

損失推移率モデルを用いたCDSポートフォリオの評価

滑志田, 謙 / NAMESHIDA, Ken

(発行年 / Year)

2011-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2011-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2010 年度修士論文

損失推移率モデルを用いた CDS ポートフォリオの評価



法政大学大学院
工学研究科システム工学専攻

09R6208 滑志田 謙

指導教員 浦谷 規 教授

THE 2010 MASTER'S THESIS

CDS PORTFOLIO PRICING BY LOSS TRANSITION RATES



DEPARTMENT OF SYSTEM ENGINEERING
GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING
HOSEI UNIVERSITY

09R6208 KEN NAMESHIDA

SUPERVISOR PROF. TADASHI URATANI

概 要

本論文では,CDS ポートフォリオの全体損失額に注目し, 損失推移率モデルを用いて CDS ポートフォリオの解析解を算出する.SCHONBUCHER(2006) により提案されている, 企業の倒産確率を考慮する損失推移率モデルを用いて将来時刻での債務企業の倒産確率をモデル化する. さらに, 損失推移率モデルに確率過程を導入することによって, ポートフォリオ内の債務企業に倒産が生じた直後のポートフォリオ価値の変動を表現する. また CDS のプレミアム価格データからポートフォリオ全体の損失推移率を推定し,STCDO とヨーロッパ・コールオプションの価格付けも行う.

Abstract

In the thesis, we consider the pricing method of CDS portfolio by Loss Transition Rates Model, which is proposed by SCHONBUCHER(2006). We focus total loss of the portfolio for pricing STCDO and European call option on a STCDO. We evaluate the default probability of obligators in the future time. Our model explains the effect of portfolio value caused by a default of obligators, introducing a stochastic process to the Loss Transition Rates. Finally we calculate the price of STCDO and European call option on a STCDO.

目次

1	はじめに	1
1.1	CDS	1
1.2	CDO	2
2	損失推移率モデル	5
2.1	損失過程	5
2.2	損失分布	6
2.3	損失推移確率	8
2.4	調和性	11
2.5	One-Step 条件	12
3	確率推移率モデル	18
3.1	倒産が生じない時刻での損失推移確率	18
3.2	倒産が生じる時刻での損失推移確率	21
3.3	ドリフト制約	22
3.4	確率推移率モデルの数値例	24
4	CDS ポートフォリオ	29
4.1	CDS ポートフォリオ派生証券	29
4.2	STCDO と対象としたヨーロッパン・コールオプション	32
4.3	市場統計からの損失推移率の推定	35
4.4	CDS の個別銘柄からの損失推移率の推定	38
5	結論	42
A	付録	43
A-1	損失推移確率の導出	43
A-2	調和性の証明	45
A-3	One-Step 条件での損失推移確率の導出	48
A-4	One-Step 条件での調和性	50
A-5	確率推移率モデルでの損失推移確率の導出	52
A-6	ドリフト制約	56
	参考文献	59
	謝辞	60

1 はじめに

企業の倒産などの信用リスク資産を取引対象としたクレジットデリバティブ市場は、近年ますます標準化され拡大している。欧米では iTraxx(EURO) や CDX(U.S) などのインデックス CDO や STCDO(Single Tranche CDO) の流動市場が存在すると同時に、新たなポートフォリオ CD が生成されている。日本においては金融機関間の店頭取引が主流となっている。

クレジットデリバティブの価格付けについては、これまで多くの研究がされており、その代表的なものに、企業間の倒産相関に注目した Gauss Copula Model を挙げることができる。しかし、Gauss copula model にも問題が存在する。例えば、Gauss copula model では、同一のデフォルト相関係数を用いた価格付けをすることができない。つまり、同一のポートフォリオから組成された CDO においても Gauss copula model では、各トランシェごとに異なる倒産相関係数を示してしまう。本来であれば、同一の相関係数でなければならない。この相関係数の相違を改善するために、本論文では異なる方法で CDS ポートフォリオの価格付けを試みている。ポートフォリオ全体の累積損失に注目し、将来の債務者の倒産確率をモデル化するものである。CDS を発行する債務企業の損失分布を求め、ポートフォリオの損失レベルを可視化した上で本モデルの核となる損失推移率を計算する。最終的に、本モデルのパラメータは全て市場のデータから推定するため、現実の市場動向に則したモデルとなっている。

1.1 CDS

CDS (Credit Default Swap) とはクレジットデリバティブの一種で、企業の債務不履行などのデフォルトリスクを対象にした金融派生商品である。CDS の買手は契約期間中に発生する対象企業のデフォルトリスクを移転する対価として、売手に対してプレミアム（手数料）を支払う。契約期間中に対象企業に関する信用事由が発生しなければ、契約満期をもって契約終了となる。つまり、CDS の買手は売手にプレミアムを支払っただけとなる。一方、契約期間中に対象企業に関する信用事由が発生した場合、決済が行われる。買手は、CDS の契約元本金額に対して、あらかじめ決められた損失率に相当する金額を CDS の売手から受け取ることになる。

CDS の契約内容

CDS 契約での基本的な契約内容は、対象企業・契約期間・元本金額・決済方法・回収率・信用事由・プレミアムなどがある。

(1) 対象企業

対象企業は、政府や企業など、デフォルト発生を判断する対象になる組織のことである。ここには政府系機関も含まれ、対象企業と呼ぶことにする。

(2) 契約期間

対象企業のデフォルト発生が、決済の対象となる期間のことである。市場で最も流動性が高いものは5年であるが、店頭市場では数カ月から20年超まで、多くの期間が取引されている。

(3) 元本金額

元本金額はデフォルト発生時の決済のもととなる金額である。円建の場合10億円が基本となるが、ドル建で

は 1,000 万ドルが最も頻繁に取引される額面金額である。

(4) 決済方法

契約期間中に対象企業に信用事由が発生した場合の決済方法で、一般的に現物決済と現金決済がある。

現物決済は、信用事由発生時に、買手が契約元本金額相当の対象企業の債務を売手に受け渡し、売手から契約元本金額相当の現金を受取る決済方法である。買手にとっては信用リスクの影響を受けずに済み、売手にとっては当初から現物資産投資を行っていた場合と同様の経済効果となる。

(5) 回収率

現物決済では、信用事由発生後の一定期間経過後の到底時点で計算期間がデフォルト後の現物資産の時価を計算し、それを回収率として損失率を決定する。(損失率 = 1 - 回収率)。CDS の買手は契約元本金額に関して損失率相当金額を売手から受け取ることになる。

(6) 信用事由

信用事由とは、決済の対象となるイベントのことである。基本的な信用事由としては、倒産・破産、支払い不履行、事業再編成、期限の利益喪失、履行拒絶・支払猶予などが挙げられる。

(7) プレミアム

プレミアムはデフォルトリスクに関する保険料である。買手は売手に、契約期間中の一定期間においてプレミアムを支払う。信用事由が発生した場合、プレミアムの支払いが停止されるタイプがほとんどである。

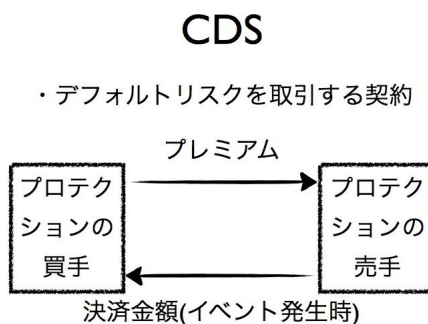


Fig.1 CDS 取引の概要

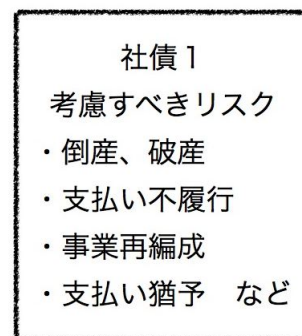


Fig.2 CDS に関するリスク

Fig. 1, Fig. 2 は CDS 取引の概略を示している。Fig. 1 では、プロテクションの買手が売手に一定期間ごとにプレミアムを支払う。信用事由が発生した場合、売手から買手に決済金額が支払われる。Fig. 2 は、プロテクションの買手が回避すべきリスクである信用事由が示されている。

1.2 CDO

CDO は、債権やローン、CDS などのクレジットリスクを保有するクレジット資産のポートフォリオを原資産とする証券化商品である。CDO の大きな特徴としてはポートフォリオ構造と優先劣後構造を挙げることができる。したがって、投資家にとって CDO とは、社債投資、融資といった従来のクレジット投資と同様に信用リスクへの投資であると同時に、多数の債権プールによるリスク分散効果、優先劣後構造、信用補完といった

メリットを得られる商品である。

ポートフォリオ構造

CDO の発行に際しては,SPC(Special Purpose Company) という,CDO 取引のためだけに設立される特別目的事業体が個々の債権を購入し,それらのクレジット資産でポートフォリオを組み,優先劣後構造を持った証券を組成する.投資家にとってはリスクの分散効果が期待できる一方,債権数が多くなることで投資債権のリスクの管理が難しくなることがある。

優先劣後構造

優先劣後構造とは,デフォルト等の信用事由により原資産に損失が生じた場合に,支払い優先度が低いトランシェ(証券区分)から損失を負担していく決済構造である.各トランシェのペイオフは原資産のペイオフに依存しており,その優先度によって格付けが決定される.つまり,同一の原資産のポートフォリオを基にしながらも,シニア・メザニン・エクイティといった,異なるリスクとリターンを持つ CDO 債権が発行されることになる.このように,投資家のリスク性向に対応した多様な債権を発行できる柔軟性が CDO の特徴である。

低リスク志向であれば,安定性の高いシニア債に投資をすることで優先劣後構造から得られる信用補完を享受できる.また,高リスクによるハイリターンを志向するならば,メザニン債もしくはエクイティ債に投資をすればよい。

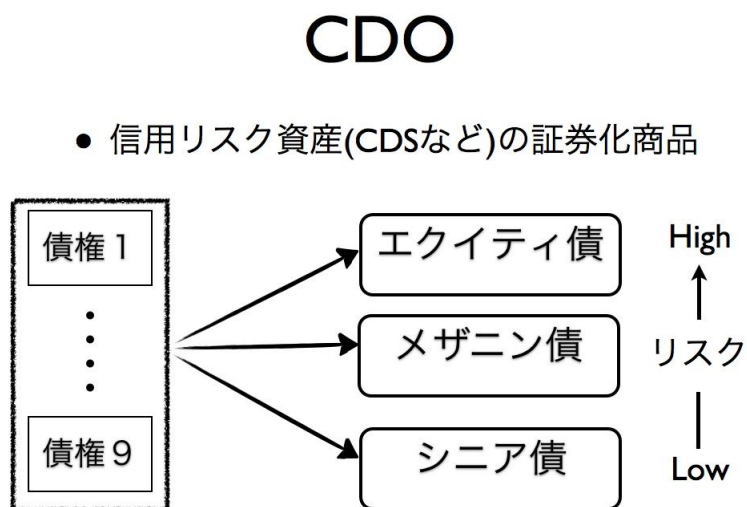


Fig.3 CDO 取引の概要

Fig. 3 は CDO の組成の概略を表した図である.CDO とは, このように9つの債権が存在するとき,それらを1つのポートフォリオとしてまとめリスクやリターンに応じ細分化した商品が発行する仕組みである.ここでは,エクイティ債・メザニン債・シニア債として3つの商品に細分化した例を示している.エクイティ債とは,ハイリスク・ハイリターンの商品であり,シニア債はローリスク・ローリターンの商品である。

トランシェ\満期	5 Years			10 Years		
Low ~ High	Bid (€)	Offer (€)	BC (%)	Bid (€)	Offer (€)	BC (%)
3 ~ 6 %	96	100	23.13	505	520	13.34
6 ~ 9 %	33	36	31.43	48	55	32.61
9 ~ 12 %	12	15	38.91	22	25	55.85

Fig.4 iTraxx の取引価格

Fig. 4 は Gauss copula model によって計算された iTraxx の取引価格の例示である.iTraxx とは欧州 125 銘柄で構成される CDS の指標のことである. ここでは, 5 年満期と 10 年満期について各商品が保証する損失率に応じ, 3 つのトランシェの取引価格を示している.Bid, Offer は売値と買値.BC は, Gauss copula model で計算された企業間の倒産相関係数である.

Gauss copula model によって計算された各トランシェの倒産相関係数が, 異なる値を示していることがわかる. この 3 つの商品は同一の債券ポートフォリオから生成されているので, 本来は同一の値を取らなくてはならない. つまり, Gauss copula model では, CDS ポートフォリオの企業間の相関係数を表現できていないことが分かる. よって本研究では, 個別の企業に注目するのではなく, ポートフォリオ全体の累積損失に注目した損失推移率モデルによって CDS ポートフォリオの評価を行う.

損失推移率モデルの特徴として, ポートフォリオ全体の累積損失に注目している点, 損失過程によって損失レベルを可視化している点, 将来時刻の損失確率をモデル化している点などが挙げられる.

2 損失推移率モデル

CDS ポートフォリオの損失推移率を定義することによって、ポートフォリオの全体損失を計算し、CDS 派生商品の評価を行う。本章ではまず、このモデルの基礎となる概念を定義していく。その概念とは、損失過程、損失分布、損失推移率、損失推移確率である。さらにモデルの有用性と現実性を高めるために、調和性と One-Step という 2 つの条件を加えていく。

2.1 損失過程

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ について考えていく。

$\mathcal{F}_t$: 時刻 t に得ることのできる情報量

$\mathbb{P}$: スポットマルチンゲール確率

定義 2.1.1 (損失過程)

本論文で考慮する CDS ポートフォリオでは、債務企業 $i = \{1, \dots, I\}$ が存在することとし τ_i を債務企業 i の倒産時刻とする。これによって、ある時刻までの倒産企業数を表す損失過程を定義する。

1. 倒産インディケータ

$$D_i(t) = \mathbb{I}_{\{\tau_i \leq t\}}$$

2. 損失過程

$$L(t) := \sum_{i=1}^I D_i(t)$$

3. 損失確率 ($t \leq T, m = 0, \dots, I$)

$$p_m(t, T) := \mathbb{P}[L(T) = m | \mathcal{F}_t]$$

4. 損失分布

$$\mathbf{p}(t, T) = (p_0(t, T), p_1(t, T), \dots, p_I(t, T))^T$$

[解説]

1. 時刻 t での、債務企業 i の倒産の有無を表している $\mathbb{I}_{\{\tau_i \leq t\}}$ はインディケータ関数であり、時刻 t において倒産が生じれば 1 となり、企業が生存する場合は 0 となる。
2. $L(t)$ は時刻 t での倒産数を表しており、各債務企業における倒産インディケータの総和で表現できる。このとき、 $L(t)$ は有界な非減少関数であり、劣マルチンゲールとなる。
3. 時刻 t までの情報の下で、時刻 T に m 社が倒産している確率を示す損失確率は条件付き確率で表すことができる。
4. $\mathbf{p}(t, T)$ は時刻 t における損失分布を表している。損失分布は同時刻における損失確率によって生成される。

[証明]

ここで、定義 2.1.1 において、損失過程 $L(t)$ が劣マルチンゲールとなることを示す。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^I D_i(t)|\mathcal{F}_s\right] \quad (s \leq t) \\
&\geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^I D_i(s)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=1}^I D_i(s) = L(s)
\end{aligned}$$

以上より, 損失過程 $L(t)$ は劣マルチンゲールとなる.

$$\mathbb{E}[L(t)|\mathcal{F}_s] \geq L(s)$$

2.2 損失分布

損失分布は, 同時刻での倒産数に対する損失確率によって生成されていた. ここでは, 損失分布の持つ性質について考える.

仮定 2.2.1 (損失分布)

損失分布は以下の性質を持つものとする.

1. 時刻 T までの全時刻において, $p_n(t, T)$ は右微分可能である.
2. $0 \leq t \leq T_0 \leq T$ のとき,
 $p_n(t, T_0) \geq 0$ ならば $p_n(t, T) \geq 0$ となる.

[解説]

1. $p_n(t, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}[L(t+h) = L(t)|\mathcal{F}_t] = 1$ となり, 損失過程 $L(t)$ を連続時間で考えられる.
2. 損失確率 p_n も連続時間で考えることができる.

性質 2.2.2 (損失確率)

以上の仮定のもとで損失確率 $p_n(t, T)$ の性質を考えていく.

1. $p_n(t, T) \geq 0$ であり, $\sum_{m=0}^I p_m(t, T) = 1$ となる.
2. $m < L(t)$ のとき, $p_m(t, T) = 0$
3. $p_n(t, t) = \mathbb{I}_{\{L(t)=n\}}$
4. $\mathbb{P}[L(t) \leq n|\mathcal{F}_t] = \sum_{m=0}^n p_m(t, T)$

[解説]

1. 全ての損失確率は非負であり, 同時刻の損失確率の和は 1 である.
2. 将来時刻において倒産数が減少する確率は 0 である.
3. 時刻 t に倒産数が n となる確率を, 損失確率 p_n と損失過程 $L(t)$ を用いて表している.
4. 損失過程 $L(t)$ は非減少関数である.

仮定 2.2.3 (非斉時的マルコフ過程の導入)

ここまで、損失過程と損失分布の性質について述べてきた。本論文での損失とは企業の倒産を指している。企業の倒産確率は過去の時刻の倒産確率に依存しないものと仮定し、損失過程に非斉時的マルコフ連鎖を導入する。この損失過程を非斉時的マルコフ過程と呼ぶ。マルコフ過程とは将来時刻の条件付き確率が過去の状態に依存せず、現在の状態だけに依存する確率過程のことである。

$$\mathbb{P}[X(t+h) = y | X(s) = x(s), \forall s \leq t] = \mathbb{P}[X(t+h) = y | X(t) = x(t)], \forall h > 0$$

このうち、次に条件を満たすマルコフ過程を非斉時的マルコフ過程と呼ぶ。

$$\mathbb{P}[X(t+h) = y | X(t) = x] = \mathbb{P}[X(h) = y | X(0) = x], \forall t, h > 0$$

この非斉時的マルコフ連鎖の下での損失過程 $\tilde{L}(t)$ を考える。

$\tilde{L}(t)$ ：非斉時的マルコフ連鎖のもとでの損失過程。

このときの損失推移確率は、下記のように表すことが出来る。

$$P_{nm}(t, T) = \mathbb{P}[\tilde{L}(T) = m | \tilde{L}(t) = n]$$

損失推移確率とは時刻 t で n 社の倒産が生じているとき、時刻 T で m 社の倒産が生じる確率のことである。

損失推移確率行列は、 $(I+1) \times (I+1)$ の正方行列であり、損失推移率行列から生成される。各行列の要素を、損失推移確率および損失推移率と呼ぶ。この2つの概念が、モデルの最も重要な核となるものである。

性質 2.2.4 (損失推移率)

時間空間 $0 \leq n \leq m \leq I$ を考える。

1. $a_{nm}(t, T) = \frac{1}{P_{nm}(t, T)} \frac{d}{dT} P_{nm}(t, T)$
2. $a_{nm}(t, T) \geq 0$
3. $\sum_{k=0, k \neq n}^I a_{nk}(t, T) = -a_{nn}(t, T)$
4. $a_n(t, T) := \sum_{k=n+1}^I a_{nk}(t, T)$
5. $n > m$ を満たすとき、 $a_{nm}(t, T) = 0$

[解説]

1. 損失推移率 a_{nm} は、状態 n から状態 m に推移する確率的速度を表している。
2. 全ての損失推移率は非負である。
3. 対角要素の損失推移率は、非対角要素の和の符号を反転したものに等しい。つまり各行和が0となる。
4. 非対角要素の和を、その時刻での損失推移率とする。
5. 損失過程は非減少関数であるので倒産数が減少する確率は0となり、その損失推移率も0となる。

2.3 損失推移確率

次に、上で述べた損失推移確率と損失推移率の性質を用いて損失推移確率の解析解を計算する。損失推移確率を計算することで、CDS ポートフォリオ全体の期待損失額を計算することができるようになる。損失推移率はマルコフ過程に従うものとし、損失推移確率を損失過程の条件付き確率で表現するところから計算を始める。

$$\begin{aligned}
 P_{nm}(t, T) &= \mathbb{P}[\tilde{L}(T) = m | \tilde{L}(t) = n] \\
 &= \sum_{k=0}^I \mathbb{P}[\tilde{L}(T) = m, \tilde{L}(s) = k | \tilde{L}(t) = n] \\
 &= \sum_{k=0}^I \mathbb{P}[\tilde{L}(T) = m | \tilde{L}(s) = k, \tilde{L}(t) = n] \cdot \mathbb{P}[\tilde{L}(s) = k | \tilde{L}(t) = n] \\
 &= \sum_{k=n}^m \mathbb{P}[\tilde{L}(T) = m | \tilde{L}(s) = k] \cdot \mathbb{P}[\tilde{L}(s) = k | \tilde{L}(t) = n] \\
 &= \sum_{k=n}^m P_{km}(s, T) \cdot P_{nk}(t, s)
 \end{aligned}$$

