CIP法によるせん断波動場の解析

佐々木, 豊 / KANZAKI, Soichiro / 神崎, 壮一郎 / 吉田, 長行 / YOSHIDA, Nagayuki / SASAKI, Yutaka

(出版者 / Publisher)
法政大学情報メディア教育研究センター
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学情報メディア教育研究センター研究報告
(巻 / Volume)
26
(開始ページ / Start Page)
75
(終了ページ / End Page)
80
(発行年 / Year)
2012-08
(URL)
https://doi.org/10.15002/00007993

http://hdl.handle.net/10114/7196

CIP 法によるせん断波動場の解析

Analysis of Shear Wave Field by CIP Method

神崎 壮一郎[1)]　佐々木 豊[2)]　吉田 長行[2)]
Soichiro Kanzaki,　Yutaka Sasaki,　Nagayuki Yoshida

[1)] 法政大学大学院デザイン工学研究科建築学専攻
[2)] 法政大学デザイン工学部建築学科

When analyzing the wave propagation problem in the infinite or semi-infinite elastic solids, the numerical device which can transmit the outgoing waves is attached to the boundary of the finite analytical region. But, we proposed a new method which combines the CIP method with the finite element method. Its validity is presented by analyzing the rod subjected to the impulse load. And a numerical example for two dimensional ground motion is presented by using the CIP method only and compared with Mathematica.

Keywords : Shear wave, Wave Transmitting boundary, CIP Method, F.E.M.

1. はじめに

近年，地盤の非線形な動的挙動が活発に研究されている．非線形問題を扱う場合，有限要素法が有効かつ柔軟な手法であることはよく知られている．しかしながら，有限要素法は本来，有限領域を対象とする数値解析手法である．そのため，無限あるいは半無限弾性体の波動伝播問題に適用する場合には，Fig.1 のように内部から外部に逸散する波動が，境界領域で反射しないための工夫が必要である．このような，有限な狭領域で逸散波を完全透過できる境界処理法は確立されておらず，実現すれば地盤と建物の連成振動における解析精度効率を向上させることができる [1][3] ．

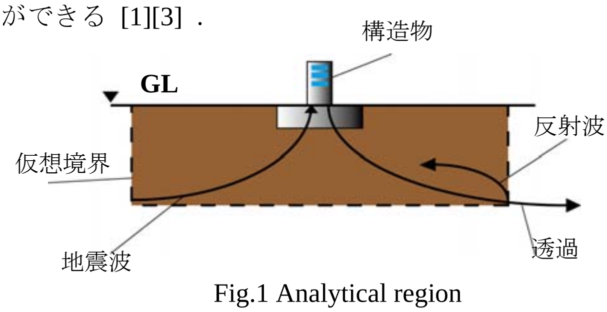

Fig.1 Analytical region

仮想境界における境界処理の代表例として境界に粘性ダッシュポットを組み込むことが主流であるが，本研究では CIP 法を用いた手法を目指す [4] [5] [6] ．

CIP 法は音響や振動のシミュレーションでよく使われる手法であり，有限要素法[2]といかに組み合わせるかが本研究の焦点となる．

2. 解析

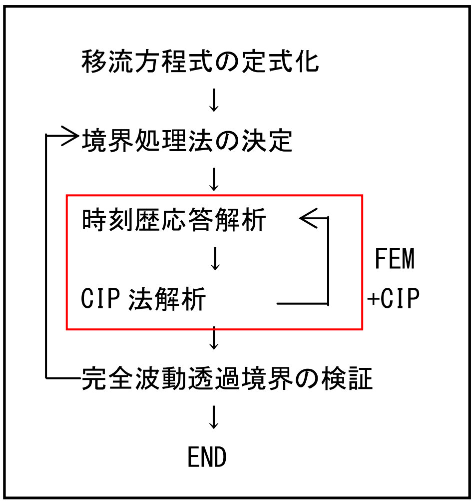

Fig.2 Analytical process

Fig.2 に示す通り，まず地盤の一部を 1 次元モデル化し，弾性波動方程式から移流方程式への定式化を行う．続いて，有限要素法に CIP 法を用いた境界処理法の検討を行う．

