒルベルトのプログラムは潰えてしまったとされた。体系の無矛盾性証明は、より確かであると思われる体系の中で行われるべきであるが、全数学がその基礎におくべき最も確実な体系は PA の中の一部分に限られると考えられたからである。しかしゲーデルの不完全性定理が発表されたのは 1931 年であり、ゲンツェンの無矛盾性証明はそれよりもあと、1936 年と 1938 年になされた。ゲンツェンはゲーデルの定理を知っていて、それを序文で引用しつつ、自身の無矛盾性証明の論文を書いている。ではゲンツェンの証明はゲーデルの定理に反することがないのであろうか。

ゲンツェンが PA の無矛盾性を示したとされる定理は、あくまでも数学的に曖昧さのない形で表現され、さらにそれを証明するために用いられる論法の範囲も明確にすることができる。

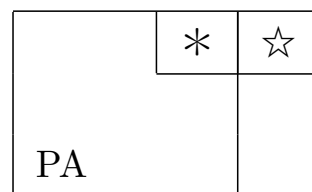
定理 2 (Gentzen[4, 5]). LK に自然数に関する原子論理式からなる公理（始シーケント）および数学的帰納法の推論規則を加えて得られる第一階算術の体系 PA は無矛盾である。すなわち、この算術体系において、 $\rightarrow$ の前後ともに空であるようなシーケントを終式にもつ証明図は存在しない。

ここで、定理の中で「体系が無矛盾である」と表現しているのは、体系において生み出される証明図（文字列あるいは文字の配置）の中にある種のもの（終式が「 $\rightarrow$ 」であるもの）がないということである。また、定理の証明がいかなる推論の積み重ねによりなされるか、つまり定理の証明をもし形式化したとすればいかなる体系においてなされるかも明かにされるのである。つまりゲンツェンが何を用いていかなることを示したのか、それは明白であって議論の余地はない。またその証明がゲーデルの不完全性定理と齟齬をきたすこともない。なぜならば、ゲンツェンの証明において用いられた論法の中には、PA 自身の中には含まれないものが存在するからである。

見解の相違があり得るのは、ゲンツェンの証明が PA の無矛盾性を示すといえるのか、すなわちゲンツェンの証明で用いられた論法が PA に含まれる論法に比してより確実なものといえるのかであって、ゲンツェンの定理およびその証明の正当性ではない。体系の無矛盾性を示すときにそのよって立つ確実な論法を、体系の中の一部に求めたとすれば、証明不可能であることがゲーデルの不完全性定理からわかるが、体系の外にある論法を用いれば不可能とはいえない。ヒルベルトのプログラムが遂行できなくなったとするのは、全数学の無矛盾性証明は PA の中の一部分のみを用いて示されなければならないとの前提に立つからであって、各々の体系に応じて、PA の中の一部分以外にも、その体系内には収まらないものの、より確実と見なせる論法を合わせて用いた「無矛盾性証明」もありうるとするのが、ゲンツェンの証明を無矛盾性証明と呼ぶ立場なのである。

なお、ゲンツェンの定理において「PA が無矛盾」と表現している事実は PA の証明図に終式が「 $\rightarrow$ 」であるものが存在しないということであって、それが何を意味するかには関係しないし、またその事実を表すために別の用語を用いてもかまわない。その事実と、それを示したゲンツェンの証明に用いられた論法の範囲とをあわせて、すなわち定理とその証明に対して、PA が無矛盾である、PA が信頼するに足る体系といえるのだ、という意味をもたせるか否かは、定理と証明自身とは別のことである。

ここで、ゲンツェンの証明で用いられた論法の範囲を図にしておこう。右の [図 5] において、左側の大きな四角形が PA で形式化可能な論法の範囲を表し、右上の＊および☆をあわせた部分がゲンツェンの無矛盾性証明において用いられた論法の範囲で



[図 5]

ある。＊は PA の中、☆は PA の外にある。ゲーデルの不完全性定理より、体系の無矛盾性を示すためには☆のような体系の中には入らない論法を用いることが不可避であり、またゲンツェンの証明を無矛盾性証明と見なすときには、PA の全体あるいはそれを包含する拡大体系と比べて、PA の中の一部である＊および外にある☆を合わせた部分は信頼できる確実なものであるとしている。