以上より、

$$P_{nm}(t, T) = \sum_{k=n}^m P_{nk}(t, s) \cdot P_{km}(s, T) \quad (2.1)$$

式 (2.1) はチャップマン・コルモゴロフの等式と呼ばれる。ここで、 P_{nm} を時間関数 T で微分することによって、損失推移確率の偏微分方程式を求める。

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_{nm}(t, T)}{dT} &= \frac{P_{nm}(t, T + \Delta t) - P_{nm}(t, T)}{\Delta t} \\
 &= \sum_{k=n}^m P_{nk}(t, T) \cdot \frac{P_{km}(t, T + \Delta t) - P_{km}(t, T)}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

このとき、損失推移率を次のように定義する。

$$a_{km}(t, T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{km}(t, T + \Delta t) - P_{km}(t, T)}{\Delta t}$$

つまり、損失推移確率の微分方程式は次のように表すことができる。

$$\frac{dP_{nm}(t, T)}{dT} = \sum_{k=n}^m P_{nk}(t, T) a_{km}(t, T)$$

以上より、 P_{nm} の時刻 T での微分方程式を求めることができた。

$$\frac{dP_{nm}(t, T)}{dT} = \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t, T) a_{km}(t, T) - P_{nm}(t, T) a_m(t, T) \quad (2.2)$$

この式 (2.2) の微分方程式を解くことにより、損失推移確率 P_{nm} を求めていく。損失推移率と損失推移確率の議論では現在時刻での倒産数 n と、将来時刻の倒産数 m の考慮が重要となってくる。ここでは n, m の大小関係について場合分けして式 (2.2) を解いていく。^{*1}

^{*1} 付録 A-1 を参照

1. $n > m$ (デフォルト数が減少する場合)
2. $n = m$ (デフォルト数が変化しない場合)
3. $n < m$ (デフォルト数が増加する場合)

式 (2.2) を上記の将来の倒産状況での場合分けの下で計算すると下記のように数値解を求めることができる。

将来時刻の倒産状況に対する損失推移確率 P_{nm} は次の通りである。

また、詳細な計算過程は付録 A-1 に示した。

$$P_{nm}(t, T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ \exp \left[- \int_t^T a_m(t, s) ds \right] & (n = m) \\ \int_t^T \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t, s) a_{km}(t, s) \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u) du \right] ds & (n < m) \end{cases}$$

上記の解析解からもわかるように、損失推移確率は指数関数の性質をもっている。 $(n = m)$ では将来時刻において倒産企業数が増加しない確率を表しており、その確率は時間経過とともに増加し 1 に近づいていく。 $(n < m)$ では将来時刻において倒産数が増加するときの確率を示し、その確率は減少していく。

ここまで議論を進めてきた損失分布、損失推移率、損失推移確率の性質を検証する。まず、性質 2.2.4 を満たすような損失推移率を作成し、式 (2.2) の偏微分方程式を解くことによって損失推移確率を計算する。このとき、損失推移確率は仮定 2.2.3 を満たすとする。さらに後述する定理 2.4.1 を用い、損失分布を表現する。このとき、損失分布は仮定 2.2.1、性質 2.2.2 を満たしているとする。損失推移確率が依存する変数を変動させることで、損失推移確率の特徴を検証した。

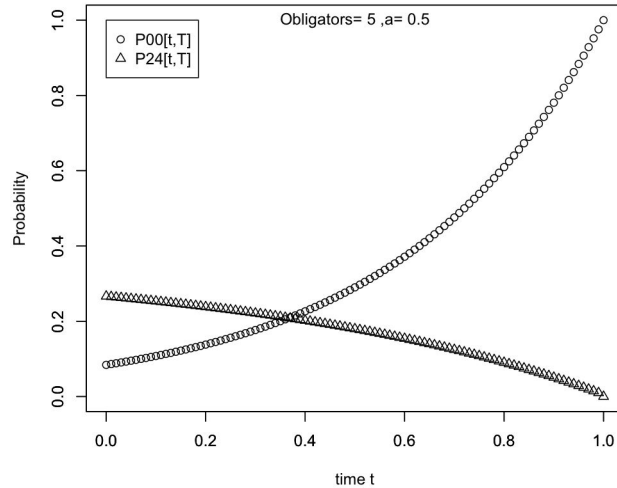


Fig.5 損失推移確率

Fig. 5 は、現在時刻 t を満期 $T = 1$ まで変化させたときの損失推移確率である。損失推移率 $a_{nm}(t, T) = 0.5$ とした。新たな倒産が生じない確率 $P_{00}(t, T)$ は増加し、倒産数が 2 社から 4 社に増加する確率 $P_{24}(t, T)$ は減少している。満期時刻において、 $P_{00}(t, T) = 1, P_{24}(t, T) = 0$ となる。

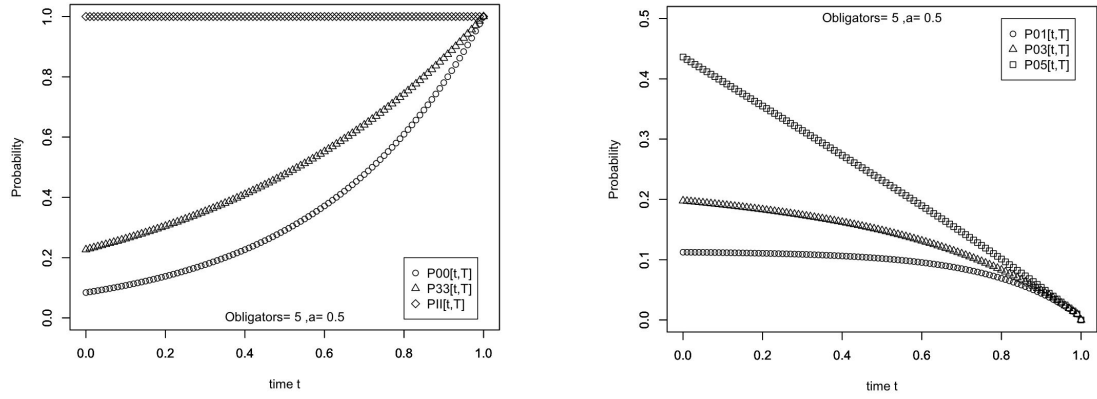


Fig.6 損失推移確率の性質

Fig. 6 左図は, $n = m$ となる状態つまり, 新たな倒産が起きない確率を各状態ごとにプロットしたものである. 状態数が増えるに従い, その確率は増加している. また, 全ての債務者が倒産した場合, 新たな倒産は起きないものとしているため, $P_{II} = 1$ となっている.

Fig. 6 右図は, $n < m$ となる状態つまり, 新たな倒産が起きる確率を各状態ごとにプロットしたものである. より大きい状態数に推移する確率の方が大きくなっている. また, 満期時刻においては新たな倒産が起こる確率は $P = 0$ となるので, $n < m$ の場合は 0 に収束している.

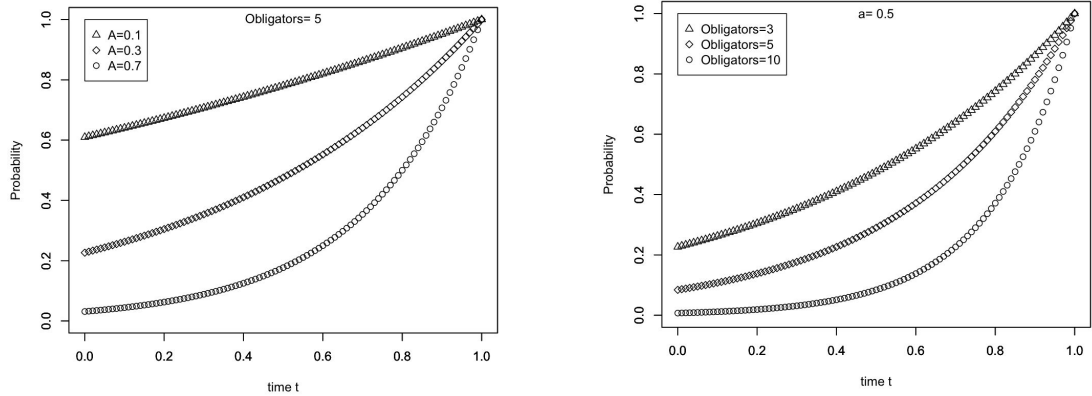


Fig.7 損失推移率と債務者数による変化

Fig. 7 左図は, 損失推移率を変化させたときの損失推移確率 $P_{00}(t, T)$ の変位である. ここでは, 損失推移率を $a_{nm}(t, T) = 0.1, 0.3, 0.7$ とした例を示している. 推移率が大きいほど各時刻の $P_{00}(t, T)$ の値は小さくなり, 倒産数が増加する確率が大きくなっている.

Fig. 7 右図は, 債務企業数を変動させたときの損失推移確率 $P_{00}(t, T)$ の変位である. ここでは, 債務企業数を 3, 5, 10 社とした例を示している. 債務企業数が増えるほど, 新たな倒産が生じる確率は高くなる. Fig. 7 より, 損失推移確率は損失推移率と債務企業数にも依存していることがわかる.

2.4 調和性

企業の損失過程はマルコフ連鎖の性質を持つものと仮定し、損失過程にマルコフ連鎖を導入した。ここまでは、損失分布 $\mathbf{p}(t, T)$ は損失過程 $\tilde{L}(t)$ によって生成されていた。また、損失推移確率 $P_{nm}(t, T)$ は損失推移率 $a_{nm}(t, T)$ によって生成されていた。もし、損失分布 $\mathbf{p}(t, T)$ と損失推移確率 $P_{nm}(t, T)$ が等しいとき損失過程 $\tilde{L}(t)$ と損失推移率 $a_{nm}(t, T)$ は調和性を持つということにする。つまり損失推移率を決定することで、損失推移確率を求めることができ、同時に損失分布も表現できることになる。調和性が成り立つことで、このモデルは損失推移率の決定に注目してモデルを構築できる。この主張を下に図示する。

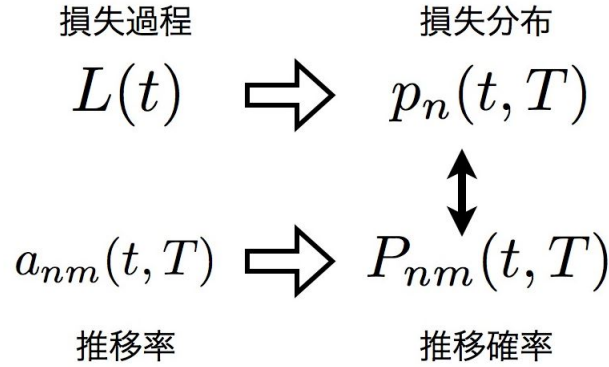


Fig.8 調和性

Fig. 8 において損失過程と損失推移率が調和性を持つための条件は、損失分布と損失推移確率が等しくなることである。次の定理 2.4.1 によって、それを証明する。^{*2}

定理 2.4.1 (マルコフ損失過程での調和性)

損失分布 $p(t, T)$ が仮定 2.2.1, 性質 2.2.2 を満たしているとする。

マルコフ連鎖 $\tilde{L}(T)$ と生成行列 $A(t, T)$ が存在するとき、損失推移確率は損失分布を表す。

$$p_n(t, T) = P_{\tilde{L}(t), n}(t, T) \quad for(0 \leq n \leq I, T \geq t)$$

[証明] 付録 A-2 を参照

定理 2.4.1 より、マルコフ連鎖の存在を前提として損失推移率と損失推移確率の議論を進めていく。

定理 2.4.2 (損失過程での調和性)

$$p_n(t, T) = P_{Ln}(t, T) \quad for(0 \leq n \leq I, T \geq t)$$

[証明]

定理 2.4.1 と同様に、各状態での推移率の存在を示しコルモゴロフ方程式を満たしていることを示す。

^{*2} 付録 A-2 を参照

定理 2.4.1, 定理 2.4.2 によって, コルモゴロフ方程式に従う損失推移確率の存在がモデルが調和性を持つための条件であることがわかる. モデルが調和性を持つことによって, 決定された損失推移確率から得られる損失推移確率から損失分布を表現できる.

定理 2.4.3 (マルコフ過程における倒産時刻)

倒産強度 k のマルコフ連鎖 $\tilde{L}^k$ に従う損失過程のもとでの n 回目のジャンプ時刻 $\tau^k(n)$ の損失分布は損失過程 L での n 回目のジャンプ時刻の損失分布に収束する. つまり, 今までと同じように $\tilde{L}^k$ を扱うことが出来る.

$\tilde{L}^k$: 強度 k のマルコフ損失過程

$\tau^k(n)$: n 回目の倒産時刻

σ_n^k : 倒産の発生間隔

[証明]

倒産時刻 $\tau(n)$ と, 倒産の発生間隔 σ_n を下記のように定義する.

$1 \leq n \leq I$ を考える.

$$\begin{aligned}\tau(0) &= 0 \\ \sigma_n &= \tau(n) - \tau(n-1)\end{aligned}$$

次に, 倒産強度 k のマルコフ損失過程の下での倒産時間間隔 σ_n^k を定義する.

$$\sigma_n^k = \sigma_n + E_n^k$$

倒産時間間隔は損失確率に従うため, 一定ではない. ここで, E_n^k は, ランダムなノイズを表している. このとき,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\tau_n^k \leq T] &= \mathbb{P}\left[\sum_{l=1}^n (\sigma_l + E_l^k) \leq T\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\tau_n + \sum_{l=1}^n E_l^k \leq T\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\tau_n \leq -\sum_{l=1}^n E_l^k + T\right]\end{aligned}$$

ここで, k は倒産強度であり, 単位時間における倒産数を表している. そのため, k を増加させると倒産数が増加し, 倒産間隔 σ^k は減少する. つまり, ランダムなノイズ E^k も減少する. つまり, $\lim_{k \rightarrow \infty} E_l^k = 0$ となる.

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\tau_n^k \leq T] &= \mathbb{P}\left[\tau_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} -\sum_{l=1}^n E_l^k + T\right] \\ &\rightarrow \mathbb{P}[\tau_n \leq T]\end{aligned}$$

[定理 2.4.3 証明終了]

2.5 One-Step 条件

さらに, 微小時間間隔での倒産可能数についての制限を加える. 微小時間間隔において倒産が生じる確率のある企業数を 1 社とすると, これを One-Step 条件という. これは, 実際の市場では考えにくい同時倒産の

可能性を排除する条件である. このモデルでは, One-Step 条件の下で CDS ポートフォリオを考えていく. 定理 2.4.3 では, デフォルト強度を考慮したマルコフ連鎖過程の下での損失分布が, マルコフ連鎖を考慮しない損失過程の下での損失分布に近似することを示した. つまり, マルコフ連鎖過程を用いて損失分布を表現できるということである. 与えられた全ての損失分布には損失推移率行列 $A(t, T)$ が存在する. もし連続的に新たなデータが得られる環境の下であるならば, $A(t, T)$ は連続的に更新されていく確率的なモデルとなる. そのとき, $A(t, T)$ は情報 $\mathcal{F}_t$ で与えられた損失分布を表すことができる.

ここでは, One-Step での損失推移確率を損失推移率行列と微分方程式 (2.2) から導くとともに, 損失推移確率 $P_{nm}(t, T)$ と損失推移率行列 $A(t, T)$ が調和性を持つための条件について議論を進めていく. 性質 2.5.1 において, One-Step の状態での損失分布と損失推移率の性質について述べる.

性質 2.5.1 (One-Step での損失推移率)

損失推移率に One-Step 条件を加えることにより現実的なモデルとなる.

$0 \leq t \leq T$ とし $p(t, T)$ を時刻 t での損失分布とする. このとき, 損失分布 $p(t, T)$ は One-Step 条件の下で次の性質を持つ.

1. (a) $p_n(t, T) \geq 0, \sum_{m=0}^I p_m(t, T) = 1$
 (b) $p_n(t, t) = \mathbb{I}_{\{L(t)=n\}}$
 (c) $p_m(t, T) = 0 \text{ for } (m < \tilde{L}(t))$
 (d) $\mathbb{P}[\tilde{L}(T) \leq n | \mathcal{F}_t] = \sum_{m=0}^n p_m(t, T)$
2. $p_n(t, T) > 0 \text{ for } (T > t, n \geq L)$
3. $a_n(t, T) := \frac{-1}{p_n(t, T)} \sum_{k=L}^n \frac{\partial}{\partial T} p_k(t, T) \text{ for } (L \leq n \leq I)$
4. $\lim_{T \rightarrow t} a_n(t, T) < \infty$

[解説]

1. 損失推移確率についての性質は, 性質 2.2.2 と同様である.
2. 将来時刻についての損失推移確率は正である.
3. , 4. One-Step の下での損失推移率の定義.

この性質のもとで, マルコフ連鎖過程 $\tilde{L}(T)$ でのコルモゴロフ方程式 (2.2) の解 $P(t, T)$ は損失分布 $p(t, T)$ を表すことができる.

性質 2.5.1 での仮定より, One-Step での損失推移率は次のように表すことが出来た.

$$\begin{aligned} a_n(t, T) &:= \frac{-1}{p_n(t, T)} \sum_{k=L}^n \frac{\partial}{\partial T} p_k(t, T) \\ &= \frac{-1}{P_{Ln}(t, T)} \sum_{k=L}^n \frac{\partial}{\partial T} P_{Lk}(t, T) \end{aligned}$$

$\tilde{L}(t) = L$ とすると, 定理 2.4.1 より $p_n(t, T) = P_{Ln}(t, T)$ が成り立つ.

次に損失推移確率について考える.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t, T) &= \sum_{k=n}^m \frac{\partial}{\partial T} P_{nk}(t, T) - \sum_{k=n}^{m-1} \frac{\partial}{\partial T} P_{nk}(t, T) \\ \frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t, T) &= -P_{nm}(t, T)a_m(t, T) + P_{nm-1}(t, T)a_{m-1}(t, T) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

この偏微分方程式を解くことで, One-Step での損失推移確率を求めることが出来る.*3

そのために, 状態 n と状態 m の大小関係について場合分けをして考えていく.

1. $n > m$ (デフォルト数が減少する場合)
2. $n = m$ (デフォルト数が変化しない場合)
3. $n < m$ (デフォルト数が増加する場合)

解析解の計算結果は, 付録 A-3 を参照.

性質 2.5.2 (One-Step 条件での損失推移確率と損失推移率行列)

One-Step 条件での損失推移確率と損失推移率の性質についてまとめる.

1. $\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t, T) = -P_{nm}(t, T)a_m(t, T) + P_{nm-1}(t, T)a_{m-1}(t, T)$
2. $P_{nm}(t, T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ \exp \left[-\int_t^T a_m(t, s) ds \right] & (n = m) \\ \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t, u) du} P_{nm-1}(t, s) a_{m-1}(t, s) ds & (n < m) \end{cases}$
3. $a_{nm}(t, T) = 0 \text{ for } m \notin \{n, n+1\}, (0 \leq n \leq I)$
4. $a_n(t, T) := -a_{nn}(t, T) = a_{nn+1}(t, T) \text{ and } a_I(t, T) = 0 \text{ for } (0 \leq n \leq I)$

One-Step 条件の下での損失推移確率についての偏微分方程式は上記のように求められ, この偏微分方程式を解くことにより損失推移確率が得られる.

また, 損失推移率行列 $A(t, T)$ は, 準対角行列となる. 損失推移率は微小時間における推移の確率的速度を表していた. One-Step 条件では微小時間間隔での倒産可能数を 1 社に限定しているのので, 状態 $\{n, n+1\}$ の損失推移率にのみ注目すればよい. つまり, ここでは $A(t, T)$ を次のような行列で考えていく.

$$A(t, T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{nn} & a_{nn+1} & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{II} \end{pmatrix}$$

*3 付録 A-3 を参照

定義 2.5.3 (One-Step での損失分布)

$A(t, T)$ と $P(t, T)$ を確率過程とし, 性質 2.5.2 を満たしているとする. 推移確率と損失分布について次のような関係式が成り立つとき, $A(t, T)$ と $P(t, T)$ は互いに調和関係にあるという.

$$P_{L(t)n}(t, T) = p_n(t, T) = \mathbb{P}[L(T) = n | \mathcal{F}_t]$$

定理 2.5.4 (One-Step 条件での損失推移率行列)

$A(t, T)$ が性質 2.5.2 を, $L(t)$ が定義 2.1.1, 仮定 2.2.1 を満たしているとする. このとき, 次の条件式は同値である.

1. $A(t, T)$ は $L(t)$ と調和関係にある.
2. $P_{L(t)n}(t, T)$ はマルチンゲールである. $for(n \leq I, t \leq T)$
3. (a) $P_{L(t)n}(t, T)a_n(t, T)$ はマルチンゲールである. $for(n \leq I, t \leq T)$
 (b) $\lambda_{L(t)} := a_{L(t)}(t, t)$ を損失過程の倒産強度とする.