2.1 解析モデル

本研究は，Fig.3 のように有限モデル境界面で波動が反射しない波動透過境界作成を行い，無限に広がる地盤を模擬することを目的としている．モデルは 1 次元棒材モデル Fig.4 と 2 次元格子モデル Fig.5 の 2 つを用いている．

原稿受付 2012 年 3 月 21 日
発行　2012 年 7 月 26 日

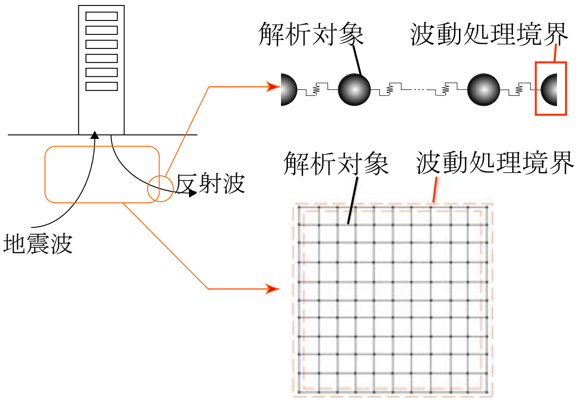

Fig.3　Analytical model

1 次元棒材モデルおよび物性値を以下に示す.

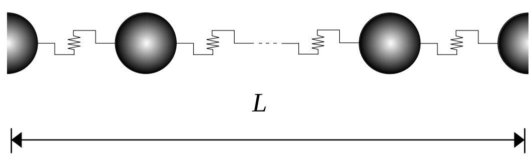

Fig.4　1D analytical model

S 波速度	$c_s = 120 m/s$
密度	$\rho = 1500 kg/m^3$
断面積	$A = 1m^2$
棒材長さ	$L = 99m$
せん断弾性係数	$G = \rho c_s^2 = 2.16\times10^7 kg/m\cdot s^2$

2 次元格子モデルおよび物性値を以下に示す.

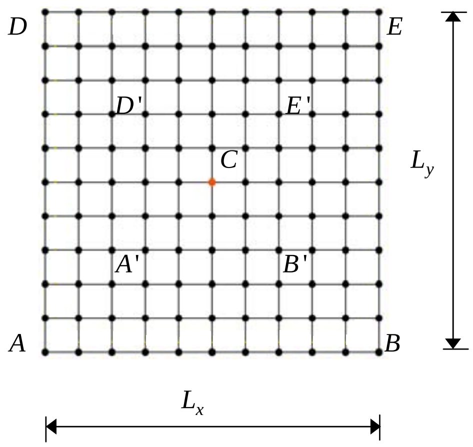

Fig.5　2D analytical model

S 波速度	$c_s = 120 m/s$
密度	$\rho = 1500 kg/m^3$
ポアソン比	$\upsilon = 0.4$
厚さ	$t = 1.0m$
格子長さ	$L_x = L_y = 10m$

2.2　マトリクス運動方程式

1 次元棒材モデルを例に，有限要素法による運動方程式を以下に示す.

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\}$$

ここに,

質量マトリクス要素　$: m = \rho AL/(n-1)$

剛性マトリクス要素　$: k = GAn/L$

$$[M]=\begin{bmatrix} m/2 & & & & \\ & m & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m & \\ & & & & m/2 \end{bmatrix},$$

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K],$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k & -k & & & \\ -k & 2k & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 2k & -k \\ & & & -k & k \end{bmatrix}$$

$$\{f\}=[0,\cdots,0,f_i,0,\cdots,0]^T, \quad f_i=-m_i\ddot{x}_{i0}$$

本研究においてはレイリー減衰 $h = 0.01$（1%）を導入する.

3.　CIP 法による波動方程式

3.1　波動方程式

$n(=1,2,3)$ 次元の弾性体における振動方程式は，次のように示される．応力－変位関係式および応力－ひずみ関係式から,

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\{u\}_n=[\partial]_n\{\sigma\}_n \tag{1}$$

$$\{\sigma\}_n=[D]_n\{\varepsilon\}_n=[D]_n[\partial]_n{}^T\{u\}_n \tag{2}$$

また，式(1)を

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\{u\}_n=\frac{1}{\rho}[\partial]_n\{\sigma\}_n \tag{3}$$

と展開し，式(2)を代入した式を波動方程式と呼ぶ.

