

バイクトライアルロボットのための力学的解析とシミュレーション

松岡, 美樹 / MATSUOKA, Miki

(発行年 / Year)

2011-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2011-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2010 年度修士論文

バイクトライアルロボットのための 力学的解析とシミュレーション

Mechanical Analysis and Simulation for Bike Trial Robot

指導教授 高島 俊

法政大学大学院工学研究科

機械工学専攻 修士課程

09R1130 マツオカ 松岡 ミキ 美樹

MECHANICAL ANALYSIS AND SIMULATION FOR BIKE TRIAL ROBOT

Miki Matsuoka

Abstract

As one field of sports, there is a game of bike trial. Riders operate a mountain bicycle with various advanced techniques. The purpose of this research is to create a bike trial robot that can operate a mountain bicycle and perform jumping, bike wheelie and etc. In this paper, a mechanical analysis concerning individual techniques including bike wheelie and Daniel is presented and the analysis method and the results by computer simulation are also presented.

Key Words: Bike Trial, Mountain Bicycle, Robot

目次

第1章 緒 言	4
第2章 自転車ロボットに関する調査	2
第3章 バイクトライアルについて ^[8]	4
3.1 使用自転車の規定	4
3.2 テクニックに関して	5
第4章 FRONT-UP について ^[1]	6
4.1 FRONT-UP の方法と原理	6
4.2 FRONT-UP のシミュレーションによる解析	9
4.3 5リンクモデルの構築	9
4.4 合成重心範囲	12
4.5 閉リンク機構の運動方程式導出	15
4.5.1 閉リンクモデル	16
4.5.2 トルク変換ヤコビアン ¹ の算出	16
4.5.3 加速度の関係式	18
4.5.4 単位ベクトル法	19
4.6 シミュレーション方法について	20
4.6.1 差分近似法	20
4.6.2 Runge-kutta 法	21
4.6.3 Runge-kutta-Gill 法	23
4.7 閉リンクモデルシミュレーション	25
4.7.1 シミュレーションの結果・考察	27
4.8 FRONT-UP シミュレーション	28
4.8.1 シミュレーションの結果・考察	30
第5章 WHEELIE について	31
5.1 WHEELIE の動作解析	31
5.2 WHEELIE の制御方法	32
5.3 WHEELIE シミュレーション	34
5.3.1 シミュレーションの結果・考察	36
第6章 DANIEL について	37
6.1 DANIEL の方法	37
6.2 7リンクモデルの構築	42

6. 3	DANIEL の動作解析	45
6. 3. 1	合成重心の軌跡	46
6. 3. 2	各関節回転角度の時間変化	48
6. 3. 3	考察	49
6. 4	踏み切り時の合成重心位置	50
6. 4. 1	考察	51
6. 5	閉リンクモデルの運動方程式導出	52
6. 5. 1	閉リンクモデル	52
6. 5. 2	トルク変換ヤコビアン の算出	53
6. 6	閉リンクモデルシミュレーション	56
6. 6. 1	シミュレーションの結果・考察	58
6. 7	DANIEL シミュレーション	59
6. 7. 1	シミュレーションの結果・考察	62
第7章	結 言	63
謝 辞		64
発表論文		65
参考文献		66
付 録		67
A)	7 リンク閉リンク運動方程式導出プログラム	67

第 1 章 緒 言

近年, 多くの研究機関や企業で移動ロボットについての研究が行われており, これまで, 完全自律で安定な歩行や走行を可能とした例もある[10][11]. しかし, 山道などの不整地の走行や岩場の段差をジャンプで乗り越えたりすることは困難である. 特に, 移動効率のよい 2 輪車によって不整地走行を実現した例はまだない. 本研究では, 不整地を自由自在に乗りこなすことを可能とするバイクトライアルロボットの開発を目指し, **Jump, Wheelie, Daniel** などの曲技の実現に焦点を絞って研究を行うことにする.

山道や岩場などのコースを走破するために競技者が駆使している様々な技術をバイクトライアルロボットに応用するためには, それぞれの曲技に使われている実際の動作の力学的解析をし, その結果を用いて物理モデルを作成し, コンピュータシミュレーションによって実現可能性を検証することが必要となる.

本研究では, 剛体リンク機構で人間と自転車をモデル化するが, その際, 人間が自転車に乗っている状態は, 閉じたリンク機構で表わされる. そのため, 一般的な閉リンク機構としてモデル化する必要があり, 閉リンクモデルに関する中村ら[2][3]の定式化を用いることにする.

第2章 自転車ロボットに関する調査

自転車ロボットの研究について調査したところ、高橋[9]らは自転車の平面運動と倒立振り子の運動を融合させた力学モデルを用いたシミュレーションにより、自転車の安定化におけるハンドル操作の有用性を示し、完全自律でハンドル操作し安定走行する自転車を実現可能とした。

また、村田製作所[10]では「不倒停止」という、止まったまま倒れない、人間には難しい機能を持っているロボットを開発した。このロボットは走行の際には実際の人間の動作と同様にハンドル操作でバランスをとっているが、停止した際には胴体部の円盤がモーメントホイールとして回転することによってバランスをとっている。これは倒立伸子の原理(Fig.2-1)で、円盤を回転させると、本体は逆方向に力が加わる、この力を反動トルクという。ロボットが傾くとその傾きをセンサが検出し、モータが円盤を回転させる。そこで発生した反動トルクを用いて、傾斜角度を制御している。

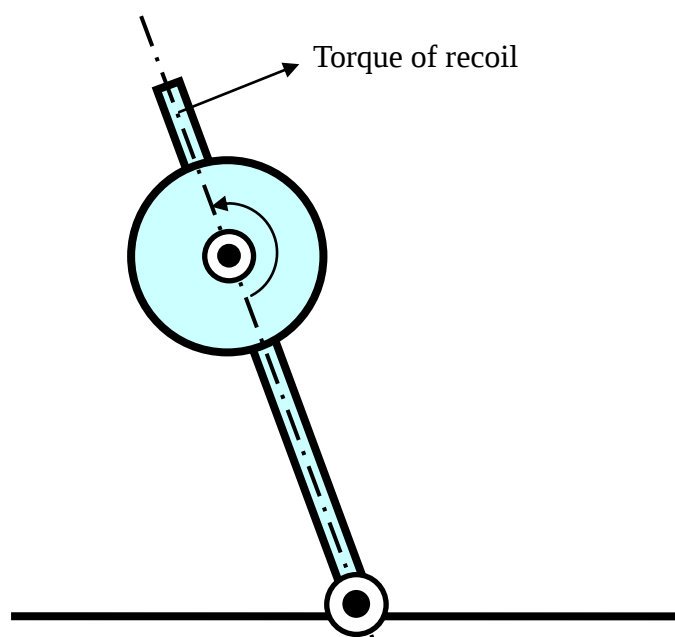


Fig.2-1 Torque of recoil

また、傾きを検知するセンサについてはジャイロセンサ(角速度センサ)を用いている。一般に物体の傾斜角は角度センサによって知ることができるが、自転車の姿勢制御を行うには次のような問題がある。

姿勢制御は単に直立させればよいのではなく、自転車のバランスが釣り合うように立てる必要がある。体重がどちらかに傾いたり、風などの外力が加わっている場合には角度センサが直立を示していても、バランスの釣り合いをとることができない。常に釣り合い角度(重力や風などの外力から加えられるトルクの和がゼロになる角度)からの偏差角度を求めて制御を行わないと、釣り合い角度にずれが生じてしまう。

この問題を解決するために、村田製作所では角速度を検知するジャイロセンサを搭載している。このセンサの働きにより、自転車が傾く速度(回転速度)を知ることができる。自転車の傾きが大きくなれば、角速度も大きくなる。そこで円盤を傾く方向と同じ方向に回転させ、角速度情報をもとに推定した偏差角度に応じた反動トルクを与えることで傾きを制御している。

第3章 バイクトライアルについて^[8]

バイクトライアルとは，特殊な自転車を用いた自転車競技の一種で，人工の難しいセッションや自然の溪谷，山地などにコースを設ける．コース上にある数個のセクションを，できるだけ足をつけず，時間内にセクションを走破する．審判はオブザーバーと呼ばれる．1回足を地面に着くと1点減点，2回着くと2点減点，3回と4回は3点減点，5回以上足を着くか両手を同時に着いた場合は失格の5点減点といったように，減点方式でオブザーバーにより採点され，点数により順位が決まる．

コースを走破するには安定走行だけでなく，ジャンプなど様々なテクニックが必要とされる．

3. 1 使用自転車の規定

国際バイクトライアル協会「2010 国際・国内競技規則」によると，協議会において使用される自転車は，最大 20 インチの自転車，もしくは，26 インチの自転車と定められている．したがって，本研究におけるシミュレーションでは 20 インチの自転車を使用するものとする．

3. 2 テクニックに関して

バイクトライアルで用いられる一部のテクニックの名称について以下に述べる。

a) スタンディング

基本となるその場で静止するというテクニック。

b) ダニエル

前輪を持ち上げた状態で、後輪だけで飛び跳ねるテクニック。

前後左右小刻みの移動や、段差の上り下りに用いられる。

c) パラレル

スタンディングから真横の障害物に一気に飛び上がるテクニック。

ダニエルから飛び上がるものはダニパラと呼ばれる。

d) ジャックナイフ

後輪を持ち上げたまま前輪だけで飛び跳ねるテクニック。

逆ダニエル、またはジャックダニエルとも呼ばれる。

e) フェデリック

ジャックナイフから前ブレーキを放し、同時に前輪を押し出して前に進むテクニック。

f) リベラ

段差と平行にジャックナイフをしながら後輪を横に振り、さらに前輪を振って飛び降りるテクニック。

g) バニーホップ

平地で前輪と後輪を同時に持ち上げ、障害物に飛び乗ったり飛び越えたりするテクニック。

h) ステアケース

段差に向かって正面から走り込み、段差の手前で前輪を上げて体全体で上方に伸び上がり、後輪を引き上げて段差に上るテクニック。

一気に飛び乗る方法と、アンダーガードを引っかけてよじ上る方法がある。

i) マイケル

段差と平行にスタンディングをしながらそのまま横に飛び出すテクニック。

第4章 Front-up について^[1]

4. 1 Front-up の方法と原理

前輪を上げる Front-up という曲技がある．そこで，この曲技を参考にするために，動作の解析を行った．まず，その方法を調査しまとめると，以下のようなになる．また，その様子を図に示す．(Fig.4-1)

- (1) スタンディングの状態から体重を前方へかける．
- (2) 体を起こし引き上げ動作を行う．
- (3) 引き上げ動作を行うと同時にペダルを漕ぎ加速する．
- (4) 前輪が上がる．



Fig. 4-1 Image of front-up

さらに，動作から原理を導くと以下の4つの要素により，前輪を上げていると考えられる．

- (1) 後輪が地面から受ける反力による合成重心周りのモーメント
- (2) 腰にかけるトルク
- (3) 前輪を地面に押し付ける力の反力による後輪接地点周りのモーメント
- (4) 人間と自転車の合成重心による制御

(1)について説明する．人間がペダルを漕ぎ後輪にトルクを加えることによって，後輪が回転し地面を後方に押す．その結果，自転車は，反力を地面から受ける．その反力によって生じる人間と自転車の合成重心回りのモーメントによって自転車の前輪が持ち上がると考えられる．

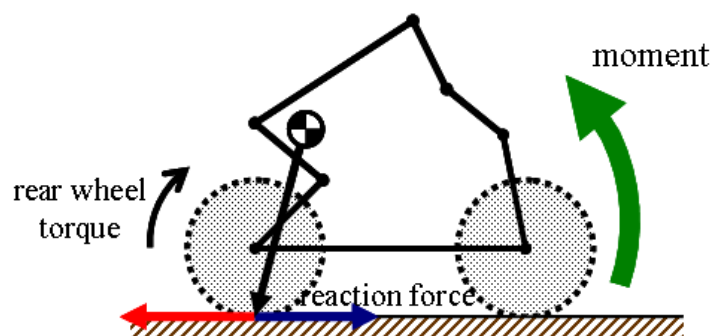


Fig.4-2 Moment by reaction force that rear wheel receives from ground

(2)については，腰周りのトルクにより，人間が後ろに倒れる方向に角運動量が生じる．肘が伸びることで胴体の角運動量が人間と自転車の複合体の角運動量となり，後輪接地点周りに後方に回転する．その結果，自転車の前輪が持ち上がると考えられる．

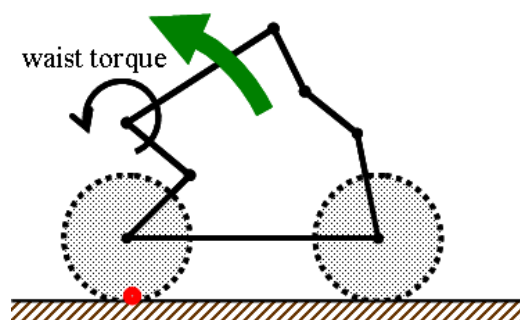


Fig.4-3 Waist torque

(3)については，肘を曲げ，体重を前方にかけることにより，自転車を介して地面からの反力を受ける．その力の反力により，体が後方に押され，人間が後ろの倒れる方向に角運動量が生じる．胴体の角運動量が人間と自転車の複合体の角運動量となり，後輪接地点周りに後方に回転する．その結果，自転車の前輪が持ち上がると考えられる．この原理は，腰にトルクをかける際と同様である．

したがって，後輪接地点回りに後方に回転させるモーメントは，シミュレーションをする上で，腰にかかるモーメントとみなす．

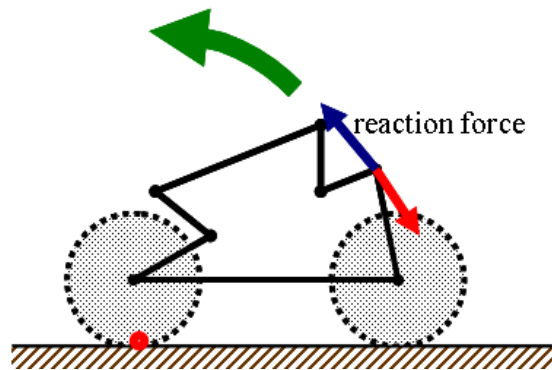


Fig.4-4 Moment by reaction force of power to press front wheel against ground

(4)については，人間と自転車の合成重心位置を後輪接地点上付近に移動させることで，重力によるモーメントを小さくし，前輪を上げやすくしていると考えられる．

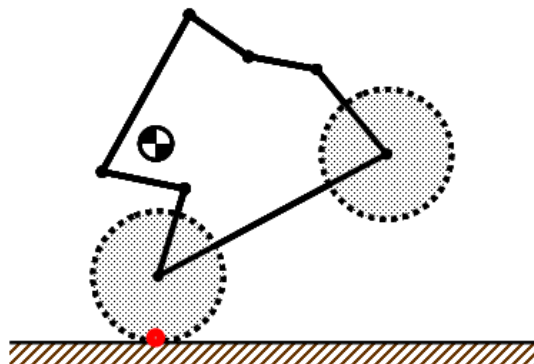


Fig.4-5 Movement of center of gravity

原理は簡単だが，実際にこの動作を実行してみても，前輪を高く上げることは難しい．そこで，この(1)，(2)について，その効果，最適な力，タイミングなどを検証するために，人間と自転車の簡易モデルを作成し，シミュレーションを行った．

4. 2 Front-up のシミュレーションによる解析

渋谷ら[1]により、腰にかける駆動トルクと後輪の加速により自転車の前輪を上げることができる分かっている。

さらに、前輪が上がった場合には、合成重心の変化により前輪の上がり角の維持が可能になることも分かっている。これは、前輪が上がれば、合成重心の位置が後輪接地点上よりも後方にもとることができ、人間と自転車の合成重心を後輪接地点上付近に移動させることで、前輪上げを抑制する作用を持つ後輪接地点回りのモーメントが減少し、かつ、合成重心の変化させることにより、重力によるモーメントを制御できるためである。

以上のことから、後に述べる前輪上げを維持する **Wheelie** という曲技も実現可能であることが分かる。

Front-up や **Wheelie** の実現には、合成重心の変化、つまり人間の姿勢を変化させることが重要となる。

4. 3 5 リンクモデルの構築

ここでは、この動作を行うことができるモデルを考える。引き上げる他に、姿勢変化による合成重心の移動が可能で、なおかつ、できるだけ複雑でないモデルが必要である。そのためには、人間の脚部は必要ないと考え、この動作に関しては、サドルに腰関節が固定された人間と自転車のモデルを構築した。

つまり、モデルは後輪、自転車、人間の胴体、前腕部、上腕部により構成され、5 リンク（後輪を含む）となる。

モデルパラメータは、人体モデルを参照し、それに合成重心を考慮し、修正を加えている。また、モデルの可動範囲については実際に自転車に乗り、そこから求めた。以上で述べた、5 リンクモデル、各リンクに設定したパラメータおよびリンク名、可動範囲を図と表に示す。(Fig.4-6), (Table.4-1,4-2)

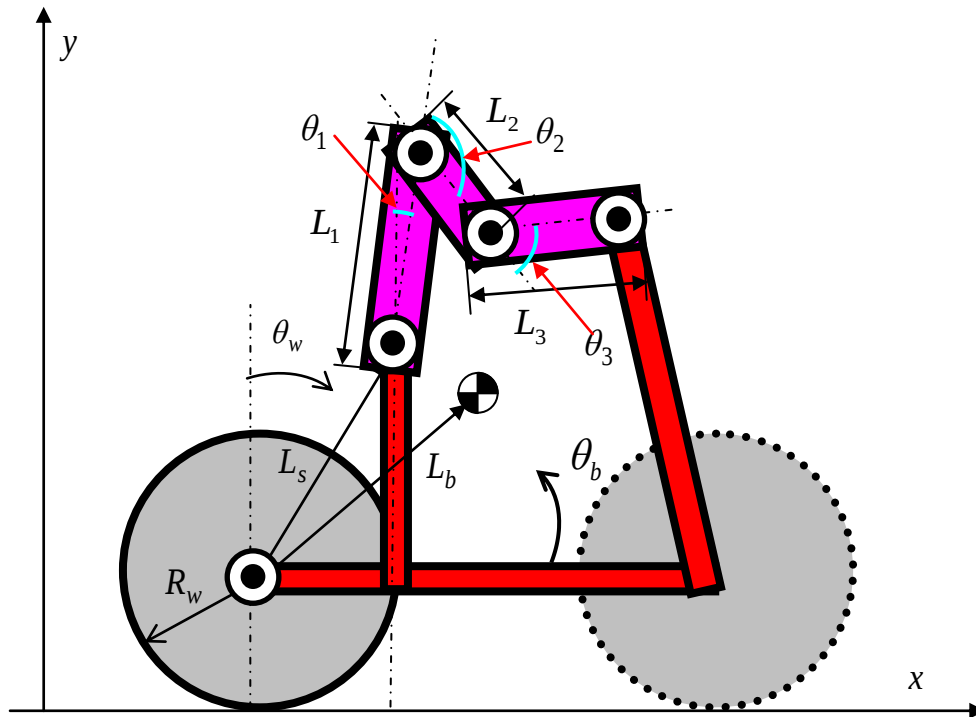


Fig.4-6 Five-link model

各変数の定義を以下に示す.

- θ_w : 車輪回転角度
- θ_b : 自転車回転角度
- θ_1 : リンク 1 回転角度 (絶対角)
- θ_2 : リンク 2 回転角度 (相対角)
- θ_3 : リンク 3 回転角度 (相対角)
- R_w : 車輪半径
- L_s : サドル位置
- L_b : 自転車重心位置
- L_1 : リンク 1 長さ
- L_2 : リンク 2 長さ
- L_3 : リンク 3 長さ
- m_1 : リンク 1 重さ
- m_2 : リンク 2 重さ
- m_3 : リンク 3 重さ

Table.4-1 Parameter of Five-link model

Region	Rear wheel	Bicycle	Body	Upper arm	Front arm
Mass (kg)	1.685	12	30	10	10
Length (m)	0.275	-	0.500	0.400	0.450
Moment of inertia (kg m^2)	0.0918	1.2651	0.706	0.1400	0.1755
Link name	-	-	Link 1	Link 2	Link 3

Table.4-2 Movable Area of each joints

	Waist joint	Shoulder joint	Cubital joint
Minimum angle(deg)	-30	90	-90
Maximum angle(deg)	45	180	0
Range of movement(deg)	75	90	90

このモデルを用いて、引き上げ動作の前輪上げへの影響を検証するために、運動方程式を導出し、シミュレーションを行う。

4. 4 合成重心範囲

Front-up 動作を行う上で、自転車と人間の合成重心の変化が重要であることは先に述べたとおりである。

ここで、人間と自転車の合成重心の範囲を求める。

求め方は、まず、人間モデルの関節の可動範囲を設定する。設定方法は、実際に自転車に乗り、そこから求めた。その可動範囲における人間と自転車の合成重心を合成重心の式から求め、それに、自転車の上がり角度を加える。自転車の上がり角度を0度、15度、30度と設定し、求めた人間と自転車の合成重心の範囲を図に示す。

人間と自転車の合成重心は以下の式求めることができる。

$$\begin{aligned} x_g = & [m_b \cdot x_{bg} + m_1 \cdot (x_s + l_{g1} \sin \theta_1) \\ & + m_2 \{x_s + l_1 \sin \theta_1 + l_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2)\} \\ & + m_3 \{x_s + l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_{g3}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\}] / M \end{aligned} \quad (4-1)$$

$$\begin{aligned} y_g = & [m_b \cdot y_{bg} + m_1 \cdot (y_s + l_{g1} \cos \theta_1) \\ & + m_2 \{y_s + l_1 \cos \theta_1 + l_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2)\} \\ & + m_3 \{y_s + l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{g3}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\}] / M \end{aligned} \quad (4-2)$$

ここで、

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_b$$

x_s : 後輪接地点からのサドルの x 方向距離

y_s : 後輪接地点からのサドルの y 方向距離

x_{bg} : 後輪接地点からの自転車の x 方向重心位置

y_{bg} : 後輪接地点からの自転車の y 方向重心位置

ここで θ_3 は人間の手先位置が自転車のハンドル位置に固定されている条件から、 $\theta_1 \sim \theta_2$ が与えられれば求めることができる。

ハンドル位置の座標を (x_h, y_h) とすると

$$x_h = x_s + L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (4-3)$$

$$y_h = y_s + L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (4-4)$$

式(4-3)、(4-4)から

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{[x_h - \{x_s + L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)\}]}{[y_h - \{y_s + L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\}]} \quad (4-5)$$

ここで,

$$A = \frac{[x_h - \{x_s + L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)\}]}{[y_h - \{y_s + L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\}]} \quad (4-6)$$

とおくと

$$\theta_3 = \tan^{-1} A - (\theta_1 + \theta_2) \quad (4-7)$$

となる.

