

### 小型直流ファンの振動特性

市川, 正文 / ICHIKAWA, Masafumi

---

(発行年 / Year)

2011-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2011-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2010年度 修士論文  
「小型直流ファンの振動特性」

指導教授 御法川学

大学院工学研究科  
機械工学専攻修士課程

09R1101

市川 正文

# 目次

## 第1章 緒論

- 1.1 研究背景
- 1.2 研究目的

## 第2章 モード解析の概要

- 2.1 振動の種類
  - 2.1.1 自由振動 (free vibration)
  - 2.1.2 強制振動 (forced vibration)
- 2.2 モード解析 (modal analysis)
  - 2.2.1 モード解析の概要
  - 2.2.2 モード解析の長所
- 2.3 振動試験
  - 2.3.1 振動試験の概要
  - 2.3.2 対象物の支持方法
- 2.4 打撃試験
  - 2.4.1 打撃試験の概要
  - 2.4.2 打撃試験の長所・短所

## 第3章 実験モード解析

- 3.1 実験モード解析の概要
- 3.2 実験方法
- 3.3 加速度応答を利用したモード解析

## 第4章 理論モード解析

- 4.1 理論モード解析の概要
- 4.2 有限要素法
  - 4.2.1 有限要素とトラス部材
  - 4.2.2 三角要素の剛性マトリクスと仮想仕事の原理
  - 4.2.3 有限要素法による固有モード解析

## 第5章 ファンモーターのモード解析

- 5.1 実験対象
- 5.2 実験装置

- 5.3 実験内容
- 5.4 自由支持
  - 5.4.1 自由支持状態の実験方法
  - 5.4.2 自由支持状態の実験結果
- 5.5 固定支持状態
  - 5.5.1 固定支持の実験方法
  - 5.5.2 固定支持状態の実験結果
- 5.6 結論

## 第 6 章 ファンモーターの理論モード解析

- 6.1 有限要素モデル
- 6.2 解析結果
- 6.3 結論

## 第 7 章 ファンモーターの実稼働解析

- 7.1 実験内容
- 7.2 加速度ピックアップを用いた次数比解析
  - 7.2.1 実験装置
  - 7.2.2 実験方法
  - 7.2.3 実験結果
- 7.3 歪ゲージを用いた実稼働試験
  - 7.3.1 歪ゲージについて
  - 7.3.2 実験装置
  - 7.3.3 実験方法
  - 7.3.4 実験結果
- 7.4 結論

## 第 8 章 結論

参考文献

謝辞

# 第 1 章 緒論

## 1.1 研究背景

ファンモーターはモーターとプロペラ、フレームを一体化したものであり、コンパクトで軽量である。用途としては制御機器や機械・電子機器の冷却、装置内部で発生する熱の外部排出や空気の循環等に使用される。稼働中のファンモーターは圧力変動が生じやすく、共振破壊現象が起こる可能性がある。そのため、ファンモーターの低振動化と共振現象の回避が求められている。

## 1.2 研究目的

本研究では、ファンモーターの振動特性を把握する事と回転機械が稼働している時の振動測定方法の確立を目的とした。

## 第 2 章 モード解析の概要

### 2.1 振動の種類

振動は、自由振動、強制振動、及び複雑な振動に大別できる。ここでは、その中でも特に重要な自由振動、及び強制振動について述べる。

#### 2.1.1 自由振動 (free vibration)

動的な外作用が変化すると必ず発生し、一旦生じれば、外から何もしないでも自分自身だけで自由勝手に振動し続ける。叩く、引っ張っておいて放すなどのように外作用が加わるときはもちろん、今まであった加振力が急に無くなる時や、加振力の大きさ、方向、周波数が急に変わったときにも発生する。同じ物体に同じ外作用の変化があれば同じ自由振動が発生するが、同じ物体でも外作用の変化が異なると異なる自由振動を生じる。大抵、初めは運動の形も振動数もはっきり見分けがつかないが、次第に両方共見分けがつくまで単純になり、やがて消えて行く。

自由振動は、ほとんどの場合が速やかに消えてしまい、実際の機械では強制振動ほど大きい問題を生じないが、実験モード解析から見ると極めて大切である。それは、強制振動や自励振動などのすべての振動を生じる元になる物体の動特性が、自由振動の中にすべて含まれているからである。したがって、自由振動を観察すれば、すべての動特性を知ることができる。しかも、自由振動は外作用が無い状態で続いているから、現象が外環境の影響を受けず、物体自身の動特性だけに支配されている。そこで、現象の分析により動特性を容易に正しく把握できる。自由振動は、1 自由度系では最初の振幅の大きさ、振動の速さ、減衰の速さの 3 つの現象で表される。多自由度系では、これらがそれぞれ固有モード、固有振動数、モード減衰比の 3 つの現象に対応する。一方動特性は質量、こわさ (剛性)、減衰係数の 3 種類であり、3 という数字が基本になっている。

#### 2.1.2 強制振動 (forced vibration)

外作用に対する応答であり、外作用の開始と共に直ちに発生する。しかし外作用の開始は外作用の変化の一形態なので、同時に自由振動も発生する。大抵は両者の振動数は異なるので両者が混合した複雑な波形を示す。これを過渡振動 (transient vibration) という。やがて自由振動は減衰して消え、強制振動だけが残る。これを定常強制振動または定常振動という。過渡振動は外作用の開始だけでなく、大きさや振動数の急変する時にも生じる。

## 2.2 モード解析 (modal analysis)

### 2.2.1 モード解析の概要

通常行われているコンピュータ援用振動解析の例として Fig.2-1 を示す。振動解析は FEM 数値解析と実験解析の 2 通りの流れに始まる。FEM 数値解析では、設計図面や CAD 情報をもとにして FEM モデルを構築すれば、コンピュータ内でエネルギー原理を用いて特性行列 (characteristic matrix) (質量行列と剛性行列) が作成される。そして固有値問題を解いてモード特性 (modal parameter) を導き、モード解析の理論により周波数応答関数を求める。

一方、実験解析では、振動試験で得た加振力と応答の測定結果から、信号処理によって周波数応答関数を求め、さらにモード解析の理論を用いてモード特性を同定する。

これら実験による解析、及び FEM 数値解析をそれぞれ実験モード解析、理論モード解析と呼ぶ。

### 2.2.2 モード解析の長所

- ・ 固有モードの直交性を利用して多自由度系の運動方程式を非連成化する。そのために、複数の 1 自由度微分方程式を互いに独立に解いただけで、多自由度連立微分方程式を解くのと同等の解を得ることが出来る。
- ・ 運動方程式を固有モード毎に互いに独立な 1 自由度系微分方程式に分解するので、高次固有モードに相当する式を無視するだけで簡単に高次固有モードを省略できる。そして、解くべき 1 自由度系微分方程式の数を著しく少なくすることが出来る。

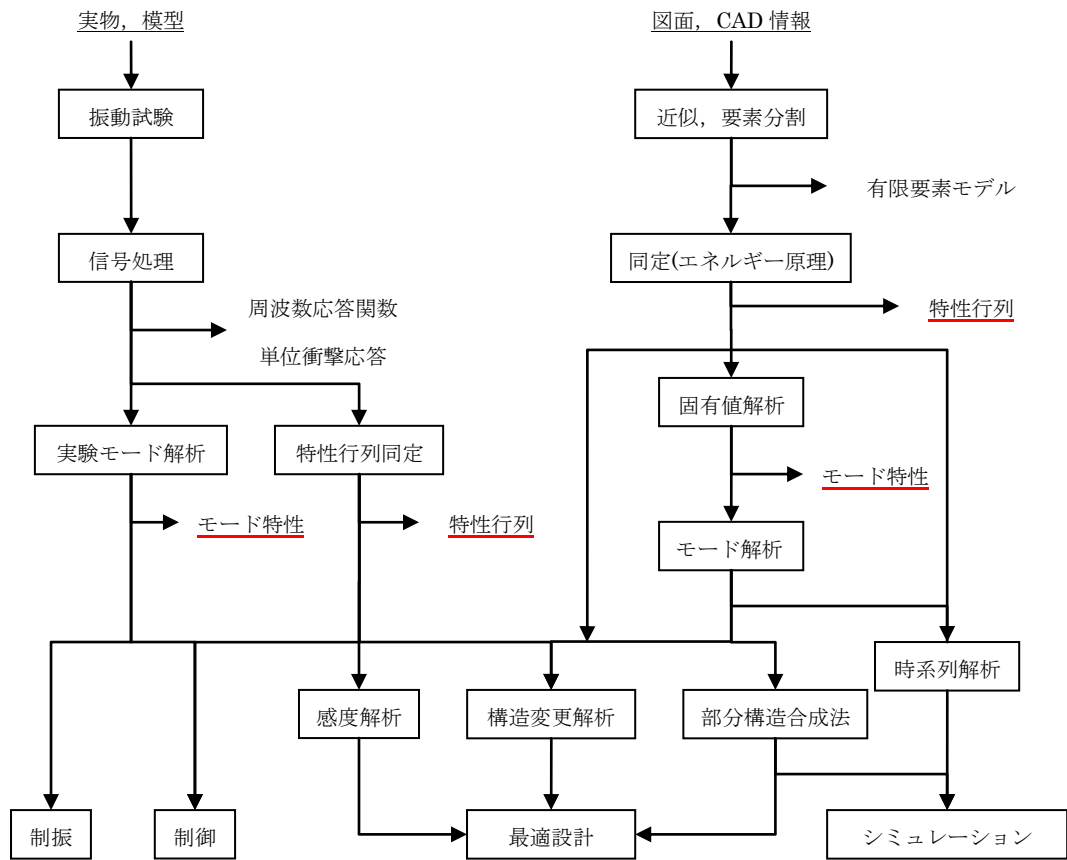


Fig.2-1 コンピュータ援用による振動解析

## 2.3 振動試験

### 2.3.1 振動試験の概要

機械や構造物に振動を発生させる目的で動的な作用を加えることを、加振または励振という。加振の対象である機械や構造物（以下対象物という）は、加振によって動的な応答を示す。加振入力と応答の間には、次の関係がある。

$$\text{応答} = \text{対象物の特性} \times \text{入力}$$

対象物を加振して、加振入力と応答の両方を測定し、それらの測定結果に適切な信号処理をほどこして、対象物の動特性を情報として含む信号を取り出す一連の操作を、振動試験という。信号は周波数応答関数として取り出すことが多い。振動試験で得られた信号は、そのままの状態を観察し、不具合対策などに役立つこともあるが、大抵は対象物の動特



性を同定するための入力として用いる。モード特性を同定する目的で行う振動試験をモード試験という。またモード試験とモード特性の同定を合わせて実験モード解析という。

実験モード解析を成功させるためには、正しい周波数応答関数を測定することが第一の条件である。モード特性同定の方法にはいろいろあるが、誤差が少ない良い周波数応答関数を入力データとして与えさえすれば、どの方法を用いても大抵は良い結果を得る。反対に、入力データが大きい誤差を含み信頼性が乏しいときには、どんなに複雑で高級な同定方法を用いても、あまり良い結果は得られない。したがって、振動試験は実験モード解析の中で最も重要な部分であるといえる。

### 2.3.2 対象物の支持方法

振動試験を行うためには、まず対象になる機械や構造物、すなわち対象物を何らかの方法で支持しなければならない。対象物の支持は、ともすれば軽く扱われがちである。しかし、同一の対象物を同一の方法で加振しても、その支持方法によって応答は全く異なったものになるので、目的にあった方法で支持するように、細心の注意が必要である。

対象物の支持は、自由境界または自由支持、固定支持および弾性支持の3通りに大別できる。

#### 【1】 自由境界または自由支持

対象物の動きを拘束したり妨げたりしない支持をいう。理想的には空間に浮かんだ状態を指すが、この理想状態は地球の重力がある限り実現できない。しかし実際には、柔らかいゴムひもで吊ったり、タイヤチューブ、スポンジ、ゴム板、空気ばねなどの上に置いたりすることで、実用上十分な自由支持が比較的簡単に実現できる。対象物を支持しているこれらの物をここでは支持物と呼ぶ。自由支持を実行する上で留意する必要がある主な事項を以下に述べる。

- (1) 支持物のばねこわさが、対象物の剛性に比べて十分小さいこと。そのために、支持物はできるだけやわらかい物にすべきである。他方、対象物の局所的な剛性ができるだけ大きい所を支持するように支持点を選ぶべきである。剛性が小さくやわらかい部分を支持すれば、支持物のばねこわさが測定に影響したり、対象物が自重によって変形し、その動特性が変わってしまう恐れがある。
- (2) 剛体モードの振動数が十分小さいこと。
- (3) 支持物の質量が十分小さいこと。
- (4) 支持物による見かけの減衰の増加が十分小さいこと。
- (5) 測定にできるだけ影響を与えないような支持場所を選ぶこと。
- (6) ゴム板やスポンジは、全体にわたってべったり敷くよりは、部分的に、数箇所に、できるだけ剛性の高い所にできるだけ小さい面積で敷く方がよい。

以上の事項を十分満足しているか否かを支持条件（吊りひもやゴム板などの種類，場所，位置，対象物の姿勢など）をいろいろ変えた予備試験によって検討し，不十分な点があれば対策や，最適の支持条件を選んだりしておく必要がある。

### 【2】 固定支持

実用時に一部が固定された状態にある構造物や機械の動特性を本来あるがままの状態を知りたいときなどに採用される支持条件であり，自由支持ほど一般的な支持条件ではない。理論的解析では，該当する自由度の変位を零と置くだけで固定支持を極めて簡単に作ることができる。一方，振動試験で理想的な固定支持を実現するためには，質量と剛性が共に無限大である物体に，溶接などで完全に一体化するように対象物を取付ける必要がある。しかしこれは無理なので，実際には質量と剛性の両方が対象物よりもはるかに大きいと考えられる基礎や定盤のような物体に，ボルト締めなどでしっかり取付けた状態を固定支持とみなす。

このような方法で作った固定支持では，様々な問題が生じることも多く，振動試験では，固定支持はなるべく避け，できるだけ自由支持で行う方がよい。これは，第1に固定支持は自由支持よりも実現が困難だからである。たとえば，やわらかいゴムひもで吊るす状態や，やわらかいゴム版の上においた状態を自由支持と近似するのは妥当であるが，大きい基礎に取付けたからといって，必ずしも固定支持にはならない。そして第2に，自由支持の結果から固定支持の結果を導くことは可能であるが，逆は不可能だからである。これは，自由支持の方が固定支持よりも固定すべき点の応答を測定している分だけ自由度が多く，振動試験の結果から自由度を減らすことはできても増やすことはできないからである。

### 【3】 弾性支持

大型構造物や重量機械は，自由支持も固定支持も実現しにくい。また，機械の部品の振動試験を行うときに，構造上取り外すことが出来ない事や，組み込んだままの動特性がほしい場合もある。このようなときには，自由と固定の中間の支持で実験を行うことになる。このような支持方法を弾性支持と呼ぶ。弾性支持の場合には，あらかじめ支持物単体の固有振動数，固有モードおよび支持点における周波数応答関数を，計算や実験で明らかにしておく必要がある。そして，振動試験の後に，部分構造合成法を利用して，全体の動特性を表している振動試験結果から支持物単体の動特性を差し引くことによって，対象物単体の動特性を得ることが望ましい。これを完全に行うことが無理な場合には，支持物単体を対象物に取付け点における等価1自由度系に置き換えておき，それを差し引く。

## 2.4 打撃試験

### 2.4.1 打撃試験の概要

打撃試験は、FFT の開発と共に現場に急速に普及し、いまや振動試験の中で主役の座を占めている。機械の動的な性質を調べる等、不具合対策をしようとする人は、ほとんどまず IMP による打撃試験を行う。これは、打撃試験が手軽に短時間でできるので、一見簡単そうに見えるからである。しかし、実際には多くの落とし穴があって良い結果を得るのが意外に難しい。むしろ、打撃試験はすべての振動試験の中で最も困難な方法であると言っても過言ではない。これは、方法の簡単さが、人間の技能および計測とデータ処理に負荷をかけることによって実現されているからである。

打撃試験では、力と応答が特別な性質を持っており、それが原因で、外乱と漏れ誤差という 2 つの問題を生じる。これらに対処するために、打撃試験特有の信号処理方法を必要とする。またこれらの問題による精度低下の程度は、対象物の性質と実施者の技能に大きく依存する。

打撃試験は、大別して 3 つの目的で行われる。第 1 に固有振動数と固有モードの有無とおよその値と形を知るため、第 2 に他の高精度な方法で本試験を行う前の予備試験として、第 3 に他の方法と同様に正確な周波数応答関数を得るため、である。第 1 や第 2 の場合には適当に行ってもよいが、第 3 の場合には、経験と知識と注意なしでは良い試験を行うことができない。しかし逆にいえば、これらがあれば必ず良い結果を得ることができるのである。

### 2.4.2 打撃試験の長所・短所

#### 【1】 打撃試験の長所

- (1) 準備と実施の両方の時間が、全加振方法の中で最も短い。
- (2) 基本的には、打撃ハンマーと加速度計と 2 チャンネル FFT さえあれば良く、加振器を使う他の加振方法に比べて装置が簡単で金がかからない。また、機動性に富むから、現場で容易に実現できる。
- (3) だれでもすぐ行うことができる。他の振動試験では加振点を固定させて応答点を移動させるが、打撃試験では加振点の移動が極めて簡単であり、次々と場所を変えて叩いていくだけで全体の振動試験ができる。
- (4) 加振系は、エネルギーを注入する瞬間だけ対象物に接触する。そのために、加振系が対象物に影響を与えその動特性を変えることがない。また、対象物に加振系取付けのための加工を加える必要がない。
- (5) 打撃力は広範囲の連続周波数スペクトルを有するため、広周波数帯域の加振が瞬時にできる。

- (6) 加振力に漏れ誤差が全く生じない.
- (7) 叩ける物であれば何でも加振でき, 広いはん用性を有する.

**【2】 打撃試験の短所**

- (1) 波高率が極端に大きい.
- (2) SN比が極端に小さい.
- (3) 非線形特性を有する対象物には不適である.
- (4) 対象物の減衰の大きさにより制限を受ける.
- (5) 精度が実施者の技能や熟練度に大きく依存する.
- (6) 加振力の大きさ, 周波数範囲, 周波数成分の割合を調整しにくい.
- (7) 低周波域の加振が困難である.
- (8) 叩くことにより対象物に損傷を与える可能性がある.