[証明]*4

1. $\Rightarrow$ 2.

1. が成り立つとき定義 3.2 より, $P_{L(t)n}(t, T) = p_n(t, T)$ である. ($s \leq t$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_{L(t)n}(t, T) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[p_n(t, T) | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{I}_{L(T)=n} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_{L(T)=n} | \mathcal{F}_s] \\ &= p_n(s, T) = P_{L(s)n}(s, T) \end{aligned}$$

よって $P_{L(t)n}(t, T)$ はマルチンゲールである.

2. $\Rightarrow$ 1.

$P_{L(t)n}(t, T)$ がマルチンゲールとなるとき,

$$\begin{aligned} P_{L(t)n}(t, T) &= \mathbb{E}[P_{L(t)n}(T, T) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}} | \mathcal{F}_t] = p_n(t, T) \end{aligned}$$

よって 1. が成り立つことがわかる.

2. $\Rightarrow$ 3.(a), 2. $\Rightarrow$ 3.(b), 3. $\Rightarrow$ 1. の証明は, 付録 A-4 を参照

また, 3. $\Rightarrow$ 1. の証明において, 倒産強度 $\lambda_L(t)$ と損失過程 $L(t)$ には, 次のような関係性が示された.

$$dL(t) = \lambda_L(t)dt \quad (2.3)$$

ここまで One-Step での損失推移率と損失推移確率の性質について述べてきた. 次の Fig. 9, Fig. 10 に One-Step 損失推移確率の性質を示した. このとき, 損失推移率と損失推移確率は, 性質 2.5.1, 2.5.2 を満たし, 調和性の条件として定理 2.5.4 を満たしている.

*4 付録 A-4 を参照

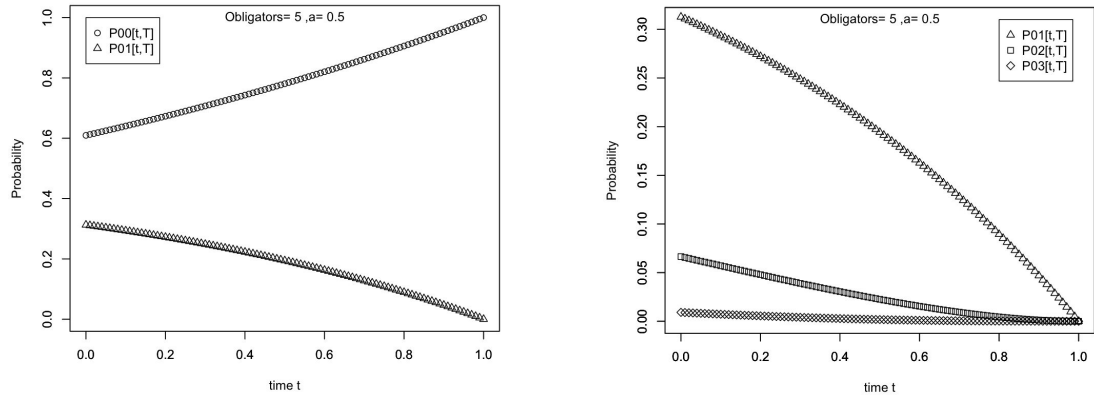


Fig.9 One-Step 損失推移確率の性質

Fig. 9 左図は、現在時刻 t を変動させた One-Step 損失推移確率である。One-Step では、単位時間での倒産数を 1 社に限定している。損失推移率行列は、その時刻の状態から新たな倒産が生じない場合と、新たに 1 社倒産する場合のみを考慮する。そのため、新たな倒産が生じない確率が高くなる。

Fig. 9 右図は、One-Step で $n < m$ となる状態つまり、新たな倒産が起きる確率を各状態ごとにプロットしたものである。より大きい状態数に推移する確率の方が小さくなっている。これは、One-Step での倒産条件を反映するものである。次の 1 社への倒産確率の推移と、2 社以降への倒産確率の推移では従う指数分布の性質が異なっている。

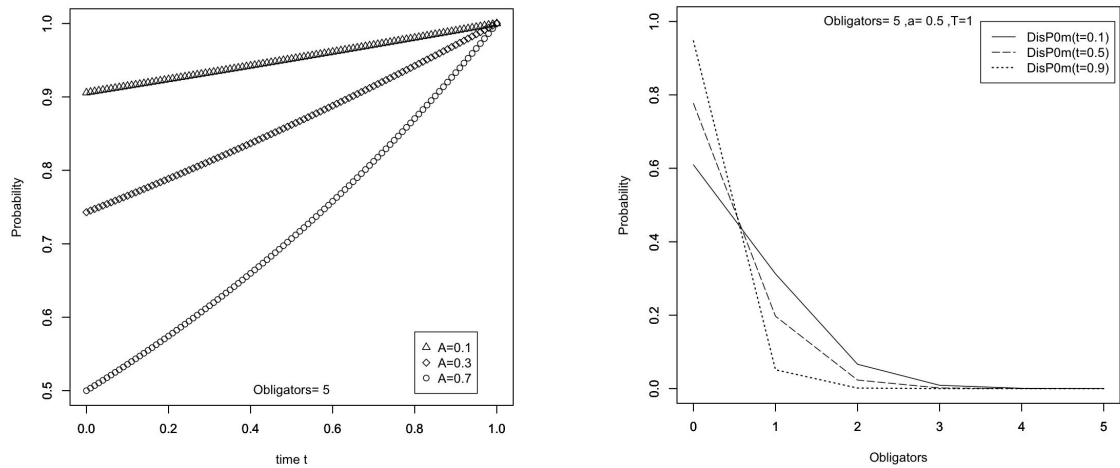


Fig.10 損失推移率による変化と損失分布

Fig. 10 左図は、One-Step において、損失推移率を変動させたときの損失推移確率 $P_{00}(t, T)$ である。One-Step でないモデルに比べ $P_{00}(t, T)$ は高い値を示している。また、One-Step 条件の下では、損失推移確率の持つ指数関数の性質が弱くなっている。

Fig. 10 右図は、満期時刻を $T = 1$ とし、全ての債務者が生存しているとして、全ての状態数への推移確率を示している。One-Step の下では、新たな倒産が起きる確率が低くなるため、より大きい状態数へ推移する確率は低くなっている。さらにその傾向は、時刻が進むに従って顕著となっている。

損失推移率行列 $A(t, T)$ に倒産強度 $\lambda_{(L(t))}$ を導入することは, $A(t, T)$ と $L(t)$ が調和性を持つことの必要条件であることがわかった. 損失推移率行列と損失過程の間に調和性が確認されるとき, 損失推移率行列を決定することで損失推移確率を求めることができ, さらに損失分布をも表現することができる. つまり, 本研究においては今後, 損失推移率の決定に注目し, モデルの構築を進めていく. 損失推移率をより現実に則したモデルとするために, 次章では損失推移率に確率過程を導入し, より適当なモデルを構築していく.

3 確率推移率モデル

実際の市場で CDS ポートフォリオの評価を行う場合、損失推移率は定数ではなく変数でなくてはならない。それは時刻の変化によって企業の経営状態が変化することでポートフォリオの損失確率も変動するためである。もし損失推移率が定数ならば、損失推移確率が一定の値を取ってしまう。そのため、この章では損失推移率に確率過程を導入する。確率過程は多次元ブラウン運動に従うとする。損失推移率がブラウン運動に従う確率変数となることで、より複雑な損失推移確率を持つ CDS ポートフォリオを表現できる。

まず導入する確率過程を示し、その確率過程に従う損失推移確率を求める。そして、確率過程の下でも損失推移率と損失過程が調和性を持つような条件について考えていく。

One-Step での推移確率は下記のように表すことができた。

$$P_{nm}(t, T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ \exp \left[- \int_t^T a_m(t, s) ds \right] & (n = m) \\ \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t, u) du} P_{nm-1}(t, s) a_{m-1}(t, s) ds & (n < m) \end{cases}$$

上記から、推移確率 $P_{nm}(t, T)$ は推移率 $a_m(t, T)$ から生成されていることがわかる。

この章では、推移率 $a_n(t, T)$ に次の確率過程を導入する。

$$da_n(t, T) = \mu_n(t, T)dt + \sigma_n(t, T)dW$$

ここで、 W は多次元ブラウン運動である。ここでは、 $\mu_n(t, T), \sigma_n(t, T)$ は定数としている。本章では、この確率過程を導入したときの推移確率を、倒産が生じない時刻と、倒産が生じる時刻について求めていく。

3.1 倒産が生じない時刻での損失推移確率

1. $n = m$ のとき

$$P_{nm}(t, T) = \exp \left[- \int_t^T a_m(t, s) ds \right]$$

$$dP_{nm}(t, T) = d \exp \left[- \int_t^T a_m(t, s) ds \right]$$

ここで $A(t, s, T) = - \int_t^T a_m(t, s) ds$ とし、 $F(t, s, T) = \exp[A(t, s, T)]$ とする。

伊藤の公式より

$$\begin{aligned} dF(t, s, T) &= F_t dt + F_A dA + \frac{1}{2} F_{AA} dA^2 \\ &= F(t, s, T) a_m(t, t) dt + F(t, s, T) \left(- \int_t^T da_m(t, s) ds \right) + \frac{1}{2} F(t, s, T) \left(- \int_t^T da_m(t, s) ds \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dF(t, s, T)}{F(t, s, T)} &= a_m(t, t)dt - \int_t^T (\mu_m(t, s)ds + \sigma_m(t, s)dW) ds + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_m(t, s)ds \right)^2 dt \\ &= \left\{ a_m(t, t) - \int_t^T \mu_m(t, s)ds + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_m(t, s)ds \right)^2 \right\} dt - \left\{ \int_t^T \sigma_m(t, s)ds \right\} dW\end{aligned}$$

つまり, $n = m$ のとき, 推移確率は次のように表すことができる.

$$\frac{dP_{nm}(t, T)}{P_{nm}(t, T)} = \left\{ a_m(t, t) - \int_t^T \mu_m(t, s)ds + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_m(t, s)ds \right)^2 \right\} dt - \left\{ \int_t^T \sigma_m(t, s)ds \right\} dW \quad (3.1)$$

式 (3.1) において dt 項の係数を $u_{nm}(t, T)$ とし, dW 項の係数を $v_{nm}(t, T)$ に置き換える.

$$u_{nm}(t, T) = P_{nm}(t, T) \left\{ a_m(t, t) - \int_t^T \mu_m(t, s)ds + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_m(t, s)ds \right)^2 \right\} \quad (3.2)$$

$$v_{nm}(t, T) = P_{nm}(t, T) \left\{ - \int_t^T \sigma_m(t, s)ds \right\} \quad (3.3)$$

それによって, 推移率を簡略に表すことができる.

$$dP_{nm}(t, T) = u_{nm}(t, T)dt + v_{nm}(t, T)dW$$

2. $n < m$ のとき^{*5}

One-Step での損失推移確率は下のよう計算することができた.

$$P_{nm}(t, T) = \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t, u)du} P_{nm-1}(t, s) a_{m-1}(t, s) ds$$

ここで $M(t, s) = P_{nm-1}(t, s) a_{m-1}(t, s)$ とし,

$$dM(t, s) = \mu_M(t, s)dt + \sigma_M(t, s)dW \quad (3.4)$$

で表現できるとする.

$$P_{nm}(t, T) = \int_t^T F(t, s, T) M(t, s) ds$$

$$dP_{nm}(t, T) = F(t, T, T) M(t, T) dT - F(t, t, T) M(t, t) dt$$

$$dP_{nm}(t, T) = -F(t, t, T) M(t, t) dt + \int_t^T d(F(t, s, T) M(t, s)) ds$$

$n = m$ のときと同様に, 伊藤の公式を用いて解析解を求めていく. 計算過程は, 付録 A-5 に示した.

^{*5} 付録 A-5 を参照

以上より, One-Step 条件の下での損失推移確率の解析解は, 次のように求めることができる.

$$dP_{nm}(t, T) = u_{nm}(t, T)dt + v_{nm}(t, T)dW$$

$$u_{nm}(t, T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ P_{nm}(t, T) \left\{ a_m(t, t) - \int_t^T \mu_m(t, s)ds + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_m(t, s)ds \right)^2 \right\} & (n = m) \\ -a_{m-1}(t, t)P_{mm}(t, T)\mathbb{I}_{\{n=m-1\}} + \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u)du \right] \\ \quad \left(-P_{nm}(t, s)\mu_m(t, s) + \mu_M(t, s) - \sigma_m(t, s)v_{nm}(t, s) \right) ds & (n < m) \end{cases}$$

$$v_{nm}(t, T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ P_{nm}(t, T) \left\{ - \int_t^T \sigma_m(t, s)ds \right\} & (n = m) \\ \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u)du \right] \left(\sigma_M(t, s) - P_{nm}(t, s)\sigma_m(t, s) \right) ds & (n < m) \end{cases}$$

One-Step 条件の下で損失推移率 $a_n(t, T)$ に多次元ブラウン運動に従う確率過程を導入したときの推移確率 $P_{nm}(t, T)$ の微分方程式を求めることができた. この結果は n, m の大小関係について全ての場合について考慮に入れている. このとき, $dP_{nm}(t, T)$ は次のような過程に従う.

ここで式 (3.4) の $\mu_M(t, s), \sigma_M(t, s)$ について考える.

$$\begin{aligned} dM(t, T) &= d(P_{nm-1}(t, T)a_{m-1}(t, T)) \\ &= P_{nm-1}(t, T)da_{m-1}(t, T) + a_{m-1}(t, T)dP_{nm-1}(t, T) + dP_{nm-1}(t, T)da_{m-1}(t, T) \\ &= P_{nm-1}(t, T) \left(\mu_{m-1}(t, T)dt + \sigma_{m-1}(t, T)dW \right) \\ &\quad + a_{m-1}(t, T) \left(u_{nm-1}(t, T)dt + v_{nm-1}(t, T)dW \right) + \sigma_n(t, T)v_{nm-1}(t, T)dt \\ &= \left(P_{nm-1}(t, T)\mu_{m-1}(t, T) + a_{m-1}(t, T)u_{nm-1}(t, T) + \sigma_{m-1}(t, T)v_{nm-1}(t, T) \right) dt \\ &\quad + \left(P_{nm-1}(t, T)\sigma_{m-1}(t, T) + a_{m-1}(t, T)v_{nm-1}(t, T) \right) dW \end{aligned}$$

つまり, $\mu_M(t, s), \sigma_M(t, s)$ は次のように置き換えることができる.

$$\mu_M(t, T) = P_{nm-1}(t, T)\mu_{m-1}(t, T) + a_{m-1}(t, T)u_{nm-1}(t, T) + \sigma_{m-1}(t, T)v_{nm-1}(t, T)$$

$$\sigma_M(t, T) = P_{nm-1}(t, T)\sigma_{m-1}(t, T) + a_{m-1}(t, T)v_{nm-1}(t, T)$$

3.2 倒産が生じる時刻での損失推移確率

次に、時刻 t において倒産が発生し損失過程が増加した場合の損失推移確率について考える。
この場合、倒産が生じる直前の損失推移確率を用いることで次のように表現することができる。

$$dP_{L(t)m}(t, T) = dP_{L(t-)m}(t, T) - \frac{\partial P_{L(t)m}(t, T)}{\partial t} dt \quad (3.5)$$

$$dP_{L(t-)m}(t, T) = u_{L(t-)m}(t, T)dt + v_{L(t-)m}(t, T)dW \quad (3.6)$$

まず、式 (3.5) の右辺第二項の偏微分について考える。

$$P_{L(t)m}(t, T) = \mathbb{E} [\mathbb{I}_{\{L(T)=m\}} | \mathcal{F}_t]$$

$$P_{L(t)m}(t, T) = \mathbb{I}_{\{L(t)=m\}} + \mathbb{E} \left[\int_t^T (\mathbb{I}_{\{L(s-)+1=m\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=m\}}) \lambda_L(s) ds | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.7)$$

ここで $\int_t^T \mathbb{I}_{\{L(s-)+1=m\}} ds$ ($t \leq s \leq T$) について考える。

1. $L(t) = m$ のとき

$s = t$ とすると、 $L(s-) = L(t-) = L(t) - 1 = m - 1$ となる。よって $\mathbb{I}_{\{L(s-)+1=m\}} = 1$ である。

また、 $t < s \leq T$ では、 $L(s-) \geq m$ なので $\mathbb{I}_{\{L(s-)+1=m\}} = 0$ である。

$$\mathbb{I}_{\{L(s-)+1=m\}} = \begin{cases} 1 & (s = t) \\ 0 & (t < s \leq T) \end{cases}$$

$\mathbb{I}_{\{L(s-)+1=m\}}$ は $s = t$ となる一点でしか値を取らない。つまり、 $\int_t^T \mathbb{I}_{\{L(s-)+1=m\}} ds = 0$ となる。

この結果を式 (3.7) に代入する。

$$\begin{aligned} P_{L(t)m}(t, T) &= \mathbb{I}_{\{L(t)=m\}} + \mathbb{E} \left[\int_t^T -\mathbb{I}_{\{L(s-)=m\}} \lambda_L(s) ds | \mathcal{F}_t \right] \\ &= 1 + \int_t^T \mathbb{E} [-\mathbb{I}_{\{L(s-)=m\}} | \mathcal{F}_t] \lambda_L(s) ds \\ &= 1 - \int_t^T P_{L(s-)m}(t, T) \lambda_L(s) ds \end{aligned}$$

これを時刻 t で偏微分すればよい。

$$\frac{\partial P_{L(t)m}(t, T)}{\partial t} = P_{L(t-)m}(t, T) \lambda_L(t) \quad (3.8)$$

2. $L(t) < m$ のとき

式 (3.7) より

$$\begin{aligned}
P_{L(t)m}(t, T) &= \mathbb{I}_{\{L(t)=m\}} + \mathbb{E} \left[\int_t^T \left(\mathbb{I}_{\{L(s-)+1=m\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=m\}} \right) \lambda_L(s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \int_t^T \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\{L(s-)+1=m\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=m\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \lambda_L(s) ds \\
&= \int_t^T \left(P_{L(s-)+1, m}(t, T) - P_{L(s-), m}(t, T) \right) \lambda_L(s) ds
\end{aligned}$$

1. と同様に、時刻 t で偏微分する.

$$\frac{\partial P_{L(t)m}(t, T)}{\partial t} = - \left(P_{L(t-)+1, m}(t, T) - P_{L(t-), m}(t, T) \right) \lambda_L(t) \quad (3.9)$$

式 (3.8), 式 (3.9) より,

$$\frac{\partial P_{L(t)m}(t, T)}{\partial t} = \begin{cases} P_{L(t-), m}(t, T) \lambda_L(t) & (L(t) = m) \\ - \left(P_{L(t-)+1, m}(t, T) - P_{L(t-), m}(t, T) \right) \lambda_L(t) & (L(t) < m) \end{cases}$$

ここで $\phi_m(t, T)$ を次のように定義する.

$$\phi_m(t, T) = \begin{cases} -P_{L(t-), m}(t, T) & (L(t) = m) \\ P_{L(t-)+1, m}(t, T) - P_{L(t-), m}(t, T) & (L(t) < m) \end{cases} \quad (3.10)$$

このとき、式 (3.5) は次のように表すことができる.

$$dP_{L(t)m}(t, T) = dP_{L(t-), m}(t, T) - \phi_m(t, T) \lambda_L(t) dt$$

以上より、時刻 t において倒産が生じた場合の損失推移確率についての式を求めることができた.

$$dP_{L(t)m}(t, T) = u_{L(t-), m}(t, T) dt + v_{L(t-), m}(t, T) dW + \phi_m(t, T) dL(t) \quad (3.11)$$

3.3 ドリフト制約

定理 3.3.1 (確率推移率過程のドリフト条件)

定理 2.5.4 が成り立つとき以下の条件を満たすことによって、確率損失推移率過程によって求められる損失推移率と損失過程が調和性を持つことが保証される.

$$P_{L(t), m}(t, T) \mu_m(t, T) = -\sigma_m(t, T) v_{L(t), m}(t, T)$$

[証明]

損失推移率と損失過程との間に調和性が存在するとき、定理 2.5.4 より $P_{L(t)m}(t, T), P_{L(t)m}(t, T) a_m(t, T)$ はマルチンゲールとなる. ここでは、 $P_{L(t)m}(t, T) = p_m(t, T)$ が成り立つときの損失推移率のドリフト条件を求

め, その条件が調和性を保証するための必要十分条件を示す.