θ_1, θ_2 の範囲を前述した可動範囲から

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi$$

と設定する.

以上の式より, θ_1, θ_2 から θ_3 が求まり, 合成重心の式より自転車に乗る人間の可動範囲内における, 人間と自転車の合成重心を求めることができる.

これに前輪の上がり角度を加える. 自転車の上がり角度を 0 度, 15 度, 30 度と設定し, 求めた人間と自転車の合成重心の範囲を図に示す. (Fig.4-7)

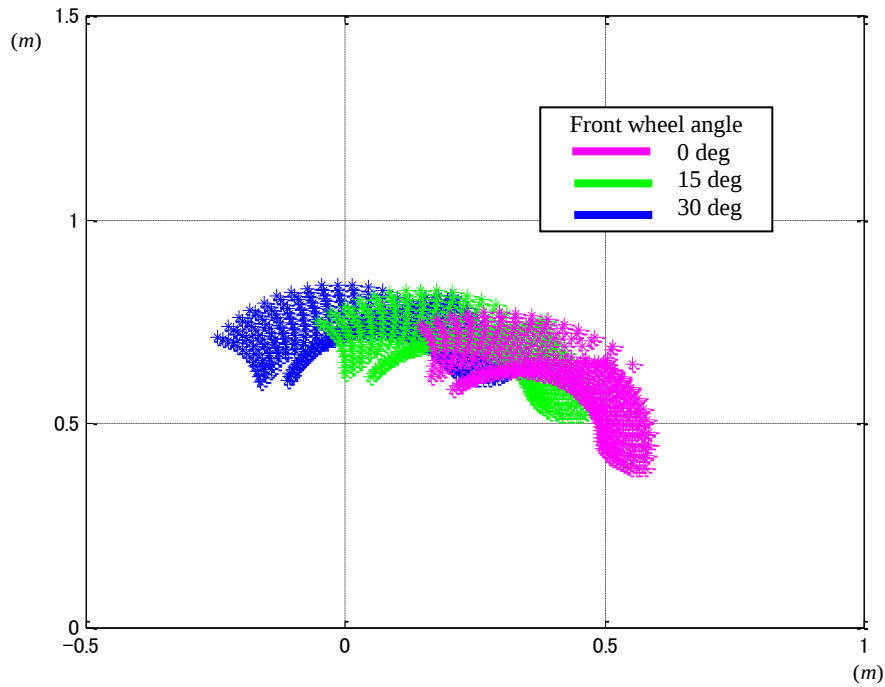


Fig.4-7 Area of combining gravity center of human and bicycle

人間と自転車の合成重心の範囲が、前輪の上がり角度に応じて、変化していることが分かる。前輪が 30 度上がった場合の合成重心の範囲をみると、値が負の値をとる部分がある。ここで、図中の x 座標の原点は後輪の地面接地点である。よって、前輪が 30 度以上上がった場合、上半身の姿勢変化だけでも、合成重心を後輪接地点よりも後方にとれることが分かる。

前輪が上がった際に、合成重心を後輪接地点の前後に移動させることができれば、前輪を上げたまま走行する **Wheelie** や、前輪を上げたまま、その場でホッピングするダニエルなどの曲技にも適用することができる。よって、この 5 リンクモデルで、**Wheelie** などの曲技を行うことができる。

次項では、このモデルを用いた、シミュレーションを行うために運動方程式を導出する。

4. 5 閉リンク機構の運動方程式導出

ここでは、5リンクモデルの運動方程式を導出する。このモデルには閉リンク構造が含まれているので、それを考慮して運動方程式を導出する必要がある。

閉リンクを含む機構の運動については、すでに研究されており、パラレルメカニズムの逆動力学計算から、一般的な閉リンク機構について、適用可能な計算方法が導出されている[2][3]。

そこで、その方法を参照し、簡単なモデルについて、運動方程式を導出し、シミュレーションを行う。車輪と自転車考慮せず、閉リンクのみを考慮したモデルの運動方程式を導出し、そこから、5リンクモデルに展開する。

閉リンク運動方程式の導出過程は以下のようになる。

- I. 閉リンク機構を仮想的に、切断点で切断する。
 - II. 2本のリンク列それぞれについて、ヤコビ行列を求める。
 - III. ヤコビ行列の拘束条件から、トルク変換ヤコビアンの算出。
 - IV. トルク変換ヤコビアンを用いて、リンクを仮想的に切断した開リンク機構のトルクを閉リンク機構一般化力に変換する
 - V. 単位ベクトル法を用いて運動方程式を導出する（順動力学計算）。

4. 5. 1 閉リンクモデル

求めるモデルは，自転車，後輪を考慮せず，サドルに腰関節が固定され，ハンドルに前腕関節が固定されているとして，関節変位を $(\theta_1 \theta_2 \theta_3)$ として構築した．(Fig.4-8)

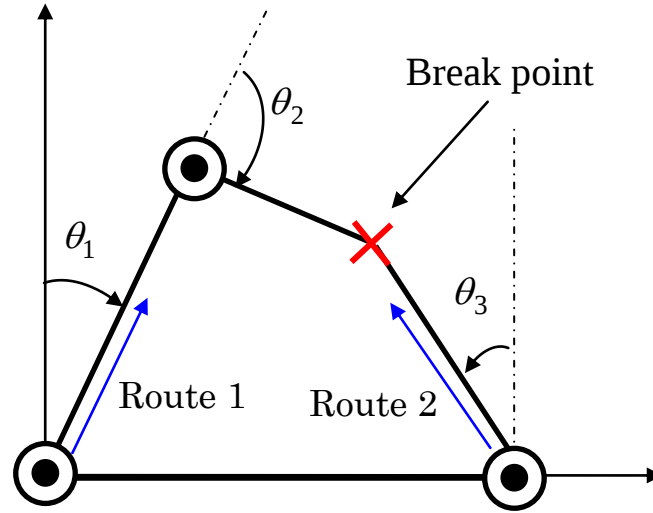


Fig.4-8 Model of closed link mechanism

4. 5. 2 トルク変換ヤコビアン の算出

モデルを切断点で仮想的に切断すると，閉ループは2本のリンク列に分けられる．(ルート1，ルート2)

2本のリンク列それぞれについての切断点の θ_a, θ_b に対するヤコビアン J_1, J_2 は開リンク機構と同様に計算できる．これらを用いて，切断点の速度 $\dot{\mathbf{x}}_h$ と関節角速度の関係は次のようになる．

$$\dot{\mathbf{x}}_h = J_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \quad (4-8)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_h = J_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}_b \quad (4-9)$$

ここで，

$$J_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_a = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad m_{12} = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$m_{21} = -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2), \quad m_{22} = -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{bmatrix}, \quad \theta_b = \theta_3$$

$$k_{11} = l_3 \cos \theta_3, \quad k_{21} = -l_3 \sin \theta_3$$

切断点の速度・加速度が一致することから，式(6-1), (6-2)より，

$$J_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_a - J_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}_b = 0 \quad (4-10)$$

式(4-10)は次のように書ける.

$$\mathbf{J}_I \dot{\boldsymbol{\theta}}_j = 0 \quad (4-11)$$

$$\mathbf{J}_I = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_j = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = m_{11}, \quad l_{12} = m_{12}, \quad l_{13} = -k_{11}$$

$$l_{21} = m_{21}, \quad l_{22} = m_{22}, \quad l_{23} = -k_{21}$$

ここで, N_J は全関節数, $\boldsymbol{\theta}_J$ は全関節角である. 式(4-11)は閉ループの拘束を表す.

N_J 個のリンクに対して m 個の拘束条件があるので, 機構全体の自由度 N_D は次式で求められる.

$$N_D = N_J - m \quad (4-12)$$

ここでは, $m=2$ となる. 今, $\mathbf{J}_I$ から独立な行ベクトルを m 本取り出して, $\mathbf{J}_C$ を作り, $\mathbf{J}_C$ の一般化座標 $\boldsymbol{\theta}_G$ に対応する列ベクトルを集めたものを $\mathbf{J}_G$, 一般化座標以外の $\boldsymbol{\theta}_S$ に対応する列ベクトルを集めたものを $\mathbf{J}_S$ とすると次式が成り立つ.

$$(\mathbf{J}_S \mathbf{J}_G) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_S \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_G \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-13)$$

$$\mathbf{J}_S = \begin{bmatrix} l_{12} & l_{13} \\ l_{22} & l_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_G = \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{21} \end{bmatrix}$$

式より

$$\mathbf{J}_S \dot{\boldsymbol{\theta}}_S = -\mathbf{J}_G \dot{\boldsymbol{\theta}}_G \quad (4-14)$$

となる. 定義より $\mathbf{J}_S$ は正則行列なので, 式(4-14)は

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_S = \mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\theta}}_G \quad (4-15)$$

となる. ここで, $\mathbf{H}$ は次式で定義される $\boldsymbol{\theta}_S$ の $\boldsymbol{\theta}_G$ に関するヤコビアンである.

$$\mathbf{H} \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_S}{\partial \boldsymbol{\theta}_G} = -\mathbf{J}_S^{-1} \mathbf{J}_G \quad (4-16)$$

式(4-15)により, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_G$ から全関節の運動 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_J$ が決定される. このことから, $\boldsymbol{\theta}_G$ を一般化座標と定めることができる.

この $\mathbf{H}$ を用いて、次の方法により、トルク変換ヤコビアン $\mathbf{W}$ をもとめる。

$\mathbf{W}$ の第 i 行: θ_j の i 番目の関節が一般化座標でなく、 θ_s の j 番目にあたるときは $\mathbf{H}$ の第 i 行とする。 θ_j の i 番目の関節が一般化座標で、 $\mathbf{C}$ の j 番目にあたる時は j 番目の要素が 1 それ以外が 0 の単位行ベクトルとする。

求めた $\mathbf{W}$ を用いることで仮想的にリンクを切断した開リンク機構のトルク $\boldsymbol{\tau}_0$ を、閉リンク機構の一般化力 $\boldsymbol{\tau}_G$ に変換することができる。

$$\boldsymbol{\tau}_G = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\tau}_0 \quad (4-17)$$

この閉リンク機構の一般化力から単位ベクトル法を用いて、閉リンク機構の全関節の加速度を計算し、運動方程式を導出する。

4. 5. 3 加速度の関係式

式(6-8)を時間微分すると次のような加速度の関係式が得られる。

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_s = \mathbf{H} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_G + \dot{\mathbf{H}} \dot{\boldsymbol{\theta}}_G \quad (4-18)$$

次項で述べる順動力学計算で得られた一般化座標の加速度 $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_G$ から、それ以外の加速度 $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_s$ を求めるときにこの計算を行う必要がある。 $\mathbf{H}$ と $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_G$ は与えられるので、ここでは式(4-18)の右辺第 2 項 $\dot{\mathbf{H}} \dot{\boldsymbol{\theta}}_G$ の計算方法を説明する。

式(4-16)から、

$$\dot{\mathbf{H}} \dot{\boldsymbol{\theta}}_G = - \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_s^{-1}) \mathbf{J}_G + \mathbf{J}_s^{-1} \dot{\mathbf{J}}_G \right\} \dot{\boldsymbol{\theta}}_G \quad (4-19)$$

となる。ここで $\mathbf{J}_s^{-1} \mathbf{J}_s = \mathbf{E}$ より

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{J}_s^{-1}) \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_s^{-1} \dot{\mathbf{J}}_s = \mathbf{0} \quad (4-20)$$

となる。式(4-14)、式(4-20)を用いて式(4-19)を変形し、整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} \dot{\boldsymbol{\theta}}_G &= -\mathbf{J}_s^{-1} (\dot{\mathbf{J}}_s \dot{\boldsymbol{\theta}}_s + \dot{\mathbf{J}}_G \dot{\boldsymbol{\theta}}_G) \\ &= -\mathbf{J}_s^{-1} \dot{\mathbf{J}}_L \dot{\boldsymbol{\theta}}_J \end{aligned} \quad (4-21)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{J}}_L \dot{\boldsymbol{\theta}}_J$ の各閉ループに対応する成分は、シリアルリンクマニピュレータの計算と同様に求められる。

4. 5. 4 単位ベクトル法

リンク系の運動方程式は以下のように書ける.

$$\boldsymbol{\tau}_G = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_G) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_G + \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_G, \dot{\boldsymbol{\theta}}_G) \quad (4-22)$$

式から, 全間接の加速度が直接得られる. 具体的な計算手順は,

I. $\boldsymbol{\tau}$ を駆動トルクとして与える.

II. $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ として逆運動学計算を行い, 得られた一般化力を $\mathbf{b}$ とする.

III. $i=1, 2, \dots, N$ について, 以下の計算を行う.

(a) 第 i 要素が 1, その他の要素が 0 の単位ベクトル $\mathbf{e}_i$ を用いて $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{e}_i$ とする.

(b) 逆動力学計算を行い, 得られた一般化力を $\mathbf{f}_i$ とする.

(c) つぎの式で計算される $\mathbf{a}_i$ を慣性行列 $\mathbf{A}$ の第 i 列とする.

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{b} \quad (4-23)$$

IV. $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}, \mathbf{A}$ を用いて, 次の式により一般化座標の加速度を計算する.

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_G = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\tau}_G - \mathbf{b}) \quad (4-24)$$

この単位ベクトル法により, 閉リンク機構の一般化座標の加速度が計算される. この加速度と, 式(4-18)を用いて一般化座標でない関節の加速度を求めることで, 全関節の加速度をすることができる.

4. 6 シミュレーション方法について

導出した運動方程式から，シミュレーションを行う方法について説明する．運動方程式は，2階の微分方程式となるため，解析的に解くことが出来ない．そこで，数値積分によって数値的に運動方程式を解きシミュレーションを行う．

本研究では Runge-kutta-Gill 法を用いて運動方程式を解くが，その説明の前に差分近似法, Runge-kutta 法について説明する．

4. 6. 1 差分近似法

差分近似法による微分方程式の解法を説明する．一般的な微分式

$$\frac{dy_{(t)}}{dt} = y_{(t)} \quad (4-25)$$

図(Fig.3-3)より，差分式で表すと

$$\frac{dy_{(t)}}{dt} = \frac{y_{(t+\Delta t)} - y_{(t)}}{\Delta t} \quad (4-26)$$

となり，この式を変形すると

$$y_{(t+\Delta t)} = y_{(t)} + \Delta t \cdot \frac{dy_{(t)}}{dt} \quad (4-27)$$

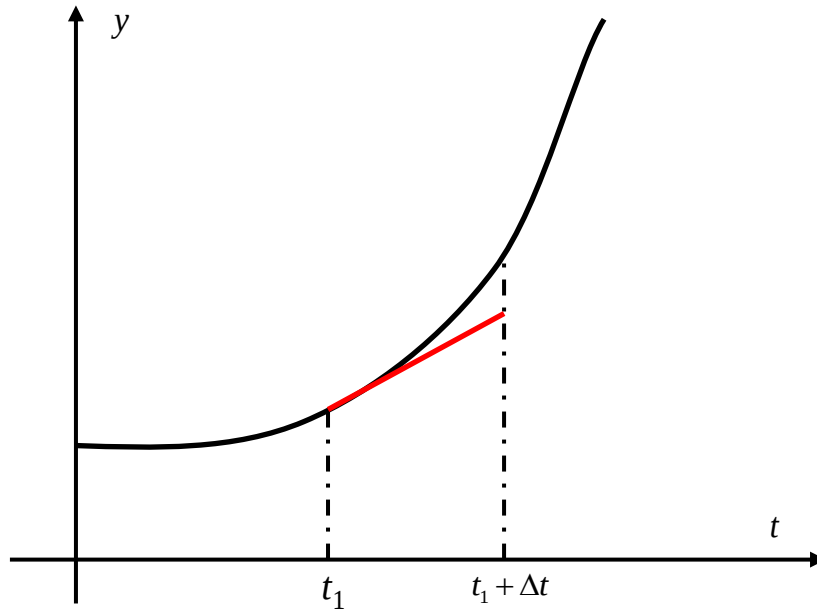


Fig.4-9 Forward difference

となり， $t=0$ での初期値が与えられていれば，順次 $\Delta t, 2\Delta t, \dots$ が計算できることを示している．

一般的な運動方程式は

$$\tau = M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + g(q) + F(q) \quad (4-28)$$

となり, これを変形し, 近似解を求めることができる.

これを, 今回のモデルに拡張する. 運動方程式は二次の微分を含んでいるので, これを一次の微分方程式とするために以下のような形に変形する.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_w &= \varpi_w \\ \dot{\theta}_b &= \varpi_b \\ \dot{\varpi}_w &= \alpha \\ \dot{\varpi}_b &= \beta \end{aligned} \quad (4-29)$$

この式に, 上述した差分近似を適用すると

$$\begin{aligned} \theta_w(t + \Delta t) &= \theta_w(t) + \varpi_w \cdot \Delta t \\ \theta_b(t + \Delta t) &= \theta_b(t) + \varpi_b \cdot \Delta t \\ \varpi_w(t + \Delta t) &= \varpi_w(t) + \dot{\varpi}_w \cdot \Delta t \\ \varpi_b(t + \Delta t) &= \varpi_b(t) + \dot{\varpi}_b \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (4-30)$$

となり, この式に初期値を与え, 次に角速度 ϖ_w, ϖ_b を求め, θ_w, θ_b を求めることができる.

4. 6. 2 Runge-kutta 法

Runge-kutta 法は, 差分近似法より精度を上げるために刻みを以下のように設定して, 積分を行う. 本研究で使用するのは, 一般的に良く使われる 4 次の Runge-kutta 法で微分方程式を解いている.

微分方程式の初期値問題を次のように設定する.

$$y' = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \quad (4-31)$$

この問題に対して次式を与える.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4-32)$$

ここで,

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n) \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3)\end{aligned}$$

となる.

つまり, 次の値(y_{n+1})は, 現在の値(y_n)に刻み(h)と推定された勾配の積を加えたものである. その勾配は次の4つの勾配の重み付け平均である.

k_1 : 初期値における勾配

k_2 : 区間の中央における勾配であり, 勾配 k_1 を用いて($t_n + h/2$)における y の値をオイラー法により決定したもの

k_3 : 区間の中央における勾配を再計算したものであり, k_2 の値から決められた y の値を用いる

k_4 : 区間の最後における勾配であり, k_3 の値から決められた y の値を用いる.

これら4つの平均を取るために, 中央の勾配に対して大きな重みを付け与える.

$$\Delta y_i = \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}h \quad (4-33)$$

この増分 Δy_i を用いて, 初期状態より, 順次微分式を解くことができる.

4. 6. 3 Runge-kutta-Gill 法

Runge-kutta-Gill 法は, Runge-kutta 法の係数を変えることで微分方程式を解くことが可能となる. 微分方程式の初期値問題を Runge-kutta 法と同様に次のように設定する.

$$y' = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \quad (4-34)$$

この問題に対して次式を与える.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \left(k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4 \right) \quad (4-35)$$

ここで,

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{(-1 + \sqrt{2})h}{2}k_1 + \frac{(2 - \sqrt{2})h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n - \frac{\sqrt{2}h}{2}k_2 + \frac{(2 + \sqrt{2})h}{2}k_3\right)$$

となる.