## 第3章 実験モード解析

### 3.1 実験モード解析の概要

実験モード解析とは、振動試験で測定した加振力と応答の実験データを分析することによって、その中に隠れた形で混ざり合っている動特性すなわち固有振動数、固有モードおよび減衰の大きさを明らかにすることである。流れとしては振動試験で得た加振力と応答の測定結果から、信号処理によって周波数応答関数を求め、さらにモード解析の理論を用いてモード特性を同定する。

振動試験、及び打撃試験は前章の2.3、2.4においても示したが、ここではもう少し詳しく説明する。振動試験では、一連の装置を組み合わせて振動試験システムを構成する。システムの構成内容は振動試験の方法によって様々に異なるが、本研究で使用したシステム構成をFig.3-1に示す。

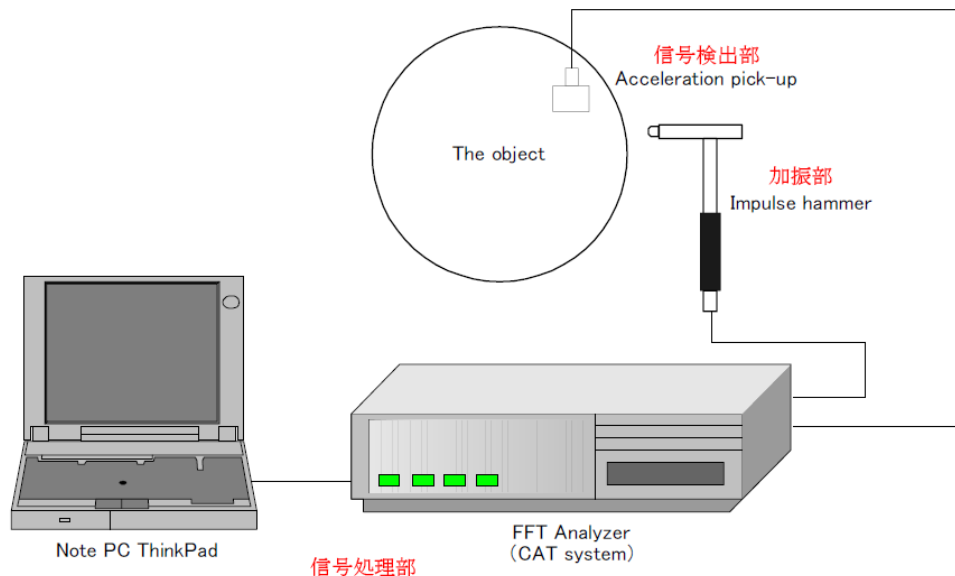


Fig.3-1 振動試験のシステム構成

この図のように、標準的な振動試験システムは加振部、信号検出部および信号処理部の3つの部分によって構成される。

まず加振部は、加振方法によって、加振器を用いる場合、打撃ハンマー（Impulse hammer）を用いる場合、および非接触で加振するなどの場合に分かれる。本研究では打撃ハンマーを用いた（Fig.3-2）。



Fig.3-2 打撃ハンマー

信号検出部は、力や応力、変位を電気信号に変換することによって検出する部分であり、力変換器、応答変換器、電気信号を後続の信号処理が可能になるまで増幅し調整する増幅器からなる。力変換器としては、ピエゾ素子を用いることが多いが、ときにはひずみゲージを用いることもある。応答変換器としては、ピエゾ素子を内蔵する加速度計を用いて加速度を検出することが多いが、渦電流やレーザ光線を利用した非接触変位計、レーザドップラー速度計、ひずみゲージを使用することもある。また本研究では加速度計（Acceleration Pick-up）、及び半導体歪ゲージ（Semiconductor Strain Gage）を使用した。

信号処理部は高速フーリエ変換（FFT）を主体とした種々の信号処理を行って周波数応答関数あるいは単位衝撃応答を出力する。その道具としては、専用のFFT装置を用いる場合と汎用コンピュータの信号処理ソフトを内蔵させる場合がある振動試験システム全体はコンピュータによって制御すると共に監視器によって随時観察する監視器とは、専用のオシロスコープを用いることもあるが、大抵はFFT装置やコンピュータの出力を利用する。また本研究で使用したFFT装置とモード解析用シームレスソフトをFig.3-3, Fig.3-4に示す。





Fig.3-3 FFT装置

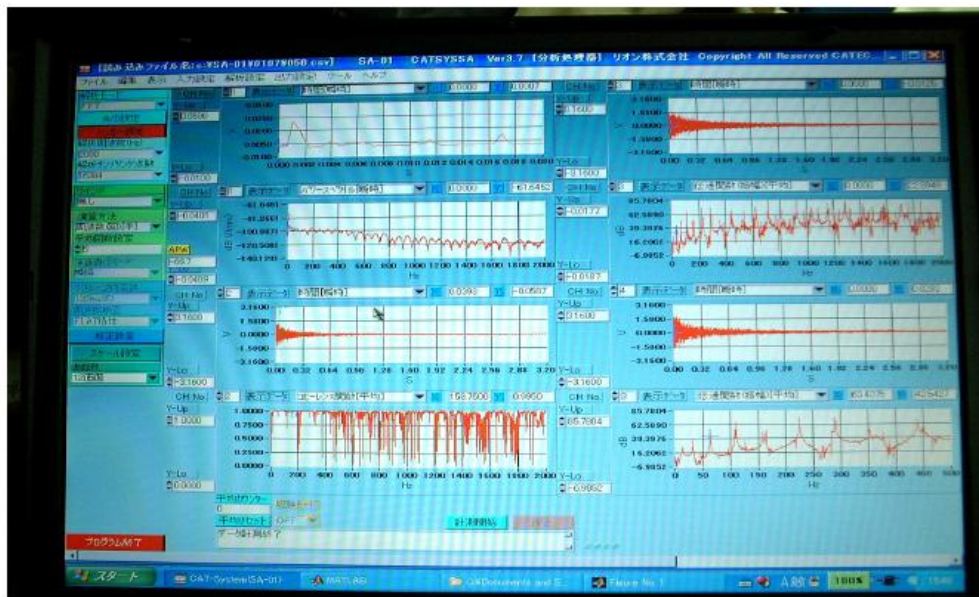


Fig.3-4 モード解析用シームレスソフト

振動試験によって良い周波数応答関数を得ようとするれば、対象物の支持方法，加振器の種類と取り付け，加振波形の種類と大きさ，加振力と応答の両方を検出する変換器の精度と信頼性，窓関数の種類，信号処理方法，結果の良否の見分け方，など様々な事柄に留意しなければならない。

## 3.2 実験方法

実験モード解析の流れをFig.4-5に示す.

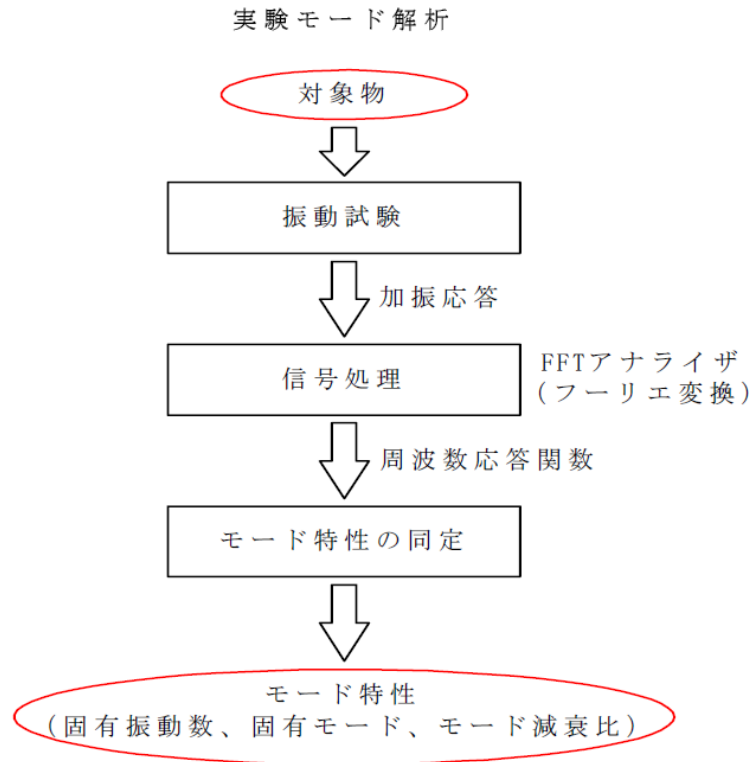


Fig.3-5 実験モード解析の流れ

実験は加振点移動法を用いた。まず、応答点の場所を決め、応答位置に加速度ピックアップ、もしくは歪ゲージを設置する。次に対象物の形状が大まかに分かるよう加振点を設定し、一点ずつ加振を繰り返す、それぞれ加振点と応答点の間の周波数応答関数をとっていく。信号処理はMATRAB言語で組まれたプログラムで実験データをマトリクス形式にまとめ、FORTRAN言語で組まれたモード特性を同定するプログラムを利用する。その同定計算の結果はMATRAB言語を用い、アニメーションとして表す。加振点と応答点の配置例をFig.3-6に示す。



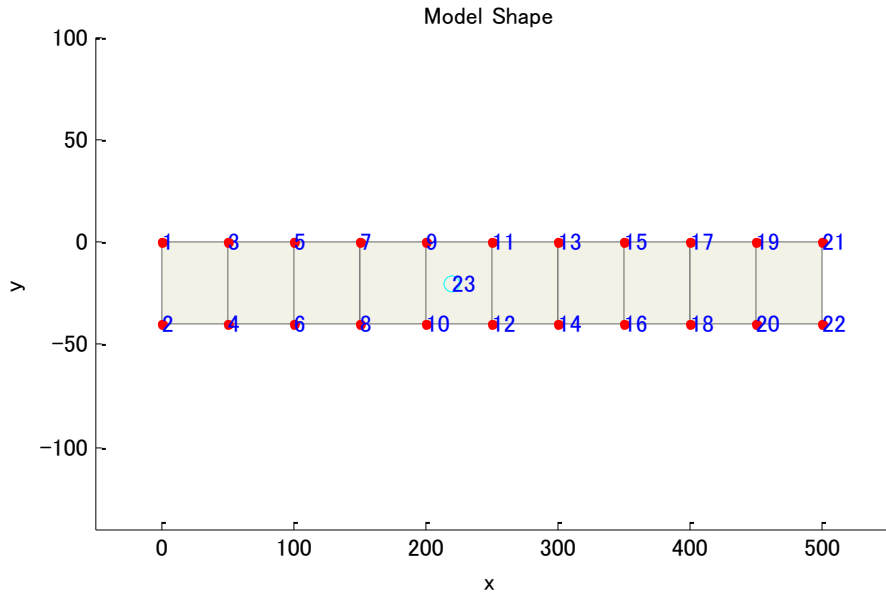


Fig.3-6 加振点と応答点の配置例

### 3.3 加速度応答を利用したモード解析

多自由度系において周波数応答関数を定式化する。単一の角振動数 $\omega$ で振幅 $F_i$ の調和加振力が点 $i$ に作用し、他の点には外力が作用しない場合には、外力ベクトル $\{f\}$ は、 $i$ 行目が $F_i e^{j\omega t}$ になり他の前項が零になる。これを代入すれば式(3.1)になる。

$$m_r \ddot{\zeta}_r + c_r \dot{\zeta}_r + k_r \zeta_r = \{\phi_r\}^T f = \phi_{ri} F_i e^{j\omega t} \quad (r = 1 \sim N) \quad (3.1)$$

ここで、 $\phi_{ri}$ は $r$ 次の固有モード $\{\phi_r\}$ の $i$ 行目の項である。式(3.1)は1自由度系の式と同一である。ここで、調和加振力が作用する場合の応答が1自由度のときの式の様に調和波形で表現できるとすれば、 $\dot{\zeta}_r = j\omega \xi_r, \ddot{\zeta}_r = -\omega^2 \xi_r$ となり、これらを式(3.1)に代入して変形すれば式(3.2)になる。

$$\zeta_r = \frac{\phi_{ri} F_i}{-m_r \omega^2 + jc_r \omega + k_r} e^{j\omega t} \quad (r = 1 \sim N) \quad (3.2)$$

式(3.2)により、角振動数 $\omega$ の調和加振力に対する応答がモード解析座標上で求められた。

次に空間座標上での応答を求める． $\{x\} = [\phi]\{\xi\}$  に式(3.2)を代入すれば式(3.3)になる．

$$\{x\} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r F_i}{-m_r \omega^2 + j c_r \omega + k_r} \{\phi_r\} e^{j\omega t} \quad (3.3)$$

式(3.3)は点*i*に調和加振力が作用するときの全点（自由度）の応答を示す．このうち点*j*の応答だけを取り出して  $x_j = X_j e^{j\omega t}$  とおけば式(3.4)になる．

$$X_j(\omega) = \left( \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r \phi_{rj}}{-m_r \omega^2 + j c_r \omega + k_r} \right) F_i \quad (3.4)$$

多自由度系における点*i*と点*j*間の周波数応答関数（コンプライアンス）は式(3.5)となる．

$$G_{ij}(\omega) = \frac{X_j(\omega)}{F_i} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r \phi_{rj} / k_r}{-(m_r/k_r) \omega^2 + j(c_r/k_r) \omega + 1} = \sum_{r=1}^N y_r \phi_r \phi_{rj} \quad (3.5)$$

ここで， $y_r$  は式(3.6)とする．

$$y_r = \frac{1/k_r}{-(m_r/k_r) \omega^2 + j(c_r/k_r) \omega + 1} \quad (3.6)$$

したがって，式(3.5)を行列にまとめると式(3.7)となる．

$$(3.7) \quad \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1} & G_{m2} & \cdots & G_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = \sum_{r=1}^N y_r \begin{bmatrix} \phi_{r1} \phi_{r1} & \phi_{r1} \phi_{r2} & \cdots & \phi_{r1} \phi_{rn} \\ \phi_{r2} \phi_{r1} & \phi_{r2} \phi_{r2} & \cdots & \phi_{r2} \phi_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{rn} \phi_{r1} & \phi_{rn} \phi_{r2} & \cdots & \phi_{rn} \phi_{rn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$m$ : 応答点数（出力）

$n$ : 加振点数（入力）

ここで， $m = n$  の場合，式(3.7)の右辺を見ると対称行列であることが分かる．このことから，入力点と出力点を入れ換えても伝達特性は等しいということが分かる．この性質のことを

マクスウェルの相反定理 (Maxwell's reciprocity) と呼ぶ.

## 第4章 理論モード解析

### 4.1 理論モード解析の概要

理論モード解析とは、モデル化によって対象物の自由度を決めて物理モデルを作成し、力の釣り合いやエネルギー原理によって数学モデルに変換することにより得られた式を理論解析や数値解析によって解き、固有振動数と固有モードを求めることをいう。本研究では、最も広く使われている有限要素法を使用し、モード特性を求める。モデル作成には3次元CAD ソフトSolid Works とプリ処理ソフトAltair / Hyper Mesh を、ポスト処理ソフトAltair / Hyper Viewを、有限要素法解析にはMSC / NASTRAN を使用した。理論モード解析の流れをFig.4-1に示す。

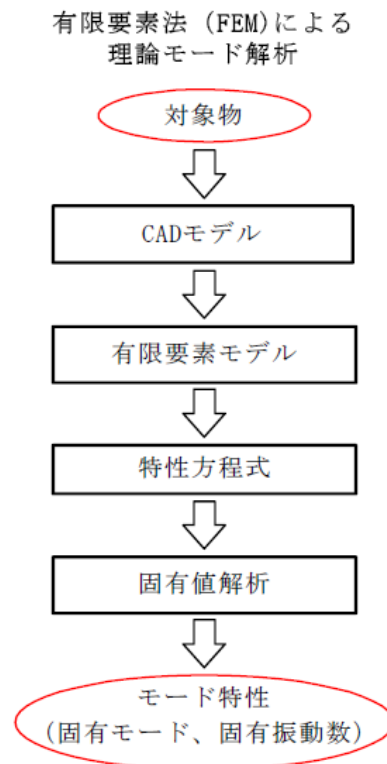


Fig.4-1 理論モード解析の流れ

## 4.2 有限要素法

有限要素法とはRitz-Galerkin 法の一つで、近似関数として区分多項式を用いるものであり、連続体を幾つかの要素に分けて考え、要素ごとに方程式を作り、それを元に全体としての方程式を組み立てて解く方法のことをいう。

有限要素法の特徴は、

- ・ 問題とする領域<物体>を小部分に分割する
- ・ 各々の小部分を簡単なモデル<数式>で近似する
- ・ それを全体的に組み立てて解く

という点にある。一般に実物モデル（数式）化解くという形は数学的に問題を解くときの定石であるが、その際、特に「小部分のモデルをつないで全体のモデルとする」というやりかたをとるのが有限要素法である。従来は、たいてい小部分に分けることをせず、全域の現象を単一のモデル（数式）で表現しようとした。そのため、

- ・ 領域（物体）の形が単純でないと適用しにくい
- ・ 粗い近似解はすぐ得られるが高精度化が困難

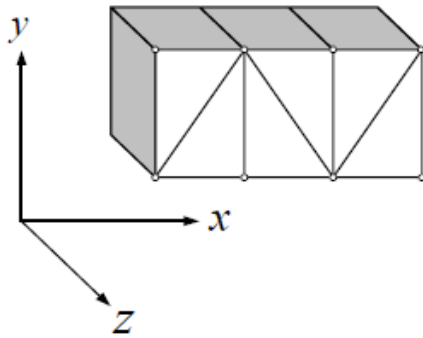
という悩みがあった。この難点を解決するため、有限要素法では区分多項式を用いている。また、有限要素法の特徴として以下のことが言える。

- ・ 近似のバランスが良い
- ・ 理論と実際の中間的存在である
- ・ 実際的问题を扱えるのが強み
- ・ 応用範囲が極めて広い
- ・ コンピュータと密着した計算法である
- ・ データを入れれば即座に解が出る便利な道具である（ブラック・ボックスとして使える）

### 4.2.1 有限要素とトラス部材

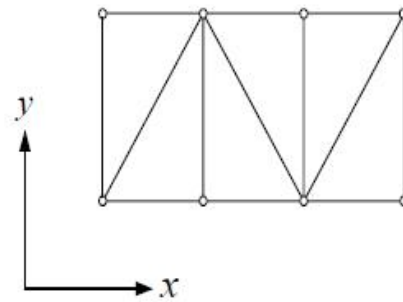
連続体を有限要素法により解析する場合、解析対象を有限の大きさを有する他所で分割して取り扱う。この要素のことを有限要素（finite element）といい、連続体を有限要素で分割して力学的に解析する手法を有限要素法（finite element method;略してFEM）という。ここでは2次元の場合を取り扱い、有限要素として三角要素を使用する。ここで注意してもらいたいのは、2次元の意味である。解析対象は物理的に実態のあるもので、空間に3次元

的に存在するものである。しかし、板厚が他の寸法に比べ非常に小さい場合、あるいは非常に大きい場合は、内部の応力状態は板厚方向には変化せず一定であると考えてよい。このような状態を2次元というのである。また、板厚が小さく  $\sigma_z = 0$  と考えられる場合を平面応力状態、板厚が大きく  $\epsilon_z = 0$  と考えられる場合を平面ひずみ状態という。いま、2次元の場合を取り扱うということの意味は、応力状態が平面応力、平面ひずみの状態を扱うということである。また、板厚方向の形状は一定でなければならないから、解析対処の形状としては2次元的な形状のみを考えればよいことになる (Fig.4-2)。また、板厚方向に荷重が加わる場合は、2次元応力状態とならないから、荷重も図に示す  $x \cdot y$  面内に働く場合を扱うわけである。



物体は3次元  
形状は2次元的  
応力、ひずみ状態は2次元  
変位、荷重はx方向、y方向の2次元

Fig.4-2 2次元連続体



部材は1次元  
構造は2次元的  
応力、ひずみ状態は1次元  
変位、荷重はx方向、y方向の2次元

Fig.4-3 2次元トラス

これをトラスの場合と比較するとわかりやすい。トラスの場合は、実際には3次元的な部材から構成されているが、断面積に比べ部材の長さが長いことから、トラス部材は1次元の棒として扱った。したがって、応力、ひずみも1次元であった。しかし、これら部材の組み合わせからなる構造は、2次元トラスの場合、2次元的に組み合わせられ、それゆえ、荷重、接点変位は2次元的である (Fig.4-3)。

トラスの場合を示すと、

- (1) 荷重は節点を介してのみ伝えられる
- (2) 応力、ひずみは部材内で一定である

これらは物理的に当然のことであった。これにならって、連続体の場合にも同じ仮定を設ける。すなわち、三角形要素の3頂点を節点 (node) といい、

- (1) 荷重は節点を介してのみ伝えられる.
- (2) 応力, ひずみは要素内で一定である.