では、ゲンツェンの無矛盾性証明はいかになされるのであろうか。そこでは、基本定理において示された切断除去の手法が応用される。ゲンツェンは複数の形式で無矛盾性証明を行っているが、そのうち 1938 年の論文では切断除去の応用が直接見て取れる証明となっている。以下にその概略を述べる。

PA においてシーケント「 $\rightarrow$ 」は証明できない、すなわち PA の証明図で終式が「 $\rightarrow$ 」であるものは存在しないということを示すのが目標である。そのためには、もし終式が「 $\rightarrow$ 」である証明図が与えられたらば、その証明図から切断を除去することができる、すなわち終式が「 $\rightarrow$ 」で切断を含まない証明図をつくる手続を定義できる、ということを証明すれば十分である。なぜならば、切断以外の推論図において上式に現れる論理式は下式に現れるいずれかの論理式の部分論理式であるから、終式が「 $\rightarrow$ 」で切断を含まない証明図は存在しないからである。つまり、もし「 $\rightarrow$ 」が証明できれば切断無しでも証明可能、しかし切断無しでは「 $\rightarrow$ 」は証明不可能なので元々証明不可能、となる。

なお、このように切断除去の手法が応用されるが、PA そのものにおいて切断除去定理を示したわけではない。PA の証明図のうちの一部、特に終式が「 $\rightarrow$ 」であるものについては切断を除去できると主張しているのである。

さて、切断除去のための証明図の書き換え手続は、LK・LJ における基本定理の場合と比べて、数学的帰納法の推論図が含まれる分、複雑となるが、その手続については省略する。ここでは、書き換え手続が有限回で停止することがどのように示されるか述べる。

いま、各証明図に対してそれぞれ自然数 $(0, 1, 2, \dots)$ のいずれかを対応させ、証明図の書き換え手続を施したときには対応する数が必ず小さくなるようにできたとする。すなわち、証明図全体から自然数全体への写像 φ で、性質「証明図 Π に書き換え手続を適用して証明図 Π' が得られるならば $\varphi(\Pi) > \varphi(\Pi')$ 」を満たすものを定義できたとする。このとき、書き換え手続を繰り返して得られるいかなる証明図の列も有限の長さを持つこと、つまり書き換え手続が無限に繰り返されることはないということがわかる。なぜならば、自然数を任意に一つ取り出したとき、それから始まる自然数の下降列は必ず有限の長さを持つからである。

ゲンツェンの基本定理、すなわち LK・LJ における切断除去定理における証明図の書き換え手続の有限停止性は、このような証明図から自然数への対応を定義することによって示すことができる。実際にはゲンツェンは 1935 年の論文において、自然数全体からなる順序数 ω よりも大きな順序数 ω^2 への対応を定義し、 ω^2 までの順序数に無限下降列が存在しないことを用いて書き換え手続の有限停止性を示した。順序数の使い方に余裕がある一方、より単純な書き換え手続が採用されている。

次に、ゲンツェンの無矛盾性証明における書き換え手続の有限停止性は、 ϵ_0 までの順序数に無限下降列が存在しないことを用いて示された。ここで ϵ_0 は ω や ω^2 などより大きな順序数であるが、この大きさは必要である。実は ϵ_0 までの順序数に無限下降列が存在しないことこそが、[図 5] における☆の部分、すなわち PA の中では示すことができない部分なのである。ただし、無矛盾性証明において、 ϵ_0 までの順序数に関する数学的理論一般について用いているというわけではない。 ϵ_0 までの順序数を表しているとは見なせる順序数表記、すなわち特定の文字列とその上の大小関係（の判定法）を定め、そこにおける下降列が有限の長さしか持ち得ないということのみを用いる、つまり認めるのである。