つまり, 次の値(y_{n+1})は, 現在の値(y_n)に刻み(h)と推定された勾配の積を加えたものである. その勾配は次の 4 つの勾配の重み付け平均である.

k_1 : 初期値における勾配

k_2 : 区間の中央における勾配であり, 勾配 k_1 を用いて $(t_n + h/2)$ における y の値をオイラー法により決定したもの

k_3 : 区間の中央における勾配を再計算したものであり, k_1, k_2 の値から決められた y の値を用いる

k_4 : 区間の最後における勾配であり, k_2, k_3 の値から決められた y の値を用いる.

これら 4 つの平均を取るために, 中央の勾配に対して大きな重みを付け与える.

$$\Delta y_i = \frac{(k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4)}{6} h \quad (4-33)$$

この増分 Δy_i を用いて，初期状態より，順次微分式を解くことができる．

この Runge-kutta-Gill 法を用いて，運動方程式を解くプログラムを Matlab で作成し，シミュレーションを行う．

4. 7 閉リンクモデルシミュレーション

4.5 項に示した方法で導出した運動方程式から、腰関節にトルクを与えるシミュレーションを行う。Mathematica で運動方程式導出から、運動方程式の解法を行えるプログラムを作成し、シミュレーションを行っている。その際、運動方程式は Runge-Kutta-Gill 法を用いて解いた。

腰関節にトルクを与えた場合のシミュレーションの様子と Route1, Route2 の切断点の速度のグラフを示す。(Fig.4-10,11)

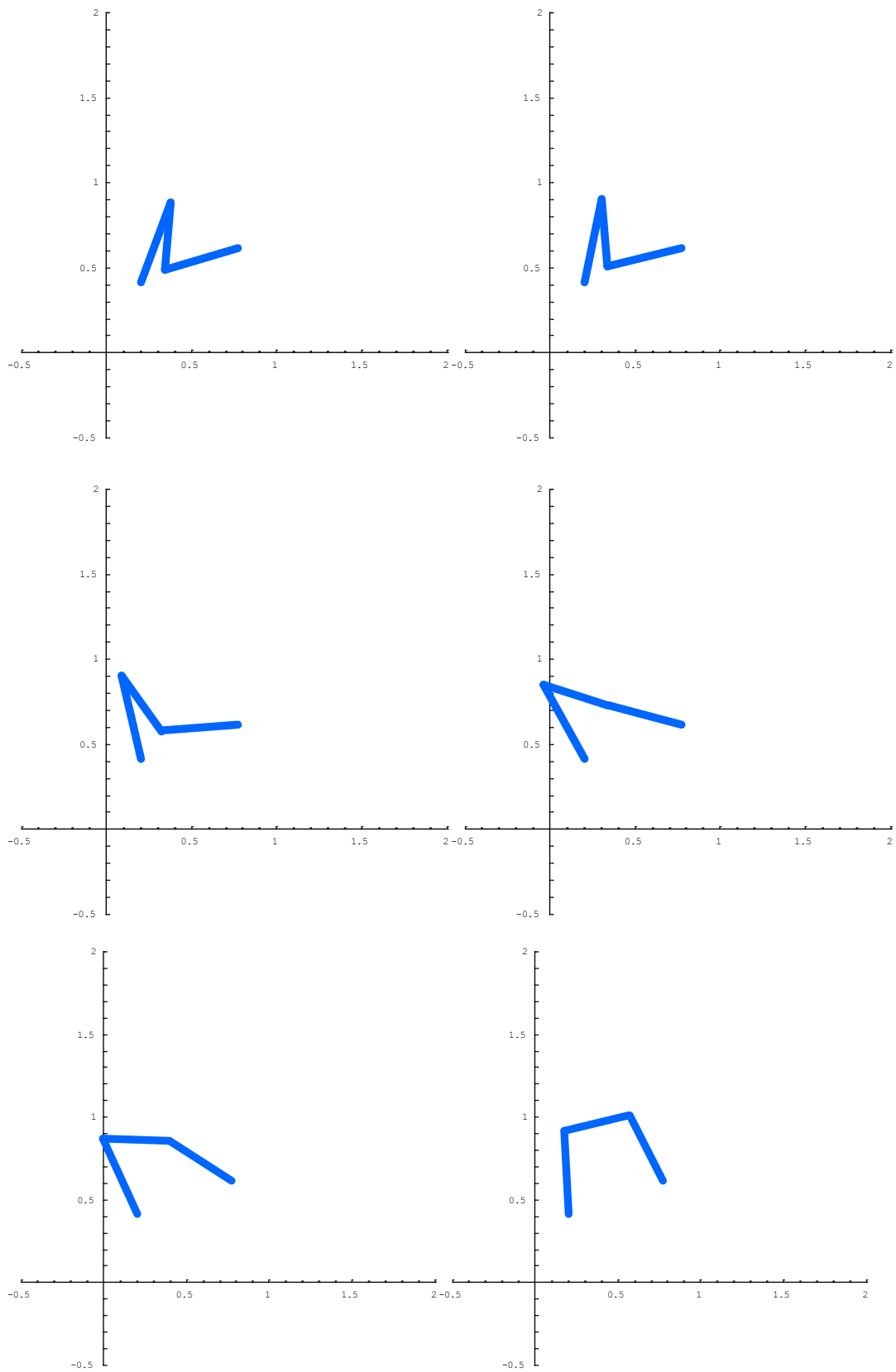


Fig.4-10 A Simulation result of the closed link mechanism

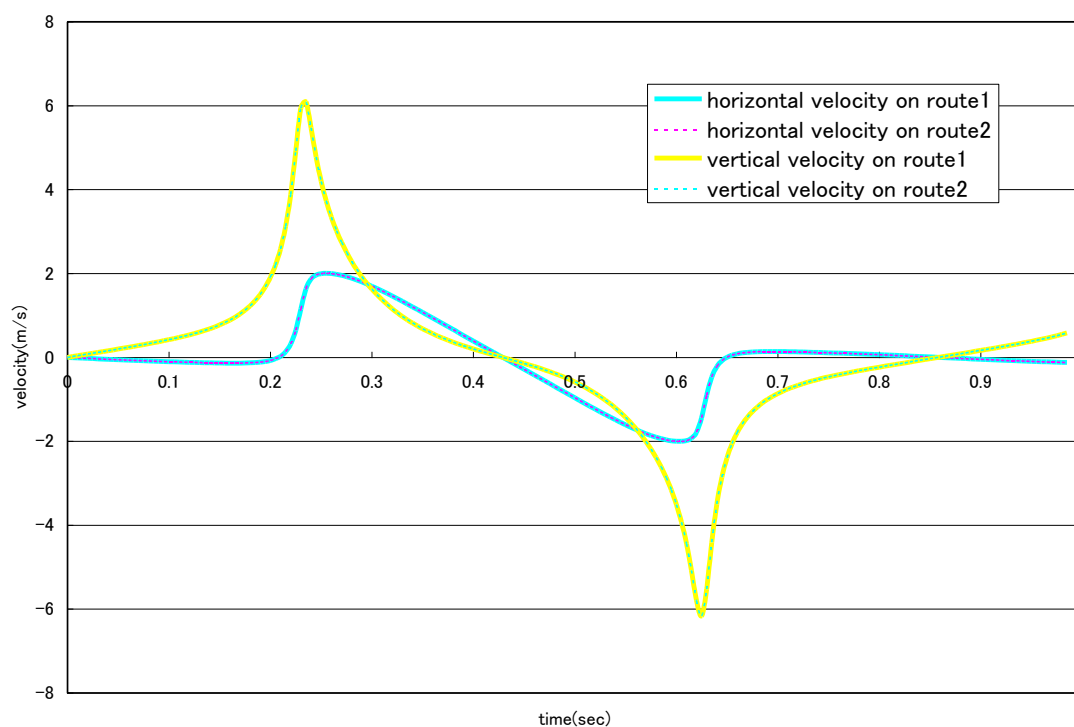


Fig.4-11 Velocity of the break point in each route

4. 7. 1 シミュレーションの結果・考察

動作シミュレーションの様子とグラフより，切断点の速度が一致し，閉リンクモデルのシミュレーションを実現できたことが分かる．

よって，この閉リンクモデルの運動方程式を用いて 5 リンクモデルの運動方程式を導出し，Front-up と Wheelie のシミュレーションを行うことができると考えられる．

4. 8 Front-up シミュレーション

前項で用いた閉リンク運動方程式を用いて，5 リンクモデル運動方程式を導出した．

導出した運動方程式において，腰関節と後輪にトルクを与え，引き上げ動作と後輪の加速を行い，前輪上げへの効果を検証した結果を示す．(Fig.4-12,13)

ここで，グラフにおいて前輪の上がり角度は，負の値を取っているが，座標の取り方によるもので，実際には前輪は地面から上がっている．

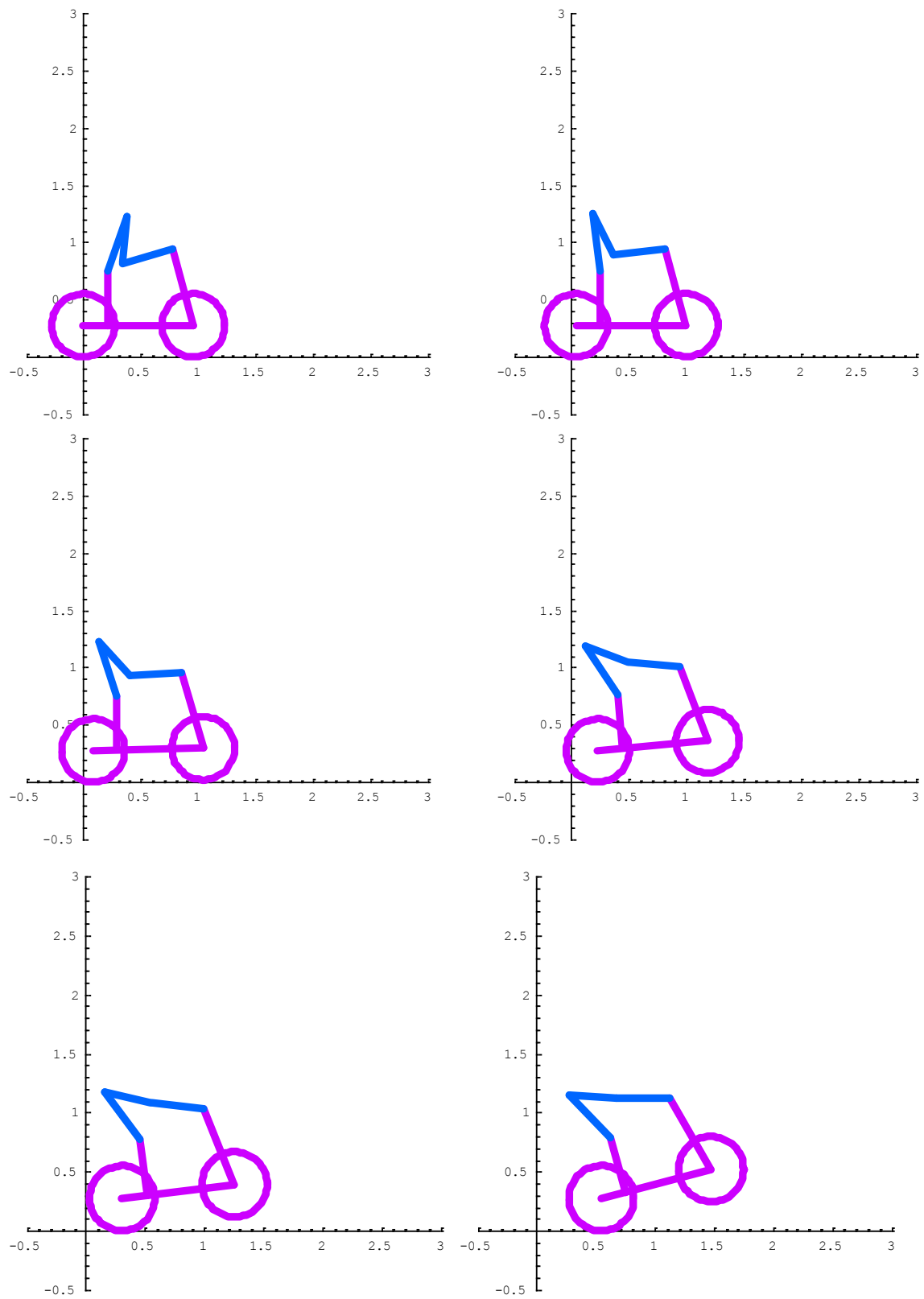


Fig.4-12 A Simulation result of Front-up adding pull-up movement and acceleration

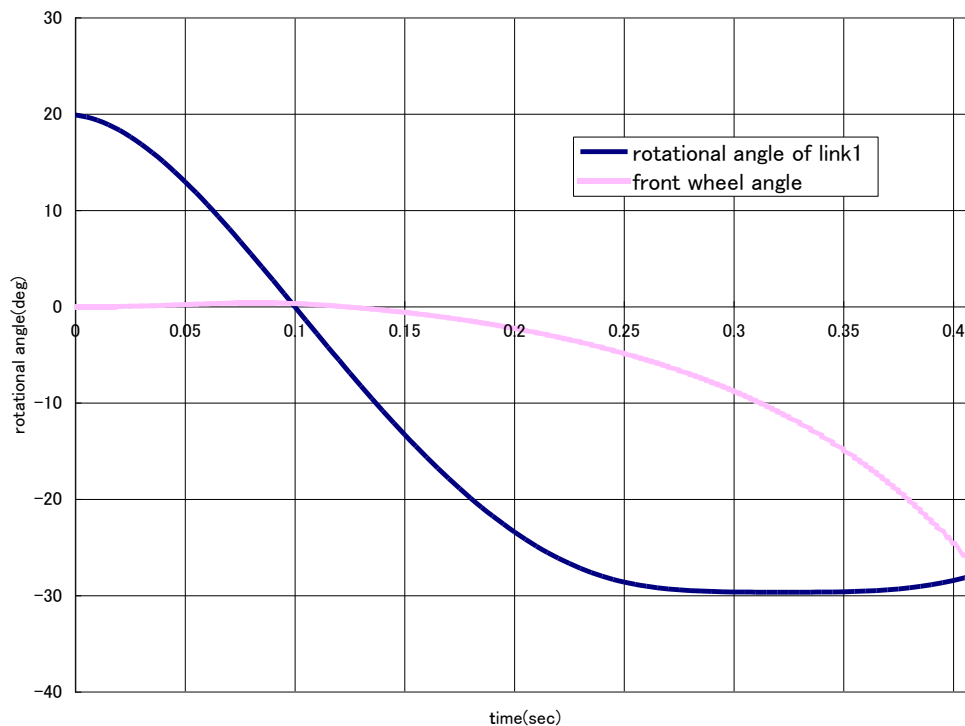


Fig.4-13 Rotational angle of link1 and front wheel

4. 8. 1 シミュレーションの結果・考察

動作シミュレーションの結果とグラフより，腰関節と後輪にトルクを与えることによって，前輪の引き上げ動作が実現できている．

つまり，人間と自転車の複合体の姿勢変化にとる合成重心移動と後輪の加速により前輪を上げていることになる．

引き上げ動作により，人間と自転車の合成重心が後輪接地点上付近に来ることで，前輪が上がりやすくなっている．その状態で加速することで，前輪を上げる方向に合成重心回りのモーメントが加わり前輪を上げている．

この引き上げ動作では，人間の肘が伸びきった際に生じる衝撃力を考慮していないが，実際の動作でも，熟練者になると腕にあまり力を入れずに前輪を上げているので，この方法が実際の動作に近いと考えられる．

第5章 Wheelie について

5. 1 Wheelie の動作解析

Front-up 動作により，前輪を上げた状態を維持し後輪走行を行う Wheelie の制御について考える．

前輪が上がった際に，前輪を制御するためには，以下の3つの方法が考えられる．

- (1) 人間の姿勢変化により人間と自転車の合成重心の位置を移動させる方法．
- (2) 後輪にトルクを与え加減速することによる方法．
- (3) 自転車を腕で引き寄せたり，押し出したりする方法．

(1)について説明する．合成重心の位置を後輪接地点上前後に移動させることで，重力によるモーメントを操作できる．したがって，人間の姿勢を変化させることで合成重心を変化させ，重力によるモーメントを小さくすることで，前輪を上げた状態を維持することが可能となる．

(2)については，ペダルを漕ぎ，後輪にトルクを加えると，地面を後方に押す力が発生し，その反力は，合成重心に対する推進力となると同時に，重心周りの力のモーメントとなる．

したがって，後輪に与えるトルクを加減速することで，力のモーメントを操作することができ，前輪を上げた状態を維持することが可能となる．

(3)については，人間が，自転車を押したり引いたりする力は，後輪接地点周りのモーメントを発生させるので，姿勢制御が可能となる．

この3つの方法に対して実現手法を検討する．今回は，PD 制御を用いた人間と自転車の合成重心制御について，条件式を設定し，シミュレーションを行った結果について述べる．

5. 2 Wheelie の制御方法

人間と自転車の合成重心の移動による制御を PD 制御により行う．前輪が上がった際に，合成重心を後輪接地点上にとることができれば，重力による前輪を戻そうとするモーメントがゼロになり，その状態を維持することができる．

合成重心を変化させる要素として，人間の姿勢と前輪の上がり角度，つまり自転車の姿勢がある．人間の姿勢については，閉リンク機構の拘束条件より，リンク 1(胴体)の角度のみにより決定される．また，自転車の姿勢については，後輪を加速させることにより，変化させることができる．よって，この人間と自転車の姿勢は，後輪と胴体に与えるトルク τ_w ， τ_1 により制御することができる．(Fig.5-1)

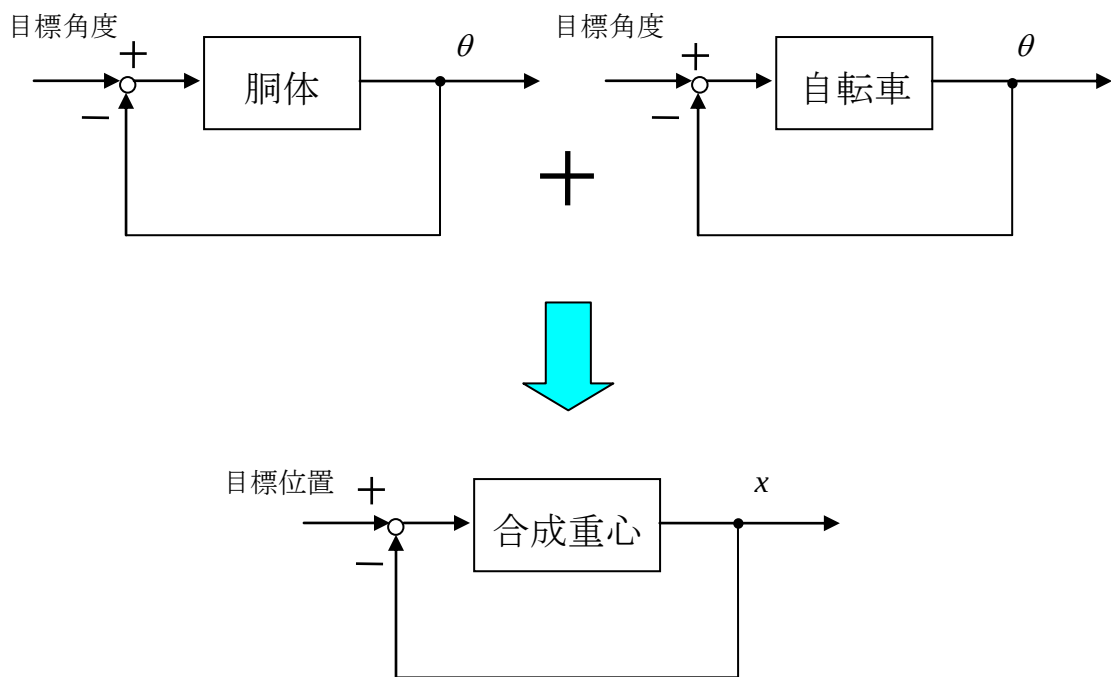


Fig.5-1 Combining gravity center of human and bicycle control by posture control of body and bicycle

制御アルゴリズムとしては、あらかじめ目標の前輪上げ角を設定しておき、そのときに合成重心が後輪接地点上に来る人間の姿勢を求め、その姿勢に追従するように、角度と角速度をフィードバックしてトルクを与えることになる。与えるトルクの式は、PD 制御則より以下のようになる。

$$\tau_w = k_{pb}(\theta_{bt} - \theta_b) + k_{db}(\dot{\theta}_{bt} - \dot{\theta}_b) \quad (5-1)$$

$$\tau_1 = k_{p1}(\theta_{1t} - \theta_1) + k_{d1}(\dot{\theta}_{1t} - \dot{\theta}_1) \quad (5-2)$$