という仮定をする. トラスの場合には, これが直観的に理解できることであったのに対し, 連続体の場合にはあくまでも仮定である.

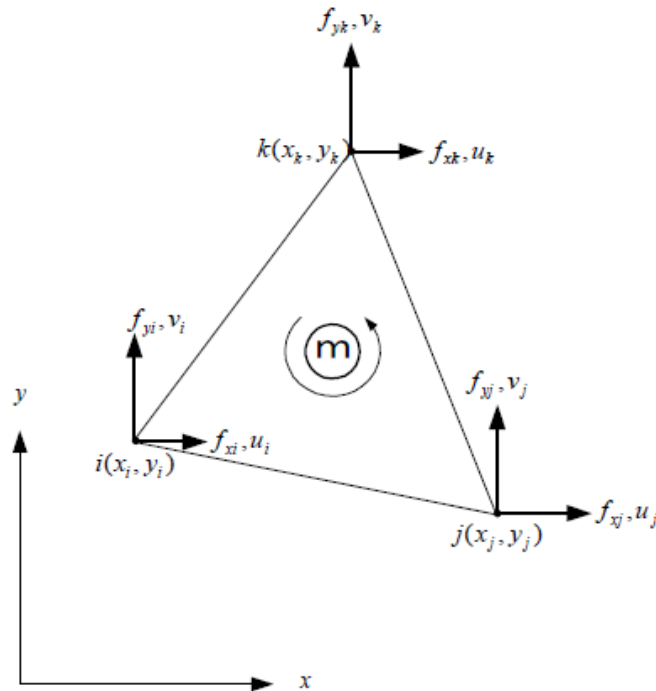


Fig.4-4 三角要素の接点力と接点変位

まず(1)について考えてみる. トラスの場合と同様に三角形の節点の節点力, および節点変位をFig.4-4のように定める. 荷重は実際には要素の境界上のすべての表面力として伝わる. トラスの場合, 要素境界は節点に一致しているから表面力は節点力に一致するが, 連続体の場合には表面力すなわち節点力ということにはならない. そこで, (1)のような仮定を設けるのである. 節点力の大きさは節点力が要素になす仕事と表面力が要素になす仕事に一致するように仮想仕事の原理を用いて決められる. この意味での節点力を等価節点力 (equivalent nodal force) という.

次に(2)を考えてみる. トラスの場合には, 応力 - ひずみが部材内で一定となるのは当然であるが, 連続体の場合には一般に一定とはならない. しかし, 要素分割を細かくすれば要素内でほぼ一定と考えてもよい. トラスの場合, なぜ応力, ひずみが一定になるかといえば, 変位が部材内で直線的に変化するからである.

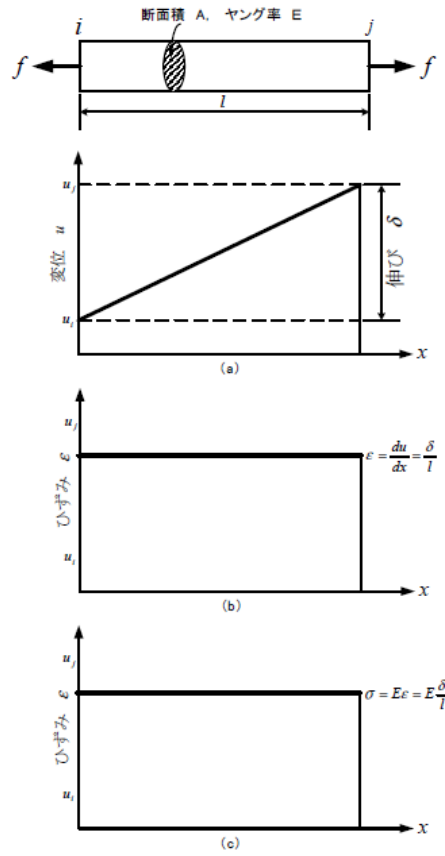


Fig.4-5 部材の変位, 歪, 応力

Fig.4-5 (a) に示したように変位 $u$  は式(4.1)となる.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x \tag{4.1}$$

また,

$$\begin{aligned} u_i &= u(0) = \alpha_1 \\ u_j &= u(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l \end{aligned}$$

であるから,

$$\alpha_1 = u_i \quad , \quad \alpha_2 = \frac{u_j - u_i}{l}$$

となり, したがってこれらを代入する事により, 式(4.1)は式(4.2)となる.



$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_i + \frac{x}{l}u_j \quad (4.2)$$

これはトラス部材の変位-節点変位関係を示している。

連続体の場合も応力、ひずみが要素内で一定であると仮定することは要素内で変位が直線的に変化すると仮定することに相当する。式(4.1)に対応して、三角形要素内の変位場を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

ここに、 $u$ :  $x$ 方向の変位、 $v$ :  $y$ 方向の変位である。この式を変位関数 (displacement function) という。定数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ を節点変位 $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k$ および節点座標 $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ で表す。

$$\begin{aligned} u_i &= u(x_i, y_i) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ v_i &= v(x_i, y_i) = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j &= u(x_j, y_j) = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ v_j &= v(x_j, y_j) = \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_k &= u(x_k, y_k) = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \\ v_k &= v(x_k, y_k) = \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k \end{aligned}$$

これを解くと $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ を得られる。これを式(4.3)に代入すると、式(4.2)に対応する三角形要素の変位-節点変位関係が、次のように求められる。

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\Delta} \left\{ (a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_k + b_k x + c_k y)u_k \right\} \\ v &= \frac{1}{2\Delta} \left\{ (a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_k + b_k x + c_k y)v_k \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & a_k &= x_i y_j - x_j y_i, \\
 b_i &= y_j - y_k, & b_j &= y_k - y_i, & b_k &= y_i - y_j, \\
 c_i &= x_k - x_j, & c_j &= x_i - x_k, & c_k &= x_j - x_i,
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

$\Delta$  は三角形要素の面積で、三角形要素の3 節点  $i, j, k$  が反時計方向の順ならば (Fig.4-4) 行列式を用いて、

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$

と書ける。式(4.4)の変位-節点変位関係を形状関数 (shape function) という。

この様にして、変位 - 節点変位関係が得られれば歪 - 変位関係を用いて歪 - 節点変位関係が求められる。

トラスの場合 (1次元) は、

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}
 \tag{4.6}$$

であるから式(3.2)より式(3.7) を得る。

$$\varepsilon = \frac{1}{l}(u_j - u_i) = \frac{\delta}{l}
 \tag{4.7}$$

三角形要素の場合 (2次元) は、

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

であるから、式(4.4)より次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{2\Delta} \{b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k\} = \frac{1}{2\Delta} \{(y_j - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k\} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{2\Delta} \{c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k\} = \frac{1}{2\Delta} \{(x_k - x_j)v_i + (x_i - x_k)v_j + (x_j - x_i)v_k\} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{2\Delta} \{c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k + b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k\} \\
 &= \frac{1}{2\Delta} \{(x_k - x_j)u_i + (x_i - x_k)u_j + (x_j - x_i)u_k \\
 &\quad + (y_j - y_k)v_i + (y_k - y_i)v_j + (y_i - y_j)v_k\}
 \end{aligned}$$

これをマトリックス表示すれば式(4.9)を得る.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i & y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

この歪 - 節点変位関係式の係数マトリックスを  $[B]$  とおき, これを歪 - 変位マトリックス (strain-displacement-matrix) という. すなわち,

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i & y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

いま, 歪ベクトル  $\{\varepsilon\}$ , 節点変位ベクトル  $\{\xi_e\}$  を

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \{\xi_e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix}$$

とすれば、歪 - 接点変位関係式(4.9)は、

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\xi_e\} \tag{4.11}$$

と書くことが出来る。

歪と接点変位の関係がわかれば、応力 - 歪関係式を用いて応力と接点変位の関係がわかる。トラスの場合(1次元)は、 $\sigma = E\varepsilon$ であるから、式(4.6)より、

$$\sigma = \frac{E}{l}(u_j - u_i)$$

となる。一方、三角形要素の場合(2次元)は応力 - 歪関係は応力 - 歪マトリックス $[D]$ によって次のように表される。

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{4.12}$$

マトリックス $[D]$ は平面ひずみの場合は、

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

であり、平面応力の場合は、

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

である。式(4.11)により，三角形要素の応力は，接点変位ベクトルから次のように求めることができる。

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\zeta_e\} \quad (4.13)$$

以上，三角形要素の節点変位から要素内ひずみ，応力を導く手順をトラス部材と比較しながら示した。なお1次の変位関数の仮定，すなわち，要素内のひずみ，応力が一定であるという仮定は要素が適当に小さければ近似的に容認しうる仮定である。したがって，形状の変化，荷重の変化が大きい箇所，すなわち，応力変化の大きい箇所では要素分割を細かくしなければならないということがわかる。

#### 4.2.2 三角形要素の剛性マトリックスと仮想仕事の原理

前項では要素の節点変位から応力，ひずみを導く手順を示したが，実際には荷重を受けている物体（連続体）に生じる応力，ひずみを求めるためには節点荷重（あるいは節点力）と節点変位関係，すなわち剛性マトリックスを求めなければならない。

トラスあるいはバネの場合は，

$$f = k\zeta = k(u_j - u_i)$$

の関係から直ちに剛性マトリックスを導くことができた。しかし，2次元である三角形要素の剛性マトリックスは常識のように簡単には求められない。前項で節点変位と応力，ひずみの関係を導く際に用いた弾性体の支配方程式は，（1）歪 - 変位関係式，（2）応力 - 歪関係式であった。弾性体における支配方程式はもう1つあり，それはつり合い方程式あるいはこれに等価な仮想仕事の原理から導かれるのである。

仮想仕事の原理は次のようである。

$$\int \{\zeta^*\}^T \{P\} dS + \int \{\zeta^*\}^T \{F\} dV - \int \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV = 0 \quad (4.14)$$

ここで,

- $\{\zeta^*\}$ : 仮想変位ベクトル
- $\{P\}$ : 単位面積当たりの表面力ベクトル
- $\{F\}$ : 単位面積当たりの体積力ベクトル
- $\{\varepsilon^*\}$ : 仮想ひずみベクトル
- $\{\sigma\}$ : 応力ベクトル

と定義する. いま, 体積力を考えないとすると式(4.14)は次のようになる.

$$\int \{\zeta^*\}^T \{P\} dS = \int \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \quad (4.15)$$

三角形要素に仮想仕事の原理を適用して三角形要素の剛性マトリックスを求める. 要素に作用する表面力  $\{P\}$  は一般には三角形要素の各辺に作用するが, この表面力がなす仕事と等価な仕事をする節点力を定義する. すなわち, 三角形要素の節点ベクトル  $\{f_e\}$ , 節点変位ベクトル  $\{\xi_e\}$  を

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \\ f_{xk} \\ f_{yi} \\ f_{yj} \\ f_{yk} \end{Bmatrix}, \quad \{\xi_e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

とするとき, 節点力のなす仕事  $\{\xi_e\}^T \{f_e\}$  が, 表面力  $\{P\}$  のなす仕事に等しくなるように, 節点力を定義するのである. したがって, 式(4.15)の左辺は,

$$\int \{\zeta^*\}^T \{P\} dS = \{\zeta_e\}^T \{f_e\} \quad (4.17)$$

となる. ここに,  $\{\zeta_e\}$  は仮想節点ベクトルである.

また, 要素内で応力, ひずみが一定であるから式(4.15)の右辺は,

$$\int \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV = V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} \quad (4.18)$$

と書ける．ここには三角形要素の体積であり，

$$V = t\Delta \quad (t: \text{三角形要素の板厚}, \Delta: \text{三角形要素の面積}) \quad (4.19)$$

である．

以上から，仮想仕事の原理は三角形要素に対して，

$$\{\zeta_e^*\}^T \{f_e\} = t\Delta \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} \quad (4.20)$$

と書くことができる．これに，

$$\begin{aligned} \text{ひずみ-節点変位関係} & \quad \{\varepsilon\} = [B]\{\zeta_e\} \\ \text{応力-歪み関係} & \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\zeta_e\} \end{aligned}$$

を代入する．仮想節点変位ベクトル  $\{\zeta_e^*\}$  に対応する仮想ひずみベクトル  $\{\varepsilon^*\}$  は

$$\{\varepsilon^*\} = [B]\{\zeta_e^*\}$$

であることに注意して，式(4.20)を書き直すと次のようになる．

$$\begin{aligned} \{\zeta_e^*\}^T \{f_e\} &= t\Delta \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} \\ &= \{\zeta_e^*\}^T (t\Delta [B]^T [D][B]) \{\zeta_e\} \end{aligned}$$

は任意の仮想節点変位ベクトルであるから，上式が成立するためには，

$$\{f_e\} = (t\Delta [B]^T [D][B]) \{\zeta_e\} \quad (4.21)$$

が必要である．これは三角形要素の節点力ベクトル  $\{f_e\}$  と節点変位ベクトル  $\{\zeta_e\}$  の関係を

表しており、三角形要素の剛性方程式である。要素の剛性マトリックスを $[K_e]$ とすれば剛性方程式は

$$\{f_e\} = (t\Delta[B]^T[D][B])\{\zeta_e\} \quad (4.22)$$

となる。  
ここで $[K_e]$ は、

$$[K_e] = t\Delta[B]^T[D][B] \quad (4.23)$$

である。

以上のようにして、要素の剛性マトリックスは $[B]$ 、 $[D]$ 、 $t$ 、 $\Delta$ から計算できることが示された。以上示した三角形要素に関する諸関係を、弾性体の支配方程式から導出する手順を整理して、Fig.4-6に示す。

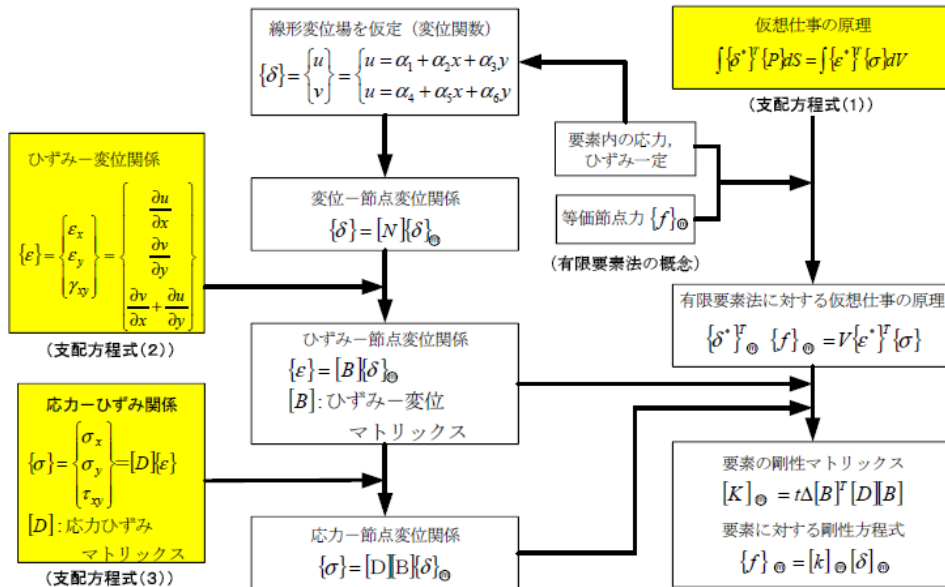


Fig.4-6 弾性論より有限要素法へ

### 4.2.3 有限要素法による固有モード解析

固有モード解析は構造物の動特性を評価するために一般によく行われる。例えば回転機械が基板上に据え付けられる場合、過度な振動を防止しなければならない。この機械は回



転数が基盤の固有振動数に近接しているかどうか調べるために解析される。さらに進んだ解析においては、固有モード解析は動解析と応答解析のために構造物の固有振動数およびモード形状を提供する。Fig.4-6に有限要素法による理論モード解析の流れを示す。

有限要素解析の基本目標は次の単純振動方程式に対する解を得ることである。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (4.24)$$

式(3.24)の解は次の調和形式になる。

$$\{u\} = \{\phi\}e^{j\omega t} \quad (4.25)$$

ここで、 $\{\phi\}$ はモード形状、 $\omega$ は振動数である。式(3.25)を式(3.24)に代入すると、次の固有値方程式を得る。

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = 0 \quad (4.26)$$

自明でない解は係数マトリックスの行列式が次式で示すようにゼロになる場合のみ存在する。

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (4.27)$$

また、 $\omega^2$ を $\lambda$ と置いて

$$\det([K] - \lambda[M]) = 0 \quad (4.28)$$

固有値 $\lambda$ は複数個の解を持つ。解の数は剛性マトリックス $[K]$ の次元数に等しい。式(4.25)は次式のように書き直せる。

$$([K] - \lambda_i[M])\{\phi_i\} = 0 \quad (4.29)$$

下添字 $i$ は1から $N$ までの値をとり、 $N$ は剛性マトリックス $[K]$ の次元数である。 $\lambda_i$ は $i$ 番目の固有値、 $\{\phi_i\}$ は $\lambda_i$ に対する $i$ 番目のモードベクトルである。

## 第5章 ファンモーターの実験モード解析

### 5.1 実験対象

実験対象のファンモーターを Fig.5-1 に示す. 本実験ではオリエンタルモーター社製ファンモーターMD925A-24 を取り扱った. フレームは  $92 \times 92 \times 25.4\text{mm}$ , 羽根部分は  $\phi 90\text{mm}$  厚さ  $19\text{mm}$  羽根 5 枚である.