確率推移率過程の下での損失推移確率は次のように表すことができた.

$$\begin{aligned} dP_{L(t)m}(t, T) &= u_{L(t-)m}(t, T)dt + v_{L(t-)m}(t, T)dW + \phi_m(t, T)dL(t) \\ dP_{L(t)m}(t, T) &= \left(u_{L(t-)m}(t, T) + \phi_m(t, T)\lambda_L(t) \right)dt \\ &\quad + v_{L(t-)m}(t, T)dW + \phi_m(t, T)\left(dL(t) - \lambda_L(t)dt \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここで, $P_{L(t)m}(t, T)$ はマルチンゲールとなるので, 微分に期待値を取る.

$$\mathbb{E} \left[dP_{L(t)m}(t, T) \right] = u_{L(t-)m}(t, T) + \phi_m(t, T)\lambda_L(t) = 0$$

以上より,

$$u_{L(t-)m}(t, T) = -\phi_m(t, T)\lambda_L(t) \quad (3.13)$$

つまり式 (3.12) は式 (3.13) より

$$dP_{L(t)m}(t, T) = v_{L(t-)m}(t, T)dW + \phi_m(t, T)\left(dL(t) - \lambda_L(t)dt \right)$$

次に $P_{L(t)m}(t, T)a_m(t, T)$ について考える.

$$\begin{aligned} d\left(P_{L(t)m}(t, T)a_m(t, T) \right) &= a_m(t, T)dP_{L(t)m}(t, T) + P_{L(t)m}(t, T)da_m(t, T) + \langle P_{L(t)m}(t, T)a_m(t, T) \rangle \\ &= a_m(t, T)v_{L(t-)m}(t, T)dW + P_{L(t)m}(t, T)\left(\mu_m(t, T)dt + \sigma_m(t, T)dW \right) \\ &\quad + v_{L(t-)m}(t, T)\sigma_m(t, T)dt + a_m(t, T)\phi_m(t, T)\left(dL(t) - \lambda_L(t)dt \right) \\ &= \left(P_{L(t)m}(t, T)\mu_m(t, T) + v_{L(t-)m}(t, T)\sigma_m(t, T) \right)dt \\ &\quad + \left(a_m(t, T)v_{L(t-)m}(t, T) + P_{L(t)m}(t, T)\sigma_m(t, T) \right)dW + a_m(t, T)\phi_m(t, T)\left(dL(t) - \lambda_L(t)dt \right) \end{aligned}$$

ここで, $P_{L(t)m}(t, T)a_m(t, T)$ はマルチンゲールとなるので, 微分に期待値を取る.

$$\mathbb{E} \left[d\left(P_{L(t)m}(t, T)a_m(t, T) \right) \right] = P_{L(t)m}(t, T)\mu_m(t, T) + v_{L(t-)m}(t, T)\sigma_m(t, T) = 0$$

以上より,

$$P_{L(t)m}(t, T)\mu_m(t, T) = -v_{L(t-)m}(t, T)\sigma_m(t, T) \quad (3.14)$$

以上より, 確率推移率過程のドリフト制約条件が求まった.

次に, 上記のドリフト制約式 (3.14) が成り立つとき $P_{L(t)m}(t, T)$ がマルチンゲールとなることを示す. この証明によって調和性を保証する必要十分条件が明確になる.

この証明は付録 A-6 に示している.

3.4 確率推移率モデルの数値例

本章では、損失推移率に確率過程を導入したモデルを定義し、それに従う損失推移率過程を求めた。また、ドリフト制約の条件を加えることによって確率推移率過程の平均項を調整し、確率過程の変分は分散 σ_m に依存するものとした。これらの計算結果を下に、数値例を作成した。まず、数値例に用いた計算結果と、本章で述べた基本的な確率推移率モデルについてまとめる。

One-Step での損失推移確率は下記のように表すことができた。

$$P_{nm}(t, T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ \exp \left[- \int_t^T a_m(t, s) ds \right] & (n = m) \\ \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t, u) du} P_{nm-1}(t, s) a_{m-1}(t, s) ds & (n < m) \end{cases}$$

次に、損失推移率 $a_m(t, T)$ に下記の確率過程を導入した。

$$da_m(t, T) = \mu_m(t, T)dt + \sigma_m(t, T)dW$$

このとき、上記の確率推移率モデルにしたがう損失確率は次のように求めることができた。

$$dP_{nm}(t, T) = u_{nm}(t, T)dt + v_{nm}(t, T)dW \quad (3.15)$$

$$dP_{L(t)m}(t, T) = dP_{L(t-)m}(t, T) - \phi_m(t, T)\lambda_L(t)dt \quad (3.16)$$

式 (3.15) は時刻 t で倒産が生じなかった場合の損失推移確率、式 (3.16) は倒産が生じた場合の損失推移確率の確率変分である。式 (3.15)、式 (3.16) の各パラメータは次の通り。

$$u_{nm}(t, T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ P_{nm}(t, T) \left\{ a_m(t, t) - \int_t^T \mu_m(t, s) ds + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_m(t, s) ds \right)^2 \right\} & (n = m) \\ -a_{m-1}(t, t)P_{mm}(t, T)\mathbb{I}_{\{n=m-1\}} + \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u) du \right] \\ \quad \left(-P_{nm}(t, s)\mu_m(t, s) + \mu_M(t, s) - \sigma_m(t, s)v_{nm}(t, s) \right) ds & (n < m) \end{cases}$$

$$v_{nm}(t, T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ P_{nm}(t, T) \left\{ - \int_t^T \sigma_m(t, s) ds \right\} & (n = m) \\ \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u) du \right] \left(\sigma_M(t, s) - P_{nm}(t, s)\sigma_m(t, s) \right) ds & (n < m) \end{cases}$$

$$\phi_m(t, T) = \begin{cases} -P_{L(t-)m}(t, T) & (L(t) = m) \\ P_{L(t-)+1, m}(t, T) - P_{L(t-)m}(t, T) & (L(t) < m) \end{cases}$$

確率推移率モデルの平均項とブラウン運動項に関して、下記のようなドリフト制約条件を追加した。これによって、ブラウン運動項のパラメータ σ_m の決定によって、確率変分を求めることができるようになる。

$$P_{L(t) \ m}(t, T) \mu_m(t, T) = -\sigma_m(t, T) v_{L(t) \ m}(t, T)$$

数値例計算のアルゴリズム

上記の各式を用いて、数値例の計算を行う。損失推移率と損失推移確率の確率式については、オイラー法を用い、微小時間間隔の増分を基に、次の時刻の確率式を計算した。オイラー法を用いると次のように確率変分を求めることができる。

$$a_m(t + dt, T) = a_m(t, T) + da_m(t, T)$$

$$P_{nm}(t + dt, T) = P_{nm}(t, T) + dP_{nm}(t, T)$$

- 初期条件, 初期値の設定
 1. 現在時刻 $t = 0$, 損失過程 $L(0) = 0$, 倒産インディケータ関数 $D(0) = 0$ とする。
 2. $a_m(0, T), \sigma_m$ は適当な定数とする。
 3. One-Step での損失推移確率式から, $a_m(0, T)$ での損失推移確率 $P_{nm}(0, T)$ を求め, 初期値とする。
- 各時刻 $t \rightarrow t + dt$
 1. 時刻 $t + dt$ での倒産を確認
 各時刻の倒産確認には、モンテカルロシミュレーションを用いた。各時刻において $[0, 1]$ の一様乱数を発生させ、乱数と倒産の確率点を比較することによって、倒産の有無を判断した。倒産・生存の確率は下の通りである。

$$L(t + dt) = \begin{cases} L(t) & \left(\text{Prob.} = \exp[-a_n(t, t)dt] \right) \\ L(t) + 1 & \left(\text{Prob.} = 1 - \exp[-a_n(t, t)dt] \right) \end{cases}$$

2. 時刻 $t + dt$ での損失推移率を計算

One-Step での性質を保持するため, $(n = m - 1)$ となるときに損失推移率の計算を行う。ドリフト制約式より $\mu_m(t, T)$ を求め, 確率変分 $da_m(t, T)$ を計算する。その確率変分をオイラー法に代入することによって、次の時刻の損失推移率を計算した。

$$\mu_m(t, T) = -\frac{1}{P_{L(t) \ m}(t, T)} \sigma_m(t, T) v_{L(t) \ m}(t, T)$$

$$da_m(t, T) = \mu_m(t, T)dt + \sigma_m(t, T)dW$$

$$a_m(t + dt, T) = a_m(t, T) + da_m(t, T)$$

3. 時刻 $t + dt$ での損失推移確率を計算

One-Step での損失推移確率式より $P_{nm}(t, T)$ を計算する。時刻 t での倒産状況 (生存 or 倒産) と

状態数 ($n = m$ or $n < m$) についてそれぞれ場合において、 $u_{nm}(t, T), v_{nm}(t, T), \phi_{nm}(t, T)$ を求め、確率変分 $dP_{nm}(t, T)$ を計算する。

$$dP_{nm}(t, T) = u_{nm}(t, T)dt + v_{nm}(t, T)dW$$

$$dP_{L(t)m}(t, T) = dP_{L(t-)m}(t, T) - \phi_m(t, T)\lambda_L(t)dt$$

$$P_{nm}(t + dt, T) = P_{nm}(t, T) + dP_{nm}(t, T)$$

- $t = 0$ から $t = T - 1$ まで上記手順を繰り返す。
- 満期での境界条件の設定

満期時刻 $t = T$ での境界条件を下記のように設定する。

$$P_{nm}(T, T) = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n < m) \end{cases}$$

以上の計算結果とアルゴリズムを基に R によって確率過程に従う損失推移確率行列を作成した。今回のプログラムでは、債務企業数、満期時刻、現在時刻、損失推移率の初期値を設定することで確率推移率を求め、損失推移確率を計算した。これらの各要素を変動させることで、損失推移確率の性質を検証していく。時間幅は $dt = 0.01$ としている。確率損失推移率の初期値は、市場の損失分布から決定されるべきだが、今回の数値例では市場を特定していないため、任意の定数値を設定した。

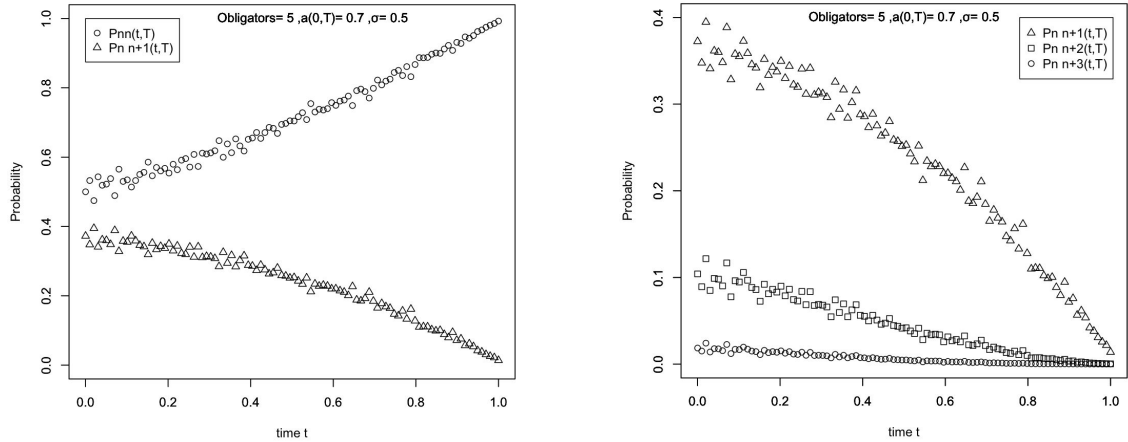


Fig.11 損失推移確率の性質

Fig. 11 左図は、現在時刻 t を満期 $T = 1$ まで変化させたときの損失推移確率である。損失推移率が確率過程に従うため、損失推移確率も確率変動する。新たな倒産が生じない確率 $P_{nn}(t, T)$ は時間経過とともに増加し、新たに 1 社倒産する確率 $P_{n, n+1}(t, T)$ は減少している。満期時刻において、 $P_{nn}(t, T) = 1, P_{n, n+1}(t, T) = 0$ となる。つまり残存期間が長ければ、倒産が起こる確率も高いということである。

Fig. 11 右図は、倒産が起る企業数に対する損失推移確率である。1 社倒産する確率と、2 社以上倒産する確率とでは、損失推移確率が従う指数関数の性質が異なっている。

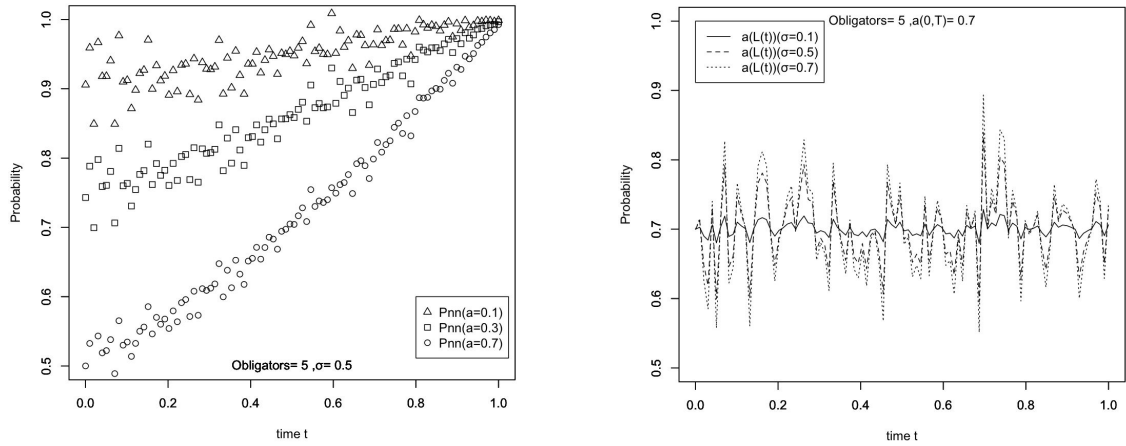


Fig.12 損失推移確率と損失推移率の変位

Fig. 12 左図は、確率損失推移率の初期値を変化させたときの、 $P_{nn}(t, T)$ の変位である。確率損失推移率の初期値を $a_{nm}(0, T) = 0.1, 0.3, 0.7$ とした例を示している。このように、損失推移確率の変動は確率損失推移率の初期値に大きく依存している。推移率が高いほど、倒産が起る確率が高くなる。

Fig. 12 右図は、 σ を変化させたときの確率損失推移率の変位である。初期値を $a_{nm}(0, T) = 0.7$ としたとき、推移率は初期値に回帰するように変動している。また、確率過程のドリフト項 σ が大きいほど、変動幅が大きくなっている。推移率の変動幅は損失推移率の変動にも影響を与える。

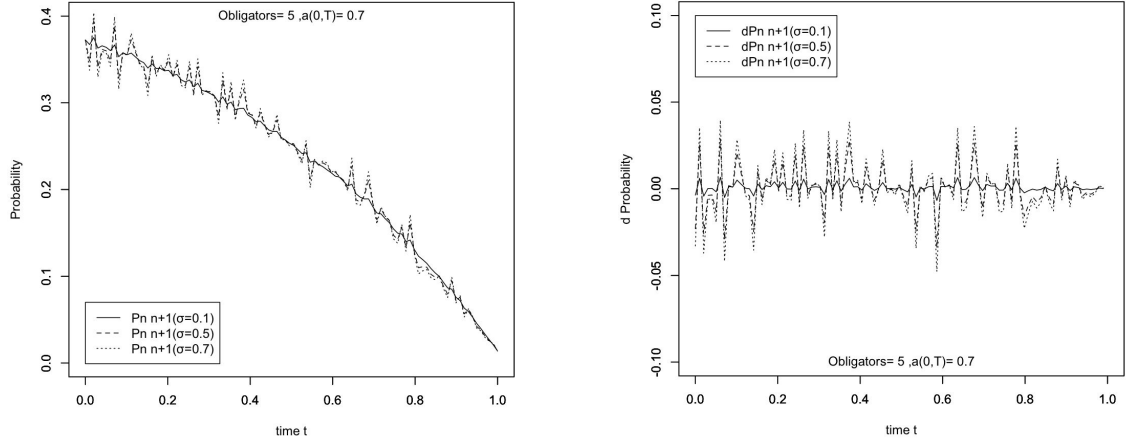


Fig.13 σ による損失推移確率式の変動

Fig. 13 左図は、 σ を変化させたときの損失推移確率の変位である。Fig. 12 右図の損失推移率にくらべ σ による変動は小さくなっているが、 σ が大きければ変動幅も大きくなっている。また、満期時刻に近づくにつれ、変動は小さくなる。

Fig. 13 右図は、損失推移確率の確率変分 dP_{nn+1} の場合である。左図で時間経過によって、変動幅が小さくなっている要因として見る事ができる。 dP 式の平均項 u , ドリフト項 v が共に小さくなるため、損失推移率式の変動が押さえられている。

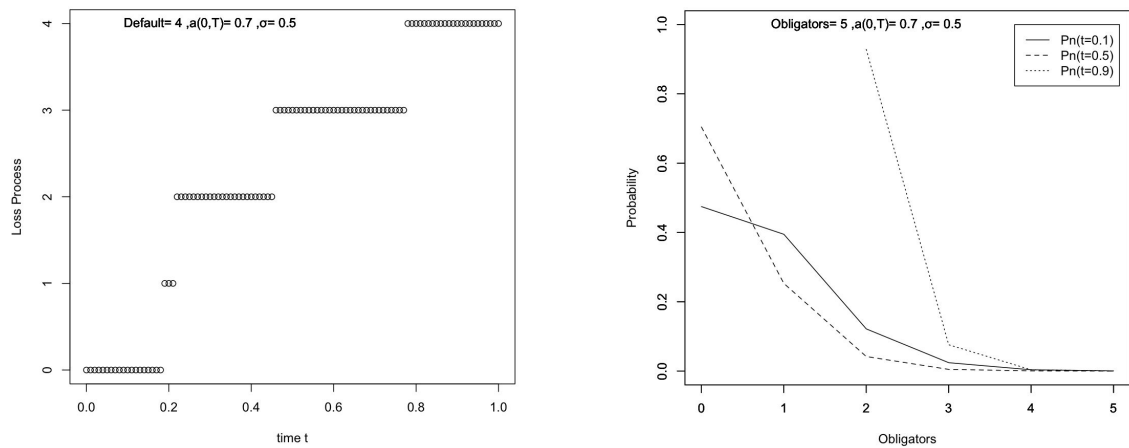


Fig.14 損失過程と倒産確率

Fig. 14 左図は、ある数値例の損失過程の推移を表している。この数値例では、満期時刻 T までの 4 社の倒産が起きている。初期時刻での倒産数を 0 としている。損失過程はこのような階段状に推移し、倒産が起るとジャンプする性質をもっている。ジャンプ幅は単位時間の倒産数なので、One-Step の場合 1 となる。

Fig. 14 右図は、各時刻における倒産確率である。その時刻から満期時刻までに何社倒産するかを表している。 $t = 0.1$ では新たな倒産が起る確率も高いが、時刻が進むにつれて、倒産が起る確率が低くなる。 $t = 0.9$ では、2 社倒産しており、さらに倒産が起る確率は $P_{23} < 0.1$ 程度になっている。

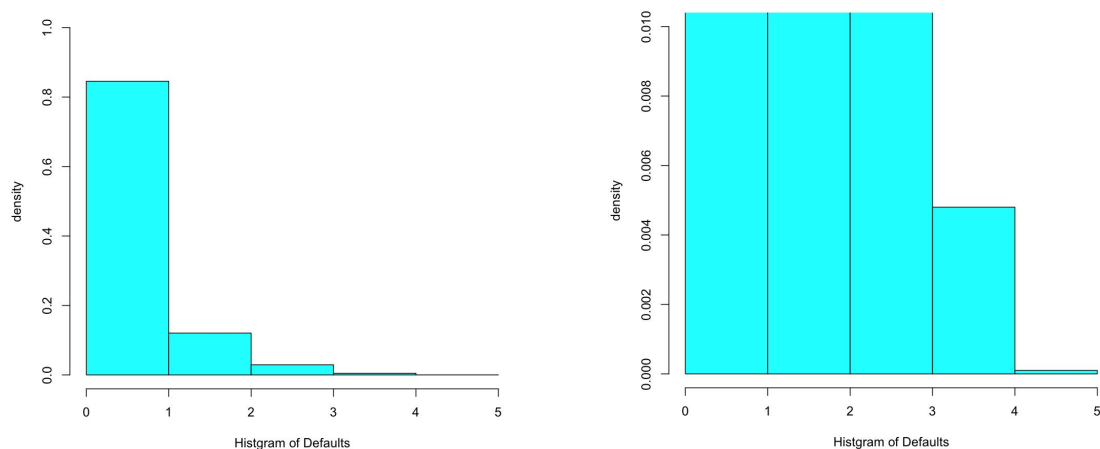


Fig.15 損失分布

Fig. 15 は、作成した損失推移確率モデルの損失分布である。満期時刻 T の最終倒産数を調べ、それを 10,000 回繰り返すことでヒストグラムを作成し、損失分布を求めた。このときの、債務者数を 5 社、満期時刻までの区間数は 1,000 としてある。

One-Step の性質を強く持っており、倒産が起る確率は低くなっている。満期まで 1 社の倒産も起きない確率は 0.8 強となった。左図では、4 社倒産と 5 社全てが倒産する場合の密度が確認できないため、拡大して検証したのが右図である。わずかではあるが、両方の場合について、確率の存在を確認できた。