ここで

τ_w : 後輪に与えるトルク

θ_{bt} : 前輪の目標上げ角度

θ_b : 前輪の上がり角度

$\dot{\theta}_{bt}$: 前輪の目標上げ角速度

$\dot{\theta}_b$: 前輪の上がり角速度

k_{pb} : 比例ゲイン

k_{db} : 微分ゲイン

τ_1 : 胴体(腰)に与えるトルク

θ_{1t} : リンク 1 の目標角度

θ_1 : リンク 1 角度

$\dot{\theta}_{1t}$: リンク 1 目標角速度

$\dot{\theta}_1$: リンク 1 角速度

k_{p1} : 比例ゲイン

k_{d1} : 微分ゲイン

5. 3 Wheelie シミュレーション

シミュレーションの条件を以下のように設定し，シミュレーションを行った．引き上げ動作時には，後輪に一定のトルク，腰関節には，引き上げ動作後，腕が伸びきった状態を維持するトルクを与える．引き上げ動作後，前輪が 20 度上がった場合に上述した制御トルクを与える．

シミュレーション時の各制御パラメータを表に示す．(Table.5-1)

また，シミュレーションの様子と自転車とリンク 1 の回転角度，入力トルクのグラフを図に示す．(Fig.5-2, 3, 4)

Table.5-1 Control parameter

	Rear wheel	Link1
Target angle(deg)	30	20
Angular velocity of target (rad/sec)	0	0
Proportional gain	300	500
Differential gain	20	80

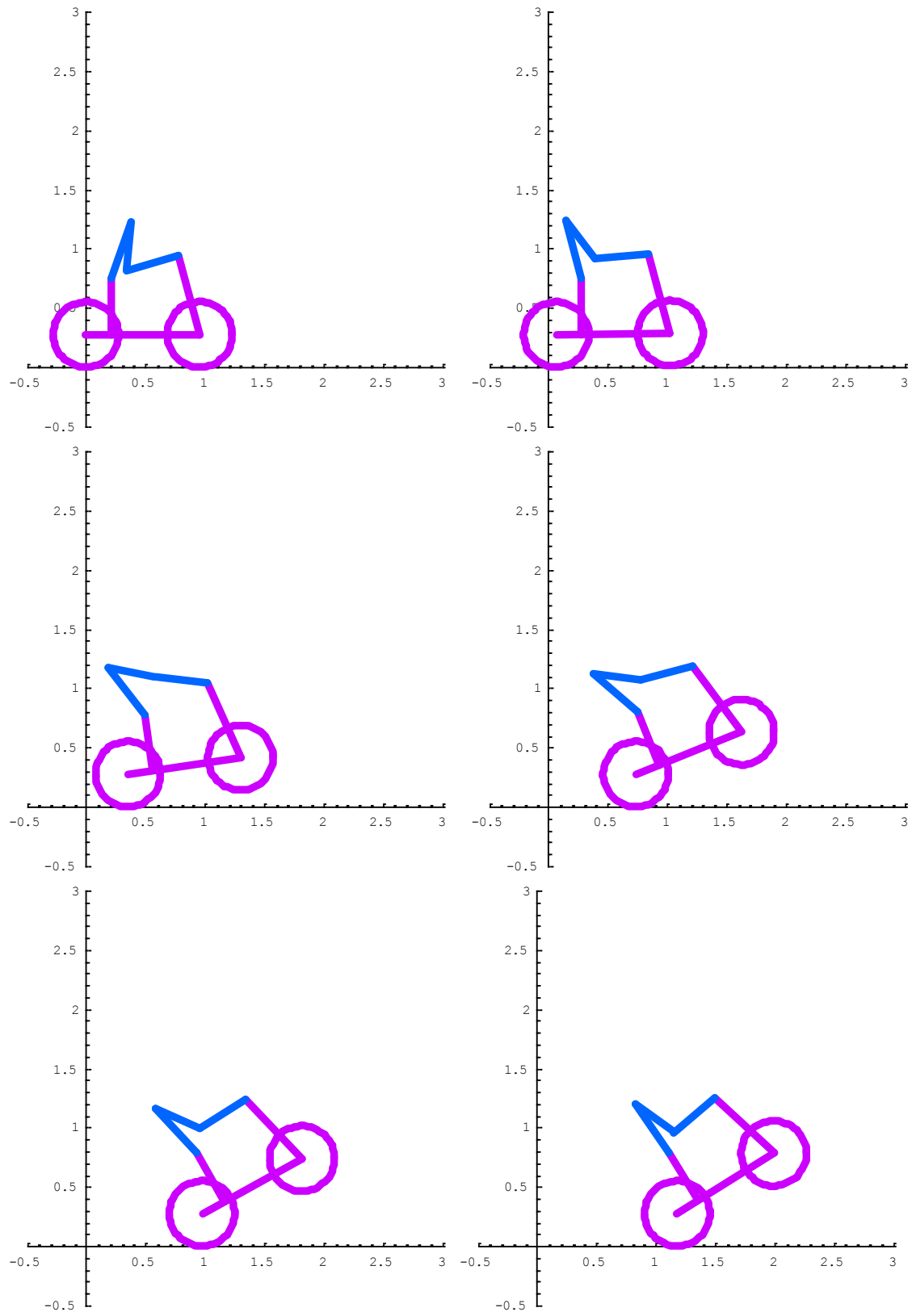


Fig.5-2 Simulation of Wheelie by PD control

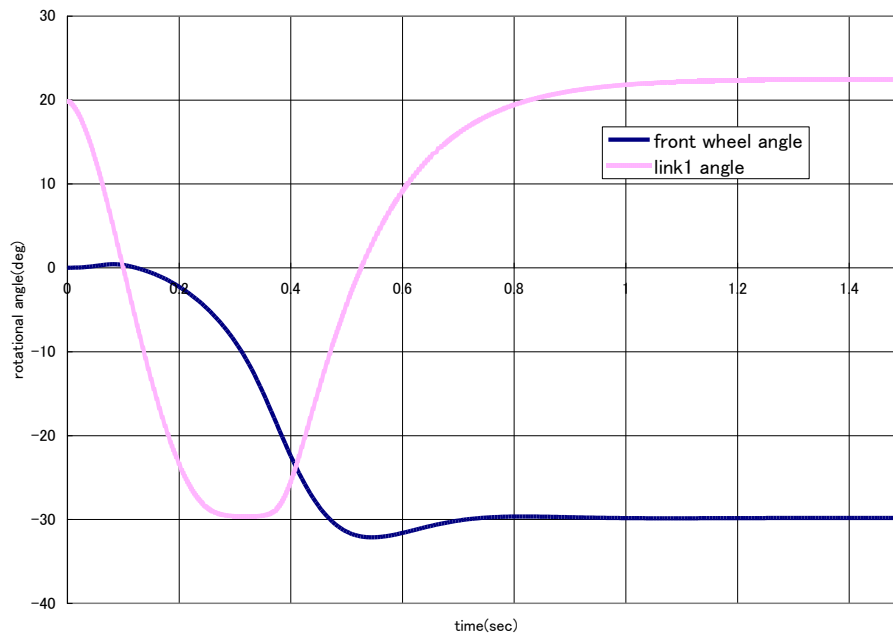


Fig5-3 Rotational angle of link1 and front wheel by PD control

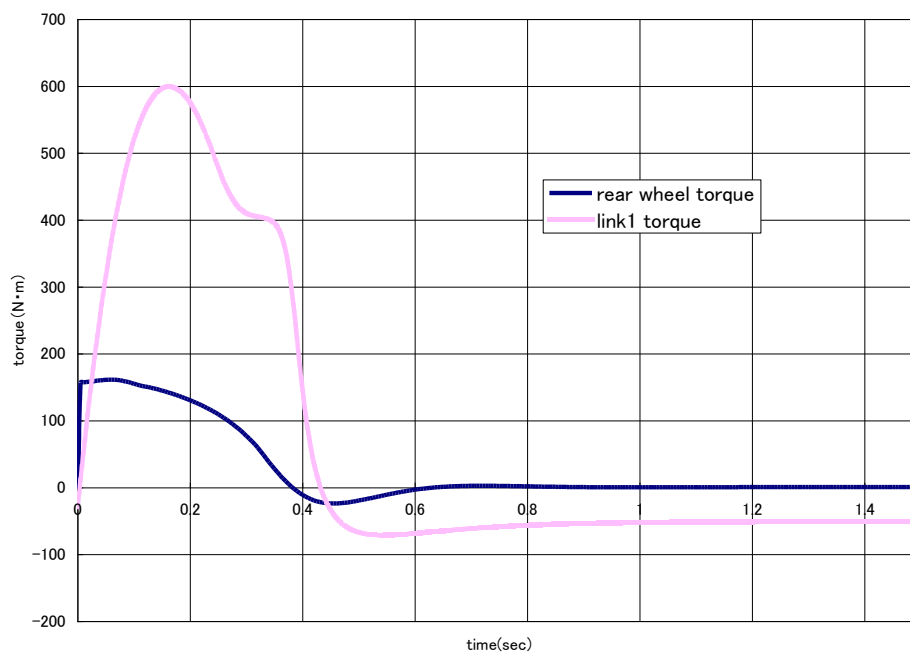


Fig.5-4 Torque of link1 and rear wheel by PD control

5. 3. 1 シミュレーションの結果・考察

動作シミュレーションの結果とグラフより、引き上げ動作と加速により、前輪が上がり、その後、前輪の上がり角度と胴体の姿勢を制御することにより、Wheelieを実現することができた。

第6章 Daniel について

6. 1 Daniel の方法

前輪を上げた状態のまま，後輪のみでホッピングしながら，岩場など不連続なコースを走破する Daniel という曲技がある．この曲技では，Front-up や Wheelie と異なり，空中にある状態についても考慮する必要がある．

以下に，高さ 1m の台の上へ Daniel により飛び乗る場合に関して，競技者の動作過程を示す．

- (1) 膝を曲げ，上体を前方に倒し，腰の位置を下げる．
- (2) 腰を斜め上方に上げ，肘を伸ばす(前輪上昇)．
- (3) 膝を伸ばす(後輪上昇)．
- (4) 肘を曲げる(自転車引き上げ，前輪台上着地)．
- (5) 膝を曲げる(後輪引き上げ)．
- (6) 肘を曲げ，体重を前輪にかける．
- (7) 膝を伸ばす(後輪台上着地)．

まず、(1)について説明する。踏み切り時の(人間と自転車の)合成重心の高さによって、飛び上がる際の合成重心の速度に違いが生じる。より合成重心位置を下げ、低姿勢から踏み切るほど、飛び上がり姿勢に入るまでの時間が長くなり、合成重心が加速するためである。したがって、Daniel 動作を行う上で、いかに踏み切り時に合成重心位置を下げるかということが、飛び上がる際に重要となる。

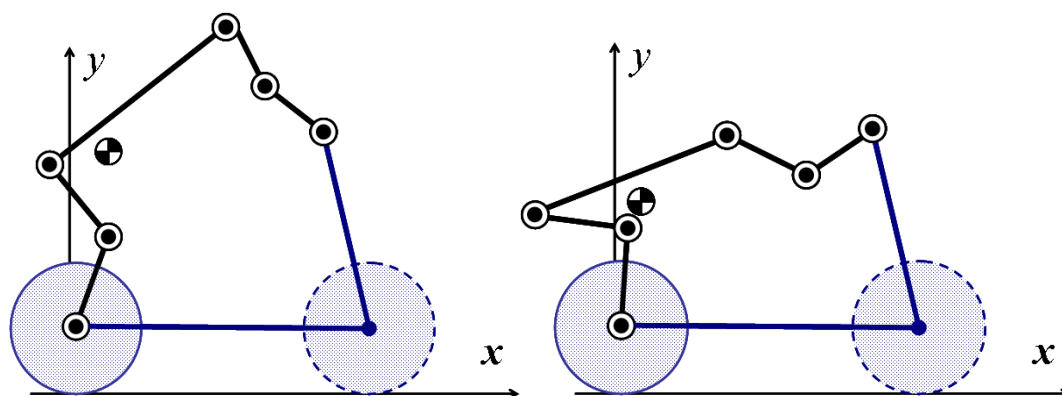


Fig.6-1a Attitude variations during Daniel

(2)について説明する。腰(胴体)を斜め上方に上げていくことによって、合成重心も斜め前方に加速する。そのことが合成重心の軌道を放物線とし、前方の台へ飛び乗ることを可能とする。

腰を後方に回転させることで、人間は反時計回りの角運動量を持っている。腕が伸びきることで、人間の角運動量が人間と自転車の複合体の角運動量となり、前輪が上昇する。そのとき、人間と自転車の複合体は反時計回りに回転しながら上昇する。

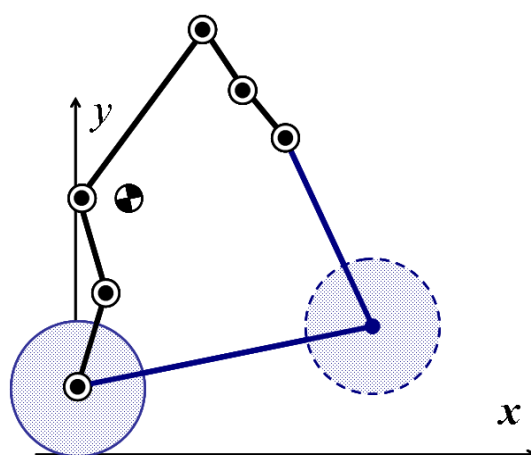


Fig.6-1b Attitude variations during Daniel

(3)について説明する．膝を伸ばすことで，床からの反力により，後輪が上昇し始める．これは，人間が床の上で飛び上がることと同様の原理である．

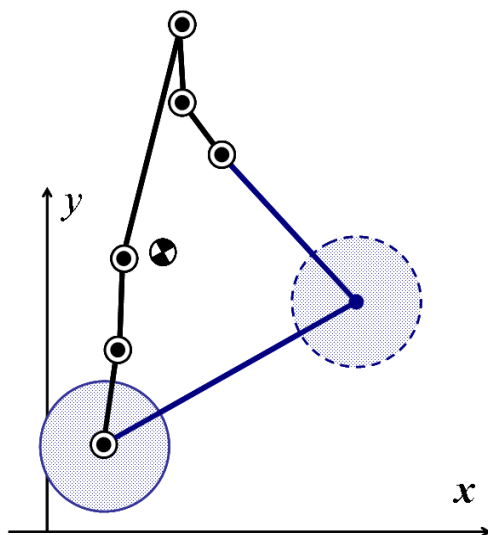


Fig.6-1c Attitude variations during Daniel

(4)について説明する．腕を胴体のほうへ引きつけ，肘を曲げることで，前輪をさらに上方へ引き上げる効果をもつ．前輪が台のエッジにつく．

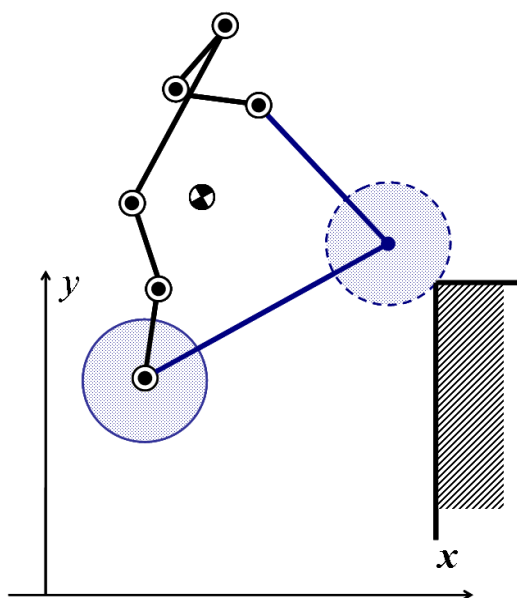


Fig.6-1d Attitude variations during Daniel

(5)について説明する．肘を曲げ体重を前輪にかけ，膝を曲げることで，後輪を引き上げる．

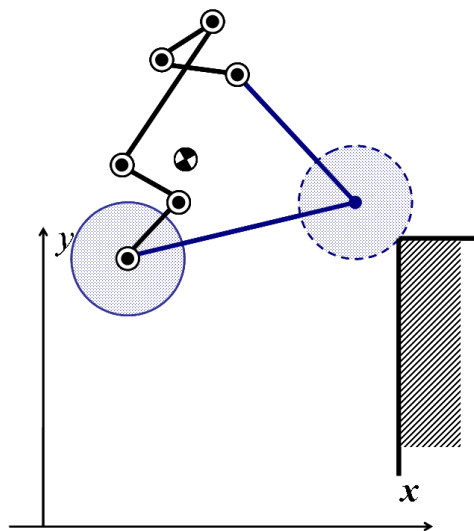


Fig.6-1e Attitude variations during Daniel

(6)について説明する．台に着いた前輪を下方に押し付けることにより，反力を得る．この反力により，反時計回りの回転モーメントを得る．台からの反力を受けた際，肘が伸び自転車と人間は相対的に離れる．質量の違いにより自転車が動くが，人間はほとんど動かない．したがって，この動作は，自転車と人間の複合体にとって推進力とはならない．

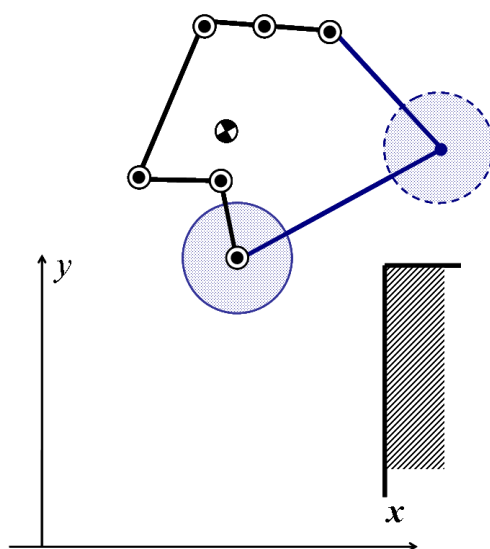


Fig.6-1f Attitude variations during Daniel

最後に、(7)について説明する．反時計回りの角運動量を持ちつつ、脚を伸ばして壁のエッジに後輪を当てることにより、台のエッジから大きな反力を得る．この反力は、人間と自転車の複合体を時計方向に回転させるモーメントとなり、かつ、自転車の運動を停止させる効果を持つ．

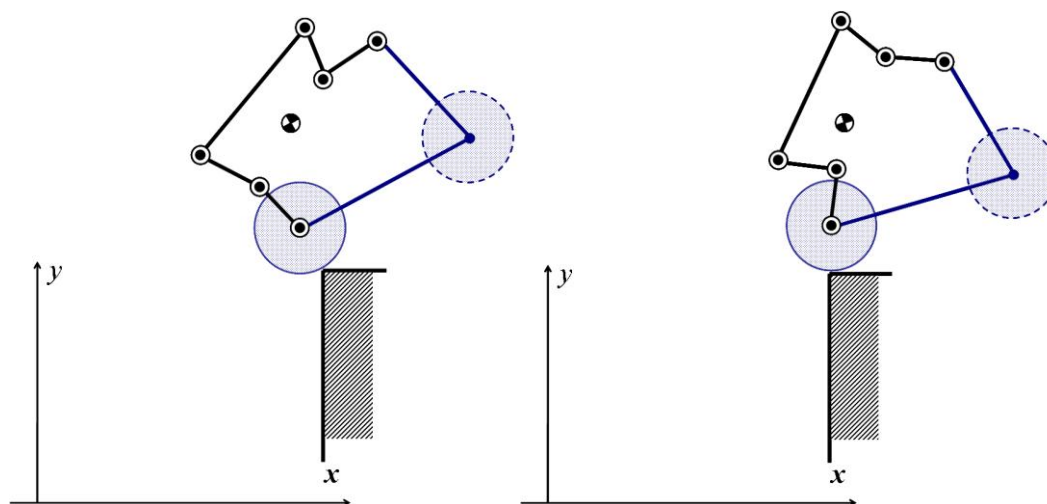


Fig.6-1g Attitude variations during Daniel

以上の動作解析より、Front-up や Wheelie と違い、Daniel においては人間の脚部が重要な役割を果たしていると考えられる．

したがって、人間の脚部を考慮した新たなモデルの構築を行った．

6. 2 7リンクモデルの構築

前項の動作解析より，Daniel を行うためには，Front-up や Wheelie では必要としなかった膝関節の曲げ動作など，人間の脚部が必要となることが分かった．

したがって，ここで新たに人間と自転車のモデルを構築した．モデルは，5 リンクモデルに人間の上腿部と下腿部にあたるリンクを加えたものである．後輪，自転車，人間の胴体，前腕部，上腕部，大腿部，下腿部により構成される，7 リンク(後輪を含む)となる．

また，人間がペダルを漕ぐという動作を考慮に入れないものとし，人間の足首を後輪の車軸に配置した．

以上で述べた，7 リンクモデル，各リンクに設定したパラメータおよびリンク名，可動範囲を図と表に示す．(Fig.6-2)，(Table.6-1, 2)

また，人間の身長は 174cm，体重は 66.6kg とした．

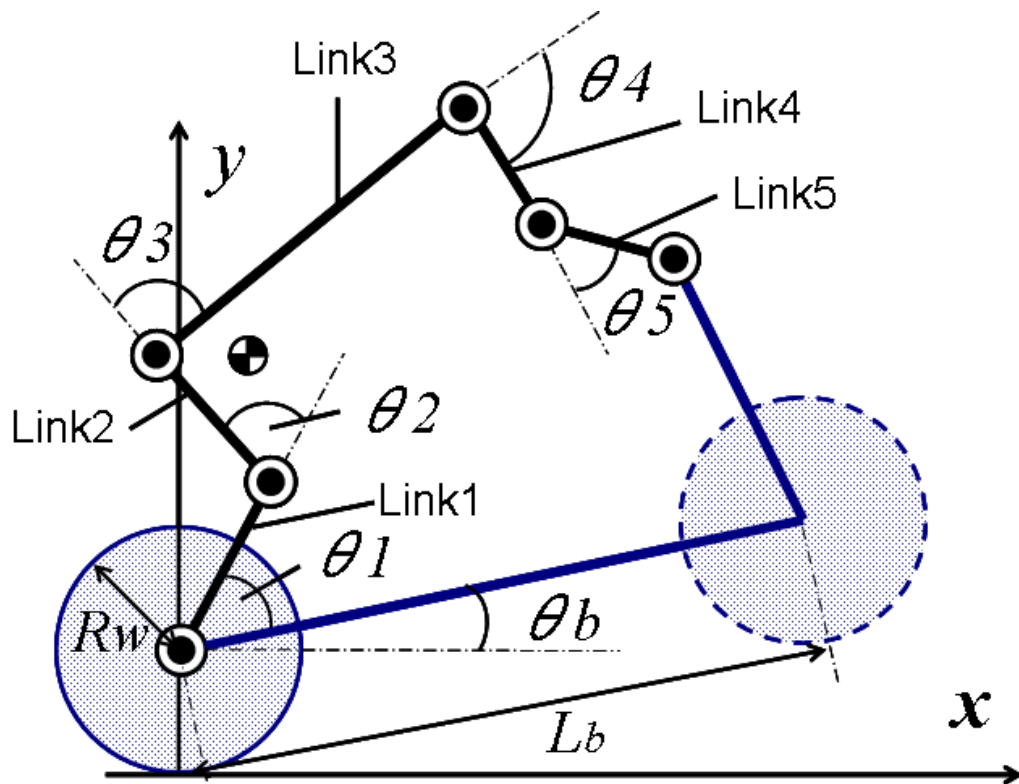


Fig.6-2 Seven-link model structure and parameters

各変数の定義を以下に示す.