ファンモーターはモーターとプロペラ, フレームを一体化したもので比較的軽量である. 材質はポリカーボネート樹脂で 4 つのコイルと 2 つのベアリングを内蔵しており, 内部構造は直流モーターと同じであるため与える電圧に応じて回転数・出力を制御することが可能である. また, 低速でのトルクが大きく, 応答性が高い.



Fig.5-1 ファンモーター

### 5.2 実験装置

本実験では, インパルスハンマー, FFT アナライザー, 加速度ピックアップを用いた. 実験装置を Table.5-1 に示す.

Table.5-1 試験機材の詳細

---

インパルスハンマー：PCB PIEZOTRONICS 086D80
感度(±15%)：22.5mV/N 測定範囲：±220N
周波数範囲(-10dB)(Hard Tip)：20kHz 共振周波数：≥100kHz
ハンマーの質量：2.9g ヘッドの直径：6.3mm
チップの直径：2.5mm ハンマーの長さ：101.6mm
FFT アナライザー：RION SA-01(4~16ch タイプ)
レベルレンジ：-40dB~+30dB 10dB ステップ
ダイナミックレンジ：90dB
周波数レンジ：1Hz~20Hz および 40kHz の 15 レンジ
ポイント数：256~32868 ポイント(2 のべき乗)
加速度ピックアップ：モデル：352C65
シリアル：45157
感度：98.8mV/N
周波数レンジ：0.5Hz~1000Hz

---

## 5.3 実験内容

ファンモーターの固有振動数及び固有モード形状を同定するために、インパルスハンマーによる打撃加振試験を行った。支持方法はゴムで吊るした自由支持状態とモーターに固定した固定支持状態の2通りを行った。

## 5.4 自由支持状態

### 5.4.1 自由支持状態の実験方法

自由支持状態ではゴムで吊るした状態で無重力に近い状態を再現した。ゴムを羽根部にかけてゴムを2本の支柱で支えた。その状態で打撃加振を行い、振動を測定した。実験風景を Fig.5-2 に示す。中心の円筒部上面に11点と各羽根の先に3点ずつで合計26点を加振点とし、測定を行った。応答点は円筒部上面の1点を取り、加速度ピックアップを鉛直に取り付けた。加振点及び応答点を表した図を Fig.5-3 に示す。

また、FFT アナライザーの設定は解析周波数 5000、サンプリング点数 8192 とした。

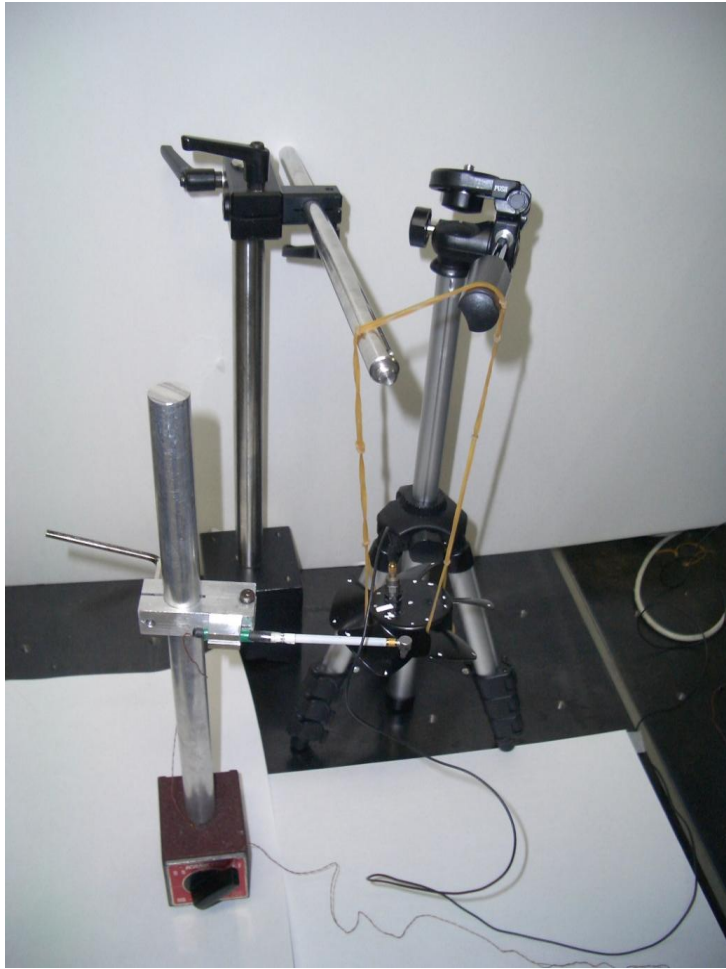


Fig.5-2 自由支持の実験風景

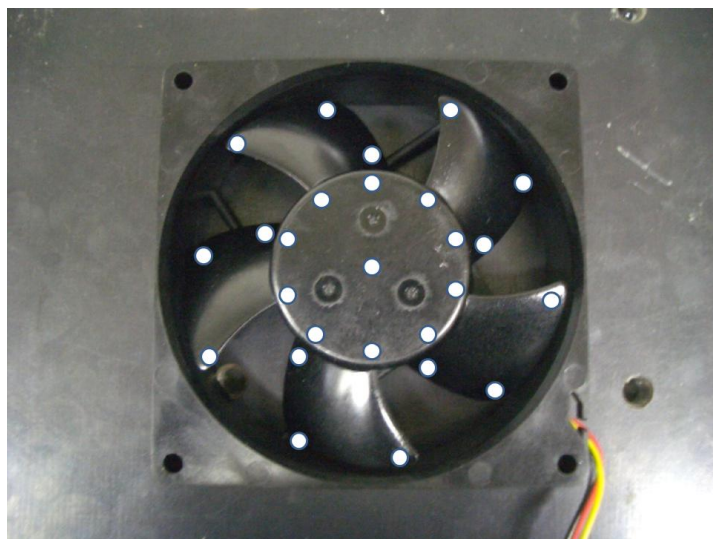


Fig.5-3 加振位置

### 5.4.2 自由支持状態の実験結果

ある 1 点での周波数応答関数のグラフを Fig.5-5, 全ての点における周波数応答関数のグラフを Fig.5-6 に示す. このグラフは横軸が周波数 (Hz), 縦軸がアクセラランス ( $m/s^2 \cdot N$ ) である. このグラフから, 1120Hz と 1700Hz にピークが見られる. これらのピークが固有振動数であると思われる. また, 782Hz と 1564Hz に反共振点があることが分かる. 固有振動数の値を Table.5-1 に示す.

実験で得られた固有モード形状を Fig.5-7, Fig.5-8, Fig.5-9 に示す.

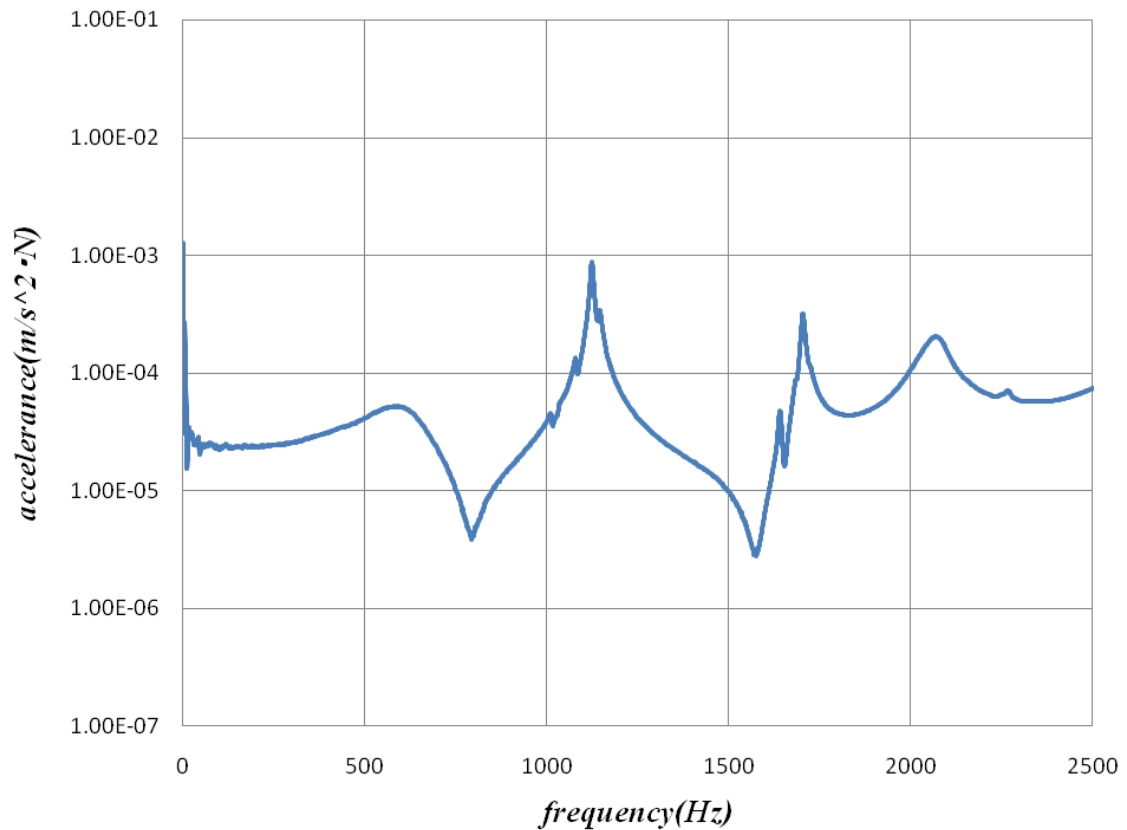


Fig.5-5 自由支持状態の周波数応答関数

第5章 ファンモーターの実験モード解析

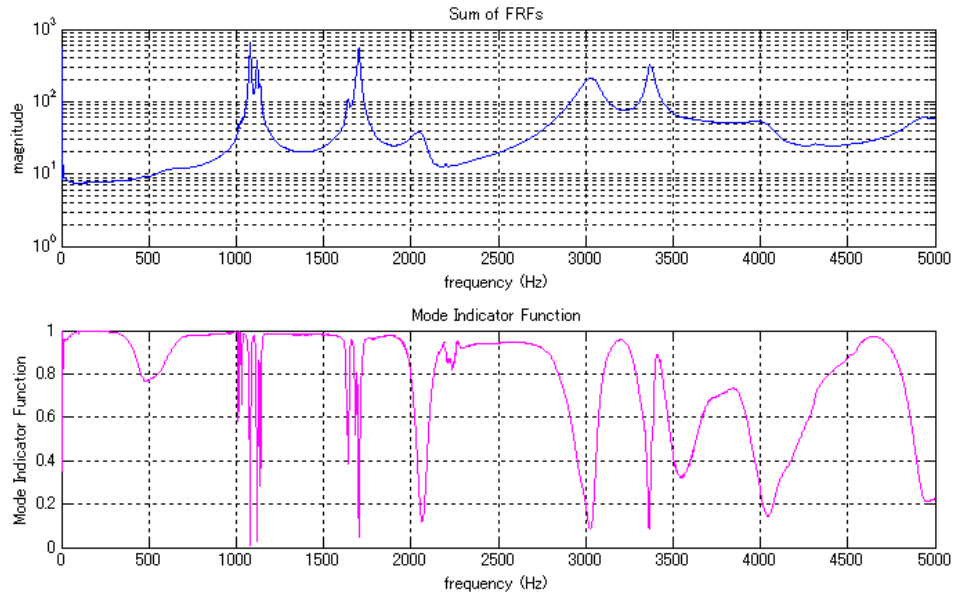


Fig.5-6 周波数応答関数

Table.5-1 固有振動数

Mode No.	Natural frequency (Hz)
1	1080
2	1119
3	1128

第5章 ファンモーターの実験モード解析

Mode Shape : Order = 2,  $f = 1080$  (Hz),  $\zeta = 0.308$  (%)

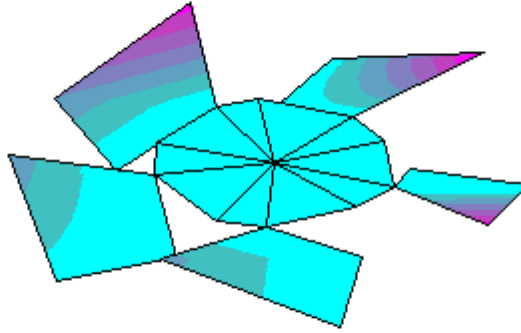


Fig.5-7 1次固有モード形状

第5章 ファンモーターの実験モード解析

Mode Shape : Order = 3,  $f = 1119$  (Hz),  $\zeta = 0.38$  (%)

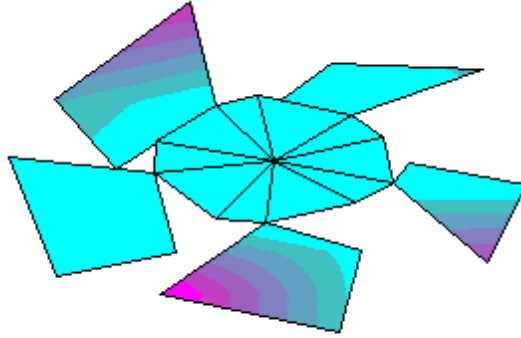


Fig.5-8 2次固有モード形状



Mode Shape : Order = 4,  $f = 1128$  (Hz),  $\zeta = 1.24$  (%)

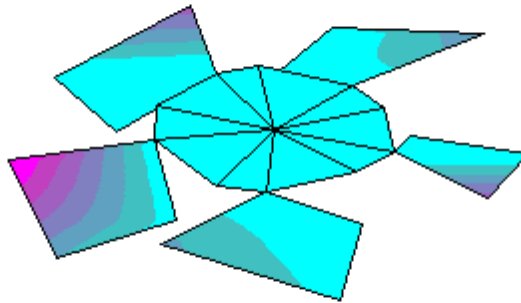


Fig.5-9 3次固有モード形状

## 5.5 固定支持状態

### 5.5.1 固定支持の実験方法

ファンモーターの羽根部のみを別のモーターに金属製のコネクターでつないだ。その状態で打撃加振を行い、自由支持状態での結果と比較をした。実験風景を Fig.5-4 に示す。加振点と応答点については自由支持状態での実験と同様、中心の円筒部上面に 11 点と各羽根の先に 3 点ずつで合計 26 点を加振として測定を行った。応答点は、円筒部上面の 1 点とした。

### 5.5.2 固定支持状態の実験結果

ある 1 点での周波数応答関数のグラフを Fig.5-10, 全ての点における周波数応答関数のグラフを Fig.5-11 に示す。このグラフは横軸が周波数 (Hz), 縦軸がアクセラランス ( $m/s^2 \cdot N$ ) である。このグラフから, 83Hz,310Hz,731Hz,1121Hz,1196Hz,1701Hz にピークが見られる。また, 92Hz,507Hz,946Hz,1043Hz,1178Hz,1678Hz に反共振点があることが分かる。固有振動数の値を Table.5-2 に示す。

実験で得られた固有モード形状を Fig.5-12, Fig.5-13, Fig.5-14 に示す。

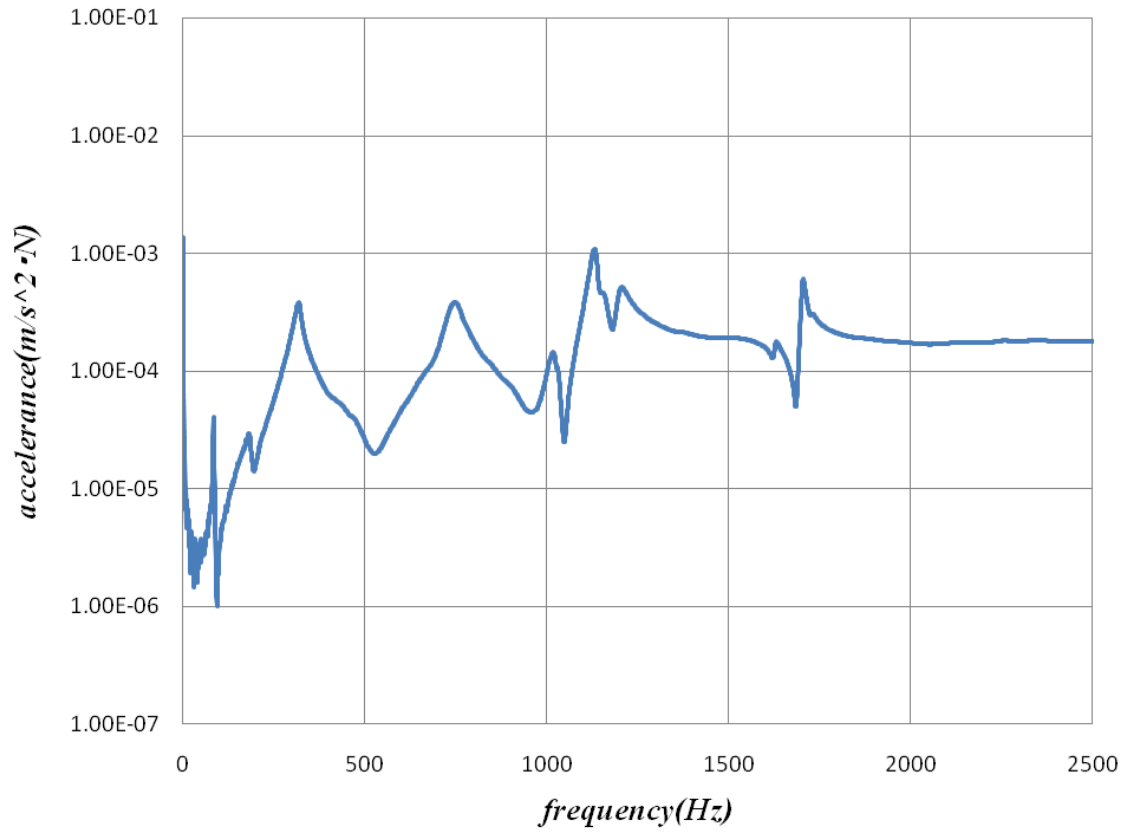


Fig.5-10 固定支持状態の周波数応答関数

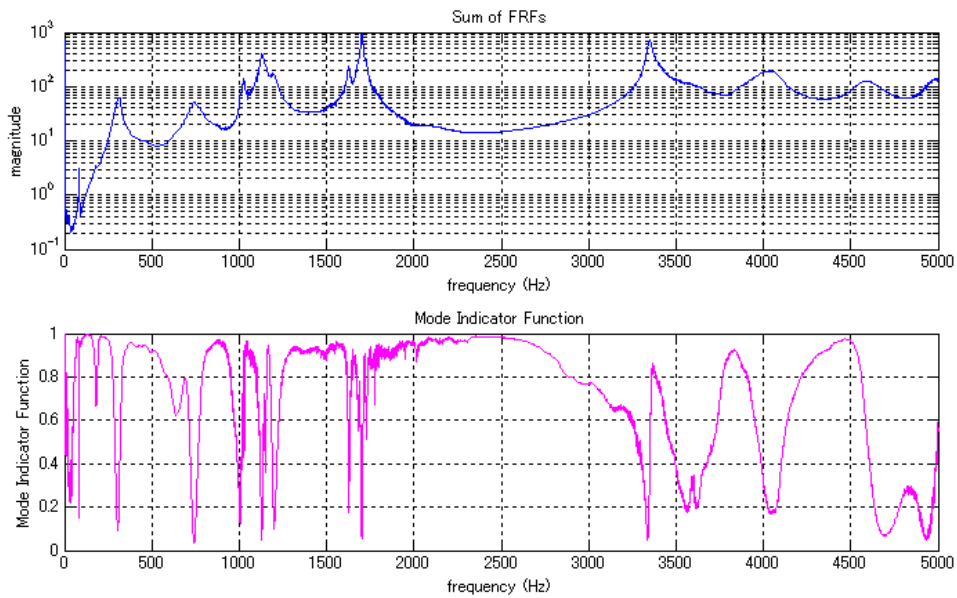


Fig.5-11 周波数応答関数

Table.5-2 固有振動数

Mode No.	Natural frequency (Hz)
1	309
2	741
3	996

Mode Shape : Order = 2,  $f = 309.7$  (Hz),  $\zeta = 3.44$  (%)