順序数表記の例として、ここでは ω^2 までの順序数を表しているとは見なせる特定の文字列とその上の大小関係の判定法を定義してみよう。扱う文字列は (t, s) で、 t と s はそれぞれ文字 0 のあとに文字 ' をいくつか（0 個含む）並べて得られる文字列とする。また (t_1, s_1) より (t_2, s_2) が小さいとは、 t_1 が t_2 のあとに 1 個以上の ' を並べた列であるか、あるいは t_1 と t_2 が全く同じ列であってしかも s_1 が s_2 のあとに 1 個以上の ' を並べた列であることとする。例えば、文字列 $(0''', 0')$ 、 $(0'', 0''''')$ および $(0'', 0''')$ はそれぞれ 9 文字、12 文字および 10 文字からなる文字列であるが、いずれもいまの順序数表記の定義に適合し、それらの大小は、 $(0''', 0')$ より $(0'', 0''''')$ が小さく、さらにそれよりも $(0'', 0''')$ が小さいと判定される。このような順序数表記において、任意に与えられた順序数（を表す文字列）から始まる下降列が有限の長さとなることは、確かであるといえよう。

ϵ_0 までの順序数の場合でも、順序数表記を定めることができる。その表記において無限下降列が存在しないことを用いて、PA において「 $\rightarrow$ 」を終式とする証明図が存在しないことを示したのがゲンツェンの証明である。そしてその順序数表記に無限下降列が存在しないことは確かであるとの認識があれば、ゲンツェンの証明を無矛盾性証明と見なすことができるのである。 ϵ_0 の場合、 ω や ω^2 などの場合と異なり、無限下降列が存在しないこと（の形式的な表現）を、PA において証明できない。それでも十分に確かであると認識できるのだとする主張が、ゲーデルの不完全性定理を知りつつもゲンツェンの証明を無矛盾性証明と呼ばしめているのである。

4 自然演繹における基本定理

ゲンツェンの基本定理はシーケント計算において表現され、証明された。「回り道のない証明」をシーケント計算における切断規則を持たない証明図と表現し、任意の証明図から切断規則を除去できることを示したのであった。この、証明可能な論理式はその部分論理式のみからなる証明図を持つということを帰結する定理は、いかにして発想されたのであろうか。ゲンツェンが基本定理を証明した論文 [3] の序論において述べることによれば、まず彼は推論を自然に形式化した体系をひとつ創り、それを研究することによって、古典論理においても直観主義論理においても証明から回り道を取り除くことができる、という一般的な「基本定理」を見出すに至った。しかしそれを表しかつ証明するにあたって、先の体系には古典論理の場合において不都合な点があったがゆえに、基本定理の表現と証明のため、新たにもう一つの体系（シーケント計算）を創った、とのことである。

この、ゲンツェンが最初に創り上げた論理体系が、今日「自然演繹」とよばれシーケント計算とともに広く論理学研究において用いられている体系であり、第2節において言及した NK（古典論理）と NJ（直観主義論理）である。証明図は論理式を推論規則にしたがって配置した木構造であり、論理式の各出現はいかなる仮定に依存しているかが表されている。また推論規則には各論理記号に関する導入と除去の規則がそれぞれあり、それ以外、構造に関する推論規則

は矛盾論理式の規則のみである。さらに公理は古典論理における排中律の一種類だけとなっている。

ゲンツェンによれば基本定理は元々自然演繹の上で考えられたことになるが、それを実際に書き表しかつ証明したのがプラヴィッツ [10, 11] である。ゲンツェンのシーケント計算における切断除去定理に対応する、プラヴィッツによる自然演繹上の定理、すなわち自然演繹において表現された基本定理を、自然演繹の正規化定理とよぶ。そこでは、証明図の中の「回り道」は最大論理式とよばれる論理式の出現、すなわち論理記号の導入（あるいはそれに準ずると見なせる）規則の結論にして同時に論理記号の除去規則の適用を受ける論理式として表現される。そして任意に与えられた証明図から最大論理式を取り除くことができる、ということが定理の主張となる。

プラヴィッツは自然演繹の正規化定理を直観主義論理の場合に証明し、さらに古典論理の場合には選言および存在量化の論理記号を原始的には含まないという表記上の変更を体系に加えた上で証明した。直観主義論理では自然演繹において基本定理を示せること、それを古典論理に拡張しようとする排中律が障害となってしまうこと、このいずれもがゲンツェンの序論における言明と符合している。プラヴィッツは排中律の問題を克服するため、その公理に代えて背理法の推論規則を採用し、さらに原始的論理記号を制限することで背理法の適用を素論理式に限定し、古典論理における正規化定理を示したのである。