θ_b : 自転車回転角度 (絶対角)

θ_1 : リンク 1 回転角度 (相対角)

θ_2 : リンク 2 回転角度 (相対角)

θ_3 : リンク 3 回転角度 (相対角)

θ_4 : リンク 4 回転角度 (相対角)

θ_5 : リンク 5 回転角度 (相対角)

R_w : 車輪半径

L_b : 前輪と後輪の車軸間の長さ

L_1 : リンク 1 長さ

L_2 : リンク 2 長さ

L_3 : リンク 3 長さ

L_4 : リンク 4 長さ

L_5 : リンク 5 長さ

m_b : 車輪重さ

m_1 : リンク 1 重さ

m_2 : リンク 2 重さ

m_3 : リンク 3 重さ

m_4 : リンク 4 重さ

m_5 : リンク 5 重さ

Table6-1 Parameter of Seven-link model

Region	Rear wheel	Bicycle	Leg region	thigh	Body	Upper arm	Front arm
Mass (kg)	4	6	7.0596	15.148	28.638	4.7952	3.8628
Length (mm)	(R_w =) 254	(l_b =) 1015	435	435	653	326	326
Moment of inertia (kg m^2)	0.129	1.2651	0.114	0.246	1.082	0.044	0.036
Link name	-	-	Link1	Link2	Link3	Link 4	Link 5

Table.6-2 Movable Area of each joints

	Ankle joint	Knee joint	Waist joint	Shoulder joint	Elbow joint
Minimum angle(deg)	45	0	-165	-180	0
Maximum angle(deg)	135	120	0	-30	165
Range of movement(deg)	90	120	165	150	165

6.3 Daniel の動作解析

Daniel の動作を行う競技者の映像を約 0.015 秒ごと 97 枚のコマ画像に編集し、Daniel の動作解析を行った。

用いている映像は、「アインシュタインの眼」(NHKHi)で放送されたバイクトライアルの映像である。

その画像を Paradraw というベクタ画像を描くためのフリードローツールを用いて、耳、肩、腰、膝、足首、つま先、自転車のグリップ（手先）、肘の 8 箇所を目印に描画することによって、各関節の位置を座標として把握することを可能にした。

得られたデータから、各リンクの回転角度、人間と自転車の合成重心位置の時間変化を求めることができた。使用したコマ画像、および、その画像を Paradraw を用いて描画したものを図に示す。

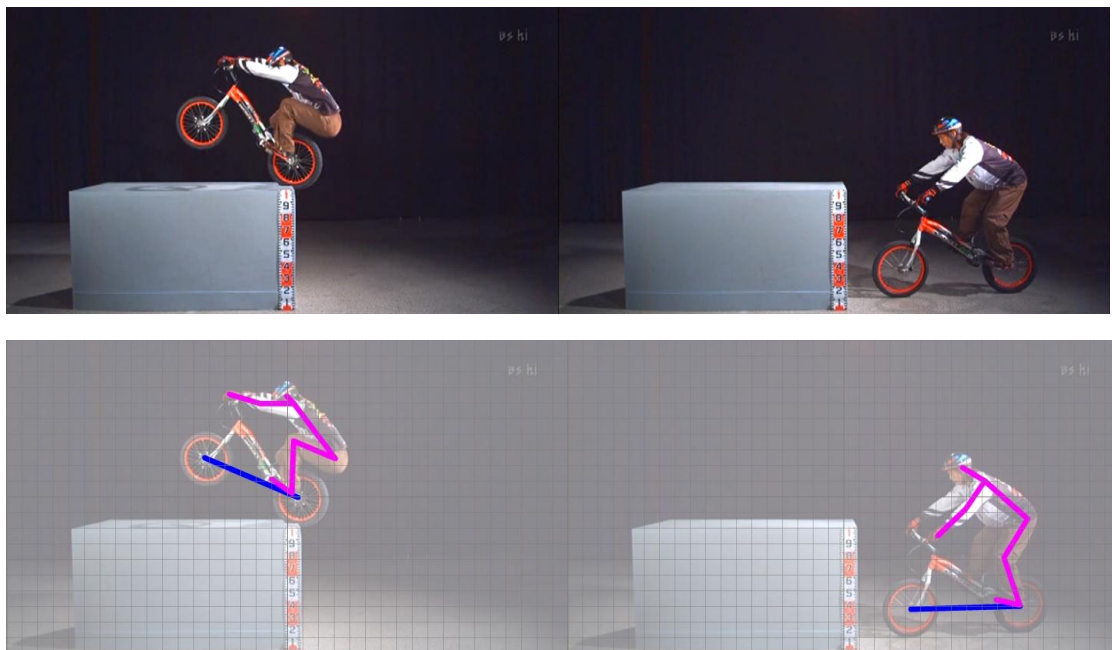


Fig.6-3 Original and edited images

6. 3. 1 合成重心の軌跡

Paradraw によって得られたデータから，合成重心位置の時間変化を求めた．

合成重心の軌跡を図に示す．ここで，図中の原点は，後輪接地点である．

また，データから得られた合成重心の軌跡を基に，合成重心の軌跡の方程式を算出した．この方程式を用いることにより，飛び上がり時の合成重心の初速度 v_0 ，飛び上がり角度 α_0 が得られる．

合成重心位置(x_G , y_G)の算出に用いた式は，以下の式(6-1)，式(6-2)である．

$$x_G = \frac{\left(m_b x_b + \sum_{i=1}^n m_i \left(x_p + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos \left(\sum_{k=1}^j \theta_k \right) + L_{gi} \cos \left(\sum_{m=1}^i \theta_m \right) \right) \right)}{M} \quad (6-1)$$

$$y_G = \frac{\left(m_b y_b + \sum_{i=1}^n m_i \left(y_p + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin \left(\sum_{k=1}^j \theta_k \right) + L_{gi} \sin \left(\sum_{m=1}^i \theta_m \right) \right) \right)}{M} \quad (6-2)$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_b$$

x_p : 後輪接地点からのペダルの x 方向距離

y_s : 後輪接地点からのペダルの y 方向距離

x_b : 後輪接地点からの自転車の x 方向重心位置

y_b : 後輪接地点からの自転車の y 方向重心位置

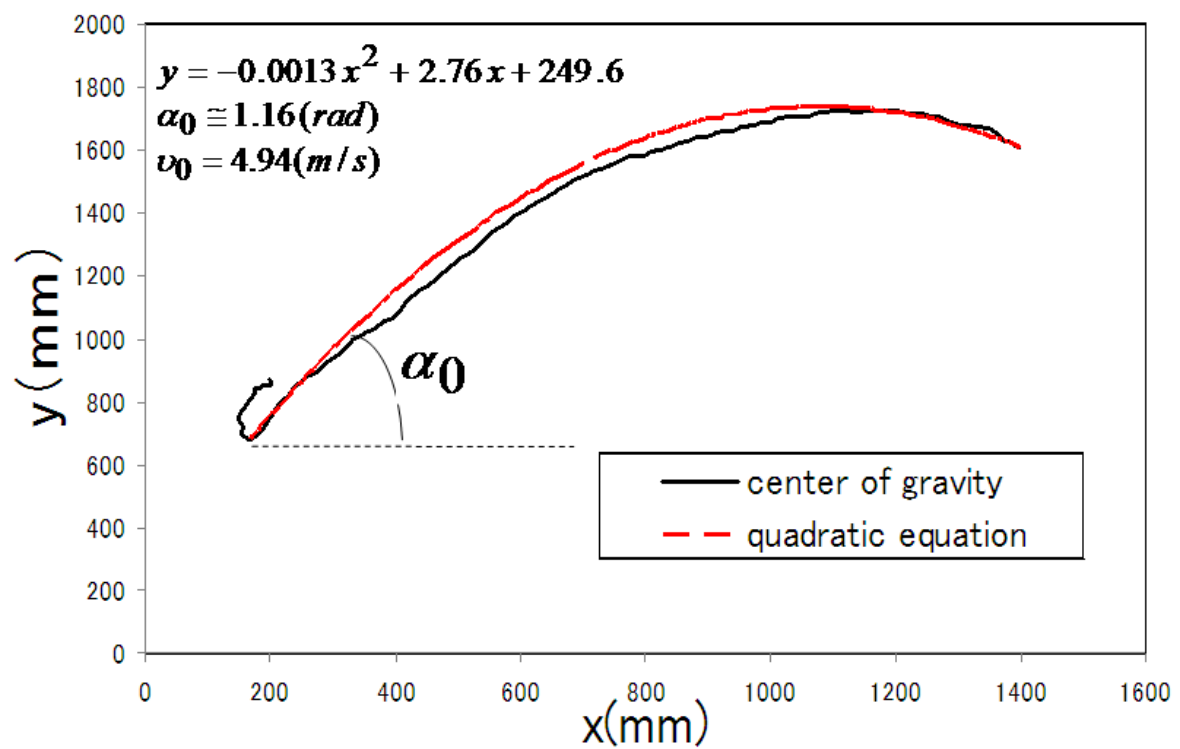


Fig.6-4 Trajectory of the combined mass center

6. 3. 2 各関節回転角度の時間変化

各関節回転角度の時間変化を求めた。

θ_b , θ_2 , θ_3 , θ_4 に関して 5 項移動平均法を用いて平滑化したデータを図に示す。ただし, 時計回りの回転が正である。(Fig.6-5,6,7,8)

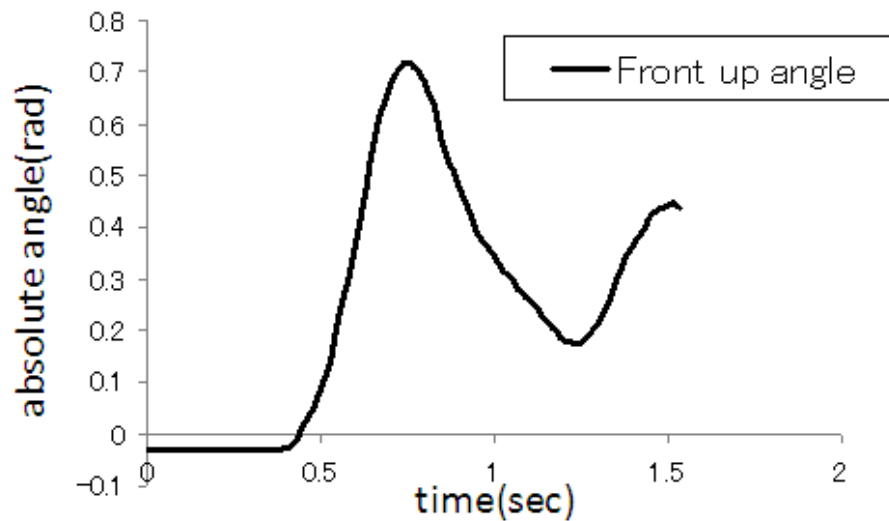


Fig.6-5 Front-up angle

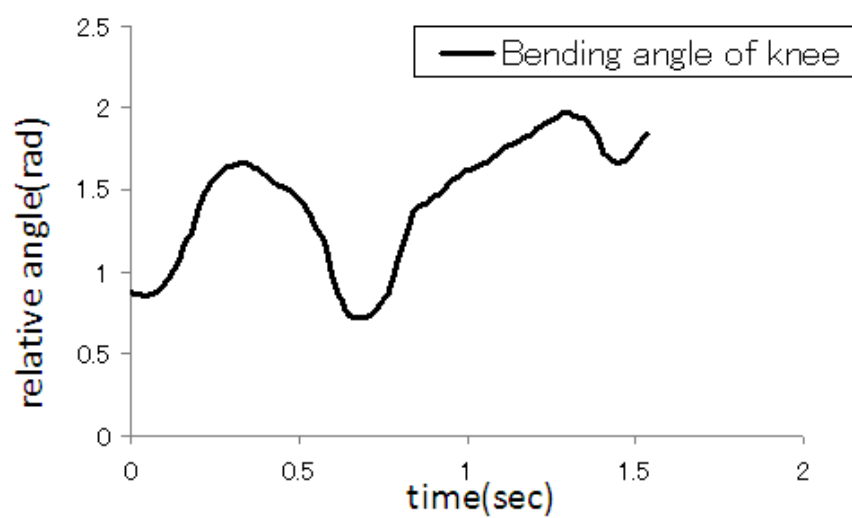


Fig.6-6 Angle variation of knee

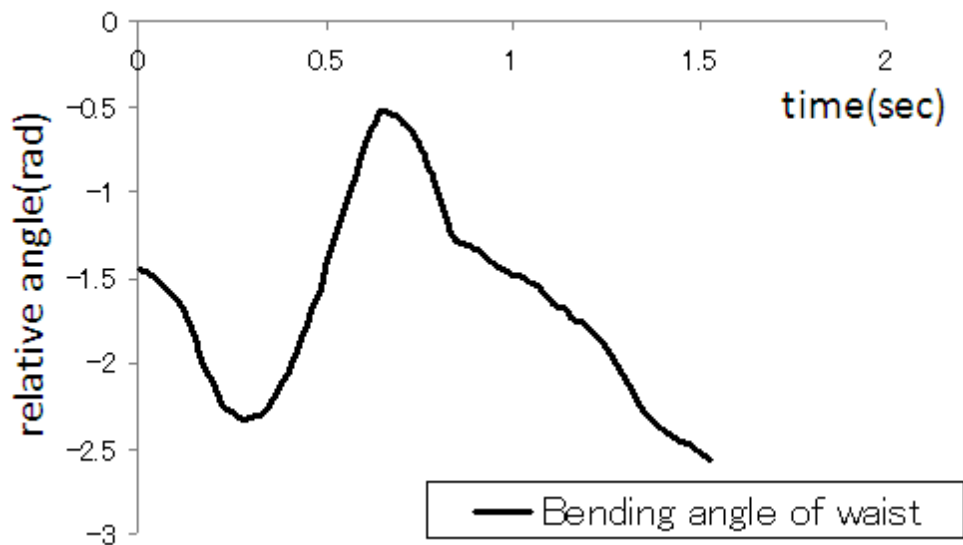


Fig.6-7 Angle variation of waist

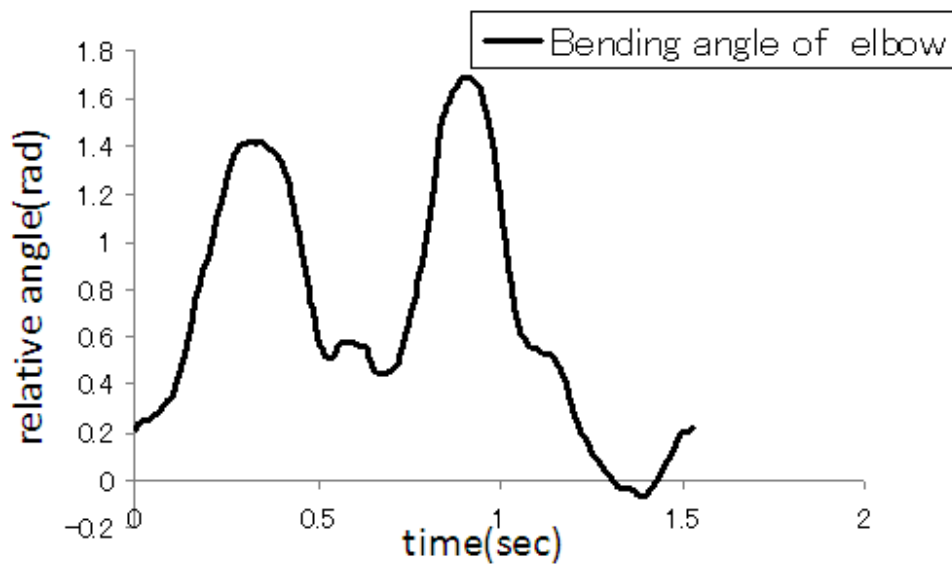


Fig.6-8 Angle variation of elbow

6. 3. 3 考察

データから、各関節においておおよそ 0.3 秒と 0.7 秒の際に極値を得ていることが読み取れる。動画による解析結果と上に示したグラフから、0.3 秒付近で合成重心が最低点となる踏み切り姿勢になっていることが分かる。

また、0.7 秒付近で膝を曲げた後輪引き上げ姿勢に入っていることが分かる。

0.7 秒後前輪上がり角が低下していることから、膝の曲げ動作が後輪引き上げに作用していることが分かった。

6. 4 踏み切り時の合成重心位置

先に述べたように、Daniel 動作を行う上で、踏み切り時にいかに合成重心位置を下げるかということが、飛び上がる際に重要となる。

ここで、式(6-1)、式(6-2)を用いることによって前輪上げ角を考慮しない合成重心の範囲を求める。

ここで θ_5 は人間の手先位置が自転車のハンドル位置に固定されている条件から、 $\theta_1 \sim \theta_4$ が与えられれば求めることができる。

ハンドル位置の座標を (x_h, y_h) とすると、ハンドル位置は、

$$x_h = x_p + \sum_{i=1}^5 L_i \cos \left(\sum_{j=1}^i \theta_j \right) \quad (6-3)$$

$$y_h = y_p + \sum_{i=1}^5 L_i \sin \left(\sum_{j=1}^i \theta_j \right) \quad (6-4)$$

と表すことができる。また、式(6-3)、式(6-4)から

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) = \frac{[y_h - \{y_p + \sum_{i=1}^4 L_i \sin(\sum_{j=1}^i \theta_j)\}]}{[x_h - \{x_p + \sum_{i=1}^4 L_i \cos(\sum_{j=1}^i \theta_j)\}]} \quad (6-5)$$

ここで、

$$A = \frac{[y_h - \{y_p + \sum_{i=1}^4 L_i \sin(\sum_{j=1}^i \theta_j)\}]}{[x_h - \{x_p + \sum_{i=1}^4 L_i \cos(\sum_{j=1}^i \theta_j)\}]}$$

とおくと

$$\theta_5 = \tan^{-1} A - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (6-6)$$

となる。

$\theta_1 \sim \theta_4$ の範囲を前述した可動範囲から

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta_1 \leq \frac{3}{4}\pi, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \frac{2\pi}{3}, \quad -\frac{11}{12}\pi \leq \theta_3 \leq 0, \quad -\pi \leq \theta_4 \leq -\frac{\pi}{6}$$

と設定する。

式(6-6)より、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ から θ_5 が求まり、合成重心の式より自転車に乗る人間の可動範囲内における、人間と自転車の合成重心を求めることができる。

MATLAB を用いることによって、求めた人間と自転車の合成重心の範囲を図に示す。また、この条件を満たす、姿勢の例を示す。(Fig.6-9,10)