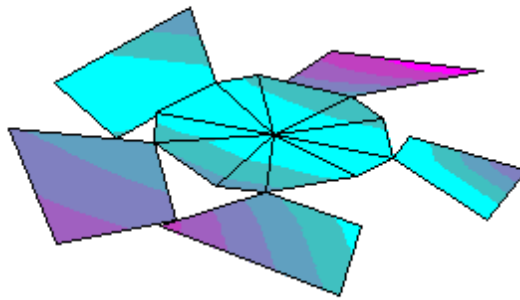


Fig.5-12 1次固有モード形状

第 5 章 ファンモーターの実験モード解析

Mode Shape : Order = 3,  $f = 741$  (Hz),  $\zeta = 3.37$  (%)

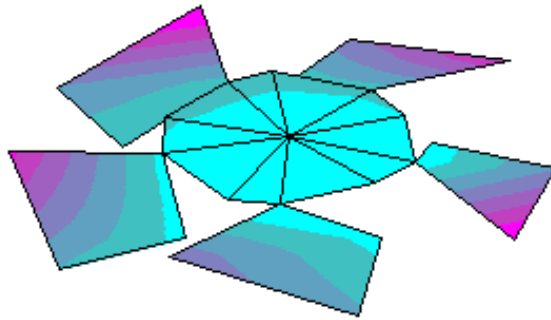


Fig.5-13 2次固有モード形状

Mode Shape : Order = 4,  $f = 996.5$  (Hz),  $\zeta = 2.85$  (%)

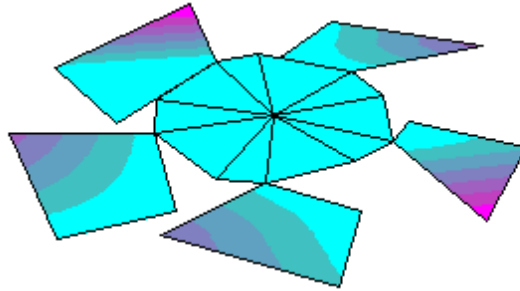


Fig.5-14 3次固有モード形状

## 5.6 結論

ファンモーターの羽根部分の自由支持状態と固定支持状態における固有振動数及び固有モード形状を同定することができた。

## 第6章 ファンモーターの理論モード解析

### 6.1 有限要素モデル

計算モデルは、CAD データを基に Altair Hyper Mesh を使用し作成した。モデルの要素は四面体要素で、接点数は 190,639、要素数は 112,843 である。Fig.6-1 に有限要素モデルを示す。また、Table.6-1 に材料定数、Table.6-2 に実物の質量とモデルの質量の比較を示す。

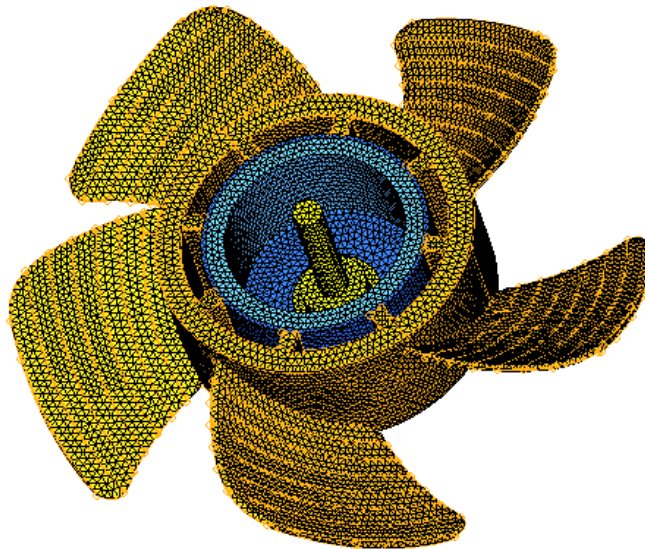


Fig.6-1 有限要素モデル

Table.6-1 材料定数

	材質	密度(g/cm <sup>3</sup> )	縦弾性係数(GPa)	ポアソン比
羽根部	ポリカーボネート	1.37	6.2	0.3
カップ部	SECC	7.78	204	0.3
カップ部(凸部)	亜鉛	7.13	96.5	0.25
マグネット部	フェライト	5.0	117	0.3
シャフト部	SUS440C	7.78	204	0.3

Table.6-2 質量の比較

実物の質量(g)	モデルの質量(g)	誤差(%)
42.0	41.0	2.4

Table.6-2 より実物の質量に近い計算モデルを作成することができた。

## 6.2 解析結果

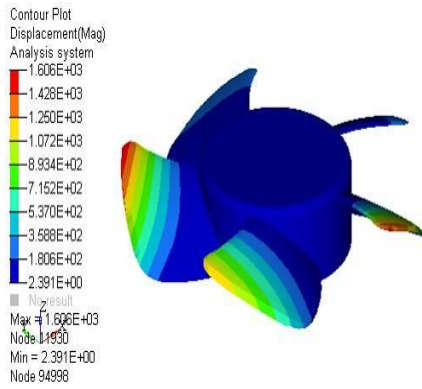
作成した計算モデルで NASTRAN 解析を行った。解析は実験モード解析の場合と同じにするため、拘束の無い自由支持状態と軸先端を拘束した固定支持状態の 2 通りを行った。その結果、固有振動数及び固有モード形状が得られた。解析結果の固有振動数と実験モード解析の固有振動数を比較したものを Table.6-3, Table.6-4 に示す。また、解析結果と実験モード解析の固有モード形状を Fig.6-2 から Fig.6-7 に示す。

Table.6-3 自由支持状態における固有振動数の比較

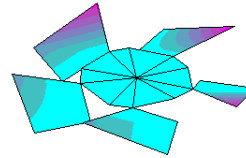
Mode No.	固有振動数(Hz)	
	実験値	計算値
1	1080	1329
2	1119	1340
3	1128	1443

Table.6-4 固定支持状態における固有振動数の比較

Mode No.	固有振動数(Hz)	
	実験値	計算値
1	309	527
2	741	614
3	996	1302



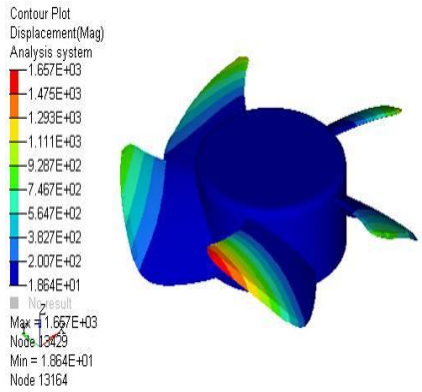
Mode Shape : Order = 2, f = 1080 (Hz),  $\zeta = 0.308 \%$



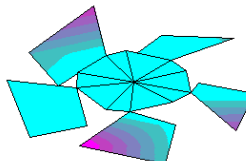
有限要素モデル

実験モード解析

Fig.6-2 自由支持状態での1次固有モード形状の比較



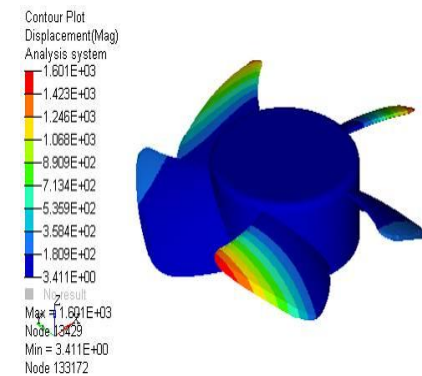
Mode Shape : Order = 3, f = 1119 (Hz),  $\zeta = 0.38 \%$



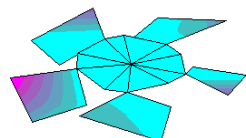
有限要素モデル

実験モード解析

Fig.6-3 自由支持状態での2次固有モード形状の比較



Mode Shape : Order = 4, f = 1128 (Hz),  $\zeta = 1.24 \%$



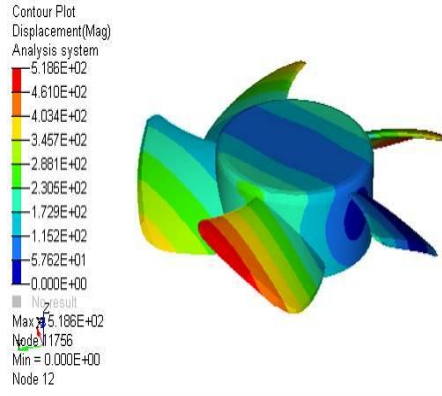
有限要素モデル

実験モード解析

Fig.6-4 自由支持状態での3次固有モード形状の比較

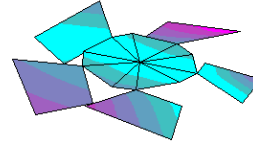


第6章 理論モード解析



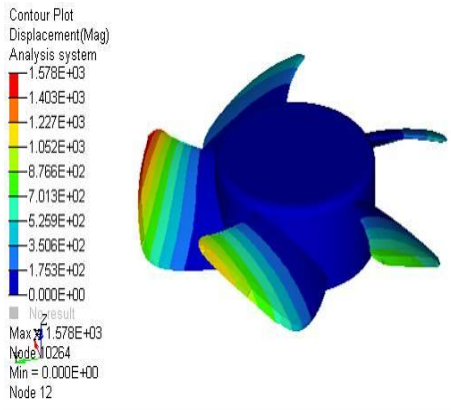
有限要素モデル

Mode Shape : Order = 2, f = 309.7 (Hz),  $\zeta$  = 3.44 %



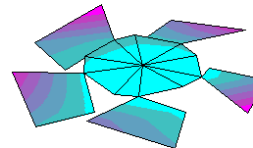
実験モード解析

Fig.6-5 固定支持状態での1次固有モード形状の比較



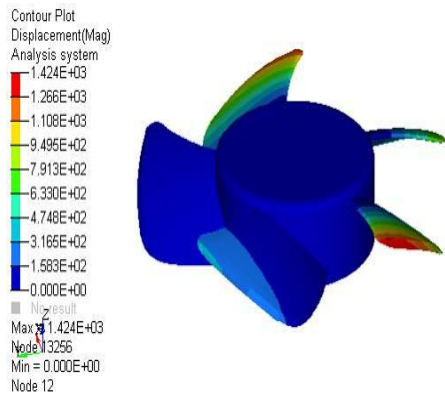
有限要素モデル

Mode Shape : Order = 3, f = 741 (Hz),  $\zeta$  = 3.37 %



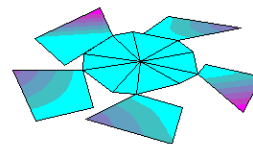
実験モード解析

Fig.6-6 固定支持状態での2次固有モード形状の比較



有限要素モデル

Mode Shape : Order = 4, f = 996.5 (Hz),  $\zeta$  = 2.85 %



実験モード解析

Fig.6-7 固定支持状態での3次固有モード形状の比較

固有振動数には大きな差が生じてしまったが，固有モード形状は近いものが得られた．

### 6.3 結論

有限要素モデルを作成する事ができた．また，実験モード解析との比較を行ったところ，固有振動数では誤差が生じたが固有モード形状は近いものが得られた．

## 第7章 実稼働試験

### 7.1 実験内容

回転中の振動現象を調べるため、加速度ピックアップを用いた次数比解析及び歪ゲージを用いた稼働時の振動測定を行った。

### 7.2 加速度ピックアップを用いた次数比解析

本実験では、加速度ピックアップを用いて回転中のファンの振動を測定した。回転数を徐々に上げていき、回転数の連続的な周波数応答関数を求めた。

#### 7.2.1 実験装置

実験モード解析で用いたFFTアナライザー及び加速度ピックアップに加えてファンモーターを回転させるためのインバーターを用いた。Fig.7-1にインバーターを示す。また、試験器材の詳細をTable.7-1に示す。

Table.7-1 試験機材の詳細

---

インパルスハンマー：PCB PIEZOTRONICS 086D80  
 感度(±15%)：22.5mV/N 測定範囲：±220N  
 周波数範囲(-10dB)(Hard Tip)：20kHz 共振周波数：≥100kHz  
 ハンマーの質量：2.9g ヘッドの直径：6.3mm  
 チップの直径：2.5mm ハンマーの長さ：101.6mm

FFTアナライザー：RION SA-01(4~16chタイプ)  
 レベルレンジ：-40dB～+30dB 10dB ステップ  
 ダイナミックレンジ：90dB  
 周波数レンジ：1Hz～20Hz および 40kHz の 15 レンジ  
 ポイント数：256～32868 ポイント(2のべき乗)

加速度ピックアップ：モデル：352C65  
 シリアル：45157  
 感度：98.8mV/N  
 周波数レンジ：0.5Hz～1000Hz

---



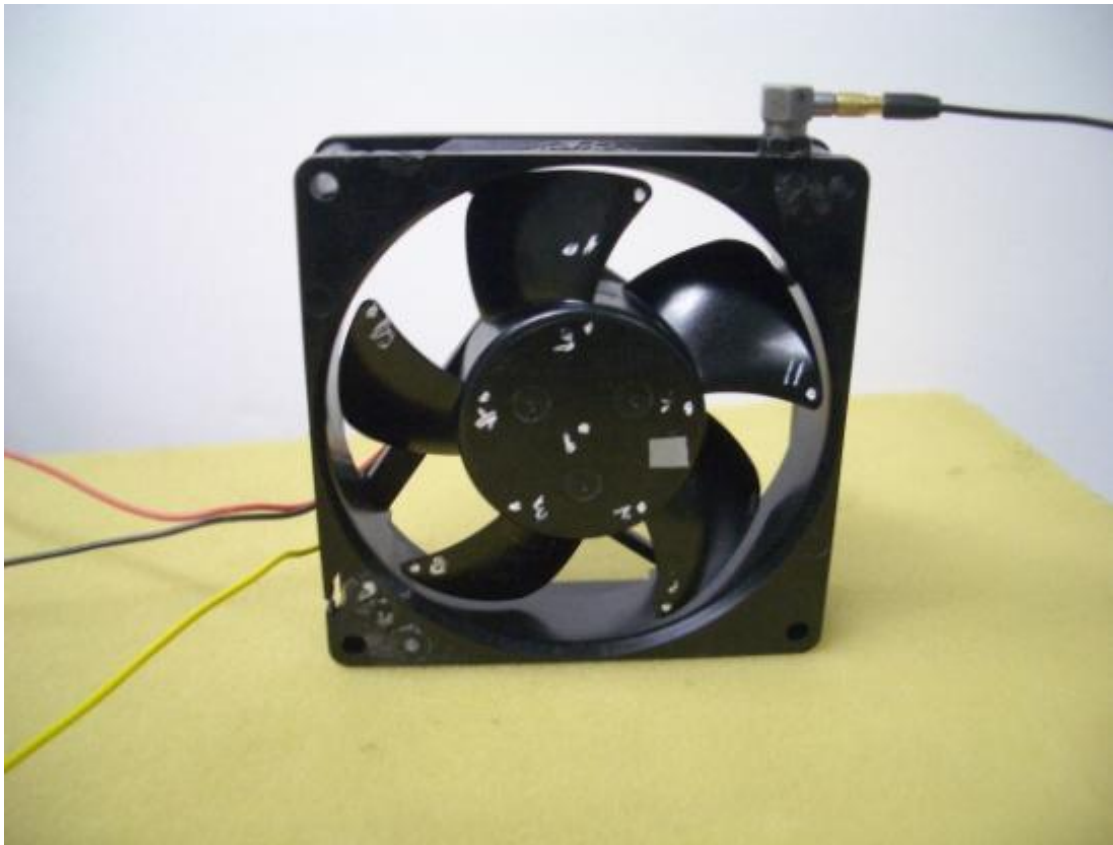
Fig.7-1 インバーター

## 7.2.2 実験方法

ファンモーターをスポンジの上に置き、加速度ピックアップを用いて回転中のファンの振動を測定した。ファンモーターをスポンジの上に置き、フレーム部の前面、上面、側面の3方向に加速度ピックアップを接着した。4,000rpmまで徐々に回転数を上げていき、次数比解析を行った。Fig.7-2に加速度ピックアップの接着位置を示す。解析周波数を1,000で、サンプリング点数を1,024とした。



前面



上面



側面

Fig.7-2 加速度ピックアップの接着位置

### 7.2.3 実験結果

実験結果の次数比マップを Fig.7-3, Fig7-4, Fig7-5 に示す. 横軸が回転数で縦軸が周波数となっており, 色で加速度の違いを表している. 色のおおよその数値は右側のカラーバーを見れば分かるようになっている.