4 CDS ポートフォリオ

今回の数値計算では、債務企業 5 社より発行された CDS でポートフォリオを作成することを考える。各 CDS は、元本金額を 1,000 万円とし契約期間を 60 ヶ月に設定する。ポートフォリオ内の債務企業に倒産が生じた時点で、元本金額が損失額として支払いの対象となる。以下に、CDS ポートフォリオ全体の契約内容をまとめる。

Table.1 CDS ポートフォリオの組成

CDS ポートフォリオ契約項目	契約内容
債務企業数 (I)	5 社
元本金額 (D)	1,000 万円
元本総額	5,000 万円
契約満期 (T2)	60 ヶ月
安全資産金利 (r)	8%

上記の CDS ポートフォリオから 2 つの STCDO 商品を作成することを考える。

4.1 CDS ポートフォリオ派生証券

STCDO

STCDO(Single-Tranche CDO) とは、CDO 商品の特徴である優先劣後構造に従うリスク区分のない CDO 商品のことである。CDS ポートフォリオ内の債務企業に倒産が生じた場合、通常の CDO であれば優先劣後構造によって支払金額が確定される。しかし、STCDO ではポートフォリオの損失全額が支払金額となる。そのためポートフォリオ全体の損失額に注目した本モデルでは、この STCDO を対象に分析を進めていく。今回の数値計算では、2 つの STCDO 商品について期待損失額と各期間ごとのプレミアムを計算した。

”1st to Default STCDO” と ”2nd to Default STCDO” である。

1st to Default STCDO

CDS ポートフォリオ内のいずれかの CDS について信用事由が発生した時点で契約が終了し、契約内容によって支払金額が確定される商品である。この商品では最初の倒産にのみ注目し STCDO を評価する。

この STCDO の期待損失額を EL(Expected Loss) と表記する。式中の各パラメータは、Table.1 のものを用いる。

$$EL(t, T2) = \mathbb{E} [Loss(t, T2) | \mathcal{F}_t] = P_{L(t)} L(t)+1(t, T2) * D * \mathbb{I}_{\{L(t)=0\}} \quad (4.1)$$

2nd to Default STCDO

商品の構造は 1st to Default STCDO と同様だが、契約終了は CDS ポートフォリオ内 2 社の CDS について信用事由が発生した時刻となる。この商品では、初期状態で 1 社目と 2 社目の倒産確率を考慮し、1 社倒産

後には次の1社の倒産確率を考慮する.STCDOの期待損失額ELは下記のように表現できる.

$$EL(t, T2) = \left(P_{L(t) \ L(t)+1}(t, T2) * D + P_{L(t) \ L(t)+2}(t, T2) * 2D \right) * \mathbb{I}_{\{L(t)=0\}} \\ + P_{L(t) \ L(t)+1}(t, T2) * D * \mathbb{I}_{\{L(t)=1\}} \quad (4.2)$$

上記の式(4.1), 式(4.2)より, 現在時刻から満期までのCDSポートフォリオの期待損失額を求めることができる. このCDSポートフォリオのプレミアム支払額を各期とも一定とし, プレミアム総支払額の現在価値が期待損失額ELと等しくなるようにプレミアムを計算する. 残存契約期間数は $(T2 - t)$ である. プレミアムをCP(Certain Premium)とすると, プレミアム総支払額の現在価値は次のように計算することができる.

$$EL(t, T2) = \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{T2-t}} \right) * 5D * CP(t, T2) \\ = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{T2-t}} \right) * 5D * CP(t, T2)$$

ここで, 現在価値の割引係数をDR(Discount Rate)とする.

$$DR(t, T2) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{T2-t}} \right)$$

以上より,CDSポートフォリオのプレミアムは, 期待損失額を用いて次のように表すことができる.

$$EL(t, T2) = DR(t, T2) * 5D * CP(t, T2) \\ CP(t, T2) = \frac{EL(t, T2)}{DR(t, T2) * 5D} \quad (4.3)$$

ここで, プレミアムCPは元本総額に対する期待支払額の割合を示しており, 単位には $bp = 0.01\%$ を用いることとする.1st to Default STCDOと2nd to Default STCDOについて式(4.1), 式(4.2)よりSTCDOの期待損失額を, 式(4.3)よりプレミアム支払額 $CP(t, T2) * 5D$ を求めた. その結果をFig. 16に示す. 両STCDOのプレミアムは,Table.2に示している.

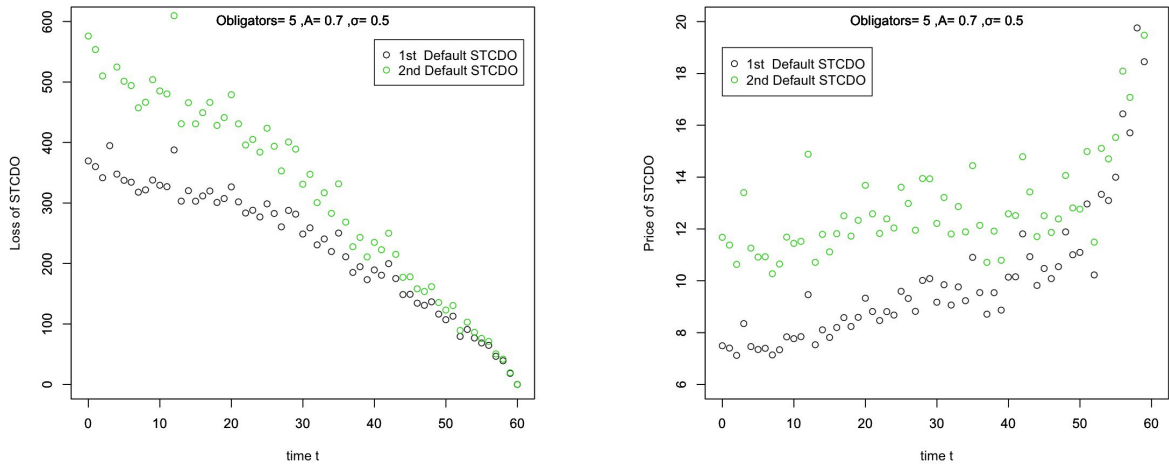


Fig.16 STCDOの期待損失額とプレミアム支払額

Fig. 16 左図は,1st to Default STCDO と 2nd to Default STCDO の期待損失額である.1 社目の倒産時のみ支払いが生じる 1st to Default STCDO に比べ,2 社目の損失も考慮しなければいけない 2nd to Default STCDO の期待損失額の方が高い値を示している. また, 満期では新たな倒産が生じる確率はないため, 期待損失額は $Loss = 0$ に収束する.

Fig. 16 右図は, 時刻 t で STCDO を購入した場合のプレミアム支払額である. 各期のプレミアム支払額が一定になるように計算した.2nd to Default STCDO は期待損失額が高いために, プレミアム支払額も大きくなっている. また, 満期付近では支払い期間数が短くなるので各期のプレミアム支払額は増加する.

次に上記 2 つの STCDO 商品について, 満期 60 ヶ月での STCDO プレミアムの変動を, 損失推移率 A と推移率過程のボラティリティ項 σ を変化させて観察した.

Table.2 STCDO プレミアム

STCDO 商品	$A = 0.1$	$A = 0.5$	$A = 0.7$
1st Default	44.56	155.25	185.45
2nd Default	47.34	222.45	292.12

STCDO 商品	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.7$
1st Default	185.88	185.63	184.53
2nd Default	293.39	292.60	289.70

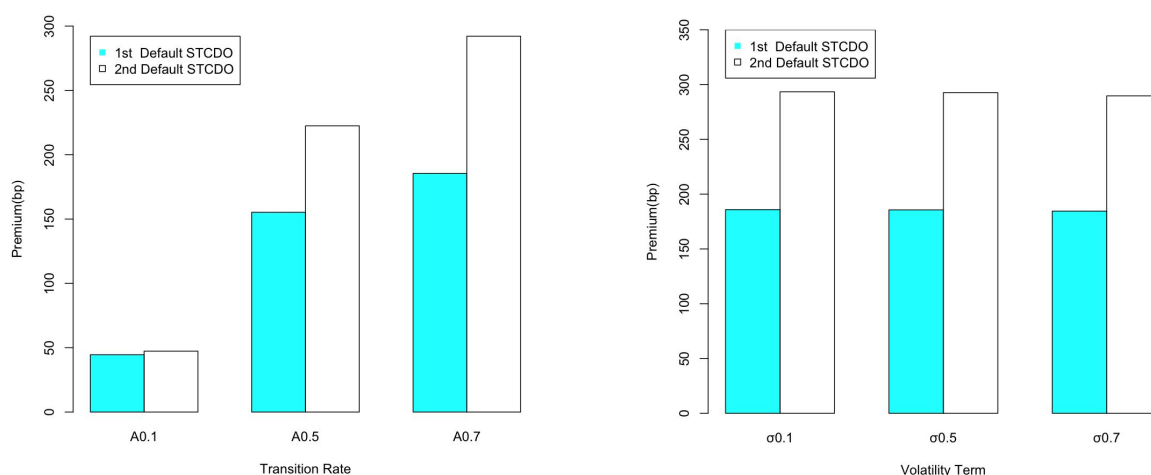


Fig.17 パラメータによるプレミアムの変化

Table.2 上段が損失推移率 A を変化させたときのプレミアムである. 損失推移率 A が上昇すると債務企業が倒産する確率が高くなるため,1st to Default STCDO と 2nd to Default STCDO のプレミアムが上昇している. また,2nd to Default STCDO の方がプレミアムの上昇率が高くなっている. このことから, 損失推移率 A の上昇による損失推移確率の変化は,1 社目の倒産確率より 2 社目の倒産確率の増加分の方が大きいこと

がわかる。つまり、より多くの倒産数を考慮した商品の方が損失推移率 A の変化に反応する。

下段は、ボラティリティ項 σ を変化させたときのプレミアムである。このときの損失推移率は $A = 0.7$ としている。 σ を変化させてもプレミアムには変化がないことがわかる。これは、損失推移率の確率過程のボラティリティ項が平均 0 のブラウン運動に従っているためである。つまり、複数回の試行の平均値を求めると、損失推移率の初期値に回帰してしまう。そのためプレミアムの値には影響が出ないが、プレミアムの変動そのものは変化している。

4.2 STCDO と対象としたヨーロッパ・コールオプション

次に、上述の STCDO を対象商品としたヨーロッパ・コールオプションの価格を求めていく。想定するオプションの契約を下記にまとめる。

Table.3 コールオプションの契約内容

オプション契約項目	契約内容
対象商品	STCDO(Table.1)
STCDO 満期 (T2)	60 ヶ月
オプション満期 (T1)	6 ヶ月
オプション行使時刻	T1
行使プレミアム (K)	30(bp)
安全資産金利 (r)	1%

このヨーロッパ・コールオプションは、満期 T2 である STCDO について、期間 $[T1, T2]$ での損失を保証する。投資家はオプション満期 T1 までにオプションの購入を判断することになり、オプションを行使するかを時刻 T1 で選択する。もし、時刻 T1 までにポートフォリオ内の企業が倒産しても支払いは生じないが債務企業数が減少するため、対象とする STCDO のプレミアム価格が変化することがある。つまり、オプション価格は保証期間 $[T1, T2]$ での期待損失額から計算されることになる。STCDO の契約終了は満期 T2 あるいは、ポートフォリオ内の債務企業全社が倒産した時刻とする。ポートフォリオ内の債務企業が倒産したことにより損失が生じた時点で、元本額の支払いが行われ、残存期間については生存企業のためのポートフォリオと見なすことができる。

STCDO の期待損失額 EL は下記のように求めることができる。

$$EL(t, T2) = \mathbb{E} [Loss(t, T2) | \mathcal{F}_t] = \sum_{k=L(t)+1}^I P_{L(t)+k}(t, T2) * (k - L(t)) * D \quad (4.4)$$

ここで、 $P_{L(t)+k}(t, T2)$ が倒産確率、 $(k - L(t))$ が新規倒産数、 D が元本金額である。

ヨーロッパ・コールオプション価格計算のアルゴリズム

オプション契約期間 $(0 \leq t \leq T1)$ の各時刻において、

- 式 (4.4) より、STCDO(T1, T2) の期待損失額 $EL(T1, T2)$ を計算する。

確率過程に従う損失推移確率式について、時刻 t を初期時刻とし時刻 T1 まで損失推移確率を計算す

る. 期待損失額 EL は, 時刻 $T1$ における損失推移確率行列から計算される.

$$EL(T1, T2) = \mathbb{E} [Loss(T1, T2) | \mathcal{F}_{T1}] = \sum_{k=L(T1)+1}^I P_{L(T1)}(k, T1, T2) * (k - L(T1)) * D$$

- プレミアム支払額 $Prem(T1, T2)$ を計算する.

このとき, STCDO の契約期間は, $[T1, T2]$ なので, 保証期間数は $(T2 - T1)$ となる. 各期のプレミアム支払額は一定とし, プレミアム支払い総額の時刻 $T1$ での価値が, 時刻 $T1$ における期待損失額 $EL(T1, T2)$ と等しくなるように, $Prem(T1, T2)$ を計算する.

$$Prem(T1, T2) * DR(T1, T2) = EL(T1, T2)$$

$$Prem(T1, T2) = \frac{EL(T1, T2)}{DR(T1, T2)} \quad (4.5)$$

- Option 満期 $T1$ での Payoff を計算する.

この数値例ではヨーロピアン・コールオプションを想定しているため, 投資家は満期 $T1$ でのみ Option を行使するかを選択できる. つまり, 時刻 $T1$ のみでペイオフが発生する. 行使価格を K とするとペイオフは次のように求めることができる.

$$\mathbb{E} [Payoff(T1, T2) | \mathcal{F}_{T1}] = \mathbb{E} \left[\left(Prem(T1, T2) - K \right)^+ | \mathcal{F}_{T1} \right] = \left(Prem(T1, T2) - K \right)^+$$

- 最後に, オプション価格 $C(t)$ を計算する.

オプション価格 $C(t)$ は, 時刻 $T1$ での Payoff を, 時刻 t での価値に割り引くことで求めることができる.

$$C(t) = \mathbb{E} [Payoff(T1, T2) | \mathcal{F}_{T1}] * (1 + r)^{-(T1-t)} \quad (4.6)$$

以上の計算をオプション価格 $C(t)$ の平均が収束するまで繰り返す.

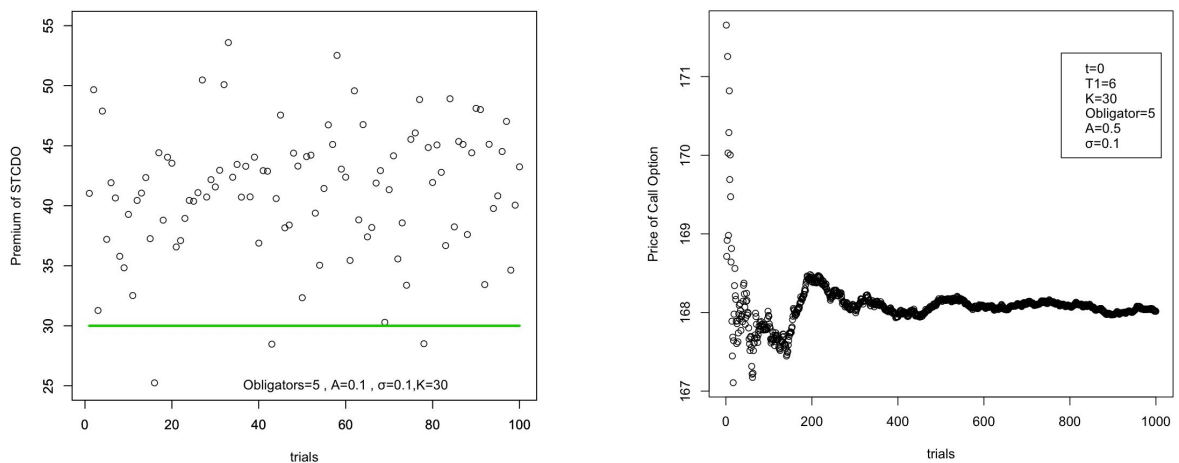


Fig.18 STCDO の損失額とプレミアム

Fig. 18 は, 上述のアルゴリズムを 1,000 回繰り返すことによって得られた STCDO のプレミアム支払額

とヨーロピアン・コールオプションの価格である。

左図は式 (4.4) より計算された、 $T_2 = 60, T_1 = 6$ としたときの STCDO の期待損失額を STCDO 契約期間 $[T_1, T_2]$ で割り引いたものである。STCDO のプレミアム支払額は、式 (4.5) より得ることができる。この STCDO をオプションに組み込んでいく。オプションの行使価格 K との関係も示した。プレミアム支払額と行使価格の差額がペイオフとなる。

右図は式 (4.6) より、得られた初期時刻でのオプション価格の収束の様子である。試行回数が増えるに従って平均価格は収束している。

次に、損失推移率 A とボラティリティ σ を変動させたときの、初期時刻でのオプション価格と対象 STCDO のプレミアムについて検証する。

Table.4 オプション価格と対象 STCDO のプレミアム

コールオプション	$A = 0.1$	$A = 0.5$	$A = 0.7$
行使プレミアム K (bp)	30	30	30
オプション価格 (bp)	9.95	168.01	241.99
STCDO プレミアム (bp)	49.25	242.11	331.70

コールオプション	$\sigma = 0.01$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.1$
行使プレミアム K (bp)	30	30	30
オプション価格 (bp)	10.30	10.13	10.27
STCDO プレミアム (bp)	49.41	49.45	49.17
二乗誤差	0.04	0.21	0.42

Table.4 上段が、損失推移率 A を変化させたときのオプションの価格と、対象となる STCDO のプレミアムである。ここでは、確率推移率過程のボラティリティ項 $\sigma = 0.1$ として計算している。損失推移率 A が上昇するとオプション価格も STCDO プレミアムも上昇している。これは、損失推移確率が高くなることによって、満期までの期待倒産数が増加したためである。オプション価格の計算に関しては、行使プレミアム価格 K を任意に設定している。そのため、 K を変化させることでオプション価格は大きく変化する。いずれの損失推移率のときもオプション価格が STCDO プレミアムよりも低くなっている。これは、オプションのペイオフが行使プレミアムと STCDO プレミアムの差額を基準としているためである。

下段は、確率推移率過程のボラティリティ項 σ を変化させた時のコールオプションについてまとめたものである。ここでの損失推移率は $A = 0.1$ とした。 σ を変化させてもオプション価格、STCDO プレミアムに著しい変化が見られなかった。これは、Table.2 の考察と同じ理由からである。 σ がプレミアムに与える影響は各試行での計算価格の変動である。それを示したのが3つ目の項目、変動誤差である。各試行の計算価格と推定価格との二乗誤差を算出し、それらを平均したものを誤差とした。つまり、各試行の計算価格の変動幅を示している。

各試行の計算価格の変動幅を、変化させた σ ごとに示したのが Fig. 19 左図である。観測値の頻度で四分割

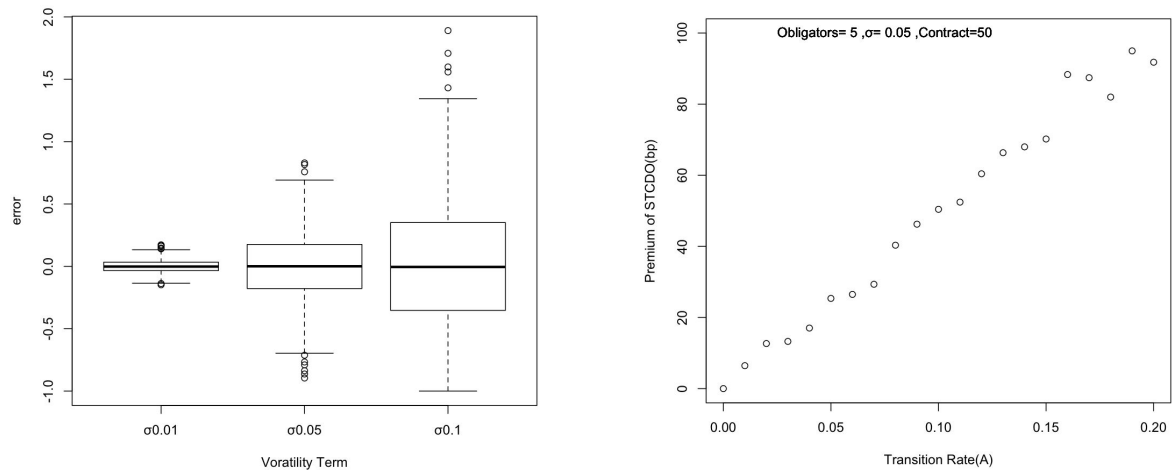


Fig.19 ボラティリティと損失推移率による STCDO の変化

した時の、最高値と最低値が箱外側上下の棒である。また、密度が 0.5 以内の観測幅が箱で示されている。箱中央のラインが、観測値全体の中央値である。さらに、箱グラフの外側の点で示されているのが異常値として認識された観測地である。 σ が大きくなると観測値の隔たりが大きくなっている。つまり、 σ は市場の流動性と価格動向によって決定される。