ただし、(Fig.6-10)において、●は合成重心の位置である。

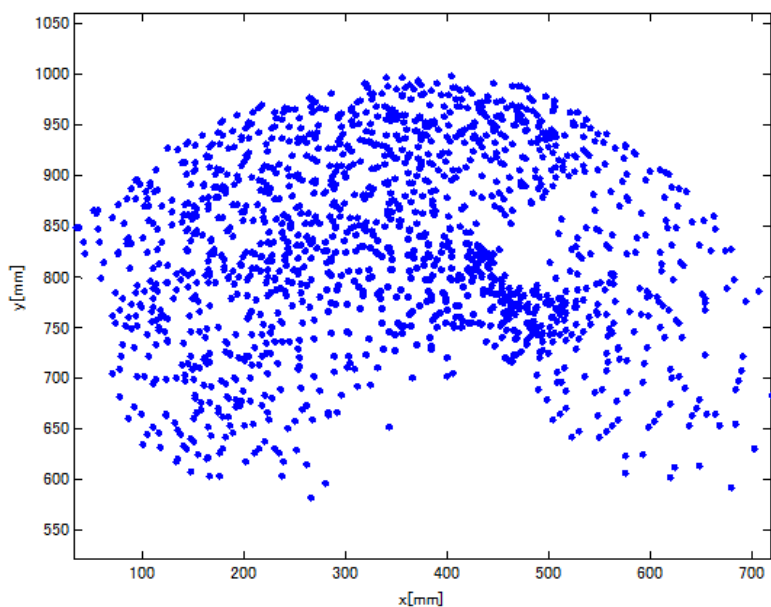


Fig.6-9 Position of center of gravity

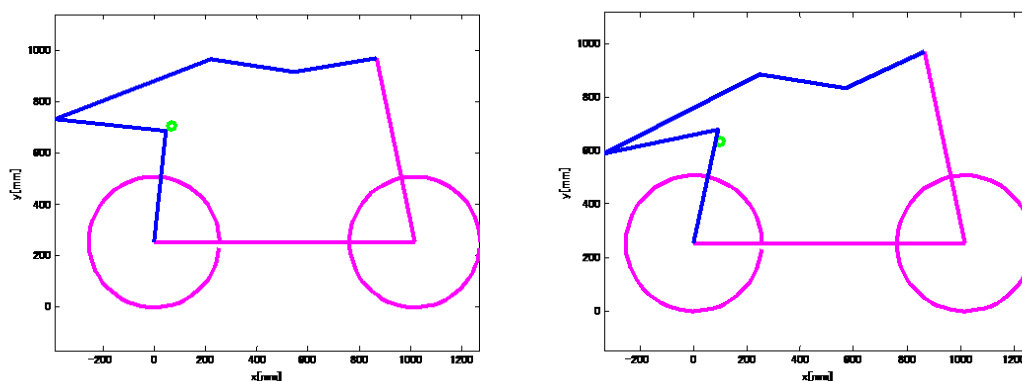


Fig.6-10 An example of attitude

6. 4. 1 考察

(Fig.6-9)から、踏み切り際の合成重心位置が、後輪接地点上付近にもあることが分かる。飛び上がりのための踏み切りの際、合成重心を後輪接地点上付近にすることで、重力による時計回りのモーメントを少なくし、前輪を上げやすくする効果があると考えられる。

6. 5 閉リンクモデルの運動方程式導出

6. 5. 1 閉リンクモデル

先に示した 7 リンクモデルを閉リンクのみである簡単なモデルについて運動方程式を導出し、シミュレーションを行う。閉リンクのみを考慮したモデルの運動方程式を導出し、それを用いて、7 リンクモデルの運動方程式を導出する。閉リンクモデルを図に示す。

求めるモデルは、自転車、後輪を考慮せず、後輪軸にペダルが、また、ハンドルに前腕関節が固定されているとして、関節変位を $(\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5)$ として構築した。(Fig.6-11)

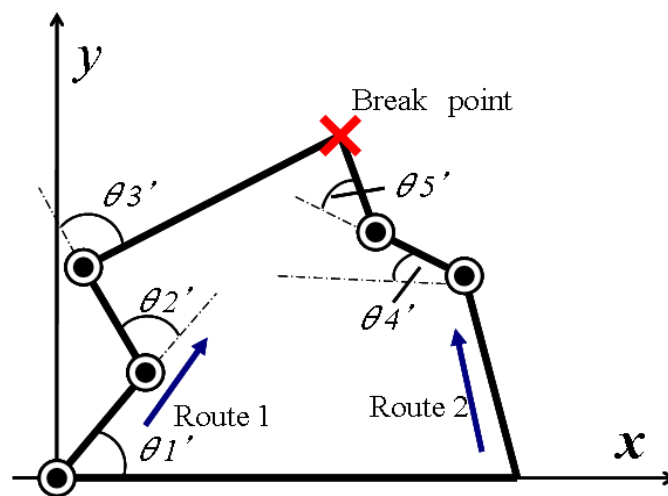


Fig.6-11 Six-link model of closed link mechanism

6. 5. 2 トルク変換ヤコビアン の算出

モデルを切断点で仮想的に切断すると、閉ループは2本のリンク列に分けられる。(ルート1, ルート2)

2本のリンク列それぞれについての切断点の θ_a, θ_b に対するヤコビアン J_1, J_2 は開リンク機構と同様に計算できる。これらを用いて、切断点の速度 $\dot{x}_h$ と関節角速度の関係は次のようになる。

$$\dot{x}_h = J_1 \dot{\theta}_a \quad (6-7)$$

$$\dot{x}_h = J_2 \dot{\theta}_b \quad (6-8)$$

ここで,

$$J_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}, \quad \theta_a = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{12} = -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{13} = -l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{21} = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{22} = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{23} = l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{21} = -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2), \quad m_{22} = -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad \theta_b = \begin{bmatrix} \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = -l_1 \sin \theta_4 - l_5 \sin(\theta_4 + \theta_5), \quad k_{12} = -l_5 \sin(\theta_4 + \theta_5)$$

$$k_{21} = l_1 \cos \theta_4 + l_5 \cos(\theta_4 + \theta_5), \quad k_{22} = l_5 \cos(\theta_4 + \theta_5)$$

切断点の速度・加速度が一致することから、式(6-7),式(6-8)より,

$$J_1 \dot{\theta}_a - J_2 \dot{\theta}_b = 0 \quad (6-9)$$

式(6-3)は次のように書ける。

$$J_1 \dot{\theta}_j = 0 \quad (6-10)$$

$$\mathbf{J}_l = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_j = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_{11} &= m_{11}, & l_{12} &= m_{12}, & l_{13} &= m_{13}, & l_{14} &= -k_{11}, & l_{15} &= -k_{12} \\ l_{21} &= m_{21}, & l_{22} &= m_{22}, & l_{23} &= m_{23}, & l_{24} &= -k_{21}, & l_{25} &= -k_{22} \end{aligned}$$

ここで、 N_J は全関節数、 $\boldsymbol{\theta}_J$ は全関節角である。式(6-10)は閉ループの拘束を表す。

N_J 個のリンクに対して m 個の拘束条件があるので、機構全体の自由度 N_D は次式で求められる。

$$N_D = N_J - m \quad (6-11)$$

ここでは、 $m=2$ となる。今、 $\mathbf{J}_l$ から独立な行ベクトルを m 本取り出して、 $\mathbf{J}_c$ を作り、 $\mathbf{J}_c$ の一般化座標 $\boldsymbol{\theta}_G$ に対応する列ベクトルを集めたものを $\mathbf{J}_G$ 、一般化座標以外の $\boldsymbol{\theta}_s$ に対応する列ベクトルを集めたものを $\mathbf{J}_s$ とすると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s \mathbf{J}_G) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_s \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_G \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \quad (6-12) \\ \mathbf{J}_s &= \begin{bmatrix} l_{11} & l_{14} \\ l_{21} & l_{24} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_G = \begin{bmatrix} l_{12} & l_{13} & l_{15} \\ l_{22} & l_{23} & l_{25} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式より

$$\mathbf{J}_s \dot{\boldsymbol{\theta}}_s = -\mathbf{J}_G \dot{\boldsymbol{\theta}}_G \quad (6-13)$$

となる。定義より $\mathbf{J}_s$ は正則行列なので、式(6-13)は

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_s = \mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\theta}}_G \quad (6-14)$$

となる。ここで、 $\mathbf{H}$ は次式で定義される $\boldsymbol{\theta}_s$ の $\boldsymbol{\theta}_G$ に関するヤコビアンである。

$$\mathbf{H} \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_s}{\partial \boldsymbol{\theta}_G} = -\mathbf{J}_s^{-1} \mathbf{J}_G \quad (6-15)$$

式(6-14)により、 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_G$ から全関節の運動 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_J$ が決定される。このことから、 $\boldsymbol{\theta}_G$ を一般化座標と定めることができる。

この $\mathbf{H}$ を用いて、次の方法により、トルク変換ヤコビアン $\mathbf{W}$ をもとめる。

・ $\mathbf{W}$ の第 i 行： $\boldsymbol{\theta}_J$ の i 番目の関節が一般化座標でなく、 $\boldsymbol{\theta}_s$ の j 番目にあたるときは $\mathbf{H}$ の第

i 行とする. θ_j の i 番目の関節が一般化座標で, C の j 番目にあたるときは j 番目の要素が 1 それ以外が 0 の単位行ベクトルとする.

求めた $\mathbf{W}$ を用いることで仮想的にリンクを切断した開リンク機構のトルク $\boldsymbol{\tau}_0$ を, 閉リンク機構の一般化力 $\boldsymbol{\tau}_G$ に変換することができる.

$$\boldsymbol{\tau}_G = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\tau}_0 \quad (6-16)$$

この閉リンク機構の一般化力から単位ベクトル法を用いて, 閉リンク機構の全関節の加速度を計算し, 運動方程式を導出する.

加速度の計算, 単位ベクトル法に関しては, 4 章を参照されたい.

6. 6 閉リンクモデルシミュレーション

前項に示した方法によって導出した運動方程式から，膝関節，腰関節，肘にトルクを与えるシミュレーションを行った．

7 リンクモデルにおける人間の姿勢については，閉リンク機構の拘束条件より，3 箇所の関節により決定されるため，3 箇所の関節にトルクを与えることで人間の姿勢を制御できると考えられるためである．

シミュレーションは Mathematica 上で Runge-kutta-Gill 法を用いて，運動方程式を解くことで行った．

ここで，3 つの関節に与えた関節トルクは，

$$\tau_2 = 9 \text{ (N/m)}, \tau_3 = -130 \text{ (N/m)}, \tau_5 = -7 \text{ (N/m)}$$

である．

シミュレーションの様子と，各ルートの切断点の，水平方向・垂直方向それぞれの速度変化を図に示す．(Fig.6-12,13)

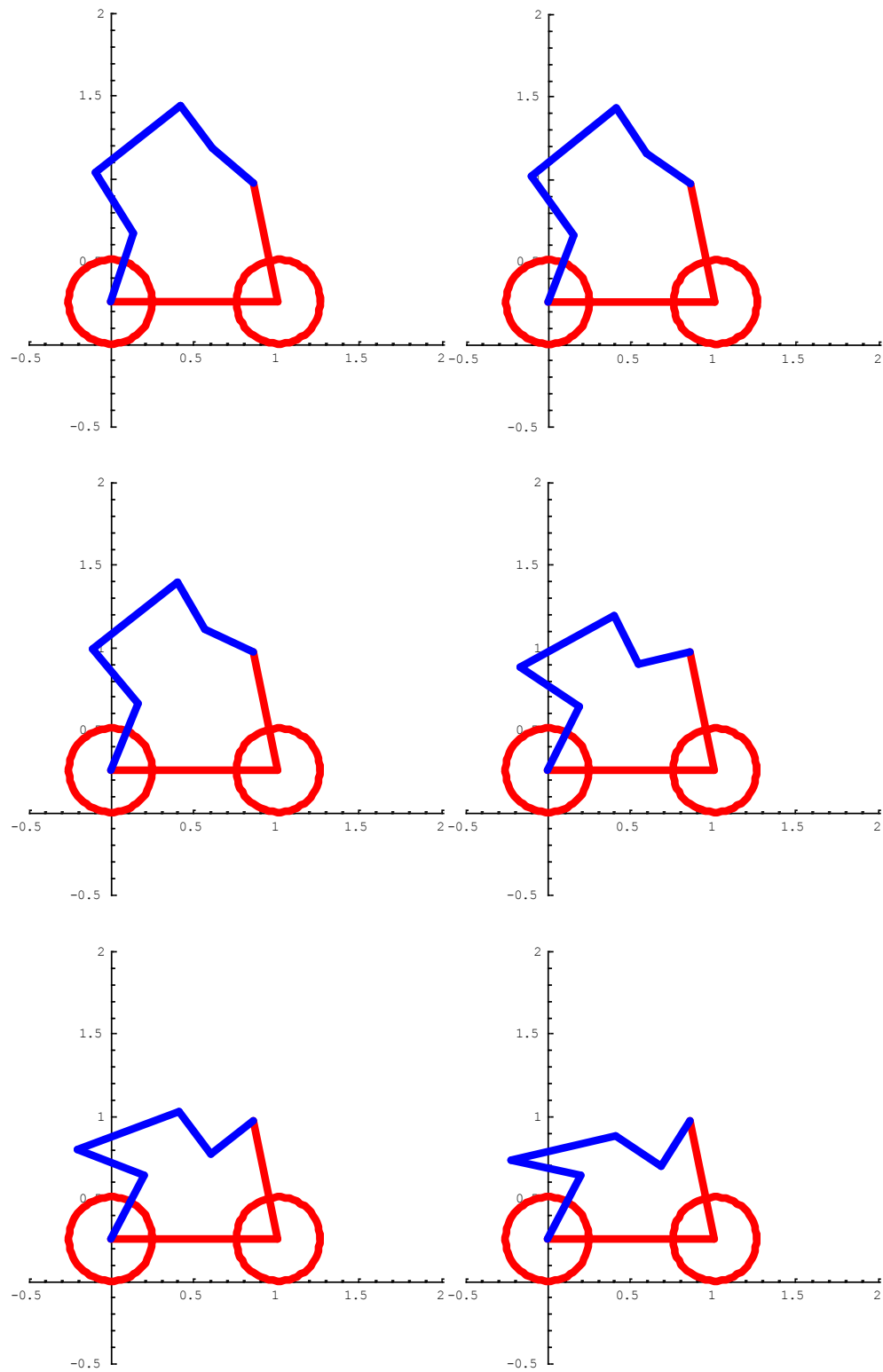


Fig.6-12 A simulation result of the closed link mechanism

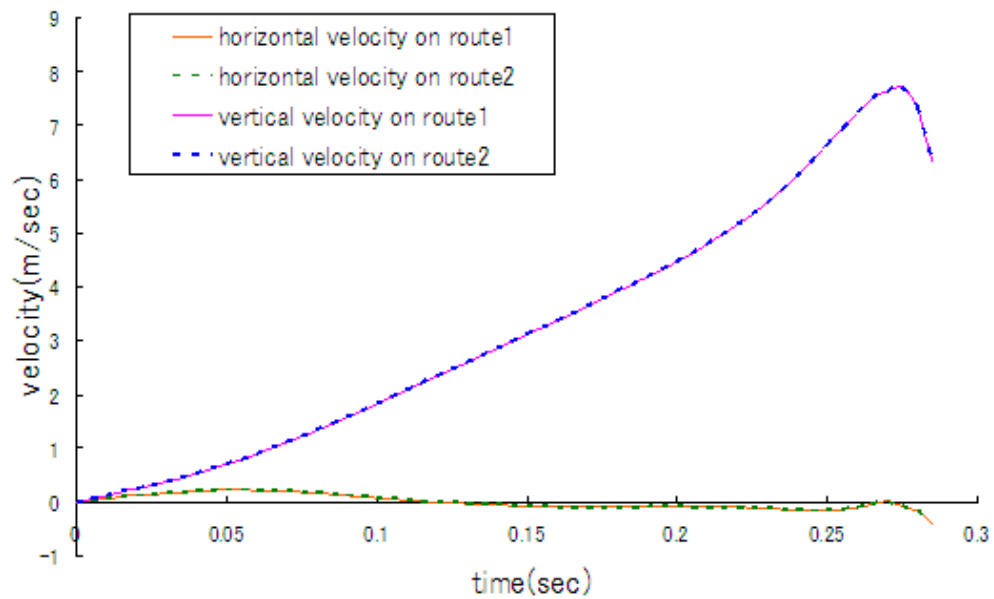


Fig.6-13 Velocities of the break point on each route

6. 6. 1 シミュレーションの結果・考察

動作シミュレーションの結果とグラフより、切断点の速度が一致し、閉リンクモデルのシミュレーションが実現できていることが分かる。よって、この閉リンクモデルの運動方程式を用いて、Daniel のシミュレーションを行うことが可能と考えられる。

6. 7 Daniel シミュレーション

本章において先に述べた各関節回転角度の時間変化に追従するように，Interactive Physics2004(以下 IP2004 とする)を用いてシミュレーションを行った．

シミュレーションでは，ジャンプ動作にのみ着目し，空中での姿勢変化は無視するものとする．

人間の姿勢については，閉リンク機構の拘束条件より，膝関節，腰関節，肘の 3 箇所の関節の角度により決定される．また，自転車の姿勢については，後輪にかけるトルクを操作することにより，変化させることができる．

よってこの人間と自転車の姿勢は，後輪と膝関節，腰関節，肘に与えるトルク $\tau_w, \tau_2, \tau_3, \tau_5$ により制御することができる．

制御アルゴリズムとしては，あらかじめ目標角を設定しておき，その角度に追従するように，角度と角速度をフィードバックしてトルクを与えることになる．シミュレーション時の各制御パラメータを表に示す．(Table.6-3)

グラフにおいて，各リンクの回転角度は，絶対角で示している．

$$\tau_w = k_{pb}(\theta_{bt} - \theta_b) + k_{db}(\dot{\theta}_{bt} - \dot{\theta}_b) \quad (6-17)$$

$$\tau_2 = k_{p2}(\theta_{2t} - \theta_2) + k_{d2}(\dot{\theta}_{2t} - \dot{\theta}_2) \quad (6-18)$$

$$\tau_3 = k_{p3}(\theta_{3t} - \theta_3) + k_{d3}(\dot{\theta}_{3t} - \dot{\theta}_3) \quad (6-19)$$

$$\tau_5 = k_{p5}(\theta_{5t} - \theta_5) + k_{d5}(\dot{\theta}_{5t} - \dot{\theta}_5) \quad (6-20)$$

Table.6-3 Control parameter

	Link2	Link3	Link5
Target angle (rad)	0.3 / 1.5 / 0.3	3 / 2 / 2.5	0 / 1.9 / 0.7
Angular velocity of target (rad/sec)	0	0	0
Proportional gain	15000	3000	15000
Differential gain	600	300	650