その後、自然演繹の正規化定理について、古典論理においても選言および存在量化も含めて原始的論理記号として持つ体系に拡張する試みがなされたが、証明図の書き換え手続が直観主義論理におけるものと統一して定義されることはなかった。その点においてもゲンツェンの切断除去定理に対応するといえる自然演繹の正規化定理が、次の安東による定理である。

定理 3 (Andou[1]). 論理記号をすべて（選言および存在量化を含めて）原始的に持つ自然演繹の第一階述語論理体系において、任意に与えられた証明図から、同じ仮定と結論をもち、かつ最大論理式を含まない証明図を構成するような手続きを定義することができる。

この定理における証明図の書き換え手続は、ゲンツェンのシーケント計算における切断除去定理の場合と同じく、古典論理と直観主義論理を統一して定義されている。なお、その有限停止性はゲンツェン、プラヴィッツと同様、証明図の書き換えに減少順序数列を対応することにより示される。その際、プラヴィッツが直観主義論理において用いた「分節」（同型な論理式出現の構造的な列）の概念を古典論理の場合に拡張して定義しているが、その拡張部分は、シーケント計算において、古典論理に関わる構造的推論規則（およびそれに準ずるもの）に対応する。

つまり、ゲンツェンが基本定理の着想を得た自然演繹においても、定理の表現と証明がなされたわけであるが、そのためにはゲンツェンが基本定理のために改めて創り上げたシーケント計算の視点による分析が有用であったのである。さらに、ゲンツェンによる最初の論理体系である自然演繹において、基本定理を安東の証明のように表してみると、証明図の書き換え手続を「単純」なものにすることができるのであるが、その単純性からは、基本定理のより短い別証明が得られるだけでなく、書き換え手続の合流性証明 [2] など、新たな定理を導くことができる。これら一連の事実について、いずれもその礎をゲンツェンの創り上げた二つの論理体系と、彼の示した基本定理の中に認めることができるのである。

参考文献

- [1] Y. Andou, A normalization-procedure for the first order classical natural deduction with full logical symbols, Tsukuba Journal of Mathematics 19 (1995) 153-162.
- [2] Y. Andou, Church-Rosser property of a simple reduction for full first-order classical natural deduction, Annals of Pure and Applied Logic 199 (2003) 225-237.
- [3] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schliessen, Mathematische Zeitschrift 39 (1935) 176-210, 405-431.

- [4] G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Mathematische Annalen* 112 (1936) 493-565.
- [5] G. Gentzen, Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, New Series*, No. 4, Leipzig (1938) 19-44.
- [6] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931) 173-198.
- [7] E. Menzler-Trott, *Gentzens Problem: Mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland*. (Birkhäuser, Basel, 2001)
- [8] E. Menzler-Trott, *Logic's Lost Genius: The Life of Gerhard Gentzen*, transl. by C. Smoryński and E. Griffor. (American Mathematical Society and London Mathematical Society, 2007)
- [9] J. von Plato, Gentzen's logic, in *Handbook of the History of Logic vol.5 Logic from Russell to Church*, 667-721. (D. M. Gabbay and J. Woods ed., North-Holland, Amsterdam, 2009)
- [10] D. Prawitz, *Natural Deduction - A proof theoretical study*. (Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965)
- [11] D. Prawitz, Ideas and results in proof theory, in: *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, 235-307. (J. Fenstad ed., North-Holland, Amsterdam, 1971)
- [12] M. E. Szabo (ed. and transl.), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. (North-Holland, Amsterdam, 1969)
- [13] 新井敏康 「竹内の基本予想について」 *数学* 40 (1988) 322-337.
- [14] 新井敏康 「無矛盾性証明について」 *科学基礎論研究* 34 (2007) 43-51.
- [15] 前原昭二 『数理論理学—数学的理論の論理的構造—』 (培風館, 1973).
- [16] 前原昭二 「自然数論の無矛盾性証明の必要性」 *科学基礎論研究* 14 (1979) 107-115.
- [17] 松本和夫 『数理論理学』 (共立出版, 1970, 2001:復刊)