右図は、損失推移率に変化による STCDO のプレミアムの上昇過程を示したものである。このように、STCDO のプレミアムは損失推移率の上昇によって線形性を持ちながら上昇することがわかった。

市場データからの損失推移率 A と確率推移率過程のボラティリティ項 σ の推移方法を次の節で述べていく。

4.3 市場統計からの損失推移率の推定

ここまで述べてきたように損失推移確率は損失推移率に大きく依存している。さらに、確率推移率モデルにおいて、損失推移率は初期値に回帰するように変動していた。つまり、損失推移率の初期値の設定が STCDO 価格と CDS ポートフォリオ価格を計算する上で重要となる。ここでは、市場の倒産データから適切な損失推移率の初期値を推定する方法を述べる。損失推移率の推定方法として、ここでは 2 つの方法を用いる。市場全体の倒産統計から推定する方法と、個別企業の CDS 価格から推定する方法である。

まず、市場全体の倒産統計から、作成する STCDO の損失推移率を推定する方法である。用いたデータは、東京証券取引所（東証 1 部、2 部、マザーズ）の上場企業のデータである（海外企業は除く）。1991 年～2009 年までの上場企業数と倒産数のデータより損失推移率の推定を行う。市場統計から得られた、上場企業 1 社あたりの年間の倒産数と、モデルから計算した期待倒産数が一致するように推移率を決定する。

モデルでの損失推移率を用いて、年間の倒産確率は次のように表すことができた。

$$L(t+dt) = \begin{cases} L(t) & (P = \exp[-a_n(t,t)dt]) \\ L(t) + 1 & (Q = 1 - \exp[-a_n(t,t)dt]) \end{cases}$$

1年間の営業日数を250日間とし、倒産の確認は毎営業日に行うものとする。1年後にL社が倒産している確率 P_L は次のように計算することができる。*Obligators* は債務企業数を表している。

$$P_L = \binom{250}{L} Q^L P^{(250-L)} \quad (0 \leq L \leq Obligators)$$

P_L を用いてモデルでの、一社あたりの倒産確率を計算し、それが市場統計からの倒産確率に一致するような損失推移率を推定値とすればよい。

$$\frac{1}{Obligators} \sum_{L=0}^{Obligators} P_L * L = \text{市場統計の倒産確率}$$

下記の Table.5 に市場データと得られた推移率の推定値を示す。

Table.5 市場統計と推定推移率

観測時期	上場企業数	倒産数	推定推移率 A
1991	1641	1	0.003
1992	1651	5	0.015
1993	1667	5	0.015
1994	1689	3	0.009
1995	1641	5	0.015
1996	1651	8	0.023
1997	1667	9	0.025
1998	1689	10	0.027
1999	1641	7	0.019
2000	1651	15	0.037
2001	1667	21	0.050
2002	1689	22	0.052
2003	1641	19	0.044
2004	1651	7	0.015
2005	1667	7	0.015
2006	1689	3	0.006
2007	1641	7	0.015
2008	1651	45	0.095
2009	1667	20	0.043

上図で得られた損失推移率を検証すると、2001年、2002年のIT不況時と2008年、2009年のサブプライム不況時に高い値を示していることがわかる。倒産数が増えるほど推定される推移率も増加していることがわかる。

本モデルでの数値例の計算に必要なパラメータは、損失推移率 a 、確率推移率のボラティリティ項 σ 、満期、

そして債務企業数であった。満期と債務企業数は任意に設定できるが、ボラティリティ項 σ は、想定する市場に適合するような値を設定しなければいけない。損失推移確率の時間変位が σ に大きく依存するためである。よって次に、上記で推移率を導いた市場に適合するような σ を計算していく。 σ は、推定推移率の時系列データの分散を意味しており、次の式で求めることができる。

ここで、 N はデータ数である。

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1991}^{2009} (A_k - \text{mean}(A))^2}$$

$$= 0.0214$$

Table.6 の市場統計から推定した損失推定推移率の時系列データより、全期間の平均、推定推移率の高い5年間、推定推移率の低い5年間のボラティリティを推定し、各期間の STCDO プレミアムとコールオプション価格を計算した。その際、Table.1 よりも実際の市場を反映した CDS でポートフォリオを再構築する。その組成を Table.6 に、その計算結果を Table.7 に示す。

Table.6 CDS ポートフォリオの組成

CDS ポートフォリオ契約項目	契約内容
債務企業数 (I)	5 社
元本金額 (D)	5 億円
元本総額	25 億円
契約満期 (T2)	60 ヶ月
安全資産金利 (r)	1%

Table.7 市場統計からの CDS ポートフォリオ

指標	全期間	安定期	不況期
行使プレミアム K(bp)	2	2	2
推定推移率 A	0.028	0.010	0.057
ボラティリティ σ	0.021	0.005	0.019
プレミアム (bp)	13.72	4.93	28.10
オプション価格 (bp)	9.20	2.01	20.81

Table.7 では同じ契約内容の CDS をもとに損失推移率を推定した。つまり、価格に変化を与えているのは各年代の市場倒産動向のみである。対象商品が同一でも不況期では安定期に比べ、STCDO で6倍弱、コールオプションで17倍弱の価格を示した。実際の市場においては、投資家の期待感も価格動向を大きく左右するため、不況期ではさらに商品価格が上昇することが考えられる。また、CDS ポートフォリオの計算に用いた安全資産金利 r は年率1%となっておりである。

4.4 CDS の個別銘柄からの損失推移率の推定

前節で述べた、市場全体の倒産統計データから損失推移率を推定する方法は、市場全体の損失推移率を推定できるのでインデックス STCDO の価格計算に適していると考えられる。しかし個別の CDS 銘柄を基にポートフォリオを組成し STCDO を発行する場合は、この推定方法では十分とは言えない。なぜなら、ポートフォリオ内の債務企業のデータが考慮されていないからである。CDS ポートフォリオの価格は、ポートフォリオ内の債務企業の経営状態に大きく依存する。ここでは、債務企業の CDS のプレミアム価格データから、作成する STCDO の損失推移率とそのボラティリティを推定する方法を述べる。

ポートフォリオの対象とする CDS は、金融機関で店頭取引によって売買されているものを用いる。各 CDS について、金融機関ごとの取引価格の平均値を東京金融取引所が公表している。これらの CDS は、元本金額 5 億円、満期 60 ヶ月の CDS で、公表されるプレミアムデータは年率となっている。

損失推移率推定のアルゴリズム

データ期間の各時刻について

- 各 CDS のプレミアムから、その企業の損失推移率と損失推移確率を計算する。

式 (4.4) において、満期 $T2 = 60$ 、現在時刻 $t = 0$ として期待損失額 $EL(0, T2)$ を計算する。計算した期待損失額を年率の安全資産金利 r とした割引係数 $DR(0, T2)$ で割り引くことで、年間の期待損失額を求めることができる。

一方、価格データから CDS の年間のプレミアム支払額 $Prem(0, T2)$ は CDS プレミアム $Premium(bp)$ を用いて次のように計算される。

$$Prem(0, T2) = D * Premium(bp)$$

よって、下式が成り立つように損失推移率を求めればよい。

$$Prem(0, T2) = \frac{EL(0, T2)}{DR(0, T2)} = D * Premium(bp)$$

損失推移率の推定には二分割法を用い、データ値との誤差が 0.01% 以内になるものを推定値とした。二分割法によって得られた損失推移率を用い、満期 $T2 = 60$ 、現在時刻 $t = 0$ での損失推移率行列を計算する。債務企業数を 1 社としているため、新たな倒産が生じる確率は、その債務企業の倒産確率と見なすことができる。

- CDS ポートフォリオの損失推移確率を計算する。

今回は 5 社の債務企業の CDS でポートフォリオを組成し、STCDO を発行することを考える。ポートフォリオ内の債務企業の倒産確率より、STCDO の損失推移確率を計算する。

- STCDO のプレミアムを計算する。

求めた STCDO の損失推移確率から期待損失額を計算し、プレミアムを算出する。

- STCDO のプレミアムから損失推移率を推定する.

プレミアムから STCDO の損失推移率を推定する方法は, 前述の二分割法を用いる. ここでも, データ値との誤差が 0.01% 以内となるように損失推移率を決定した.

- 各時刻の推定損失推移率から, そのボラティリティを推定する.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(A_k - \text{mean}(A) \right)^2}$$

以上の手順によって得られた, 推定損失推移率 A とそのボラティリティ σ より, 確率過程に従う STCDO のプレミアムを計算する.

東京金融取引所が価格公開している CDS の債務企業を 5 つ選び, ポートフォリオを組成した. ポートフォリオを構成する債務企業は, 味の素, ブリヂストン, キヤノン, JT, 日本通運とした. 元本金額 5 億円, 満期 60 ヶ月の各債務企業の CDS について, 2008 年 1 月～2011 年 1 月までのプレミアムデータを用いた. この 5 つの債務企業の CDS で構成された STCDO プレミアムと, STCDO を対象としたヨーロッパ・コールオプション価格を計算した. ここでのコールオプションの行使価格は, 40bp とした.

Table.8 個別銘柄から推定した STCDO プレミアム

債務企業	プレミアム (bp)	推定推移率 A	ボラティリティ σ
AJINOMOTO	32.12	0.016	0.006
BRIDGE STONE	60.07	0.030	0.019
CANON	47.15	0.024	0.017
JAPAN TABACCO	56.51	0.028	0.014
NIPPON EXPRESS	41.31	0.021	0.009

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
倒産確率	0.891	0.103	0.006	$0.2 * 10^{-3}$	$4.1 * 10^{-6}$	$3.5 * 10^{-8}$

	K(bp)	A	σ	プレミアム (bp)	オプション価格 (bp)
STCDO	40	0.118	0.059	58.55	7.59

Table.8 上段が, CDS のプレミアムと推定した推移率, ボラティリティである. 企業単体での推定推移率は Table.6 の市場全体の統計の平均値と近い値を示している. 推定推移率は各 CDS のプレミアムに依存する. ここでは優良企業を選択したが, プレミアムの高い企業を選択すれば, それに伴い推定推移率も高くなる.

中段は, この 5 つの企業の CDS でポートフォリオを組成した場合の損失推移確率である. これは下段の推定推移率 A から決定される. ポートフォリオ全体の推定推移率は, 企業単体の CDS よりも高い値を示した.

次に, 個別の CDS がポートフォリオ全体に与える影響を観察するためにポートフォリオの構成企業を

1社だけ変更し、プレミアムの変動を計算した。ポートフォリオから除外する企業は任意に選んだ。今回は JAPANTABACCO を除外し、HITACHI と FUJI ELECTRIC を加えた2つのケースについてポートフォリオを再構築した。

Table.9 が日立製作所をポートフォリオに加えた時の CDS のプレミアムデータと、STCDO の推定値である。Table.10 がポートフォリオに富士電機ホールディングスを加えた場合である。

Table.9 日立製作所を加えた STCDO プレミアム

債務企業	プレミアム (bp)	推定推移率 A	ボラティリティ σ
AJINOMOTO	32.12	0.016	0.006
BRIDGE STONE	60.07	0.030	0.019
CANON	47.15	0.024	0.017
HITACHI	85.96	0.044	0.023
NIPPON EXPRESS	41.31	0.021	0.009

	K(bp)	A	σ	プレミアム (bp)	オプション価格 (bp)
STCDO	40	0.132	0.067	65.23	13.12

Table.10 富士電機 HLD を加えた STCDO プレミアム

債務企業	プレミアム (bp)	推定推移率 A	ボラティリティ σ
AJINOMOTO	32.12	0.016	0.006
BRIDGE STONE	60.07	0.030	0.019
CANON	47.15	0.024	0.017
FUJI ELECTRIC	264.93	0.146	0.108
NIPPON EXPRESS	41.31	0.021	0.009

	K(bp)	A	σ	プレミアム (bp)	オプション価格 (bp)
STCDO	40	0.224	0.127	110.54	50.03

ここまで、3つのポートフォリオについて STCDO の推定損失推移率、推定ボラティリティ、プレミアム、コールオプション価格を計算してきた。各ポートフォリオにおいて、ポートフォリオ全体の損失推移率は各企業の CDS の損失推移率より大幅に増加した値を示した。これは、その企業のみならず、ポートフォリオ内の他の企業の倒産を考慮しなければいけないためである。それにともない、STCDO のプレミアムも上昇した。プレミアムは、各 CDS のプレミアム平均より高い値を取る。さらに、ポートフォリオ内にプレミアムが際立って高い CDS が存在すると、STCDO のプレミアムも引っ張られ上昇することが確認できた。これは、Table.11 の富

士電機 HLD を加えた場合に顕著に見られた。オプション価格はいずれの場合も高い値を示したが、これは行使価格を低く設定したためである。オプションのペイオフは、STCDO のプレミアムと同じく期待損失額から計算されるため、価格変化の傾向は STCDO のプレミアムと同様であった。

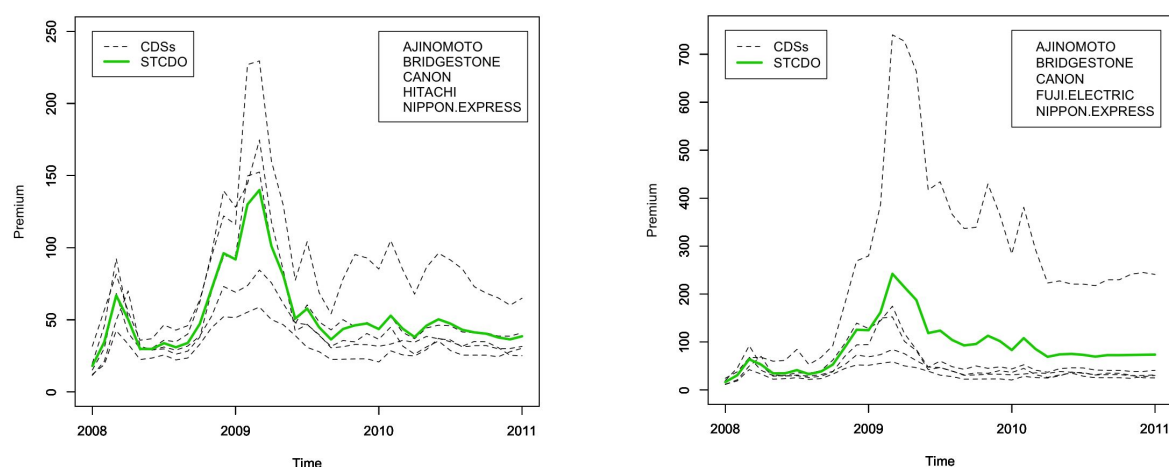


Fig.20 CDS と STCDO のプレミアム

ポートフォリオ内の各 CDS のプレミアムと、STCDO のプレミアムの関係を Fig. 20 に示した。左図が Table.9 のポートフォリオ、右図が Table.10 のポートフォリオにおける個別 CDS のプレミアムと、作成した STCDO のプレミアムである。STCDO のプレミアムは、ポートフォリオ内の CDS に大きく依存し、各 CDS の平均を取るような値で推移する。実際には、ポートフォリオの平均より高い値をしめす。ポートフォリオを組成することで、いずれか 1 社が倒産する確率が高まるためである。

Table.11 債務企業の変化による損失推移率とプレミアムの変化

ポートフォリオ	Table.9	Table.10	Table.11
CDS プレミアム平均	47.43	53.32	89.12
上昇率		12.42%	89.12%
推定損失推移率	0.118	0.132	0.224
上昇率		11.86%	89.83%
STCDO プレミアム平均	56.44	63.20	115.49
上昇率		11.98%	104.62%

最後に Table.8, Table.9, Table.10 で組み替えを行ったポートフォリオについて、各企業の CDS プレミアム価格の変化が、STCDO の指標に与える影響について検証した。Table.12 での上昇率とは CTCDO の指標について、Table.8 のポートフォリオを基準とした値である。推定損失推移率と STCDO プレミアムは共に、CDS プレミアムの平均値の上昇率とほぼ同様の比率で上昇していることがわかった。

5 結論

本論文では CDS ポートフォリオ全体の損失に注目し、CDS ポートフォリオの評価を行った。ポートフォリオの期待損失額を計算するためにポートフォリオ全体の倒産確率を求めなければいけない。このモデルではマルコフ過程に従う損失過程を定義し、損失分布を表現した。次にチャップマン・コルモゴロフの等式を満たすように損失推移率と損失推移確率を計算した。損失過程と損失推移率との間に調和性が成り立つとき、損失推移確率は損失分布と同一と見なすことができた。つまり、損失推移率をこのモデルのパラメータとすることで損失推移確率と損失分布を求めることができる。これにより、将来時刻での債務企業の倒産確率をモデル化することができた。

ポートフォリオ全体の損失推移率は、実際には常に変動していると考えられる。なぜならば、ポートフォリオ構成企業の経営状態は日々変化しているからである。また、ポートフォリオ内の債務企業に倒産が生じた直後には、残存企業のポートフォリオで再評価が行われ、ポートフォリオ価値が変化する。これらの損失推移率の変動に対応するため、損失推移率に確率過程を導入した。確率推移率は平均 0 のブラウン運動に従うものとし、平均項にドリフト制約条件を加えることで裁定取引の存在しない状況での損失推移率を考えることができた。また、モデルのパラメータを損失推移率とそのボラティリティの 2 つのみに限定することができた。本モデルは、この 2 つのパラメータを用いて、損失推移確率を計算することができる。そのため、より市場の値動きに適合するような価格を計算するために、最適な損失推移率とそのボラティリティを推定する必要がある。今回は、市場の価格データから適切な損失推移率とそのボラティリティを推定することで、モデルの恣意的要素を排除することができた。これによって、抽出した市場データの現状に合致した損失推移率を推定でき、CDS ポートフォリオのプレミアムと、それを取引対象とするコールオプションの価格を計算した。今回作成した STCDO のプレミアムは、ポートフォリオ構成企業の CDS ポートフォリオの平均とほぼ同じ値を示した。しかしポートフォリオを構成する企業を倒産相関が認められる企業にすることで、STCDO のプレミアムはポートフォリオの平均よりも高い値を示すと考えられる。つまり、CDS ポートフォリオの全体損失に注目したとしても、構成企業の個別銘柄の検証が必要となる。そのため、企業間の倒産相関係数をモデルに導入することで、さらなる改善が期待できる。このモデルに企業間の倒産相関係数を導入する場合、企業間の相関係数は、1 つの値に集約できる。つまりこのモデルは、コピュラモデルで STCDO の価格計算を行うと企業間の倒産相関係数がトランシェごとに変化してしまうという問題点を解決することができる。また、CDS ポートフォリオ全体の損失推移率を構成 CDS の市場データから推定するため、このモデルは全ての CDS 派生商品の評価に有効であると考えられる。

A 付録

A-1 損失推移確率の導出

損失推移率と損失推移確率の性質から得られた下のチャップマン・コルモゴロフの等式から損失推移確率の数値解を計算していく。

$$P_{nm}(t, T) = \sum_{k=n}^m P_{nk}(t, s) \cdot P_{km}(s, T)$$

P_{nm} を時間関数 T で微分する。

$$\begin{aligned} \frac{dP_{nm}(t, T)}{dT} &= \frac{P_{nm}(t, T + \Delta t) - P_{nm}(t, T)}{\Delta t} \\ &= \frac{\sum_{k=n}^m P_{nk}(t, s) \cdot P_{km}(s, T + \Delta t) - \sum_{k=n}^m P_{nk}(t, s) \cdot P_{km}(s, T)}{\Delta t} \\ &= \sum_{k=n}^m P_{nk}(t, s) \cdot \frac{P_{km}(s, T + \Delta t) - P_{km}(s, T)}{\Delta t} \end{aligned}$$

s は、 $0 \leq s \leq T$ を満たす任意の時間関数である。よって、時間関数 t を用いて一般化して表すことができる。

$$\frac{dP_{nm}(t, T)}{dT} = \sum_{k=n}^m P_{nk}(t, T) \cdot \frac{P_{km}(t, T + \Delta t) - P_{km}(t, T)}{\Delta t}$$

このとき、損失推移率を次のように定義する。

$$a_{km}(t, T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{km}(t, T + \Delta t) - P_{km}(t, T)}{\Delta t}$$

つまり、損失推移確率の微分方程式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{dP_{nm}(t, T)}{dT} &= \sum_{k=n}^m P_{nk}(t, T) a_{km}(t, T) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t, T) a_{km}(t, T) + P_{nm}(t, T) a_{mm}(t, T) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t, T) a_{km}(t, T) - P_{nm}(t, T) a_m(t, T) \end{aligned}$$