※ Target angle は，(踏み切り姿勢目標角)/(ジャンプ姿勢目標角)/(着地姿勢目標角)を表す．

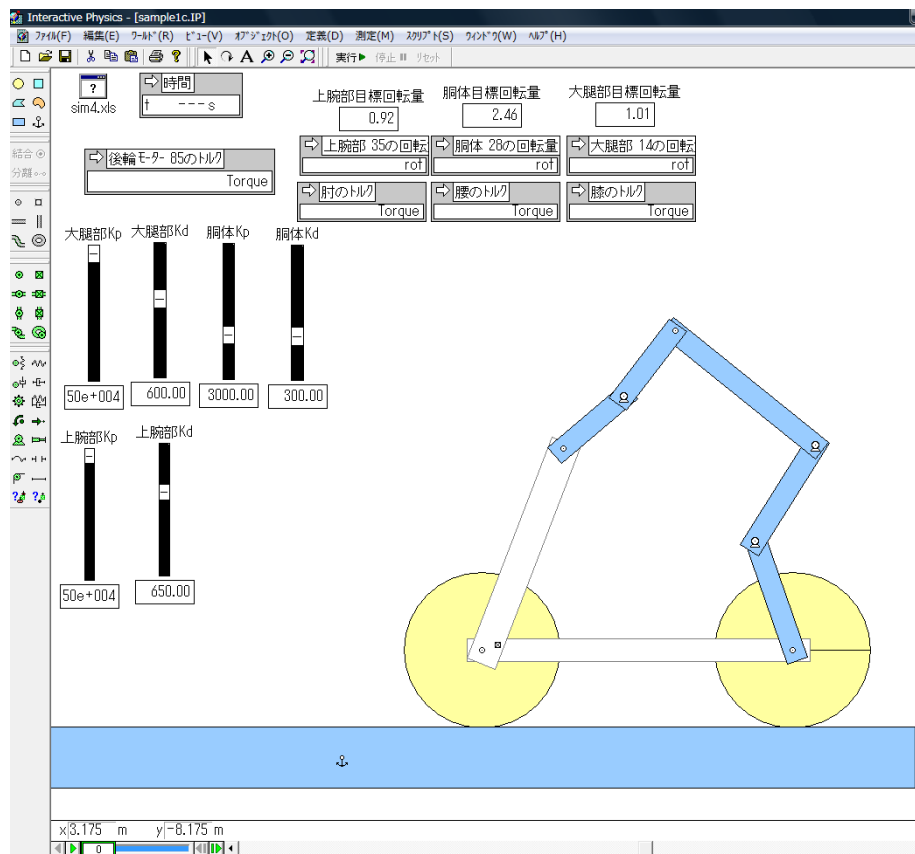


Fig.6-13 IP simulation

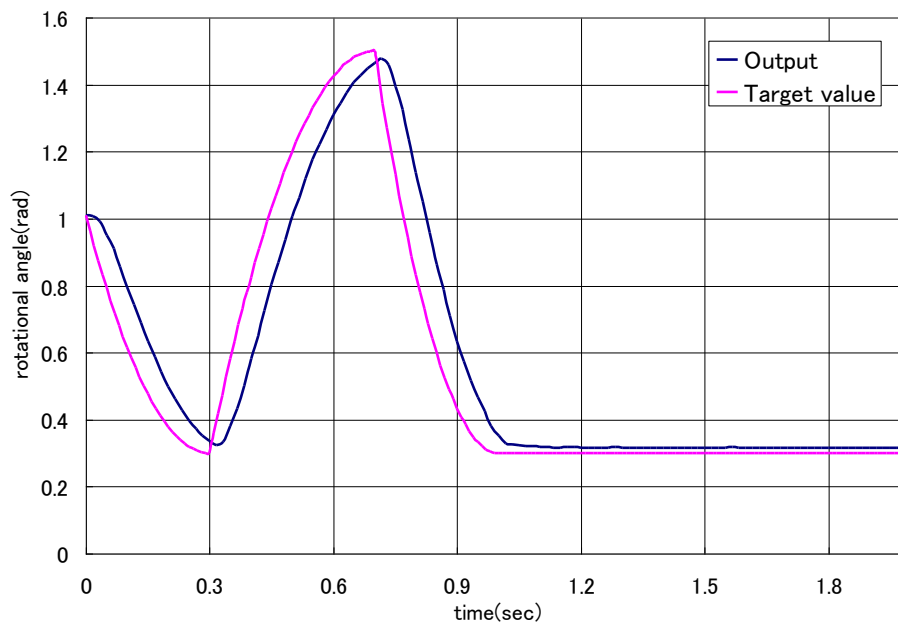


Fig.6-14a Rotation angle of knee by IP simulation

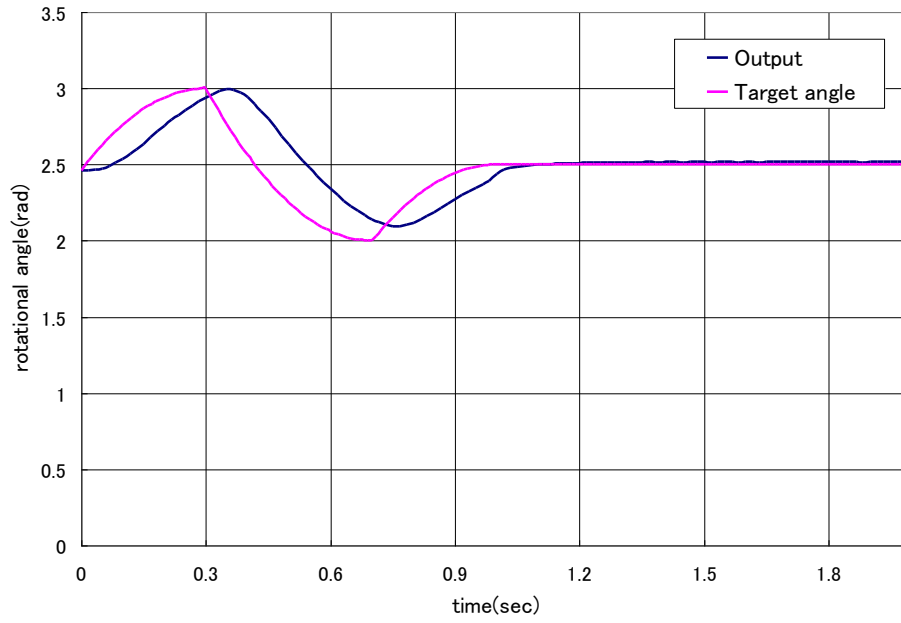


Fig.6-14b Rotation angle of waist by IP simulation

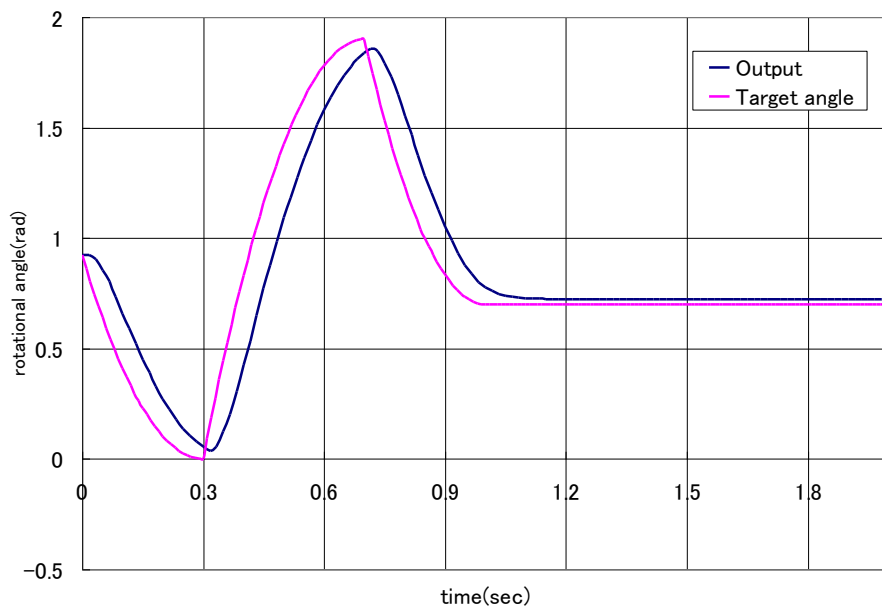


Fig.6-14c Rotation angle of waist by IP simulation

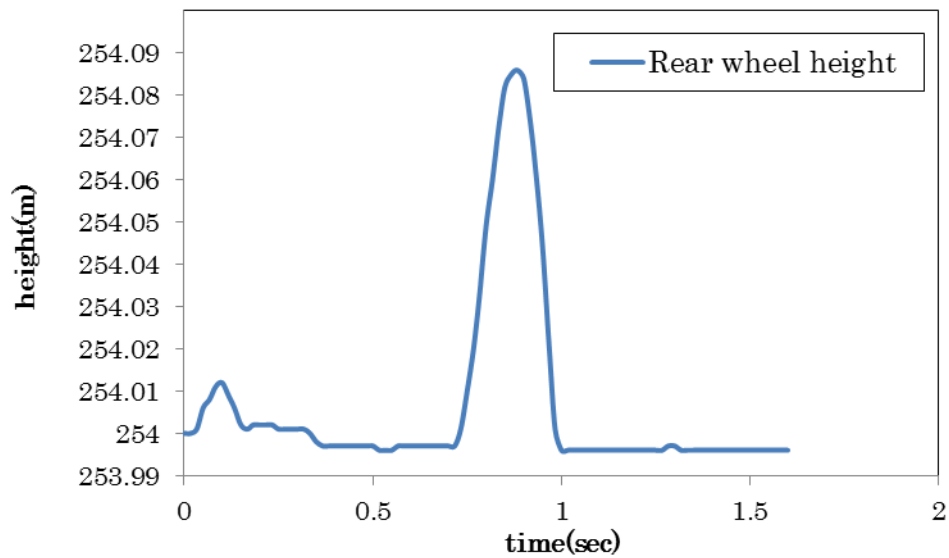


Fig.6-15 Movement distance of center of gravity

6. 7. 1 シミュレーションの結果・考察

(Fig.6-14a,14b,14c)から、各関節が目標回転角度をフィードバックし、目標角度に追従していることが分かる。

また、(Fig.6-15)より、合成重心位置が垂直方向に上昇し、水平方向には変化がないことから、垂直に飛び上がるジャンプ動作を実現できたことが読み取れる。

今後、7 リンクモデルにおいて、空中での姿勢変化を可能とし、合成重心位置を制御可能とすることで、1m ほどの高さの台に飛び乗るなど Daniel 動作が実現できると考えられる。

第7章 結 言

本研究では、バイクトライアルロボットについて、前輪上げ動作から Daniel 制御の実現を目標とした。

Wheelie や Daniel などの曲技を実現するためには、動作の解析と、モデルによるシミュレーションが必要となる。また、人間が自転車に乗っている状態は、一般的な閉リンク機構としてモデル化する必要がある。そこで、一般的な閉リンクを含んだモデルの運動方程式導出プログラムを完成させ、導出したリンクモデルの運動方程式を用いて、シミュレーションを行っている。

渋谷ら[1]により人間の脚部を除いた 5 リンクモデルによる Front-up 動作から前輪を上げ、その状態を維持する Wheelie を実現することができている。

そこから Daniel など様々な曲技につなげていくことを目指し、人間の脚部を加えることでリンク数を増やした。

人間により近い形である 7 リンクモデルを構築し、閉リンクを含んだモデルの運動方程式導出プログラムを完成させたため、今後は、実際の動作の解析から制御則を求めることで、様々な曲技のシミュレーションを行うことができる。

近年、多種多様な移動ロボットに関する研究がされているが、その一部として、レスキューロボットの研究も、阪神・淡路大震災をきっかけに行われている。救助活動を行う人間の救助チームだけでは十分カバーしきれない部分を補うことができるため、レスキューロボットの有用性は極めて高いといえる。

本研究のバイクトライアルの曲技が可能なロボットが実現したならば、不整地を迅速に移動し、人間の探索、救助が可能となり、有効なレスキュー手段の一つのツールにもなり得ると考えられる。

謝 辞

本研究の遂行にあたり終始、御指導いただきました、法政大学理工学部機械工学科 高島 俊教授には、この場を借りて深く感謝の意を表すとともに、厚く御礼申し上げます。

また、本研究を進めるにあたり、互いに意見し協力し合い、良き励みになった法政大学大学院工学研究科機械工学専攻 中島 愛子さん、早田 哲弘君、さらに、法政大学大学院工学研究科機械工学専攻修士課程 1 年および法政大学工学部機械工学科 4 年の高島研究室の皆様心より感謝申し上げます。

最後に、本研究に際して御協力、御助言おいただいた方々には、ここで厚く御礼申し上げます。

2011 年 2 月 17 日

松岡 美樹

発表論文

松岡 美樹，高島 俊，“バイクトライアルロボットのための力学的解析とシミュレーション”，第 31 回バイオメカニズム学術講演会 SOBIM2010 予稿集，2B1-4

松岡 美樹，高島 俊，熊田 亮介，“3 次元の複数自由度を持つ Robot Finger の研究－演奏ロボットへの応用－”，日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 2010 講演論文集，2A1-D26

参考文献

- [1] 渋谷純也, マウンテンバイクを用いた曲技ロボット, (2007), 法政大学大学院工学研究科修士論文
- [2] 中村仁彦, パラレルメカニズムの動力学, 日本ロボット学会誌, vol.10,no.6,pp.709-714,1992
- [3] 中村仁彦, 構造変化を伴うリンク系の動力学計算とヒューマンフィギュアの運動計算, 日本ロボット学会誌, vol.16,no.8,pp.1152-1159,1998
- [4] 吉川恒夫, ロボット制御基礎論, コロナ社
- [5] 中川憲治, 工科のための一般力学, 森北出版
- [6] 小林一行, MATLAB ハンドブック
- [7] 上坂吉則, Mathematica 数値数式プログラミング, 牧野書店
- [8] 国際バイクトライアル協会 HP より
<http://www.bju.jp/>
- [9] 慶応義塾大学理工学部システムデザイン工学科高橋研究室 HP
<http://www.yt.sd.keio.ac.jp/bicycle.html>
- [10] 村田製作所 HP
http://www.murata.co.jp/corporate/boy_girl/index.html
- [11] 本田技研工業株式会社 HP
<http://www.honda.co.jp/>

付 録

a) 7 リンク閉リンク運動方程式導出プログラム

閉リンク運動方程式;

角度;

$o1 = \theta1[t];$

$o2 = \theta2[t];$

$o3 = \theta3[t];$

$o4 = \theta4[t];$

$o5 = \theta5[t];$

$o1' = \partial_t \theta1[t];$

$o2' = \partial_t \theta2[t];$

$o3' = \partial_t \theta3[t];$

$o4' = \partial_t \theta4[t];$

$o5' = \partial_t \theta5[t];$

$o1'' = \partial_t o1'[t];$

$o2'' = \partial_t o2'[t];$

$o3'' = \partial_t o3'[t];$

$o4'' = \partial_t o4'[t];$

$o5'' = \partial_t o5'[t];$

重心位置;

$x1[t] = Lpx + Lg1 * \text{Cos}[o1];$

$x2[t] = Lpx + L1 * \text{Cos}[o1] + Lg2 * \text{Cos}[o1 + o2];$

$x3[t] = Lpx + L1 * \text{Cos}[o1] + L2 * \text{Cos}[o1 + o2] +$
 $Lg3 * \text{Cos}[o1 + o2 + o3];$

$x4[t] = Lhx - Lg4 * \text{Cos}[o4];$

$x5[t] = Lhx - L4 * \text{Cos}[o4] - Lg5 * \text{Cos}[o4 + o5];$

$y1[t] = Lpy + Lg1 * \text{Sin}[o1];$

$y2[t] = Lpy + L1 * \text{Sin}[o1] + Lg2 * \text{Sin}[o1 + o2];$

$y3[t] = Lpy + L1 * \text{Sin}[o1] + L2 * \text{Sin}[o1 + o2] +$
 $Lg3 * \text{Sin}[o1 + o2 + o3];$

$y4[t] = Lhy - Lg4 * \text{Sin}[o4];$

$y5[t] = Lhy - L4 * \text{Sin}[o4] - Lg5 * \text{Sin}[o4 + o5];$

運動エネルギー;

$$\begin{aligned} Th1 = & 1/2 * m1 * ((\partial_t x1[t])^2 + (\partial_t y1[t])^2) + \\ & 1/2 * m2 * ((\partial_t x2[t])^2 + (\partial_t y2[t])^2) + \\ & 1/2 * m3 * ((\partial_t x3[t])^2 + (\partial_t y3[t])^2) + \\ & 1/2 * I1 * (o1')^2 + 1/2 * I2 * (o2')^2 + \\ & 1/2 * I3 * (o3')^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Th2 = & 1/2 * m4 * ((\partial_t x4[t])^2 + (\partial_t y4[t])^2) + \\ & 1/2 * m5 * ((\partial_t x5[t])^2 + (\partial_t y5[t])^2) + \\ & 1/2 * I4 * (o4')^2 + 1/2 * I5 * (o5')^2; \end{aligned}$$

位置エネルギー;

$$Vh1 = m1 * g * y1[t] + m2 * g * y2[t] + m3 * g * y3[t];$$

$$Vh2 = m4 * g * y4[t] + m5 * g * y5[t];$$

$$F = 0;$$

ラグランジュ方程式;

$$Qh1 = \partial_t \partial_{o1} Th1 - \partial_{o1} Th1 + \partial_{o1} Vh1 + \partial_{o1} F;$$

$$Qh2 = \partial_t \partial_{o2} Th1 - \partial_{o2} Th1 + \partial_{o2} Vh1 + \partial_{o2} F;$$

$$Qh3 = \partial_t \partial_{o3} Th1 - \partial_{o3} Th1 + \partial_{o3} Vh1 + \partial_{o3} F;$$

$$Qh4 = \partial_t \partial_{o4} Th2 - \partial_{o4} Th2 + \partial_{o4} Vh2 + \partial_{o4} F;$$

$$Qh5 = \partial_t \partial_{o5} Th2 - \partial_{o5} Th2 + \partial_{o5} Vh2 + \partial_{o5} F;$$

ヤコビ行列;

$$\begin{aligned} k11 = & -(L1 * \sin[o1] + L2 * \sin[o1 + o2] + \\ & L3 * \sin[o1 + o2 + o3]); \\ k12 = & -(L2 * \sin[o1 + o2] + L3 * \sin[o1 + o2 + o3]); \\ k13 = & -L3 * \sin[o1 + o2 + o3]; \\ k14 = & L4 * \sin[o4] + L5 * \sin[o4 + o5]; \\ k15 = & L5 * \sin[o4 + o5]; \\ k21 = & L1 * \cos[o1] + L2 * \cos[o1 + o2] + \\ & L3 * \cos[o1 + o2 + o3]; \\ k22 = & L2 * \cos[o1 + o2] + L3 * \cos[o1 + o2 + o3]; \\ k23 = & L3 * \cos[o1 + o2 + o3]; \\ k24 = & -(L4 * \cos[o4] + L5 * \cos[o4 + o5]); \\ k25 = & -L5 * \cos[o4 + o5]; \end{aligned}$$

$$Js = \begin{pmatrix} k11 & -k14 \\ k21 & -k24 \end{pmatrix};$$

$$Jg = \begin{pmatrix} k12 & k13 & -k15 \\ k22 & k23 & -k25 \end{pmatrix};$$

$$JsT = \text{Inverse}[Js];$$

$$H = -\text{Inverse}[Js] . Jg;$$

```

H11 = H[[1, 1]];
H12 = H[[1, 2]];
H13 = H[[1, 3]];
H21 = H[[2, 1]];
H22 = H[[2, 2]];
H23 = H[[2, 3]];

```

wの計算;

$$W = \begin{pmatrix} H11 & H12 & H13 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ H21 & H22 & H23 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

```

WT = Transpose[W];
Tg = WT.To;

```

H'θ'の計算;

```

d1 = ∂t(k11) * o1';
d2 = ∂t(k12) * o2';
d3 = ∂t(k13) * o3';
d4 = -∂t(k14) * o4';
d5 = -∂t(k15) * o5';
e1 = ∂t(k21) * o1';
e2 = ∂t(k22) * o2';
e3 = ∂t(k23) * o3';

e4 = -∂t(k24) * o4';
e5 = -∂t(k25) * o5';
Jem1 = d1 + d2 + d3 + d4 + d5;
Jem4 = e1 + e2 + e3 + e4 + e5;
Jcm =  $\begin{pmatrix} Jem1 \\ Jem4 \end{pmatrix}$ ;
Hθ = -JsT.Jcm;
Hθ1 = Hθ[[1, 1]];
Hθ4 = Hθ[[2, 1]];

```

bの計算;

```

b = Tg /. {o1'' → Hθ1, o2'' → 0, o3'' → 0,
           o4'' → Hθ4, o5'' → 0};

```

fの計算;

i = 1 場合;

```

os1a = H11 + Hθ1;
os4a = H21 + Hθ4;
f1 = Tg /. {o1'' → os1a, o2'' → 1, o3'' → 0,
            o4'' → os4a, o5'' → 0};
a1 = f1 - b;
a11 = a1[[1, 1]];
a21 = a1[[2, 1]];
a31 = a1[[3, 1]];

```

```

i = 2 場合;
os1b = H12 + Hθ1;
os4b = H22 + Hθ4;
f2 = Tg /. {o1'' → os1b, o2'' → 0, o3'' → 1,
            o4'' → os4b, o5'' → 0};
a2 = f2 - b;
a12 = a2[[1, 1]];
a22 = a2[[2, 1]];
a32 = a2[[3, 1]];

```

```

i = 3 場合;
os1c = H13 + Hθ1;
os4c = H23 + Hθ4;
f3 = Tg /. {o1'' → os1c, o2'' → 0, o3'' → 0,
            o4'' → os4c, o5'' → 1};
a3 = f3 - b;
a13 = a3[[1, 1]];
a23 = a3[[2, 1]];
a33 = a3[[3, 1]];

```

Aの計算;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

```
AT = Inverse[A];
```

eの計算;

$$Taa = \begin{pmatrix} Ta1 \\ Ta2 \\ Ta3 \\ Ta4 \\ Ta5 \end{pmatrix};$$

```
TGG = WT.Taa;
```

```
Theta = AT.(TGG - b);
```

```
Theta2 = Theta[[1, 1]];

```

```
Theta3 = Theta[[2, 1]];

```

```
Theta5 = Theta[[3, 1]];

```

```
Thetass = H.Theta + Hθ;
```

```
Theta1 = Thetass[[1, 1]];

```

```
Theta4 = Thetass[[2, 1]];

```

シミュレーション;

パラメータ;

I1 = 0.114; I2 = 0.246; I3 = 1.082; I4 = 0.036;
I5 = 0.044;

m1 = 7.0596; m2 = 15.1848; m3 = 28.638; m4 = 3.8628;
m5 = 4.7952;

g = 9.80665;

L1 = 0.435; L2 = 0.435; L3 = 0.653; L4 = 0.326;
L5 = 0.326;

Lg1 = L1 / 2; Lg2 = L2 / 2; Lg3 = L3 / 2; Lg4 = L4 / 2;
Lg5 = L5 / 2;

Ta1 = 0;
Ta2 = 9;
Ta3 = -130;
Ta4 = 0;
Ta5 = -7;

dt = 0.005;
Lhx = 0.866;
Lhy = 0.97;

Lpx = 0;
Lpy = 0.254;