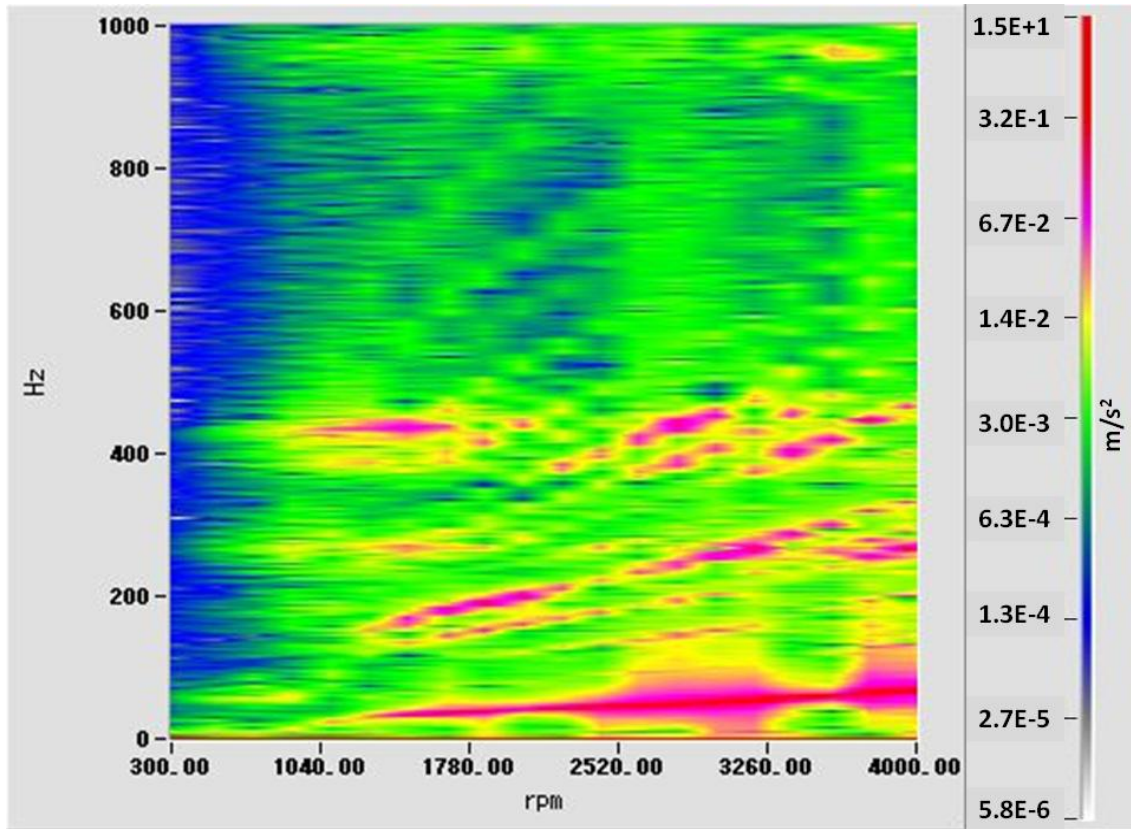


Fig.7-3 次数比マップ（正面に加速度ピックアップを接着）



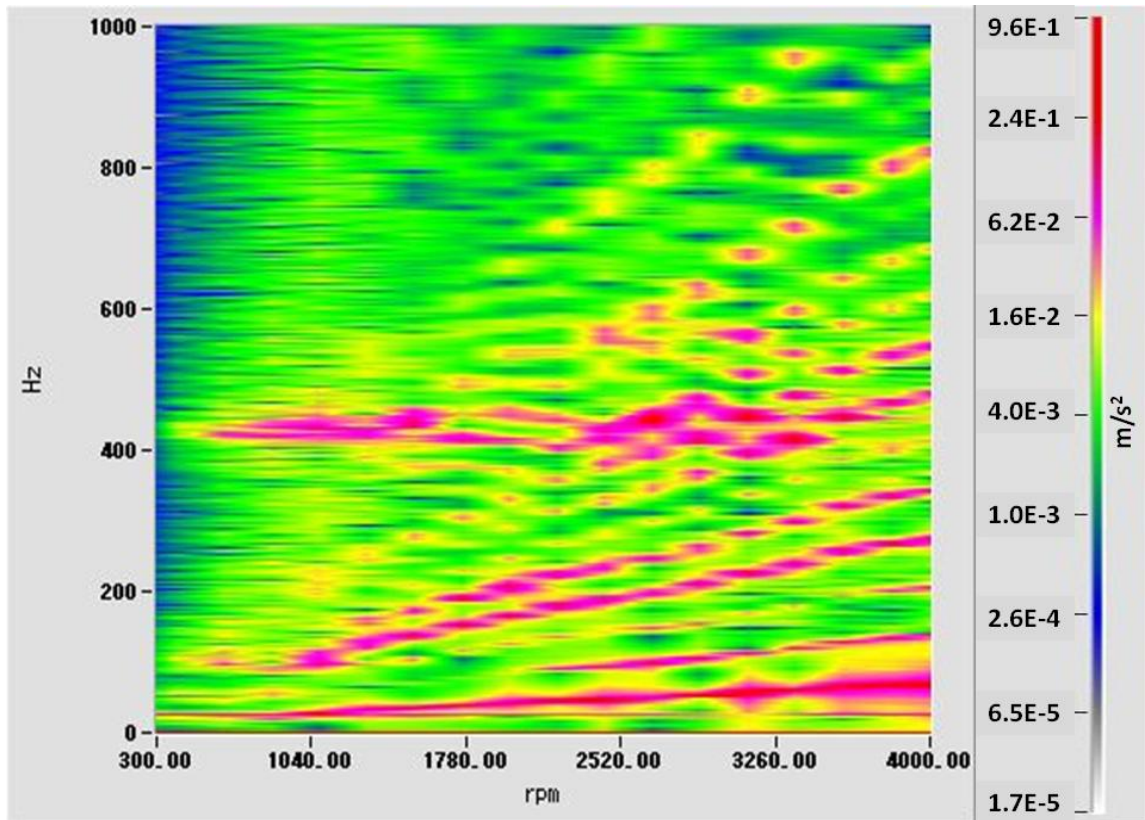


Fig.7-4 次数比マップ（上面に加速度ピックアップを接着）

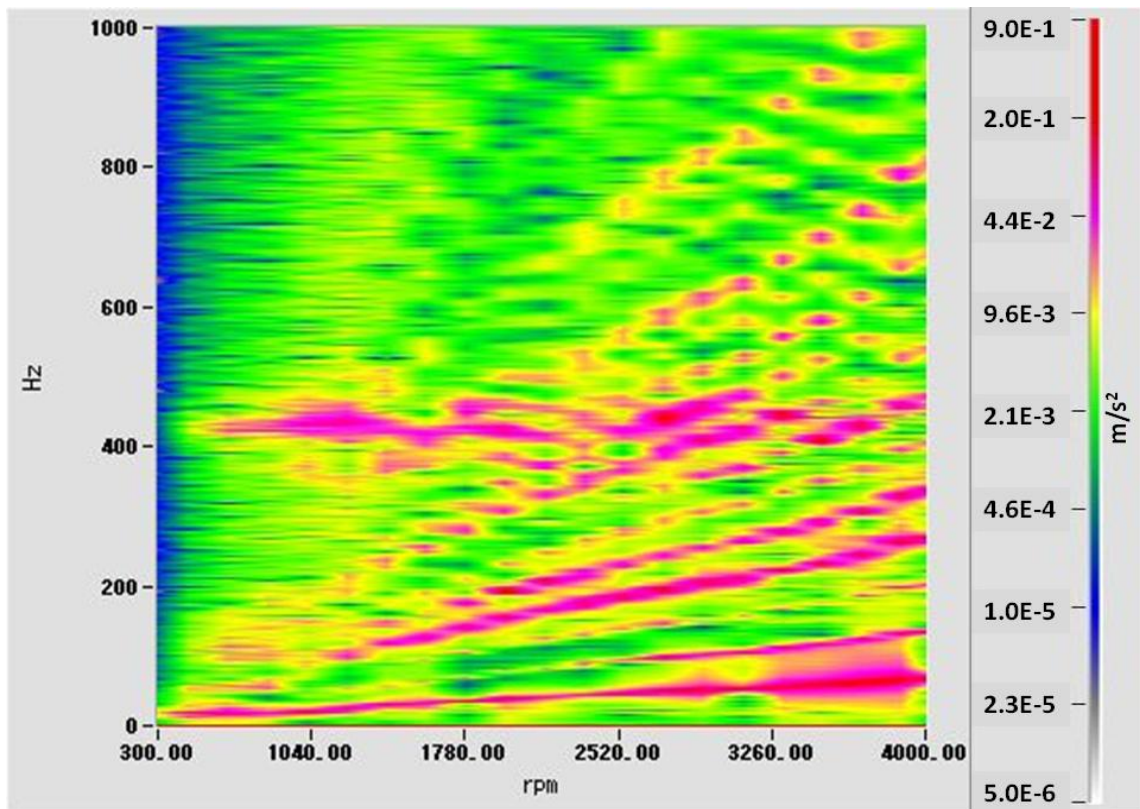


Fig.7-5 次数比マップ（側面に加速度ピックアップを接着）

これらのグラフから 400 から 450Hz において，ほとんどの回転数で比較的大きな振動が見られた．また，回転数が上昇するにつれて周波数も上昇する線は回転次数成分と呼ばれ，下から 1 次, 2 次, …となっている．このグラフから 1 次, 4 次, 5 次の回転次数成分が 1000rpm 以上で大きな振動が見られた．また，最も大きいのは 1 次の回転次数成分であった．

3つのグラフを比較すると，正面に加速度ピックアップを接着した場合は他の方向から接着した場合と異なり，500Hz 以上で大きな振動が見られなかった．これは，500Hz 以上の周波数において，ファンの羽根部分が回転することにより発生する風がフレームに及ぼす影響は，回転軸に平行である正面に接着した場合より，上面や側面に接着した場合の方が大きいからだと考えられる．

右側にあるカラーバーの数値を見て分かるように，数値は小さな値であり，大きな共振現象は表われていないと考えられる．

## 7.3 歪ゲージを用いた実稼働試験

### 7.3.1 歪ゲージについて

歪ゲージは、薄い電気絶縁物のベースの上に格子状の抵抗線またはフォトエッチング加工した抵抗箔を形成し、引き出し線をつけたものである。これを測定対象物の表面に専用接着剤で接着して測定を行う。

Fig.7-6 に歪ゲージの構造図を示す。

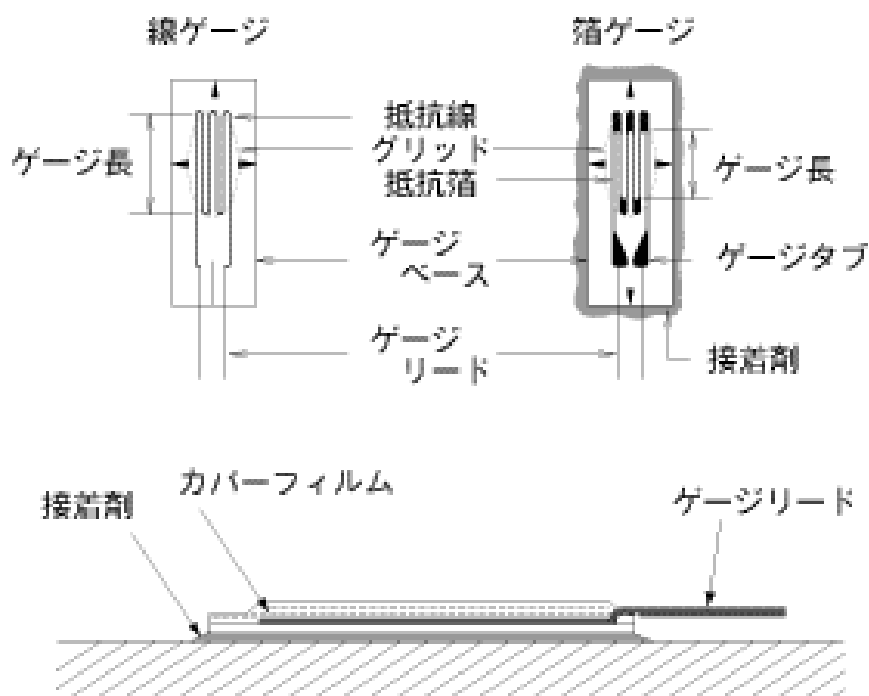


Fig.7-6 歪ゲージの構造図

歪ゲージは多くの利便性を備えているものの、一方で限界のあることも事実である。温度、歪量、疲労、環境などに対して一定の使用限界があるので、あらかじめ限界を見極めて歪ゲージを使う必要がある。

以下に、歪ゲージの特徴を示す。

- ・構造が簡単で質量、容積が小さく測定対象物の応力を乱さない
- ・標点距離を短くでき、局所的な評価ができる
- ・周波数応答性がよく、応力の急激な変化に対応できる
- ・他点の同時測定、遠隔測定ができる
- ・出力が電気量なので、データ処理が容易

測定対象物に歪が発生すると、歪ゲージのベースを經由して抵抗体に歪が伝わる。発生した歪に対応した抵抗変化と歪の関係は次式のようなになる。

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta R / R}{K}$$

$\varepsilon$  : 求める歪

R : ゲージ率

$\Delta R$  : ひずみを受けた時の抵抗変化量

K : ゲージ率

歪ゲージの抵抗変化は微小な値なのでホイートストンブリッジ回路を用いて電圧に変換する。

Fig.7-7 にホイートストンブリッジ回路を示す。

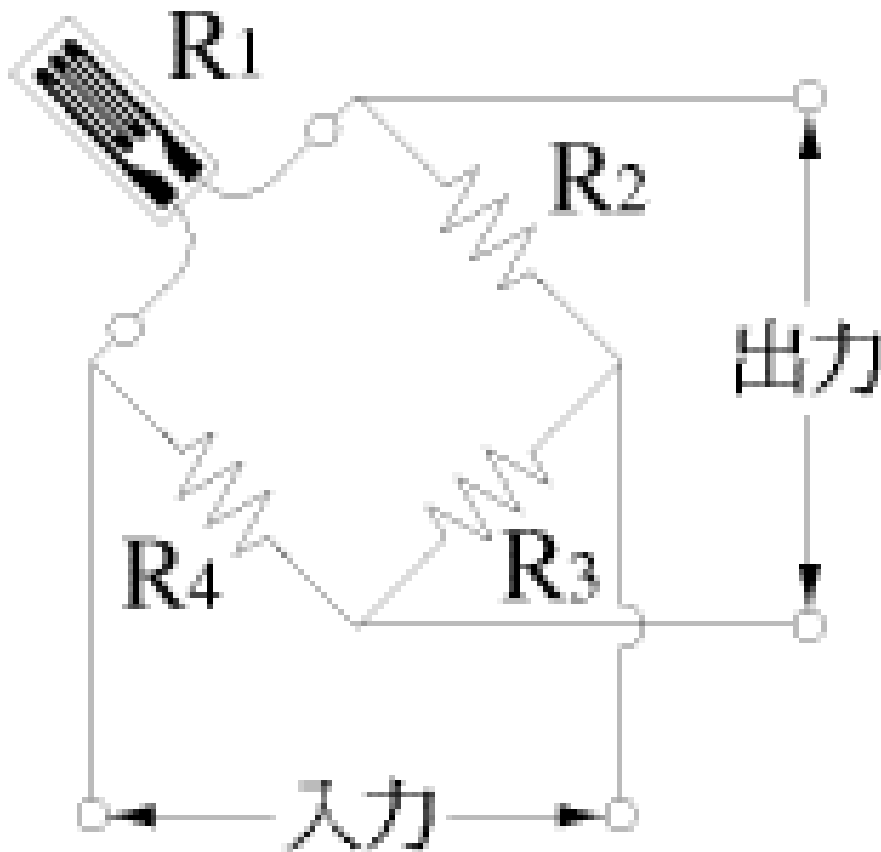


Fig.7-7 ホイートストンブリッジ回路

ブリッジ回路の出力電圧は

$$e = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} E$$

e : 出力電圧

E : 入力電圧

$R_1$  : 歪ゲージの抵抗値

$R_2 \sim R_4$  : 固定抵抗の値

となる。そこで、 $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4$  とすると歪ゲージに歪が加わって歪ゲージの抵抗  $R$  が  $R + \Delta R$  になる。

したがって、歪による出力電圧  $\Delta e$  は

$$\Delta e = \frac{\Delta R}{4R + 2\Delta R} E$$

$\Delta R \ll R$  の場合

$$\Delta e = \frac{\Delta R}{4R} E = \frac{E}{4} K_\varepsilon$$

となる。

歪ゲージを動歪測定器に接続するとホイートストンブリッジ回路が構成され、ブリッジ回路の入力電圧が歪測定器から供給されるため、歪量 ( $\varepsilon$ ) をデジタル表示やアナログ出力で測定することが可能である。