以上より、 P_{nm} の時刻 T での微分方程式を求めることができた。

$$\frac{dP_{nm}(t, T)}{dT} = \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t, T) a_{km}(t, T) - P_{nm}(t, T) a_m(t, T) \quad (\text{A.1})$$

この式 (A.1) の微分方程式を解くことにより、損失推移確率 P_{nm} を求めていく。損失推移率と損失推移確率の議論では現在時刻での倒産数 n と、将来時刻の倒産数 m の考慮が重要となってくる。ここでは n, m の大小関係について場合分けして解いていく。

1. $n > m$ (デフォルト数が減少する場合)
2. $n = m$ (デフォルト数が変化しない場合)
3. $n < m$ (デフォルト数が増加する場合)

1. $n > m$ のとき

損失過程 $\tilde{L}(T)$ は非減少関数である。

$$P_{nm}(t, T) = 0$$

2. $n = m$ のとき

$$\frac{d}{dT} P_{nm}(t, T) = -P_{nm}(t, T) a_m(t, T)$$

$$\frac{dP_{nm}(t, T)}{P_{nm}(t, T)} = -a_m(t, T) dT$$

両辺を積分区間 $[t, T]$ で積分する。

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{1}{P_{nm}(t, s)} dP_{nm}(t, s) &= - \int_t^T a_m(t, s) ds \\ \log P_{nm}(t, T) - \log P_{nm}(t, t) &= - \int_t^T a_m(t, s) ds \end{aligned}$$

ここで、 $n = m$ より $P_{nm}(t, t) = \mathbb{I}_{\{n=m\}} = 1$

$$\log P_{nm}(t, T) = - \int_t^T a_m(t, s) ds$$

$$P_{nm}(t, T) = \exp \left[- \int_t^T a_m(t, s) ds \right]$$

3. $n < m$ のとき

$$\frac{d}{dT} P_{nm}(t, T) + P_{nm}(t, T) a_m(t, T) = \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t, T) a_{km}(t, T)$$

上式の両辺に、 $e^{\int_t^T a_m(t, u) du}$ を掛ける。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= e^{\int_t^T a_m(t, u) du} \frac{d}{dT} P_{nm}(t, T) + P_{nm}(t, T) a_m(t, T) e^{\int_t^T a_m(t, u) du} \\ &= \frac{d}{dT} e^{\int_t^T a_m(t, u) du} P_{nm}(t, T) \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} e^{\int_t^T a_m(t, u) du} P_{nm}(t, T) &= e^{\int_t^T a_m(t, u) du} \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t, T) a_{km}(t, T) \\ d e^{\int_t^T a_m(t, u) du} P_{nm}(t, T) &= e^{\int_t^T a_m(t, u) du} \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t, T) a_{km}(t, T) dT \end{aligned}$$

両辺を T について、区間 $[t, T]$ で積分する。

$$\begin{aligned} \int_t^T de^{\int_t^s a_m(t,u)du} P_{nm}(t,s) ds &= \int_t^T e^{\int_t^s a_m(t,u)du} \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t,s) a_{km}(t,s) ds \\ (\text{左辺}) &= e^{\int_t^T a_m(t,u)du} P_{nm}(t,T) - e^{\int_t^t a_m(t,u)du} P_{nm}(t,t) \\ &= e^{\int_t^T a_m(t,u)du} P_{nm}(t,T) \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} e^{\int_t^T a_m(t,u)du} P_{nm}(t,T) &= \int_t^T e^{\int_t^s a_m(t,u)du} \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t,s) a_{km}(t,s) ds \\ P_{nm}(t,T) &= \int_t^T e^{-\int_t^T a_m(t,u)du - \int_s^t a_m(t,u)du} \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t,s) a_{km}(t,s) ds \\ P_{nm}(t,T) &= \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t,u)du} \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t,s) a_{km}(t,s) ds \end{aligned}$$

以上より、全ての倒産数に対する損失推移確率 P_{nm} を求めることができた。

その結果を下にまとめる。

$$P_{nm}(t,T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ \exp \left[-\int_t^T a_m(t,s) ds \right] & (n = m) \\ \int_t^T \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t,s) a_{km}(t,s) \exp \left[-\int_s^T a_m(t,u) du \right] ds & (n < m) \end{cases}$$

A-2 調和性の証明

[証明]

$t = 0, \tilde{L}(0) = L(0) = 0$ とする。つまり初期時刻 t を 0 とし、その時刻の倒産数を 0 とする。

$n = 0$ として損失推移率を考える。

$$a_{ij} = 0 \quad (i \geq j)$$

このとき、コルモゴロフ方程式は次を満たしている。

$$-\sum_{s=0}^k \frac{\partial}{\partial T} p_s(T) = \sum_{s=0}^k \left(\sum_{l=k+1}^N p_s(T) a_{sl}(T) \right) \quad (\text{A.2})$$

ここで、 $T \geq 0, n \geq 0$ とすると、 $p_n(T) > 0$ となる。

損失確率が正となる、状態 n の次の状態を M として定義する。

$$M := \min\{m > n | p_m(T) > 0\}$$

状態 n 以降の、倒産確率 > 0 となる最初の状態を m とし、その最小値が M となる。通常は、 $M = n + 1$ 。
もし、 M が存在しないならば、

$$p_m(T) = 0 \quad (n < m \leq I)$$

となり、 n 社以上倒産することはない。

つまり、 $\{p_0(T), \dots, p_n(T), p_{n+1}(T) = 0, 0, \dots, 0, p_I(T) = 0\}$ となる。

$$a_{mk}(T) = 0 \quad \text{for } (0 \leq m < n < k \leq N)$$

状態 m での損失推移率に関して、上式を満たしていると仮定する。つまり、 $p_n(T) > 0$ となる状態 n をまたいでの推移は存在しないと仮定する。この仮定により、損失過程 L は状態 n を必ず経由することになる。
よって、今後は状態 n での推移について議論していく。

その前に、状態 m からの推移について考える。

$$m = n + 1, \dots, M - 1 \text{ とする。} \Rightarrow p_m(T) = 0$$

状態 m から状態 k ($0 \leq k \leq N$) への推移は存在しない。このとき、 $a_{mk}(T) = 0$ となる。

次に、状態 n から状態 m への推移を考える。

$$a_{nm}(T) = \frac{\partial}{\partial T} p_{nm}(T) = \frac{\partial}{\partial T} \mathbb{P}[\tilde{L}(T) = m | \tilde{L}(t) = n]$$

$$a_{nm}(T) = \frac{1}{p_n(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial T} p_m(T) \quad \text{for } (m = n + 1, \dots, M - 1)$$

このとき、 $p_m(T) = 0$ より、 $\frac{\partial}{\partial T} p_m(T) \geq 0$ となる。また、 $p_n(T) > 0$ より、 $a_{nm}(T) \geq 0$ となる。

この不等式は、状態 n から状態 m への推移が存在することを示している。また、 $(m = n + 1, \dots, M - 1)$ においてコルモゴロフ方程式を満たしていることも同時に示している。

次に、状態 n から状態 k ($k > M$) への推移が存在しないことを示す。

a_{nM} について考えていく。式 (A.2) において、 $k = n, N = M$ とする。

$$\begin{aligned} - \sum_{s=0}^n \frac{\partial}{\partial T} p_s(T) &= \sum_{s=0}^n \left(\sum_{l=k+1}^M p_s(T) a_{sl}(T) \right) \\ &= p_n(T) a_{nM}(T) + \sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_{l=k+1}^M p_s(T) a_{sl}(T) \right) + \sum_{l=k+1}^{M-1} p_n(T) a_{nl}(T) \\ &= p_n(T) a_{nM}(T) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial T} p_s(T) + \sum_{s=n+1}^{M-1} \frac{\partial}{\partial T} p_s(T) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} p_n(T) a_{nM}(T) &= - \sum_{s=n}^{M-1} \frac{\partial}{\partial T} p_s(T) \\ a_{nM}(T) &= - \frac{1}{p_n(T)} \sum_{s=n}^{M-1} \frac{\partial}{\partial T} p_s(T) > 0 \end{aligned}$$

以上より、状態 M への推移が存在すること示された。この定理の証明では、損失推移確率が存在する状態をまたいでの推移は存在しないと仮定しているので、同様に $p_M(T) > 0$ となる状態 M をまたいでの推移も存在しないことになる。よって、状態 n から状態 $k(k > M)$ への推移は存在しない。

ここまで、 $p_n(T) > 0$ となる状態 n から全ての状態への推移について考えた。 $p(T) = 0$ となる状態からの推移は存在しなかった。さらに、 $p(T) > 0$ となる状態からは、一時点先の $p(T) > 0$ となる状態へしか推移しないことが示された。 $p(t, T) > 0$ を満たす全ての時刻において損失推移率 $a(t, T)$ が存在していた。損失推移率 $a(t, T)$ の存在は、生成行列 $A(t, T)$ とマルコフ連鎖 $\tilde{L}$ が存在していることも示している。また損失推移率の存在は、各時刻での損失推移確率がコルモゴロフ方程式に従っていることを示している。コルモゴロフ方程式はマルコフ連鎖の存在を前提としているので、マルコフ連鎖の性質を持つ損失過程は、損失推移率が存在する全ての状態においての損失分布を表現できることになる。よって定理 2.4.1 は示された。

[式 (A.2) の導出]

チャップマン・コルモゴロフ等式より、

$$\frac{\partial}{\partial T} P_{ns}(t, T) = \sum_{k=n}^s P_{nk}(t, T) a_{ks}(t, T)$$

ここで、 $n = 0, t = 0$ より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} P_{0s}(0, T) &= \sum_{k=0}^s P_{0k}(0, T) a_{ks}(0, T) \\ \frac{\partial}{\partial T} P_s(T) &= \sum_{k=0}^s P_k(T) a_{ks}(T) \end{aligned}$$

初期時刻 $t = 0$ のとき、 $P_s(T) = p_s(T)$ となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} p_s(T) &= \sum_{k=0}^s p_k(T) a_{ks}(T) \\ \sum_{s=0}^k \frac{\partial}{\partial T} p_s(T) &= \sum_{s=0}^k \sum_{l=0}^s p_k(T) a_{ls}(T) \\ &= p_0(a_{00} + a_{01} + \cdots + a_{0k}) + p_1(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1k}) + \\ &\quad \cdots + p_{k-1}(a_{k-1, k-1} + a_{k-1, k}) + p_k a_{kk} \end{aligned}$$

ここで、 $N \geq k$ とし、 $(N+1) \times (N+1)$ の損失推移率行列 $A(T)$ を考える。損失推移率行列の各行和は 0 となる。この性質から次のことが説明できる。

$$\begin{aligned} \sum_{l=s}^N a_{sl} &= a_{ss} + a_{s, s+1} + \cdots + a_{sk} + a_{s, k+1} + \cdots + a_{sN} = 0 \\ (a_{ss} + a_{s, s+1} + \cdots + a_{sk}) &= -(a_{s, k+1} + \cdots + a_{sN}) \end{aligned}$$

つまり、ある時刻 k の前後の損失推移率の和を等式によって表すことが出来た。これを、 $\sum_{s=0}^k \frac{\partial}{\partial T} p_s(T)$ の等式に応用する。

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^k \frac{\partial}{\partial T} p_s(T) &= -p_0(a_{0\ k+1} + \cdots + a_{0N}) - p_1(a_{1\ k+1} + \cdots + a_{1N}) - \\ &\quad \cdots - p_{k-1}(a_{k-1\ k+1} + \cdots + a_{k-1\ N}) - p_k(a_{k\ k+1} + \cdots + a_{kN}) \\ &= -\sum_{s=0}^k \left(\sum_{l=k+1}^N p_s(T) a_{sl}(T) \right) \end{aligned}$$

以上より、

$$-\sum_{s=0}^k \frac{\partial}{\partial T} p_s(T) = \sum_{s=0}^k \left(\sum_{l=k+1}^N p_s(T) a_{sl}(T) \right) \quad (\text{A.2})$$

[定理 2.4.1 証明終了]

A-3 One-Step 条件での損失推移確率の導出

One-Step 条件を考慮するとき、チャップマン・コルモゴロフの等式から導かれる偏微分方程式は次の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t, T) = -P_{nm}(t, T) a_m(t, T) + P_{nm-1}(t, T) a_{m-1}(t, T) \quad (\text{A.3})$$

この偏微分方程式を解くことで、One-Step での損失推移確率を求めることが出来る。そのために、状態 n と状態 m の大小関係について場合分けをして考えていく。

1. $n > m$ (デフォルト数が減少する場合)
2. $n = m$ (デフォルト数が変化しない場合)
3. $n < m$ (デフォルト数が増加する場合)

1. $n > m$ のとき

$$P_{nm}(t, T) = 0$$

2. $n = m$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t, T) = -P_{nm}(t, T) a_m(t, T)$$

$$\frac{dP_{nm}(t, T)}{P_{nm}(t, T)} = -a_m(t, T) dT$$

両辺を T について、積分区間 $[t, T]$ で積分する。

$$\int_t^T \frac{1}{P_{nm}(t, s)} dP_{nm}(t, s) = - \int_t^T a_m(t, s) ds$$

$$\log P_{nm}(t, T) - \log P_{nm}(t, t) = - \int_t^T a_m(t, s) ds$$

$$\log P_{nm}(t, T) = - \int_t^T a_m(t, s) ds$$

$$P_{nm}(t, T) = \exp \left[- \int_t^T a_m(t, s) ds \right]$$

3. $n < m$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t, T) = -P_{nm}(t, T)a_m(t, T) + P_{nm-1}(t, T)a_{m-1}(t, T)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t, T) + P_{nm}(t, T)a_m(t, T) = P_{nm-1}(t, T)a_{m-1}(t, T)$$

両辺に $e^{\int_t^T a_m(t, u) du}$ を掛ける。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= e^{\int_t^T a_m(t, u) du} \frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t, T) + P_{nm}(t, T)a_m(t, T)e^{\int_t^T a_m(t, u) du} \\ &= \frac{\partial}{\partial T} e^{\int_t^T a_m(t, u) du} P_{nm}(t, T) \end{aligned}$$

以上より、

$$\frac{\partial}{\partial T} e^{\int_t^T a_m(t, u) du} P_{nm}(t, T) = e^{\int_t^T a_m(t, u) du} P_{nm-1}(t, T)a_{m-1}(t, T)$$

$$de^{\int_t^T a_m(t, u) du} P_{nm}(t, T) = e^{\int_t^T a_m(t, u) du} P_{nm-1}(t, T)a_{m-1}(t, T)dT$$

両辺を T について、積分区間 $[t, T]$ で積分する。

$$\int_t^T de^{\int_t^s a_m(t, u) du} P_{nm}(t, s) = \int_t^T e^{\int_t^s a_m(t, u) du} P_{nm-1}(t, s)a_{m-1}(t, s) ds$$

$$e^{\int_t^T a_m(t, u) du} P_{nm}(t, T) = \int_t^T e^{-\int_s^t a_m(t, u) du} P_{nm-1}(t, s)a_{m-1}(t, s) ds$$

$$P_{nm}(t, T) = \int_t^T e^{-\int_s^t a_m(t, u) du} P_{nm-1}(t, s)a_{m-1}(t, s) ds$$

以上より、式 (A.3) から One-Step 条件での損失推移確率が求まった。

$$P_{nm}(t, T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ \exp \left[- \int_t^T a_m(t, s) ds \right] & (n = m) \\ \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t, u) du} P_{nm-1}(t, s) a_{m-1}(t, s) ds & (n < m) \end{cases}$$

A-4 One-Step 条件での調和性

2. $\Rightarrow$ 3.(a)

$P_{L(t)n}(t, T)$ がマルチンゲールとなるとき、 $h > 0$ とし $\frac{1}{h}(P_{L(t)n}(t, T+h) - P_{L(t)n}(t, T))$ について考えていく。

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\frac{1}{h} (P_{L(t)n}(t, T+h) - P_{L(t)n}(t, T)) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \frac{1}{h} \mathbb{E} [(P_{L(t)n}(t, T+h) - P_{L(t)n}(t, T)) \middle| \mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

ここで、 $P_{L(t)n}(t, T)$ がマルチンゲールとなるので、 $\frac{1}{h}(P_{L(t)n}(t, T+h) - P_{L(t)n}(t, T))$ もマルチンゲールとなる。

開区間 $(T, T+h)$ 上の任意の点を c とすると、平均値の定理より次式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial c} P_{L(t)n}(t, c) = \frac{1}{h} (P_{L(t)n}(t, T+h) - P_{L(t)n}(t, T))$$

よって $\frac{\partial}{\partial c} P_{L(t)n}(t, c)$ もマルチンゲールであることがわかる。

ここで $h \rightarrow 0$ とすると、 $c \rightarrow T$ となる。つまり、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial c} P_{L(t)n}(t, c) = \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t)n}(t, T)$$

よって、この条件のもとで $\frac{\partial}{\partial c} P_{L(t)n}(t, T)$ はマルチンゲールとなる。One-Step での推移確率の偏微分方程式は、性質 2.5.2 より次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial T} P_{L(t)n}(t, T) = -P_{L(t)n}(t, T) a_n(t, T) + P_{L(t)n-1}(t, T) a_{n-1}(t, T)$$

$P_{L(t)n}(t, T) a_n(t, T)$ がマルチンゲールであることを示すために、 $L(t), n$ の大小関係について場合分けをして考えていく。

(1). $n \leq L(t)$ のとき

$$P_{L(t)n}(t, T) a_n(t, T) = 0$$

(2). $n = L(t)$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial T} P_{L(t)n}(t, T) = -P_{L(t)n}(t, T) a_n(t, T)$$

(1),(2) はともにマルチンゲールとなる。

(3). $n \geq L(t)$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T} P_{L(t)n}(t, T) &= -P_{L(t)n}(t, T)a_n(t, T) + P_{L(t)n-1}(t, T)a_{n-1}(t, T) \\ P_{L(t)n}(t, T)a_n(t, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} P_{L(t)n}(t, T) + P_{L(t)n-1}(t, T)a_{n-1}(t, T)\end{aligned}$$

このとき $P_{L(t)n-1}(t, T)a_{n-1}(t, T)$ はマルチンゲールなので、 $P_{L(t)n}(t, T)a_n(t, T)$ はマルチンゲールである。

以上より、全ての場合についてマルチンゲールを示した。

2. $\Rightarrow$ 3.(b)

$L(t) < I$ とする。単位時間における倒産数の期待値を $Z_k(t)$ とし、次のように定義する。

また、 ϵ_k は有界の時間間隔を表している。

$$Z_k(t) = \frac{1}{\epsilon_k} \mathbb{E} [L(t + \epsilon_k) - L(t) | \mathcal{F}_t]$$

つまりここでは、 $\lim_{\epsilon_k \rightarrow 0} Z_k(t) = a_{L(t)}(t, t)$ を示せばよい。

$$\begin{aligned}Z_k(t) &= \frac{1}{\epsilon_k} \mathbb{E} [L(t + \epsilon_k) - L(t) | \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{1}{\epsilon_k} \sum_{n=1}^I (n - L(t)) P_{L(t)n}(t, t + \epsilon_k) \\ &= \frac{1}{\epsilon_k} \sum_{n=L(t)+1}^I (n - L(t)) P_{L(t)n}(t, t + \epsilon_k)\end{aligned}$$

$L(t + \epsilon_k) = n$ としている。 $P_{L(t)n}(t, t + \epsilon_k)$ を t の周りでテイラー展開する。

$$\begin{aligned}Z_k(t) &= \sum_{n=L(t)+1}^I (n - L(t)) \frac{1}{\epsilon_k} \left(P_{L(t)n}(t, t) + \epsilon_k \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t)n}(t, t) + o(\epsilon_k) \right) \\ &= \sum_{n=L(t)+1}^I (n - L(t)) \left(-P_{L(t)n}(t, t)a_n(t, t) + P_{L(t)n-1}(t, t)a_{n-1}(t, t) \right) + \frac{o(\epsilon_k)}{\epsilon_k}\end{aligned}$$

右辺の第一項を $\sum$ について展開する。

$$\begin{aligned}&1 \cdot (-P_{L(t)L(t)+1}(t, t)a_{L(t)+1}(t, t) + P_{L(t)L(t)}(t, t)a_{L(t)}(t, t)) \\ &+ 2 \cdot (-P_{L(t)L(t)+2}(t, t)a_{L(t)+2}(t, t) + P_{L(t)L(t)+1}(t, t)a_{L(t)+1}(t, t)) \\ &+ \cdots + (I - L(t)) (-P_{L(t)I}(t, t)a_I(t, t) + P_{L(t)I-1}(t, t)a_{I-1}(t, t)) \\ &= \sum_{n=L(t)}^{I-1} P_{L(t)n}(t, t)a_n(t, t) - (I - L(t))P_{L(t)I}(t, t)a_I(t, t)\end{aligned}$$

ここで、 $P_{L(t)n}(t, t) = 0$ for $(n > L(t))$ である。

$$\begin{aligned}Z_k(t) &= P_{L(t)L(t)}(t, t)a_{L(t)}(t, t) + \frac{o(\epsilon_k)}{\epsilon_k} \\ &= a_{L(t)}(t, t) + o(1)\end{aligned}$$

以上より、 $\lim_{\epsilon_k \rightarrow 0} Z_k(t) = a_{L(t)}(t, t)$ となる。

このとき、倒産強度を $\lambda_k(t) := a_{L(t)}(t, t)$ と定義する。

3. $\Rightarrow$ 1.