初期パラメータ;

q10 = 1.236;
q20 = 0.895;
q30 = -1.455;
q40 = -0.708;
q50 = -0.215;

w10 = 0;
w20 = 0;
w30 = 0;
w40 = 0;
w50 = 0;

q1[1] = q10;
q2[1] = q20;
q3[1] = q30;
q4[1] = q40;
q5[1] = q50;

```
w1[1] = w10;  
w2[1] = w20;  
w3[1] = w30;  
w4[1] = w40;  
w5[1] = w50;
```

```
c1 = 1 / Sqrt[2];  
c2 = 1 + 1 / Sqrt[2];  
c3 = 1 - 1 / Sqrt[2];  
c4 = -0.5 + 1 / Sqrt[2];  
c5 = -1 / Sqrt[2];
```

ルンゲクッタギル法;

```
For[i = 2, i < 60, i ++, tt = (i - 2) * dt;  
  
j1 = Theta1 /. {o1' → w1[i - 1], o2' → w2[i - 1], o3' → w3[i - 1], o4' → w4[i - 1],  
o5' → w5[i - 1], o1 → q1[i - 1], o2 → q2[i - 1], o3 → q3[i - 1], o4 → q4[i - 1], o5 → q5[i - 1]};  
j2 = Theta2 /. {o1' → w1[i - 1], o2' → w2[i - 1], o3' → w3[i - 1], o4' → w4[i - 1],  
o5' → w5[i - 1], o1 → q1[i - 1], o2 → q2[i - 1], o3 → q3[i - 1], o4 → q4[i - 1], o5 → q5[i - 1]};  
j3 = Theta3 /. {o1' → w1[i - 1], o2' → w2[i - 1], o3' → w3[i - 1], o4' → w4[i - 1],  
o5' → w5[i - 1], o1 → q1[i - 1], o2 → q2[i - 1], o3 → q3[i - 1], o4 → q4[i - 1], o5 → q5[i - 1]};  
j4 = Theta4 /. {o1' → w1[i - 1], o2' → w2[i - 1], o3' → w3[i - 1], o4' → w4[i - 1],  
o5' → w5[i - 1], o1 → q1[i - 1], o2 → q2[i - 1], o3 → q3[i - 1], o4 → q4[i - 1], o5 → q5[i - 1]};  
j5 = Theta5 /. {o1' → w1[i - 1], o2' → w2[i - 1], o3' → w3[i - 1], o4' → w4[i - 1],  
o5' → w5[i - 1], o1 → q1[i - 1], o2 → q2[i - 1], o3 → q3[i - 1], o4 → q4[i - 1], o5 → q5[i - 1]};  
  
pal[i] = dt * w1[i - 1];  
kal[i] = dt * j1;  
pbl[i] = dt * w2[i - 1];  
kbl[i] = dt * j2;  
pcl[i] = dt * w3[i - 1];  
kcl[i] = dt * j3;  
pdl[i] = dt * w4[i - 1];  
kdl[i] = dt * j4;  
pel[i] = dt * w5[i - 1];  
kel[i] = dt * j5;
```

```

j1a = Theta1 /. {o1' → w1[i - 1] + ka1[i] / 2, o2' → w2[i - 1] + kb1[i] / 2,
  o3' → w3[i - 1] + kc1[i] / 2, o4' → w4[i - 1] + kd1[i] / 2, o5' → w5[i - 1] + ke1[i] / 2,
  o1 → q1[i - 1] + pa1[i] / 2, o2 → q2[i - 1] + pb1[i] / 2, o3 → q3[i - 1] + pc1[i] / 2,
  o4 → q4[i - 1] + pd1[i] / 2, o5 → q5[i - 1] + pe1[i] / 2};
j2a = Theta2 /. {o1' → w1[i - 1] + ka1[i] / 2, o2' → w2[i - 1] + kb1[i] / 2,
  o3' → w3[i - 1] + kc1[i] / 2, o4' → w4[i - 1] + kd1[i] / 2, o5' → w5[i - 1] + ke1[i] / 2,
  o1 → q1[i - 1] + pa1[i] / 2, o2 → q2[i - 1] + pb1[i] / 2, o3 → q3[i - 1] + pc1[i] / 2,
  o4 → q4[i - 1] + pd1[i] / 2, o5 → q5[i - 1] + pe1[i] / 2};
j3a = Theta3 /. {o1' → w1[i - 1] + ka1[i] / 2, o2' → w2[i - 1] + kb1[i] / 2,
  o3' → w3[i - 1] + kc1[i] / 2, o4' → w4[i - 1] + kd1[i] / 2, o5' → w5[i - 1] + ke1[i] / 2,
  o1 → q1[i - 1] + pa1[i] / 2, o2 → q2[i - 1] + pb1[i] / 2, o3 → q3[i - 1] + pc1[i] / 2,
  o4 → q4[i - 1] + pd1[i] / 2, o5 → q5[i - 1] + pe1[i] / 2};
j4a = Theta4 /. {o1' → w1[i - 1] + ka1[i] / 2, o2' → w2[i - 1] + kb1[i] / 2,
  o3' → w3[i - 1] + kc1[i] / 2, o4' → w4[i - 1] + kd1[i] / 2, o5' → w5[i - 1] + ke1[i] / 2,
  o1 → q1[i - 1] + pa1[i] / 2, o2 → q2[i - 1] + pb1[i] / 2, o3 → q3[i - 1] + pc1[i] / 2,
  o4 → q4[i - 1] + pd1[i] / 2, o5 → q5[i - 1] + pe1[i] / 2};
j5a = Theta5 /. {o1' → w1[i - 1] + ka1[i] / 2, o2' → w2[i - 1] + kb1[i] / 2,
  o3' → w3[i - 1] + kc1[i] / 2, o4' → w4[i - 1] + kd1[i] / 2, o5' → w5[i - 1] + ke1[i] / 2,
  o1 → q1[i - 1] + pa1[i] / 2, o2 → q2[i - 1] + pb1[i] / 2, o3 → q3[i - 1] + pc1[i] / 2,
  o4 → q4[i - 1] + pd1[i] / 2, o5 → q5[i - 1] + pe1[i] / 2};

pa2[i] = dt * (w1[i - 1] + ka1[i] / 2);
ka2[i] = dt * j1a;
pb2[i] = dt * (w2[i - 1] + kb1[i] / 2);
kb2[i] = dt * j2a;
pc2[i] = dt * (w3[i - 1] + kc1[i] / 2);
kc2[i] = dt * j3a;
pd2[i] = dt * (w4[i - 1] + kd1[i] / 2);
kd2[i] = dt * j4a;
pe2[i] = dt * (w5[i - 1] + ke1[i] / 2);
ke2[i] = dt * j5a;

j1b = Theta1 /. {o1' → w1[i - 1] + ka2[i] * c3 + ka1[i] * c4,
  o2' → w2[i - 1] + kb2[i] * c3 + kb1[i] * c4, o3' → w3[i - 1] + kc2[i] * c3 + kc1[i] * c4,
  o4' → w4[i - 1] + kd2[i] * c3 + kd1[i] * c4, o5' → w5[i - 1] + ke2[i] * c3 + ke1[i] * c4,
  o1 → q1[i - 1] + pa2[i] * c3 + pa1[i] * c4, o2 → q2[i - 1] + pb2[i] * c3 + pb1[i] * c4,
  o3 → q3[i - 1] + pc2[i] * c3 + pc1[i] * c4, o4 → q4[i - 1] + pd2[i] * c3 + pd1[i] * c4,
  o5 → q5[i - 1] + pe2[i] * c3 + pe1[i] * c4};
j2b = Theta2 /. {o1' → w1[i - 1] + ka2[i] * c3 + ka1[i] * c4,
  o2' → w2[i - 1] + kb2[i] * c3 + kb1[i] * c4, o3' → w3[i - 1] + kc2[i] * c3 + kc1[i] * c4,
  o4' → w4[i - 1] + kd2[i] * c3 + kd1[i] * c4, o5' → w5[i - 1] + ke2[i] * c3 + ke1[i] * c4,
  o1 → q1[i - 1] + pa2[i] * c3 + pa1[i] * c4, o2 → q2[i - 1] + pb2[i] * c3 + pb1[i] * c4,
  o3 → q3[i - 1] + pc2[i] * c3 + pc1[i] * c4, o4 → q4[i - 1] + pd2[i] * c3 + pd1[i] * c4,
  o5 → q5[i - 1] + pe2[i] * c3 + pe1[i] * c4};
j3b = Theta3 /. {o1' → w1[i - 1] + ka2[i] * c3 + ka1[i] * c4,
  o2' → w2[i - 1] + kb2[i] * c3 + kb1[i] * c4, o3' → w3[i - 1] + kc2[i] * c3 + kc1[i] * c4,
  o4' → w4[i - 1] + kd2[i] * c3 + kd1[i] * c4, o5' → w5[i - 1] + ke2[i] * c3 + ke1[i] * c4,
  o1 → q1[i - 1] + pa2[i] * c3 + pa1[i] * c4, o2 → q2[i - 1] + pb2[i] * c3 + pb1[i] * c4,
  o3 → q3[i - 1] + pc2[i] * c3 + pc1[i] * c4, o4 → q4[i - 1] + pd2[i] * c3 + pd1[i] * c4,
  o5 → q5[i - 1] + pe2[i] * c3 + pe1[i] * c4};

```

```

j4b = Theta4 /. {o1' → w1[i - 1] + ka2[i] * c3 + ka1[i] * c4,
  o2' → w2[i - 1] + kb2[i] * c3 + kb1[i] * c4, o3' → w3[i - 1] + kc2[i] * c3 + kc1[i] * c4,
  o4' → w4[i - 1] + kd2[i] * c3 + kd1[i] * c4, o5' → w5[i - 1] + ke2[i] * c3 + ke1[i] * c4,
  o1 → q1[i - 1] + pa2[i] * c3 + pa1[i] * c4, o2 → q2[i - 1] + pb2[i] * c3 + pb1[i] * c4,
  o3 → q3[i - 1] + pc2[i] * c3 + pc1[i] * c4, o4 → q4[i - 1] + pd2[i] * c3 + pd1[i] * c4,
  o5 → q5[i - 1] + pe2[i] * c3 + pe1[i] * c4};
j5b = Theta5 /. {o1' → w1[i - 1] + ka2[i] * c3 + ka1[i] * c4,
  o2' → w2[i - 1] + kb2[i] * c3 + kb1[i] * c4, o3' → w3[i - 1] + kc2[i] * c3 + kc1[i] * c4,
  o4' → w4[i - 1] + kd2[i] * c3 + kd1[i] * c4, o5' → w5[i - 1] + ke2[i] * c3 + ke1[i] * c4,
  o1 → q1[i - 1] + pa2[i] * c3 + pa1[i] * c4, o2 → q2[i - 1] + pb2[i] * c3 + pb1[i] * c4,
  o3 → q3[i - 1] + pc2[i] * c3 + pc1[i] * c4, o4 → q4[i - 1] + pd2[i] * c3 + pd1[i] * c4,
  o5 → q5[i - 1] + pe2[i] * c3 + pe1[i] * c4};

pa3[i] = dt * (w1[i - 1] + ka2[i] * c3 + ka1[i] * c4);
ka3[i] = dt * j1b;
pb3[i] = dt * (w2[i - 1] + kb2[i] * c3 + kb1[i] * c4);
kb3[i] = dt * j2b;
pc3[i] = dt * (w3[i - 1] + kc2[i] * c3 + kc1[i] * c4);
kc3[i] = dt * j3b;
pd3[i] = dt * (w4[i - 1] + kd2[i] * c3 + kd1[i] * c4);
kd3[i] = dt * j4b;
pe3[i] = dt * (w5[i - 1] + ke2[i] * c3 + ke1[i] * c4);
ke3[i] = dt * j5b;

j1c = Theta1 /. {o1' → w1[i - 1] + ka3[i] * c2 + ka2[i] * c5,
  o2' → w2[i - 1] + kb3[i] * c2 + kb2[i] * c5, o3' → w3[i - 1] + kc3[i] * c2 + kc2[i] * c5,
  o4' → w4[i - 1] + kd3[i] * c2 + kd2[i] * c5, o5' → w5[i - 1] + ke3[i] * c2 + ke2[i] * c5,
  o1 → q1[i - 1] + pa3[i] * c2 + pa2[i] * c5, o2 → q2[i - 1] + pb3[i] * c2 + pb2[i] * c5,
  o3 → q3[i - 1] + pc3[i] * c2 + pc2[i] * c5, o4 → q4[i - 1] + pd3[i] * c2 + pd2[i] * c5,
  o5 → q5[i - 1] + pe3[i] * c2 + pe2[i] * c5};
j2c = Theta2 /. {o1' → w1[i - 1] + ka3[i] * c2 + ka2[i] * c5,
  o2' → w2[i - 1] + kb3[i] * c2 + kb2[i] * c5, o3' → w3[i - 1] + kc3[i] * c2 + kc2[i] * c5,
  o4' → w4[i - 1] + kd3[i] * c2 + kd2[i] * c5, o5' → w5[i - 1] + ke3[i] * c2 + ke2[i] * c5,
  o1 → q1[i - 1] + pa3[i] * c2 + pa2[i] * c5, o2 → q2[i - 1] + pb3[i] * c2 + pb2[i] * c5,
  o3 → q3[i - 1] + pc3[i] * c2 + pc2[i] * c5, o4 → q4[i - 1] + pd3[i] * c2 + pd2[i] * c5,
  o5 → q5[i - 1] + pe3[i] * c2 + pe2[i] * c5};
j3c = Theta3 /. {o1' → w1[i - 1] + ka3[i] * c2 + ka2[i] * c5,
  o2' → w2[i - 1] + kb3[i] * c2 + kb2[i] * c5, o3' → w3[i - 1] + kc3[i] * c2 + kc2[i] * c5,
  o4' → w4[i - 1] + kd3[i] * c2 + kd2[i] * c5, o5' → w5[i - 1] + ke3[i] * c2 + ke2[i] * c5,
  o1 → q1[i - 1] + pa3[i] * c2 + pa2[i] * c5, o2 → q2[i - 1] + pb3[i] * c2 + pb2[i] * c5,
  o3 → q3[i - 1] + pc3[i] * c2 + pc2[i] * c5, o4 → q4[i - 1] + pd3[i] * c2 + pd2[i] * c5,
  o5 → q5[i - 1] + pe3[i] * c2 + pe2[i] * c5};
j4c = Theta4 /. {o1' → w1[i - 1] + ka3[i] * c2 + ka2[i] * c5,
  o2' → w2[i - 1] + kb3[i] * c2 + kb2[i] * c5, o3' → w3[i - 1] + kc3[i] * c2 + kc2[i] * c5,
  o4' → w4[i - 1] + kd3[i] * c2 + kd2[i] * c5, o5' → w5[i - 1] + ke3[i] * c2 + ke2[i] * c5,
  o1 → q1[i - 1] + pa3[i] * c2 + pa2[i] * c5, o2 → q2[i - 1] + pb3[i] * c2 + pb2[i] * c5,
  o3 → q3[i - 1] + pc3[i] * c2 + pc2[i] * c5, o4 → q4[i - 1] + pd3[i] * c2 + pd2[i] * c5,
  o5 → q5[i - 1] + pe3[i] * c2 + pe2[i] * c5};

```

```

j5c = Theta5 /. {o1' → w1[i - 1] + ka3[i] * c2 + ka2[i] * c5,
  o2' → w2[i - 1] + kb3[i] * c2 + kb2[i] * c5, o3' → w3[i - 1] + kc3[i] * c2 + kc2[i] * c5,
  o4' → w4[i - 1] + kd3[i] * c2 + kd2[i] * c5, o5' → w5[i - 1] + ke3[i] * c2 + ke2[i] * c5,
  o1 → q1[i - 1] + pa3[i] * c2 + pa2[i] * c5, o2 → q2[i - 1] + pb3[i] * c2 + pb2[i] * c5,
  o3 → q3[i - 1] + pc3[i] * c2 + pc2[i] * c5, o4 → q4[i - 1] + pd3[i] * c2 + pd2[i] * c5,
  o5 → q5[i - 1] + pe3[i] * c2 + pe2[i] * c5};

pa4[i] = dt * (w1[i - 1] + ka3[i] * c2 + c5 * ka2[i]);
ka4[i] = dt * j1c;
pb4[i] = dt * (w2[i - 1] + kb3[i] * c2 + c5 * kb2[i]);
kb4[i] = dt * j2c;
pc4[i] = dt * (w3[i - 1] + kc3[i] * c2 + c5 * kc2[i]);
kc4[i] = dt * j3c;
pd4[i] = dt * (w4[i - 1] + kd3[i] * c2 + c5 * kd2[i]);
kd4[i] = dt * j4c;
pe4[i] = dt * (w5[i - 1] + ke3[i] * c2 + c5 * ke2[i]);
ke4[i] = dt * j5c;

q1[i] = q1[i - 1] + (pa1[i] + pa4[i]) / 6 + (c3 * pa2[i] + c2 * pa3[i]) / 3;
w1[i] = w1[i - 1] + (ka1[i] + ka4[i]) / 6 + (c3 * ka2[i] + c2 * ka3[i]) / 3;

q2[i] = q2[i - 1] + (pb1[i] + pb4[i]) / 6 + (c3 * pb2[i] + c2 * pb3[i]) / 3;
w2[i] = w2[i - 1] + (kb1[i] + kb4[i]) / 6 + (c3 * kb2[i] + c2 * kb3[i]) / 3;

q3[i] = q3[i - 1] + (pc1[i] + pc4[i]) / 6 + (c3 * pc2[i] + c2 * pc3[i]) / 3;
w3[i] = w3[i - 1] + (kc1[i] + kc4[i]) / 6 + (c3 * kc2[i] + c2 * kc3[i]) / 3;

q4[i] = q4[i - 1] + (pd1[i] + pd4[i]) / 6 + (c3 * pd2[i] + c2 * pd3[i]) / 3;
w4[i] = w4[i - 1] + (kd1[i] + kd4[i]) / 6 + (c3 * kd2[i] + c2 * kd3[i]) / 3;

q5[i] = q5[i - 1] + (pe1[i] + pe4[i]) / 6 + (c3 * pe2[i] + c2 * pe3[i]) / 3;
w5[i] = w5[i - 1] + (ke1[i] + ke4[i]) / 6 + (c3 * ke2[i] + c2 * ke3[i]) / 3;

角速度;
vx1 = (L1 * Sin[q1[i - 1]]) * w1[i - 1] + (L2 * Sin[q1[i - 1] + q2[i - 1]]) * (w1[i - 1] + w2[i - 1]) +
  (L3 * Sin[q1[i - 1] + q2[i - 1] + q3[i - 1]]) * (w1[i - 1] + w2[i - 1] + w3[i - 1]);
vx2 = -((L4 * Sin[q4[i - 1]]) * w4[i - 1] + (L5 * Sin[q4[i - 1] + q5[i - 1]]) * (w4[i - 1] + w5[i - 1]));
vy1 =
  -((L1 * Cos[q1[i - 1]]) * w1[i - 1] + (L2 * Cos[q1[i - 1] + q2[i - 1]]) * (w1[i - 1] + w2[i - 1]) +
  (L3 * Cos[q1[i - 1] + q2[i - 1] + q3[i - 1]]) * (w1[i - 1] + w2[i - 1] + w3[i - 1]));
vy2 = (L4 * Cos[q4[i - 1]]) * w4[i - 1] + (L5 * Cos[q4[i - 1] + q5[i - 1]]) * (w4[i - 1] + w5[i - 1]);

Print[tt, k, q1[i] * 180 / Pi, k, q2[i] * 180 / Pi, k, q3[i] * 180 / Pi, k, q4[i] * 180 / Pi,
  k, q5[i] * 180 / Pi, k, vx1, k, vx2, k, vy1, k, vy2];

```

アニメーション;

```
xna = Lpx + L1 * Cos[q1[i - 1]];
yna = Lpy + L1 * Sin[q1[i - 1]];
xnb = xna + L2 * Cos[q1[i - 1] + q2[i - 1]];
ynb = yna + L2 * Sin[q1[i - 1] + q2[i - 1]];
xnc = xnb + L3 * Cos[q1[i - 1] + q2[i - 1] + q3[i - 1]];
ync = ynb + L3 * Sin[q1[i - 1] + q2[i - 1] + q3[i - 1]];
xnd = Lhx - L4 * Cos[q4[i - 1]];
ynd = Lhy - L4 * Sin[q4[i - 1]];
xne = xnd - L5 * Cos[q4[i - 1] + q5[i - 1]];
yne = ynd - L5 * Sin[q4[i - 1] + q5[i - 1]];

Show[Graphics[
{Thickness[.02], Red, Line[{{Lpx, Lpy}, {Lpx + 1.015, Lpy}}],
  Line[{{Lpx + 1.015, Lpy}, {Lhx, Lhy}}], Circle[{{Lpx, Lpy}, Lpy],
  Circle[{{Lpx + 1.015, Lpy}, Lpy], Blue, Line[{{Lpx, Lpy}, {xna, yna}}],
  Line[{{xna, yna}, {xnb, ynb}}], Line[{{xnb, ynb}, {xnc, ync}}],
  Line[{{Lhx, Lhy}, {xnd, ynd}}], Line[{{xnd, ynd}, {xne, yne}}]}, Axes -> True,
PlotRange -> {{-0.5, 2}, {-0.5, 2}}, AspectRatio -> 1]]
```