3.2　波動方程式から移流方程式への変換

式(2)，(3)の振動方程式は，まとめて次のように表せる.

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix}\dot{u}\\ \sigma\end{Bmatrix}_n=\begin{bmatrix}[0] & \dfrac{1}{\rho}[I]\\ [D]_n & [0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[\partial]_n{}^T & [0]\\ [0] & [\partial]_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}\\ \sigma\end{Bmatrix}_n \tag{4}$$

または,

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F\}_n = [A]_n[Q]_n\{F\}_n \tag{5}$$

となる．ただし,

$$\{\boldsymbol{F}\}_n = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \sigma \end{Bmatrix}_n, \quad [\boldsymbol{A}]_n = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{0}] & \frac{1}{\rho}[\boldsymbol{I}] \\ [\boldsymbol{D}]_n & [\boldsymbol{0}] \end{bmatrix},$$

$$[\boldsymbol{Q}]_n = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\partial}]_n^T & [\boldsymbol{0}] \\ [\boldsymbol{0}] & [\boldsymbol{\partial}]_n \end{bmatrix}$$

とする。また，$[Q]_n$ はx，y，z 方向微分に分解して表現することが出来る．

$$\begin{aligned}[Q]_n &= [Q_x]_n + [Q_y]_n + [Q_z]_n \\ &= [q_x]_n \frac{\partial}{\partial x} + [q_y]_n \frac{\partial}{\partial y} + [q_z]_n \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned} \tag{6}$$

これにより，式(5)は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{F\}_n &= [A]_n[q_x]_n \frac{\partial}{\partial x}\{F\}_n + [A]_n[q_y]_n \frac{\partial}{\partial y}\{F\}_n \\ &\quad + [A]_n[q_z]_n \frac{\partial}{\partial z}\{F\}_n\end{aligned} \tag{7}$$

となり，最終的には以下のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{F\}_n &= [A_x]_n \frac{\partial}{\partial x}\{F\}_n + [A_y]_n \frac{\partial}{\partial y}\{F\}_n \\ &\quad + [A_z]_n \frac{\partial}{\partial z}\{F\}_n\end{aligned} \tag{8}$$

ただし,

$$[A_i]_n = [A]_n[q_i]_n, i = x, y, z$$

次に，式(8)の対角化を行うために，次の固有値問題を考える．

$$[A_i]_n\{F\}_n = \lambda_i\{F\}_n, \quad i = x, y, z \tag{9}$$

上式より得られる固有値 λ_i を対角にならべたマトリクス$[\Lambda_i]$と，固有ベクトルを並べた固有マトリクス$[\varphi_i]$を用いると次式が成立する．

$$[\varphi_i]^{-1}[A_i]_n[\varphi_i] = [\Lambda_i], \ i = x, y, z \tag{10}$$

また, 式(8)を x, y, z それぞれの方向に分解すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F\}_n = [A_x]_n \frac{\partial}{\partial x}\{F\}_n \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F\}_n = [A_y]_n \frac{\partial}{\partial y}\{F\}_n \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F\}_n = [A_z]_n \frac{\partial}{\partial z}\{F\}_n \tag{13}$$

と，表される．

ここで，$\{F\}_n = [\varphi_x]_n\{f_x\}_n$ とおくと，x 方向移流方程式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f_x\}_n = [\Lambda_x]\frac{\partial}{\partial x}\{f_x\}_n \tag{14}$$

同様に，$\{F\}_n = [\varphi_y]_n\{f_y\}_n$ とおくと，y 方向移流方程式が得られ，$\{F\}_n = [\varphi_z]_n\{f_z\}_n$ とおくと，z 方向移流方程式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f_y\}_n = [\Lambda_y]\frac{\partial}{\partial y}\{f_y\}_n \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f_z\}_n = [\Lambda_z]\frac{\partial}{\partial z}\{f_z\}_n \tag{16}$$

4. 解析手法

CIP 法の「無反射境界条件を考慮する必要がない」という特徴を活かし，有限要素法解析の境界面において反射が生じるという欠点を補う．

まず，地中に向けて半無限の地盤を任意の位置で区切り境界を設ける．この境界にて，あたかも波動が透過したかのようにシミュレーションするため，波動が通過する際にそこに作用する力を打ち消さなければならない．ここで必要となる力を CIP 法より導く．