### 7.3.2 実験装置

実験で使用した動歪測定器、モーター、速度変換機、ロータリートランスミッターを Fig.7-8 から Fig.7-11 に示す。



Fig.7-8 動歪測定器



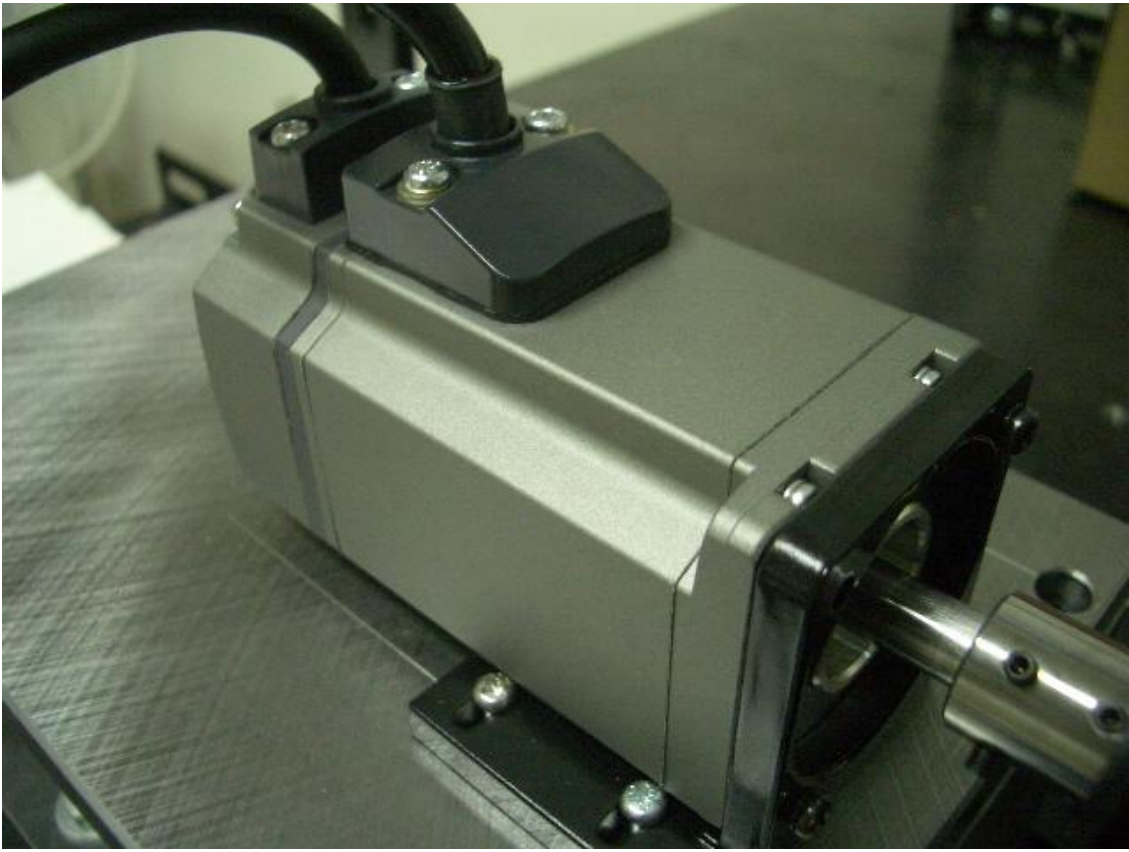


Fig.7-9 モーター

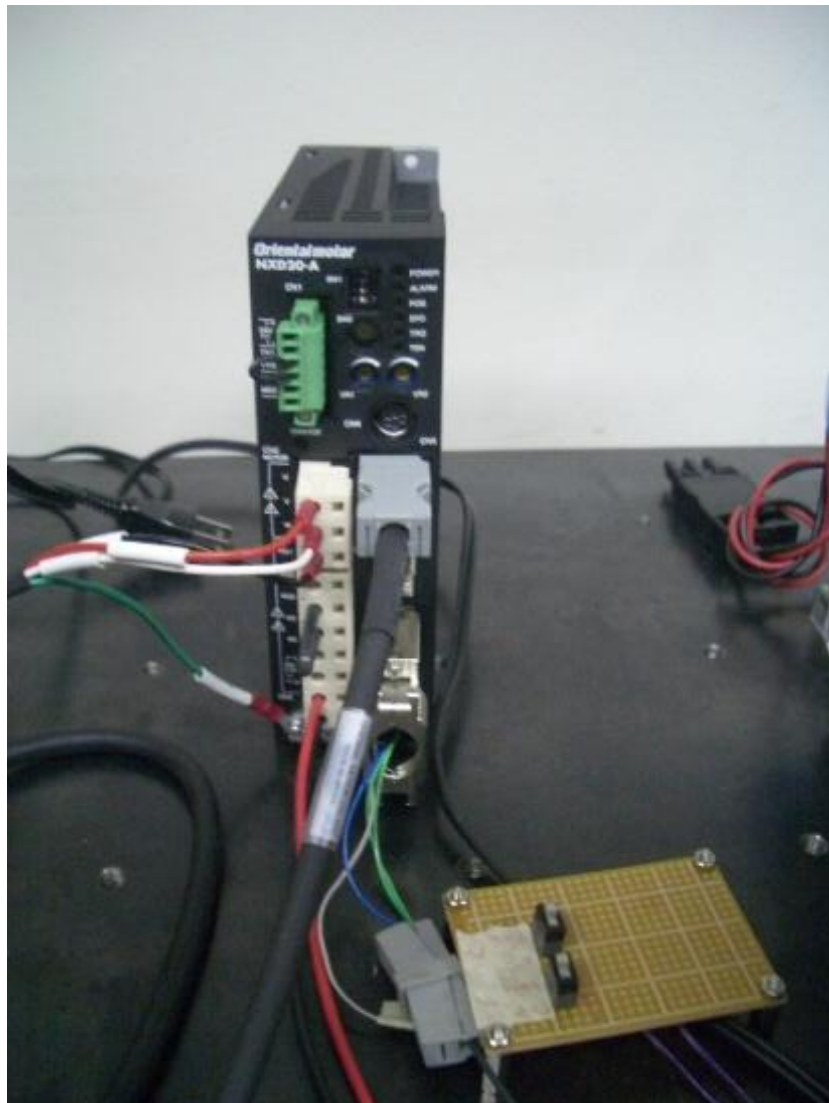


Fig.7-10 速度変換機





Fig.7-11 ロータリートランスミッター

Table.7-2 試験機材の詳細

---

FFT アナライザー：RION SA-01(4~16ch タイプ)

レベルレンジ：-40dB~+30dB 10dB ステップ

ダイナミックレンジ：90dB

周波数レンジ：1Hz~20Hz および 40kHz の 15 レンジ

ポイント数：256~32769 ポイント(2 のべき乗)

動歪測定器：共和電業 DPM-712B

測定チャンネル数：1(多チャンネル化可能)

適用ブリッジ抵抗：60~1000Ω

ロータリートランスミッター：Jordil Technic ROTRANS-04-R

許容回転数：42,000rpm 内部抵抗：0.25mΩ

測定チャンネル数：4 (ワイヤー数)

半導体歪ゲージ：共和電業 KSN-2-120-E4-16

ゲージ抵抗：約 120Ω ゲージ長さ：2mm ゲージファクター：-104±3%

最大許容歪：±3000μm/m 最大許容電流：20mA

---

### 7.3.3 実験方法

ファンモーターの羽部分に半導体歪ゲージを貼り、回転中の振動を測定した。歪ゲージの配線が絡まないように、ロータリートランスミッターを接続した。器具を取り付けたので、ファンのトルクだけでは規定の回転数には届かなかった。そこで、本実験ではファンの羽根部に別のモーターをコネクターで接続した。モーター、速度変換機を使ってファンモーターを回転させた。また、歪ゲージの配線をまとめるためにロータリートランスミッターを用いた。

測定点は1点とし、3300rpm,3900rpm,4500rpm,5100rpm の回転数で測定した。解析周波数を、1000 サンプルング点数を 8192 として各回転数につき 5 回測定を行い、その平均をデータとして収録した。また、低回転数から徐々に回転数を上げて次数比解析も行った。こちらでは、3600rpm,4200rpm,4800rpm までの3通りを行った。

Fig.7-12 に実験風景を示す。

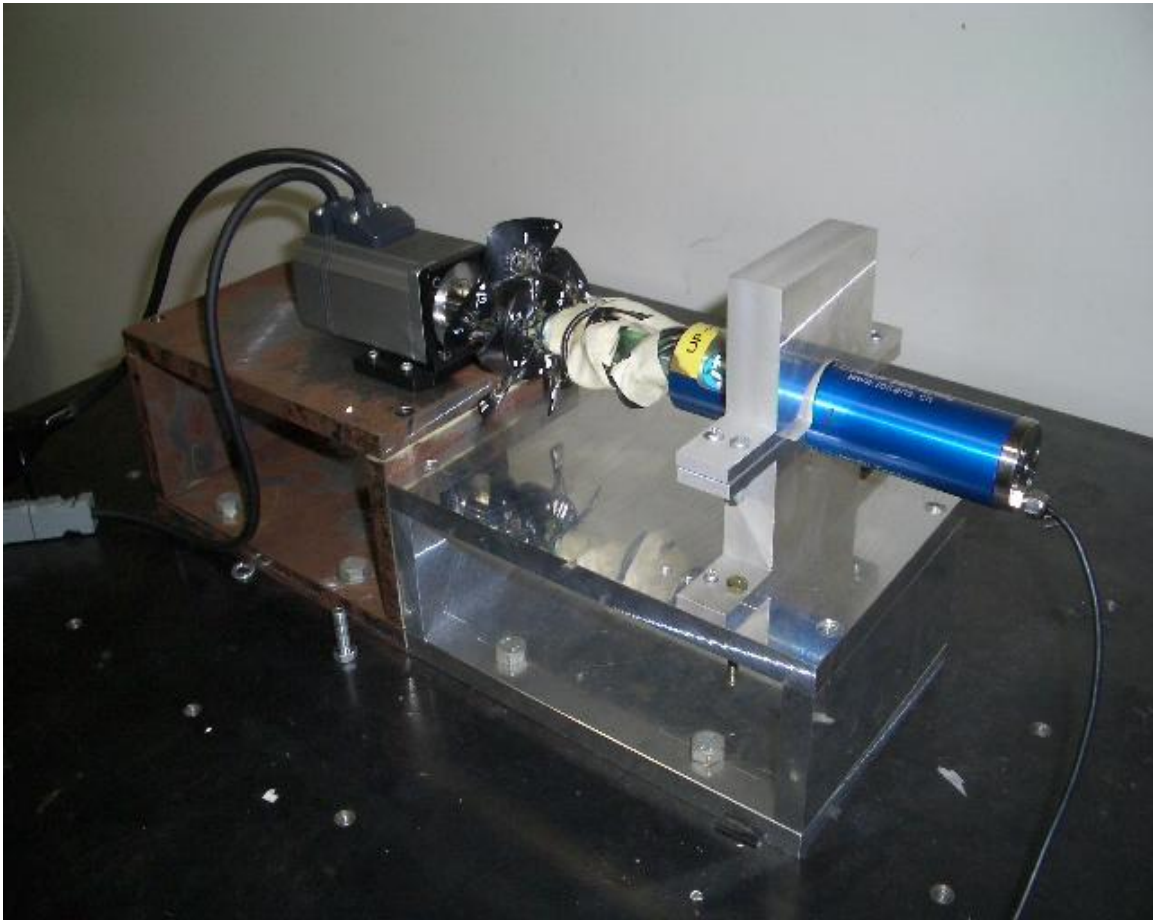


Fig.7-12 実験風景

### 7.3.4 実験結果

実験結果の歪スペクトルのグラフを Fig.7-13 から Fig.7-16 に示す。また、それぞれの回転数における歪量を Table.7-3 から Table.7-6 に示す。

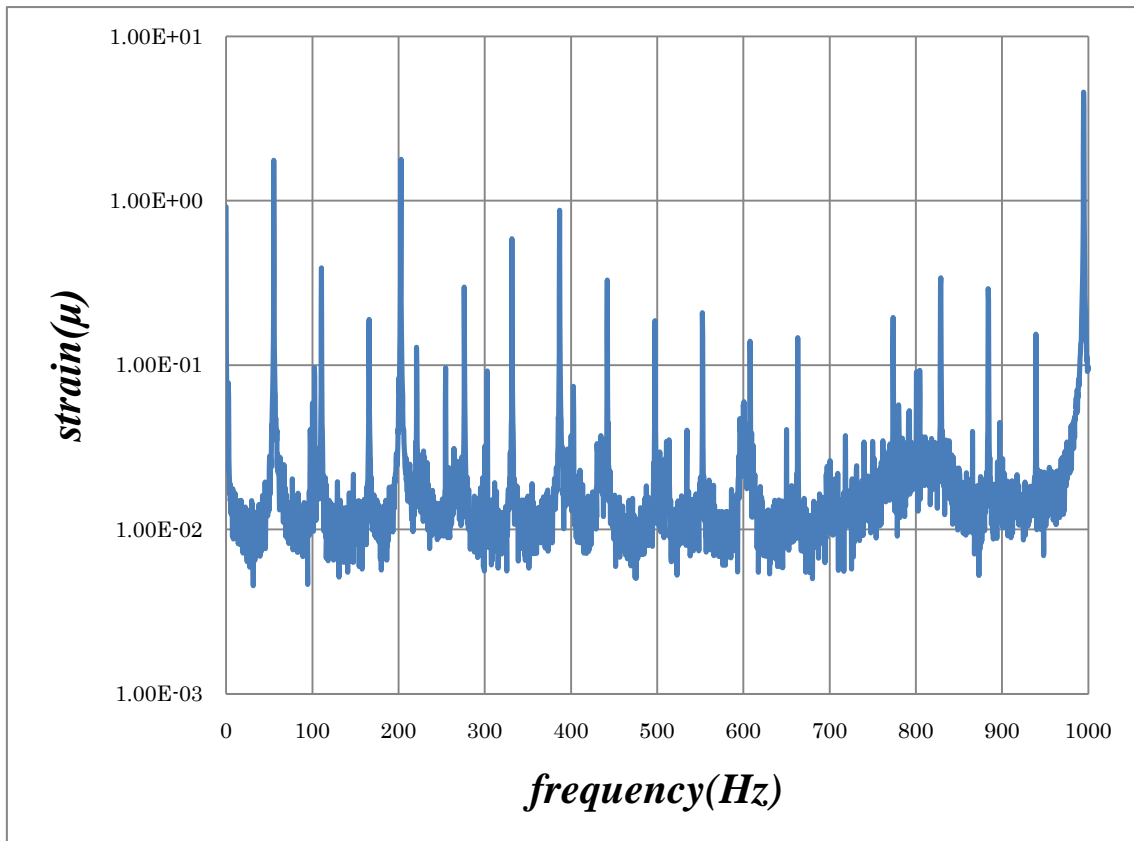


Fig.7-13 3300rpm(55rps)での歪スペクトル

3300rpm では、55Hz ごとに回転次数成分のピークが見られた。55.3Hz が一番大きく、歪の値は 1.76 $\mu\epsilon$  だった。それ以外のピークで一番歪が大きかったのは 202.8Hz で、歪の値は 1.79 $\mu\epsilon$  だった。

これらの歪を比較すると、回転次数成分の方がわずかに大きい結果となった。

Table.7-3 3300rpm(55rps)での歪の比較

回転数 (rpm)	周波数 (Hz)	歪 ( $\mu\epsilon$ )
3300	202.8	1.79
	55.3(回転次数成分)	1.76

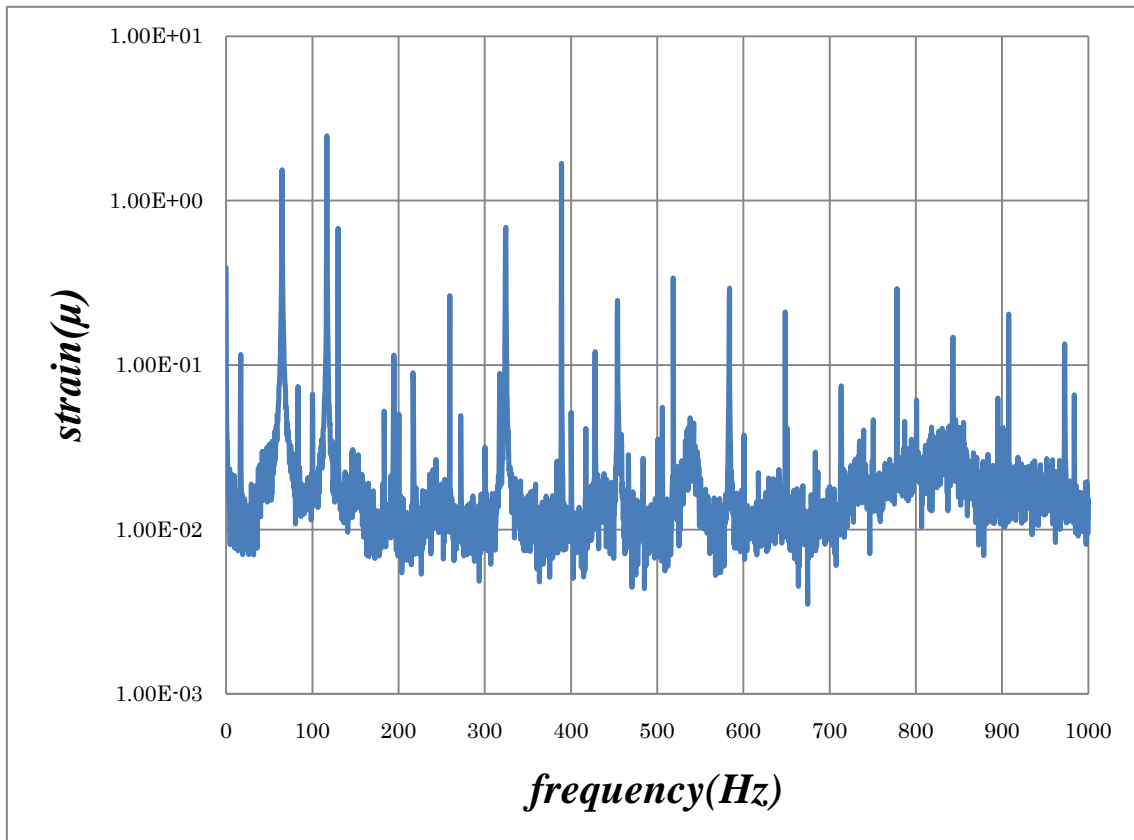


Fig.7-14 3900rpm(65rps)での歪スペクトル

3900rpm では、65Hz ごとに回転次数成分のピークが見られた。390Hz が一番大きく、歪の値は 1.69 $\mu\epsilon$  だった。それ以外のピークで一番歪が大きかったのは 116Hz で、歪の値は 2.47 $\mu\epsilon$  だった。