ここでは $p_n(t, T) = \mathbb{E} [\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}} | \mathcal{F}_t] = P_{L(t)n}(t, T)$ を示す。まず、インディケーター関数に注目する。

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}} &= \mathbb{I}_{\{L(t)=n\}} + \int_t^T (\mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}}) dL(s) \\
\mathbb{E} [\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}} | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{I}_{\{L(t)=n\}} + \mathbb{E} \left[\int_t^T (\mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}}) dL(s) | \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{I}_{\{L(t)=n\}} + \mathbb{E} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=t}^T (\mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}}) \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k} (L(s + \epsilon_k) - L(s)) | \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{I}_{\{L(t)=n\}} + \mathbb{E} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{s=t}^T (\mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}}) \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k} (L(s + \epsilon_k) - L(s)) | \mathcal{F}_s \right] | \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{I}_{\{L(t)=n\}} + \mathbb{E} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=t}^T (\mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}}) Z_k(s) \epsilon_k | \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{I}_{\{L(t)=n\}} + \mathbb{E} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=t}^T (\mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}}) \lambda_k(s) ds | \mathcal{F}_t \right]
\end{aligned}$$

ここで、 $\lambda_k(s) = a_{L(s)}(s, s)$ であった。

$$\lambda_k(s) = \begin{cases} a_{n-1}(s, s) & (L(s) = n-1) \\ a_n(s, s) & (L(s) = n) \end{cases}$$

これを上式に代入する。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}} | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{I}_{\{L(t)=n\}} + \int_t^T \mathbb{E} [\mathbb{I}_{\{L(s)=n-1\}} a_{n-1}(s, s) - \mathbb{I}_{\{L(s)=n\}} a_n(s, s) | \mathcal{F}_t] ds \\
&= P_{L(t)n}(t, t) + \int_t^T \mathbb{E} [P_{L(s)n-1}(s, s) a_{n-1}(s, s) - P_{L(s)n}(s, s) a_n(s, s) | \mathcal{F}_t] ds
\end{aligned}$$

3.(a) より $P_{L(t)n}(t, T) a_n(t, T)$ はマルチンゲールである。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}} | \mathcal{F}_t] &= P_{L(t)n}(t, t) + \int_t^T (P_{L(t)n-1}(t, s) a_{n-1}(t, s) - P_{L(t)n}(t, s) a_n(t, s)) ds \\
&= P_{L(t)n}(t, t) + \int_t^T \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t)n}(t, s) ds = P_{L(t)n}(t, T)
\end{aligned}$$

以上より、 $\mathbb{E} [\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}} | \mathcal{F}_t] = p_n(t, T) = P_{L(t)n}(t, T)$ が示された。

[定理 2.5.4 証明終了]

A-5 確率推移率モデルでの損失推移確率の導出

2. $n < m$ のとき

$$P_{nm}(t, T) = \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t, u) du} P_{nm-1}(t, s) a_{m-1}(t, s) ds$$

ここで $M(t, s) = P_{nm-1}(t, s)a_{m-1}(t, s)$ とし、

$$dM(t, s) = \mu_M(t, s)dt + \sigma_M(t, s)dW$$

で表現できるとする。

$$P_{nm}(t, T) = \int_t^T F(t, s, T)M(t, s)ds$$

$$dP_{nm}(t, T) = F(t, T, T)M(t, T)dT - F(t, t, T)M(t, t)dt$$

$$dP_{nm}(t, T) = -F(t, t, T)M(t, t)dt + \int_t^T d(F(t, s, T)M(t, s))ds \quad (A.4)$$

右辺の第二項について考えていく。

伊藤の積公式より

$$\begin{aligned} \int_t^T d(F(t, s, T)M(t, s))ds &= \int_t^T M(t, s)dF(t, s, T)ds + \int_t^T F(t, s, T)dM(t, s)ds \\ &\quad + \int_t^T < F(t, s, T)M(t, s) > ds \quad (A.5) \end{aligned}$$

式 (A.5) 右辺の各項について別々に解いていく。

$$\begin{aligned} \int_t^T M(t, s)dF(t, s, T)ds &= \int_t^T M(t, s)F(t, s, T) \left\{ \left(- \int_s^T \mu_m(t, u)du \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\int_s^T \sigma_m(t, u)du \right)^2 \right) dt - \left(\int_s^T \sigma_m(t, u)du \right) dW \right\} ds \\ \int_t^T F(t, s, T)dM(t, s)ds &= \int_t^T F(t, s, T)(\mu_M(t, s)dt + \sigma_M(t, s)dW)ds \\ \int_t^T dF(t, s, T)dM(t, s)ds &= \int_t^T F(t, s, T)\sigma_M(t, s) \left(\int_s^T \sigma_m(t, u)du \right) dt ds \end{aligned}$$

求めた各項の計算結果を式 (A.5) に代入し、さらに式 (A.4) に代入する。

$$\begin{aligned} dP_{nm}(t, T) &= -F(t, t, T)M(t, t)dt \\ &\quad + \left\{ \int_t^T M(t, s)F(t, s, T) \left(- \int_s^T \mu_m(t, u)du + \frac{1}{2} \left(\int_s^T \sigma_m(t, u)du \right)^2 \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T F(t, s, T)\mu_M(t, s)ds - \int_t^T F(t, s, T)\sigma_M(t, s) \left(\int_s^T \sigma_m(t, u)du \right) ds \right\} dt \\ &\quad + \left\{ \int_t^T F(t, s, T)\sigma_M(t, s)ds - \int_t^T M(t, s)F(t, s, T) \left(\int_s^T \sigma_m(t, u)du \right) ds \right\} dW \quad (A.6) \end{aligned}$$

さらに、式 (A.6) の各項について個別に計算を進めていく。その際に次の 2 つの性質を用いながら計算を進める。

$$(i) \quad \int_t^T \int_s^T f(s, u)duds = \int_t^T \int_t^u f(s, u)dsdu$$

$$(ii) \quad F(t, s, T) = F(t, s, u)F(t, u, T)$$

まず式 (A.6) 右辺第一項について考える。

$$\begin{aligned}
-F(t, t, T)M(t, t)dt &= -\exp\left[-\int_t^T a_m(t, u)du\right] P_{nm-1}(t, t)a_{m-1}(t, t)dt \\
-F(t, t, T)M(t, t)dt &= -a_{m-1}(t, t)P_{mm}(t, T)\mathbb{I}_{\{n=m-1\}}dt
\end{aligned} \tag{A.7}$$

ここでは、 $n = m$ のとき、 $P_{mm}(t, T) = -\exp\left[-\int_t^T a_m(t, u)du\right]$ となる性質を用いた。

次に式 (A.6) 右辺第二項の最初の部分に注目する。

$$\begin{aligned}
-\int_t^T \int_s^T M(t, s)F(t, s, T)\mu_m(t, u)duds &= -\int_t^T \int_t^u M(t, s)F(t, s, T)ds\mu_m(t, u)du \\
&= -\int_t^T \int_t^u M(t, s)F(t, s, u)dsF(t, u, T)\mu_m(t, u)du \\
-\int_t^T \int_s^T M(t, s)F(t, s, T)\mu_m(t, u)duds &= -\int_t^T P_{nm}(t, u)F(t, u, T)\mu_m(t, u)du
\end{aligned} \tag{A.8}$$

次に第二項の、積分の二乗を含む部分を考える。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(\int_s^T \sigma_m(t, u)du \right)^2 &= \int_s^T \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\int_s^y \sigma_m(t, u)du \right)^2 \right\} dy \\
&= \int_s^T \int_s^y \sigma_m(t, u)du \sigma_m(t, y)dy \\
&= \int_s^T \sigma_m(t, u) \left(\int_u^T \sigma_m(t, y)dy \right) du
\end{aligned}$$

上記の変形を用い、第二項について考える。

$$\begin{aligned}
&\int_t^T M(t, s)F(t, s, T) \frac{1}{2} \left(\int_s^T \sigma_m(t, u)du \right)^2 ds \\
&= \int_t^T \int_s^T M(t, s)F(t, s, T)\sigma_m(t, u) \left(\int_u^T \sigma_m(t, y)dy \right) duds \\
&= \int_t^T P_{nm}(t, u)F(t, u, T)\sigma_m(t, u) \left(\int_u^T \sigma_m(t, y)dy \right) du \\
&= \int_t^T \int_t^y P_{nm}(t, u)F(t, u, T)\sigma_m(t, u)\sigma_m(t, y)dudy \\
&= \int_t^T \sigma_m(t, y)F(t, y, T) \left(\int_t^y P_{nm}(t, u)F(t, u, T)\sigma_m(t, u)du \right) dy
\end{aligned} \tag{A.9}$$

さらに、式 (A.6) 右辺第二項の最後の部分について考える。

$$\begin{aligned}
& \int_t^T F(t, s, T) \sigma_M(t, s) \left(\int_s^T \sigma_m(t, u) du \right) ds \\
&= \int_t^T \int_t^u F(t, s, T) \sigma_M(t, s) \sigma_m(t, u) ds du \\
&= \int_t^T \int_t^u F(t, u, T) F(t, s, u) \sigma_M(t, s) \sigma_m(t, u) ds du \\
&= \int_t^T F(t, u, T) \sigma_m(t, u) \left(\int_t^u F(t, s, u) \sigma_M(t, s) ds \right) du \tag{A.10}
\end{aligned}$$

式 (A.8) と同様に、第三項の最後の部分に注目する。

$$\int_t^T \int_s^T M(t, s) F(t, s, T) \sigma_m(t, u) du ds = \int_t^T P_{nm}(t, u) F(t, u, T) \sigma_m(t, u) du \tag{A.11}$$

各項の計算結果式 (A.7)～式 (A.11) を式 (A.6) に代入する。

$$\begin{aligned}
dP_{nm}(t, T) &= -a_{m-1}(t, t) P_{mm}(t, T) \mathbb{I}_{\{n=m-1\}} dt \\
&+ \left\{ - \int_t^T P_{nm}(t, u) F(t, u, T) \mu_m(t, u) du \right. \\
&\quad + \int_t^T \sigma_m(t, u) F(t, u, T) \left(\int_t^u P_{nm}(t, s) F(t, s, u) \sigma_m(t, s) ds \right) du \\
&\quad + \int_t^T F(t, s, T) \mu_M(t, s) ds - \int_t^T F(t, u, T) \sigma_m(t, u) \left(\int_t^u F(t, s, u) \sigma_M(t, s) ds \right) du \Big\} dt \\
&+ \int_t^T F(t, s, T) \left(\sigma_M(t, s) - P_{nm}(t, s) \sigma_m(t, s) \right) ds dW
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dP_{nm}(t, T) &= -a_{m-1}(t, t) P_{mm}(t, T) \mathbb{I}_{\{n=m-1\}} dt \\
&+ \left\{ - \int_t^T P_{nm}(t, u) F(t, u, T) \mu_m(t, u) du + \int_t^T F(t, s, T) \mu_M(t, s) ds \right. \\
&\quad - \int_t^T \sigma_m(t, u) F(t, u, T) \left(\int_t^u F(t, s, u) (\sigma_M(t, s) - P_{nm}(t, s) \sigma_m(t, s)) ds \right) du \Big\} dt \\
&+ \int_t^T F(t, s, T) \left(\sigma_M(t, s) - P_{nm}(t, s) \sigma_m(t, s) \right) ds dW
\end{aligned}$$

ここで、 $v_{nm}(t, T)$ を次のように置き換える。

$$v_{nm}(t, T) = \int_t^T F(t, s, T) \left(\sigma_M(t, s) - P_{nm}(t, s) \sigma_m(t, s) \right) ds \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
dP_{nm}(t, T) &= -a_{m-1}(t, t)P_{nm}(t, T)\mathbb{I}_{\{n=m-1\}}dt \\
&+ \left\{ \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u)du \right] \left(-P_{nm}(t, s)\mu_m(t, s) + \mu_M(t, s) - \sigma_m(t, s)v_{nm}(t, s) \right) ds \right\} dt \\
&+ v_{nm}(t, T)dW
\end{aligned}$$

さらに、 $u_{nm}(t, T)$ を次のように置き換える。

$$\begin{aligned}
u_{nm}(t, T) &= -a_{m-1}(t, t)P_{nm}(t, T)\mathbb{I}_{\{n=m-1\}} \\
&+ \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u)du \right] \left(-P_{nm}(t, s)\mu_m(t, s) + \mu_M(t, s) - \sigma_m(t, s)v_{nm}(t, s) \right) ds \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

このとき、 $dP_{nm}(t, T)$ は簡略に表現することができる。

$$dP_{nm}(t, T) = u_{nm}(t, T)dt + v_{nm}(t, T)dW$$

A-6 ドリフト制約

ドリフト制約式 (3.14) が成り立つとき $P_{L(t) m}(t, T)$ がマルチンゲールとなることを示す。

$0 \leq m' \leq m \leq I, L(t) < m$ について考え、 $P_{L(t) m'}(t, T)$ はマルチンゲールであるとするとき $P_{L(t) m'}(t, T)a_{m'}(t, T)$ もマルチンゲールとなる。つまり、式 (3.14) を満たすことになる。
 $m' = m - 1$ のとき、 $d(P_{L(t) m-1}(t, T)a_{m-1}(t, T))$ の dt 項に注目する。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [d(P_{L(t) m-1}(t, T)a_{m-1}(t, T))] &= \mu_M(t, T) \\
&= P_{L(t) m-1}(t, T)\mu_{m-1}(t, T) + a_{m-1}(t, T)u_{L(t) m-1}(t, T) + \sigma_{m-1}(t, T)v_{L(t) m-1}(t, T) \\
&= a_{m-1}(t, T)u_{L(t) m-1}(t, T) \\
&= -a_{m-1}(t, T)\phi_{m-1}(t, T)\lambda_L(t)
\end{aligned}$$

ここでの変形には、式 (3.14), 式 (3.13) を用いている。このとき、 $P_{L(t) m}(t, T)$ がマルチンゲールとなることを示す。つまり、 $\mathbb{E} [d(P_{L(t) m}(t, T))] = 0$ となることを示せばよい。式 (3.12) より、

$$\mathbb{E} [d(P_{L(t) m}(t, T))] = u_{L(t-) m}(t, T) + \phi_m(t, T)\lambda_L(t) \quad (\text{A.14})$$

となるので、上式右辺の $u_{L(t-) m}(t, T)$ について考えていく。また、 $P_{L(t) m}(t, T)$ がマルチンゲールとなるとき、 $t \leq s \leq T$ を満たす任意の s について、 $\mathbb{E} [P_{L(s) m}(s, T)|\mathcal{F}_t] = P_{L(t) m}(t, T)$ が成り立つことになる。つまりこの式は、時刻 s での倒産の有無に関わらず成り立つことになる。よって、時刻 t においても倒産を

考慮せずに議論を進めていく。

$$\begin{aligned}
u_{L(t-)-m}(t, T) &= -a_{m-1}(t, t)P_{mm}(t, T)\mathbb{I}_{\{L(t)=m-1\}} + \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u)du \right] \\
&\quad \left(-P_{L(t)m}(t, s)\mu_m(t, s) + \mu_M(t, s) - \sigma_m(t, s)v_{L(t-)-m}(t, s) \right) ds \\
&= -a_{m-1}(t, t)P_{mm}(t, T)\mathbb{I}_{\{L(t)=m-1\}} \\
&\quad + \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u)du \right] \mu_M(t, s) ds \\
&= -a_{m-1}(t, t)P_{mm}(t, T)\mathbb{I}_{\{L(t)=m-1\}} \\
&\quad - \lambda_L(t) \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u)du \right] a_{m-1}(t, s)\phi_{m-1}(t, s) ds
\end{aligned}$$

ここで、 $\phi_m(t, T)$ 、 $\phi_{m-1}(t, T)$ は以下の式に従っている。

$$\begin{aligned}
\phi_m(t, T) &= P_{L(t)+1-m}(t, T) - P_{L(t)-m}(t, T) & (L(t) < m) \\
\phi_{m-1}(t, T) &= \begin{cases} -P_{L(t)-m-1}(t, T) & (L(t) = m-1) \\ P_{L(t)+1-m-1}(t, T) - P_{L(t)-m-1}(t, T) & (L(t) < m-1) \end{cases}
\end{aligned}$$

1. $L(t) = m-1$ のとき

$\mathbb{I}_{\{L(t)=m-1\}} = 1$ となる。

$$\begin{aligned}
u_{L(t-)-m}(t, T) &= -a_{m-1}(t, t)P_{mm}(t, T) - \lambda_L(t) \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u)du \right] a_{m-1}(t, s)\phi_{m-1}(t, s) ds \\
&= -\lambda_L(t)P_{L(t)+1-m}(t, T) + \lambda_L(t) \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u)du \right] a_{m-1}(t, s)P_{L(t)-m-1}(t, s) ds \\
&= -\lambda_L(t)P_{L(t)+1-m}(t, T) + \lambda_L(t)P_{L(t)-m}(t, T) \\
&= -\lambda_L(t) \left(P_{L(t)+1-m}(t, T) - P_{L(t)-m}(t, T) \right) \\
&= -\lambda_L(t)\phi_m(t, T)
\end{aligned}$$

2. $L(t) < m - 1$ のとき

$\mathbb{I}_{\{L(t)=m-1\}} = 0$ となる。

$$\begin{aligned}
u_{L(t-), m}(t, T) &= -\lambda_L(t) \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u) du \right] a_{m-1}(t, s) \phi_{m-1}(t, s) ds \\
&= -\lambda_L(t) \int_t^T \exp \left[- \int_s^T a_m(t, u) du \right] a_{m-1}(t, s) \left(P_{L(t)+1, m-1}(t, s) - P_{L(t), m-1}(t, s) \right) ds \\
&= -\lambda_L(t) \left(P_{L(t)+1, m}(t, T) - P_{L(t), m}(t, T) \right) \\
&= -\lambda_L(t) \phi_m(t, T)
\end{aligned}$$

以上より、 $L(t) \leq m - 1$ のとき、

$$u_{L(t-), m}(t, T) = -\lambda_L(t) \phi_m(t, T)$$

となり、式 (A.14) より

$$\mathbb{E} \left[d(P_{L(t), m}(t, T)) \right] = u_{L(t-), m}(t, T) + \phi_m(t, T) \lambda_L(t) = 0$$

よって、 $P_{L(t), m}(t, T)$ はマルチンゲールとなる。

[定理 3.3.1 証明終了]

参考文献

- 1) Philipp J. Schonbucher. Portfolio Losses And The Term Structure Of Loss Transition Rates: A New Methodology For The Pricing Of Portfolio Credit Derivatives. *Department of Mathematics, ETH Zurich. 2006*
- 2) R.Frey and J.Backhaus, Portfolio Credit Risk Models With Interacting Default Intensities:A Markovian Approach, *Working paper, Department of Mathematics, Universitt Leipzig. 2004*
- 3) Kay Giesecke and Lisa R Goldberg, A Top-Down Approach to Multi-Name Credit, *Stanford University and MACI Barra. 2008*
- 4) Philipp J. Schonbucher, Time for a Time-Change: A new Approach to Multivariate Intensity Models of Credit Risk , *Department of Mathematics, ETH Zurich. 2008*
- 5) Philippe Ehlers, Dynamic Credit Portfolio Derivatives Pricing, *Department of Mathematics, ETH Zurich. 2006*
- 6) Paul Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, *Springer.2004*
- 7) Soren Willemann, An Evaluation of the Base Correlation Framework for Synthetic CDOs, *Department of Accounting , Finance and Logistics , Aarhus School of Business , Denmark. 2004*
- 8) S.E. シュリーブ, ファイナンスのための確率解析 II, *シュプリンガー・ジャパン. 2008*
- 9) 浦谷 規, 無裁定理論とマルチンゲール, *朝倉書店. 2005*
- 10) 今野 紀雄, マルコフ連鎖から格子確率モデル, *シュプリンガー・ジャパン. 2001*

謝辞

本論文を作成するにあたり、多くの方々に大変お世話になりました。指導教官である浦谷規教授には長きに渡りご指導いただき、心からお礼申し上げます。また、素晴らしい研究環境を与えていただいたことにも深く感謝します。たくさんのアドバイスをくださり、稚拙の質問にも丁寧にご指導くださいました安田和弘助教授にも大変感謝しております。さらに、2年間の大学院生活で有意義な時間を共にした先輩方、同期の荒川君、始関君、中川君、後輩の皆様にも感謝します。最後に、18年間の学生生活をあらゆる面から支援し、常に見守ってくれた家族に感謝いたします。2011年2月

滑志田 謙