本研究では，有限要素法と CIP 法の結合解法を，線形加速度法によって追跡する．以下にその手順を示す．

① $t = 0$ の時，初期外力$\{f\}$を与え，F.E.M により得られる$\{u\}_n$，$\{\sigma\}_n$ より，CIP 法に用いる移流方程式（式(14)，(15)，(16)）を求める．
② CIP 法にて Δt 秒間移流させ, データを保存する．
③ 移流後の CIP 法においてモデル境界部にあたる箇所に作用している$\{\sigma\}_n$を，モデル境界部に透過処理外力として与える．
④ 線形加速度法により Δt 秒間解析を行う．
⑤ ④で更新された$\{u\}_n$，$\{\sigma\}_n$を，②のデータに上書きする．

以降，②～⑤を t 秒間繰り返す.

5. 解析結果

5.1 1 次元棒材モデル

質点番号 1 に初期外力を与えた際の，質点番号 1 の時刻歴変位挙動を Fig.6 に，時刻歴速度挙動を Fig.7 に示す．　FEM 理論と CIP 法を併用した 1 次元棒材モデルにおいて，僅かな変位の減少が起きているが，CIP 法がせん断波動場の解析に有効であるといえる．また，全質点時刻歴変位挙動を Fig.12 と

して末尾に示しておく．

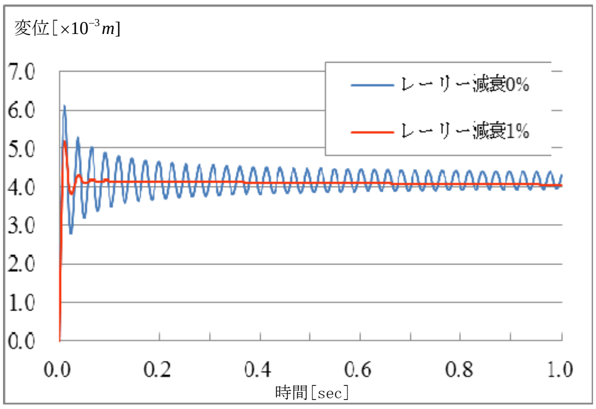

Fig.6　Displacement behavior of node 1 (1D)

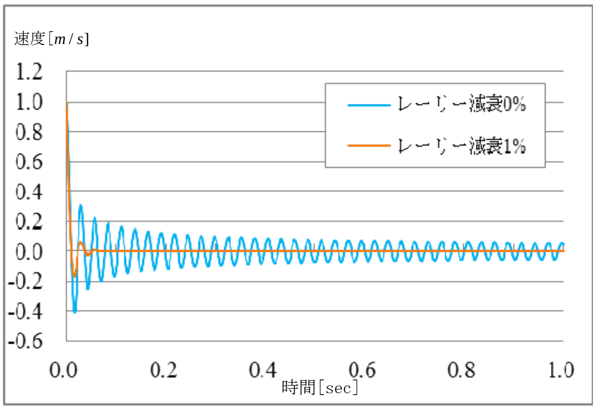

Fig.7　Velocity behavior of node 1 (1D)

5.2　2 次元格子モデル

2 次元格子モデルにおいて，CIP 法のみによる解析結果を示す．Fig.5 に示す 2 次元格子モデルの中心点 C にインパルスを与えた．Fig.8 に解析解，Fig.9 に Mathematica による変位伝播の様子を示す．質点 A, B, D, E の時刻歴変位挙動を Fig.10 に示す．また，質点 A', B', D', E' の時刻歴変位挙動を Fig.11 に示す．Fig.8 に示す解析解は式(17)から得た．[7]

$$u_z(r,t) = \frac{1}{2\pi c_s}\frac{H(c_s t - r)}{\sqrt{(c_s t)^2 - r^2}}, \tag{17}$$