これらの歪を比較すると、回転次数成分の方がわずかに大きい結果となった。

Table.7-4 3900rpm(65rps)での歪の比較

回転数 (rpm)	周波数	歪 ( $\mu\epsilon$ )
3900	116	2.47
	389(回転次数成分)	1.69

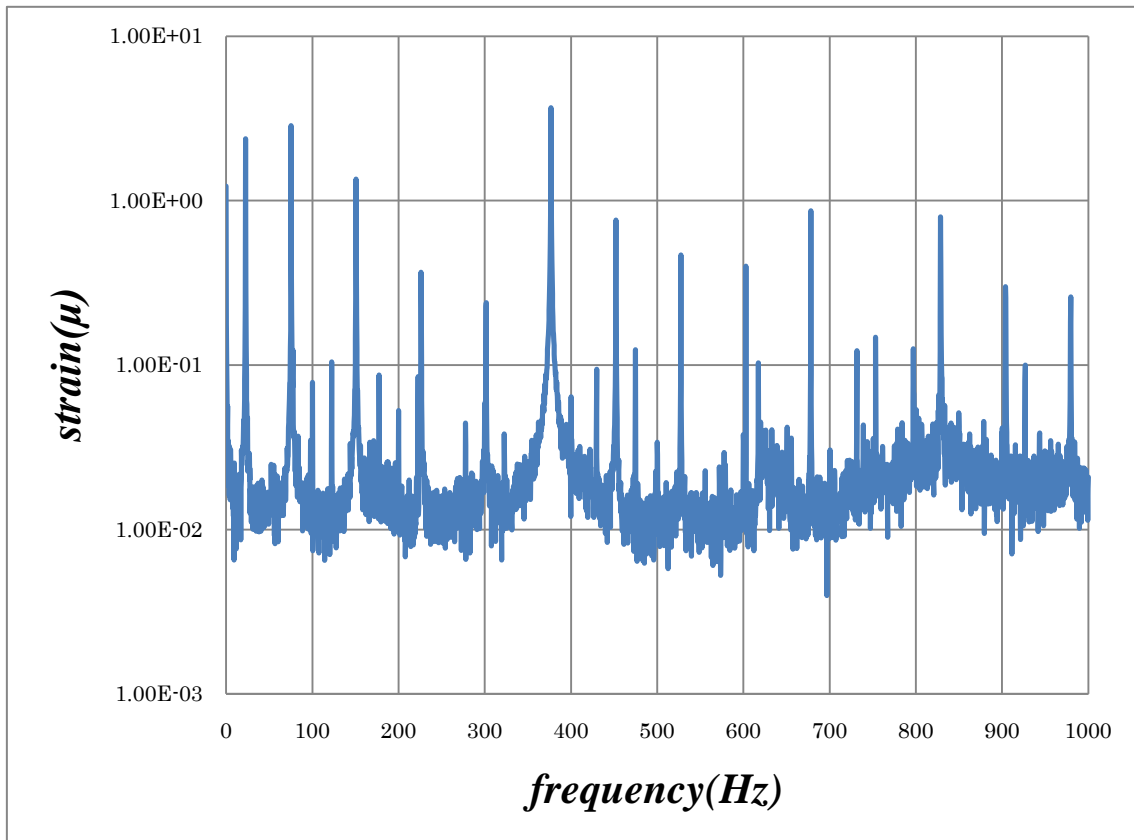


Fig.7-15 4500rpm(75rps)での歪一周波数グラフ

4500rpm では、75Hz ごとに回転次数成分のピークが見られた。75Hz が一番大きく、歪の値は  $2.86\mu\epsilon$  だった。それ以外のピークで一番歪が大きかったのは 22.5Hz で、歪の値は  $2.38\mu\epsilon$  だった。

これらの歪を比較すると、回転次数成分の方がわずかに大きい結果となった。

Table.7-5 4500rpm(75rps)での歪の比較

回転数 (rpm)	周波数 (Hz)	歪 ( $\mu\epsilon$ )
4500	22.5	2.86
	375(回転次数成分)	3.68

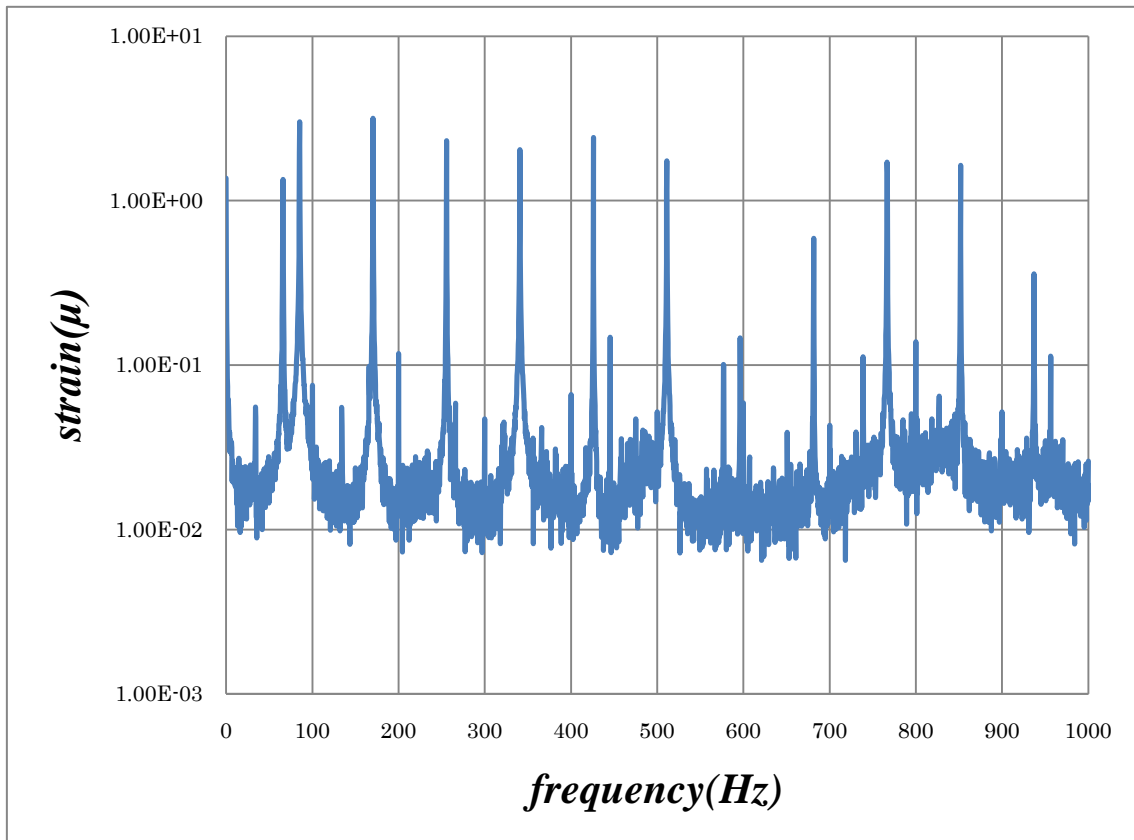


Fig.7-16 5100rpm(85rps)での歪一周波数グラフ

5100rpm では、85Hz ごとに回転次数成分のピークが見られた。160Hz が一番大きく、歪の値は  $3.16\mu\epsilon$  だった。それ以外のピークで一番歪が大きかったのは 22.5Hz で、歪の値は  $1.35\mu\epsilon$  だった。

これらの歪を比較すると、回転次数成分の方が大きい結果となった。

Table.7-6 5100rpm(85rps)での歪の比較

回転数 (rpm)	周波数 (Hz)	歪 ( $\mu\epsilon$ )
5100	22.5	1.35
	160(回転次数成分)	3.16

実験結果の各回転数のグラフから 1 次の回転次数成分より低い周波数において、大きな歪量がみられた。これは剛体振動によるものと考えられる。

また、500Hz 以下では回転次数成分によって歪量の大きさにばらつきが見られたが、5100rpm ではあまり変わらなかった。

稼働時に発生する振動の歪量が、回転次数成分とほぼ同じかそれ以下であった。従って、ファンと空気といった流体における共振現象は発生しないと考えられる。

続いて、次数比解析の結果を Fig.7-17 から Fig7-19 に示す。

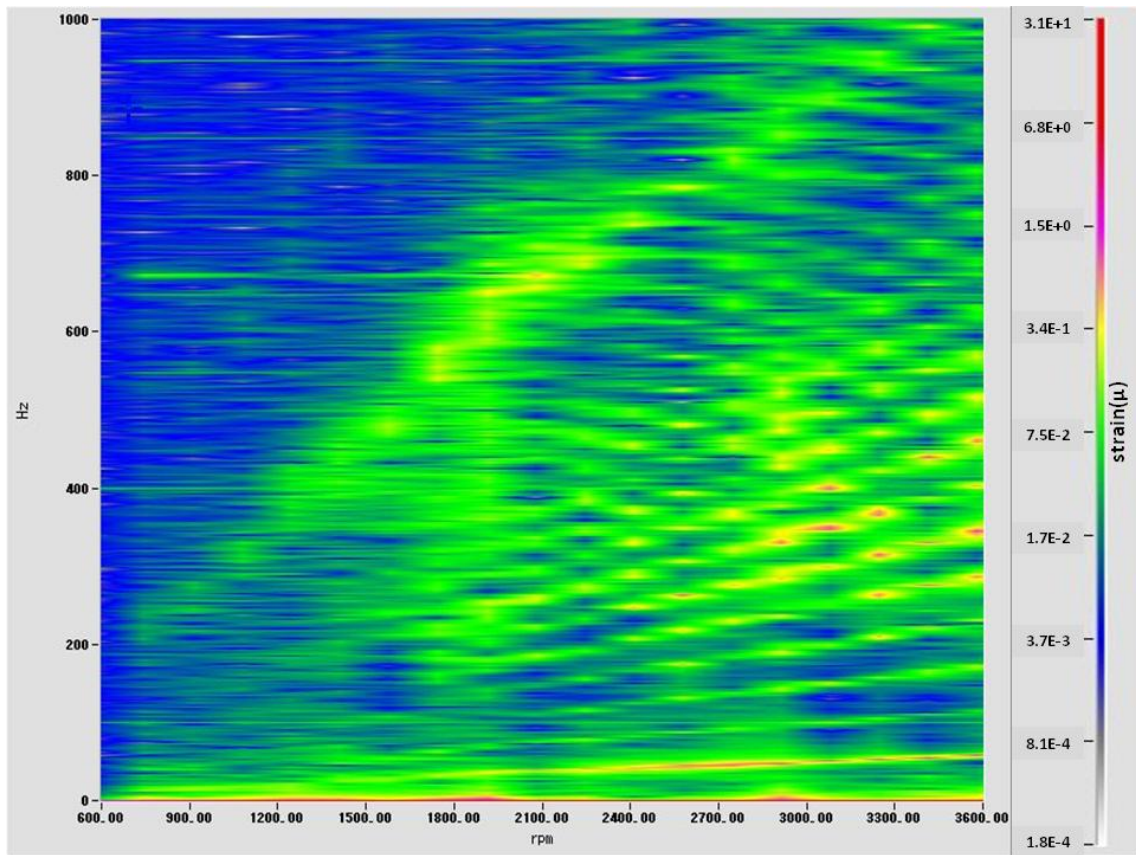


Fig.7-17 3600rpm までの歪スペクトル



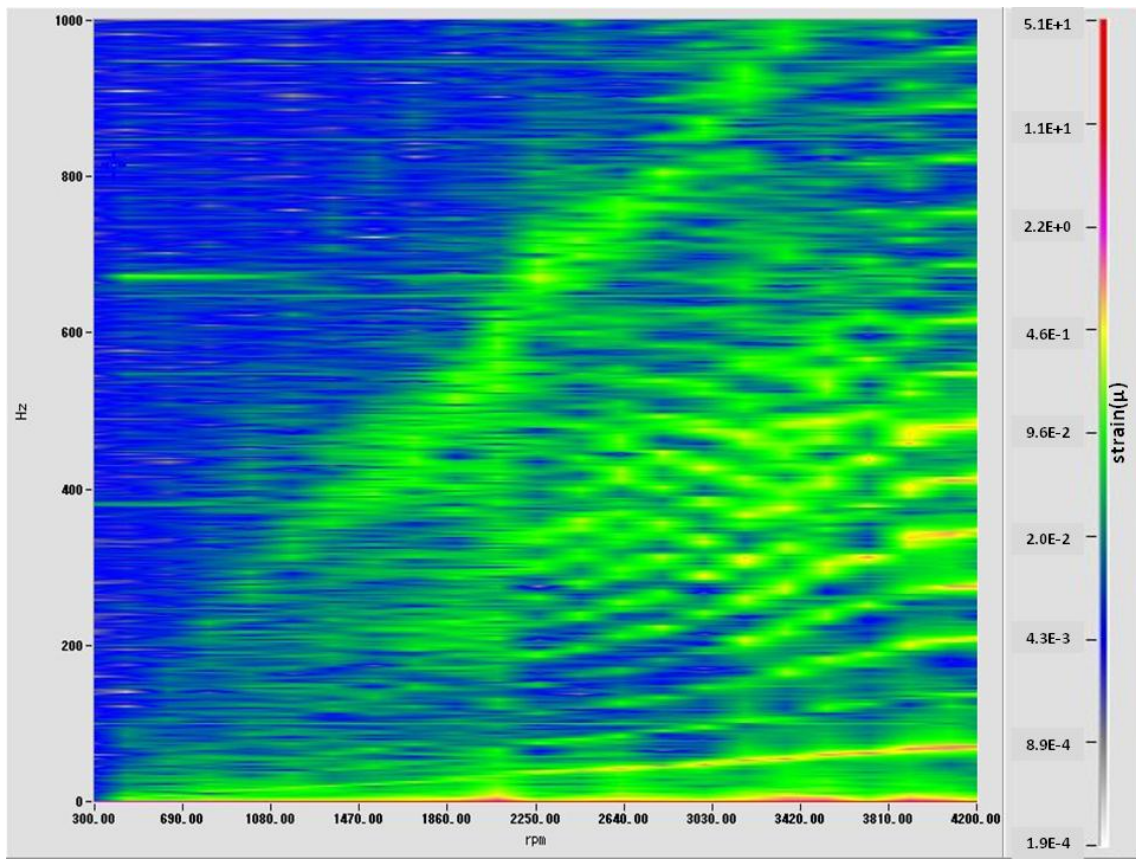


Fig.7-18 4200rpm までの歪スペクトル



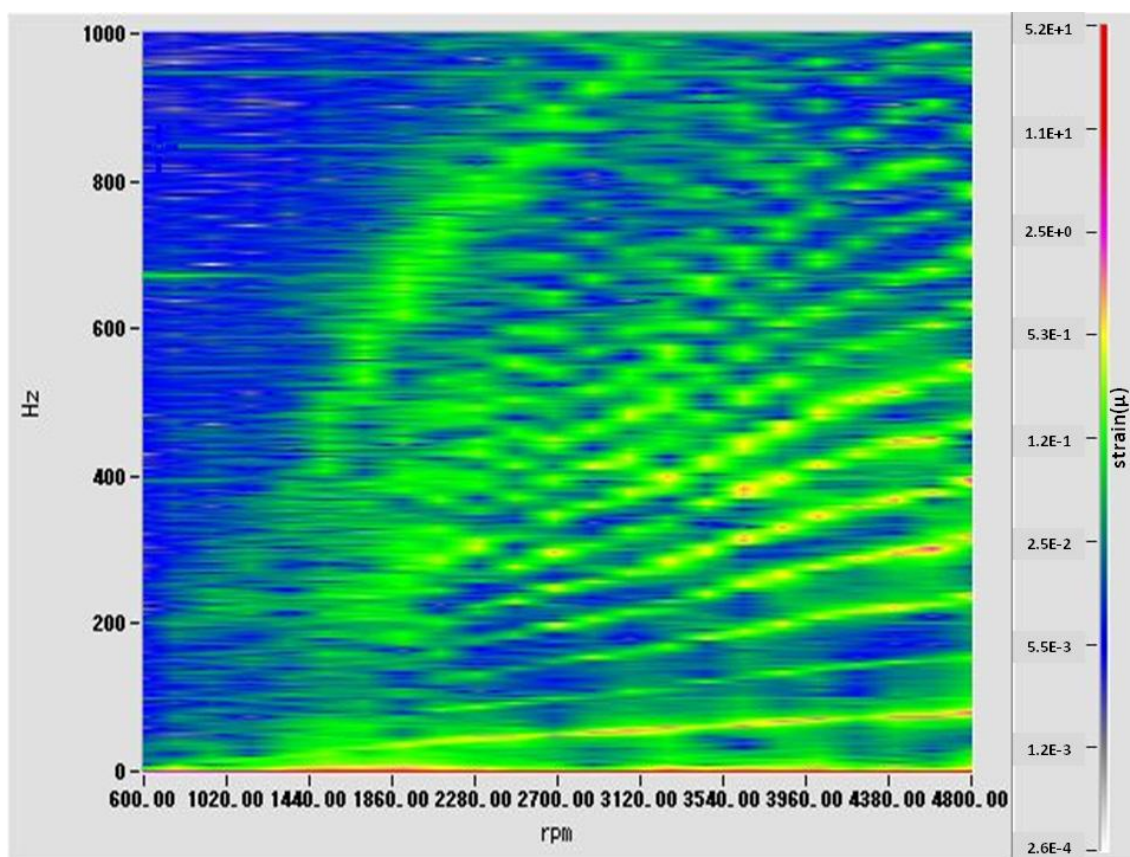


Fig.7-19 4800rpm までの歪スペクトル

Fig.7-17 から Fig.7-19 より, 3500rpm 以降の 300Hz から 500Hz における部分で比較的大きな歪が見られた. 1 次の回転次数成分では 2000rpm 以降において比較的大きな歪が見られた.

## 7.4 結論

歪ゲージを用いて稼働中の振動を測定することができた.  
実験から, ファンの共振現象は発生しない事が分かった.

## 第 8 章 結論

実験モード解析により，固有振動数及び固有モード形状を同定する事が出来た．

有限要素モデルを作成して NASTRAN 解析を行ったところ，固有振動数及び固有モード形状の結果が見られた．この結果を実験モード解析と比較したところ，固有振動数には誤差が見られたが固有モード形状は近いものとなった．

加速度ピックアップを用いた次数比解析より，400Hz から 450Hz の間では回転数によらず比較的大きな振動が見られた．また，歪ゲージを用いた実稼働試験より，回転次数成分と他のピークを比べると回転次数成分の方が大きかった．歪振動，加速度共に小さい値であり，共振現象による不具合は発生しないと考えられる．

## 参考文献

- 1)長松昭男, ”モード解析入門”, コロナ社, 1993 年.
- 2)三好俊郎, ”有限要素法入門”, 培風館, 2001年.
- 3)山本敏男, 石田幸男, 回転機械の力学, コロナ社, 2001 年.

## 謝辞

本研究を行うにあたり，大変多忙な中ご指導して下さいました長松昭男先生，御法川学教授，岩原光男助手に心より感謝を申し上げます．先生方のご教授なしに本研究を遂行することは不可能でした．また共に研究を行った田村靖典君，塚田孝弘君に深くお礼申し上げます．

研究対象を提供し，貴重な助言をいただきましたオリエンタルモーター株式会社の高橋様，米澤様および皆様に深くお礼申し上げます．