H ：ヘビサイド関数

2 次元モデルにおいては，Fig.10 および Fig.11 に示すように，変位場の対称性が得られていない．この傾向は中心から遠ざかる程大きく表れる．

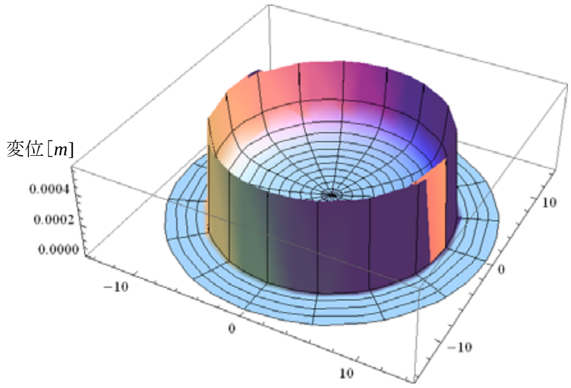

Fig.8　Analytic data (2D)

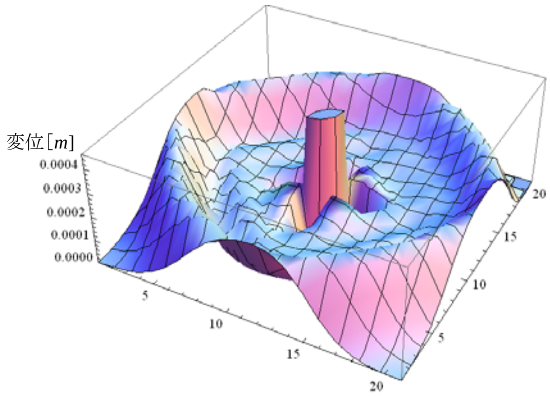

Fig.9 Displacement propagation (2D)

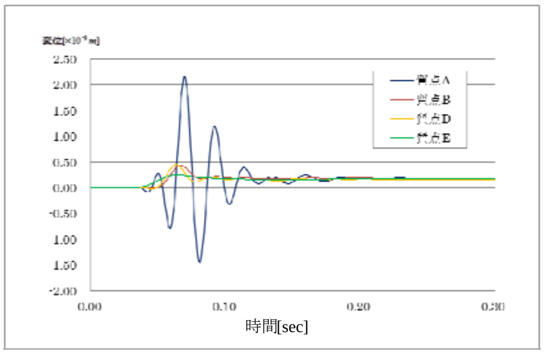

Fig.10　Displacement behavior of node　A, B, D, E (2D)

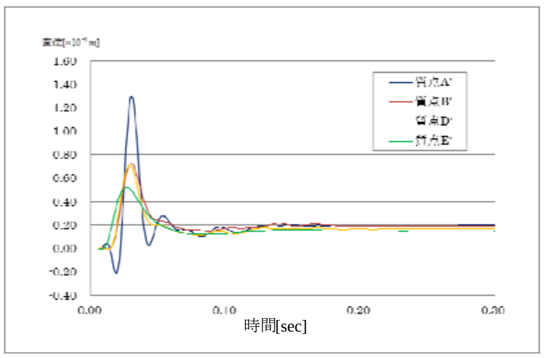

Fig.11　Displacement behavior of node A', B', D', E' (2D)

Fig.12 Displacement behavior of all nodes (1D)

6. 結論

1 次元問題では有限要素法と CIP 法の結合解法は放射場問題において良好な結果を得た．今後は，入射波問題への拡張が必要である．

2 次元問題では CIP 法単独解法による SH 波伝播を調査した．その結果，計算手順の x , y 方向順序に伴う非対称な変位場が表れた．今後はこの誤差の解消が課題である．

参考文献

[1] 伊野慎二，吉田長行，″波動透過境界の最適化に関する研究″，法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.21, pp.101-108, 2008.

[2] 春海佳三郎，大槻明：有限要素法入門 共立出版株式会社，2006.

[3] 古谷忍，吉田長行，最適化手法による波動透過境界処理に関する研究，法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.22, pp.55-61, 2009.

[4] 田嶋慶介，吉田長行：１次元・２次元弾性体における CIP 法による波動境界処理，法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.24, 2011.

[5] 矢部，尾形，滝沢：CIP 法－原子から宇宙までを解くマルチスケール解法－, 森北出版，2003.

[6] 矢部，尾形，滝沢：CIP 法と JAVA による CG シミュレーション，森北出版，2007.

[7] Karl F. Graff: Wave Motion in Elastic Solids, Dover Publications Inc., 1991.

