

CDS取引におけるリスク分析：カウンター パーティーリスクモデル

中川, 雅人 / NAKAGAWA, Masato

(発行年 / Year)

2011-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2011-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2010 年度修士論文

CDS 取引におけるリスク分析 ～ カウンターパーティーリスクモデル ～



法政大学大学院
工学研究科システム工学専攻

09R6207 中川 雅人

指導教員 浦谷 規 教授

THE 2010 MASTER'S THESIS

RISK ANALYSIS OF CDS WITH COUNTERPARTY RISK



DEPARTMENT OF SYSTEM ENGINEERING
GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING
HOSEI UNIVERSITY

09R6207 MASATO NAKAGAWA

SUPERVISOR PROF. TADASHI URATANI

概 要

本論文では、昨今の金融危機により注目が集まっている CDS 取引におけるカウンターパーティーリスクの分析をおこなう。カウンターパーティーとは、デリバティブなどの発行元である金融機関のことをいう。つまり、発行元のデフォルトリスクを CDS に反映させた価値を分析する。CDS 価値を評価するモデルは S.Crépey et al, [2009] により提唱されたマルコフ・コピュラモデルを参考にする。また、このモデルからカウンターパーティーリスクの評価に関する EPE, CVA 及びヘッジ戦略を導出する。本モデルでは、コピュラの性質によりキャリブレーションが容易になる。数値実験から、パラメーターを変動させたときの EPE と CVA の動向を分析する。また、実際のデータを用いて CDS 価格のシミュレーションをおこなう。

Abstract

We consider the counterparty-risk on CDS trading that has been recently disputed. The counterparty is a financial institution that issues financial derivatives. We analyze CDS values that reflect the default risk of the issuer. The pricing model is based on Markov chain copula with joint default probability, which is proposed by S.Crépey et al, [2009]. From the model, we derive formulas for CVA, EPE and hedging strategies which are indices for CDS counterparty risk. Calibration of model parameters is straightforward from the copula property. Numerical experiments show the behavioral features of EPE and CVA. The CDS price is simulated using actual data.

目次

1	はじめに	1
2	CDS 取引	2
2.1	CDS 価値モデル	2
2.1.1	Risk-free CDS モデル	2
2.1.2	Risky CDS モデル	3
2.2	EPE(Expected Positive Exposure)	4
2.3	CVA(Credit Value Adjustment)	5
3	フィルトレーション変換	6
4	マルコフ・コピュラ	7
4.1	マルコフ・コピュラの導入	7
4.2	コピュラ	9
5	プライシング	11
5.1	Risk-free CDS 価値関数	11
5.2	Risky CDS 価値関数	11
5.3	EPE と CVA	12
6	ヘッジ戦略	13
6.1	ダイナミックプライシング	13
6.1.1	Risk-free CDS	13
6.1.2	Risky CDS	14
6.2	最小分散ヘッジング	15
7	実装	17
7.1	線形強度	17
7.2	定数強度	18
7.3	キャリブレーション	20
8	数値実験	21
8.1	アルゴリズム	21
8.2	数値例	24
8.2.1	定数強度	24
8.2.2	線形増加強度	25
8.2.3	線形減少強度	27
8.3	価値関数	28
8.3.1	定数強度における考察	32
8.3.2	線形増加強度における考察	32
8.3.3	線形減少強度における考察	33

8.4	EPE(Expected Positive Exposure)	33
8.4.1	定数強度	34
8.4.2	線形増加強度	34
8.4.3	線形減少強度	35
8.5	CVA(Credit Value Adjustment)	36
8.5.1	定数強度	36
8.5.2	線形増加強度	36
8.5.3	線形減少強度	37
8.6	コピュラの相関係数 ρ における CVA(0) の推移	38
9	シミュレーション	39
9.1	データ	39
9.2	Risky CDS 価格	39
9.3	ヘッジング	40
10	結論	41
A	付録	42
A.1	CVA の性質 (定理 2.1 の証明)	42
A.2	フィルトレーション変換 (定理 3.1 の証明)	44
A.3	マルコフ・コピュラ (定理 4.1 の証明)	46
A.4	Risk-free CDS 価値関数の導出 (定理 5.1 の証明)	52
A.5	Risky CDS 価値関数の導出 (定理 5.2 の証明)	54
A.6	EPE と CVA の導出 (定理 5.3 の証明)	57
	参考文献	60
	謝辞	61

1 はじめに

近年,カウンターパーティーリスクの重要性が高まってきている. その背景には,2007年のサブプライムローン問題に端を発した金融危機がある. 複雑な金融商品や金融機関の高レバレッジ経営その果ての大手金融機関の倒産,金融危機以前には重視されていなかった潜在的なリスクが次々と浮かび上がってきた. その中の一つに本研究のテーマであるカウンターパーティーリスクがある. また,2010年になり実務家や研究者を中心にカウンターパーティーリスクの研究が急速に広がってきている. これは,銀行監督上の国際協調に関するルールを策定しているバーゼル委員会がCVAの導入などカウンターパーティーリスクの管理強化を促していることが大きく影響している.

本研究では,カウンターパーティーリスクを分析するにあたり,CDS取引に着目した. CDSは,金融危機により注目を浴びた商品の一つであり一般的に広く売買されている. これは,本来の目的であるリスクヘッジとしてだけでなく投機目的としての売買が活発になったためである. その結果,ピーク時の取引残高が60兆ドルを超えるまでに膨張していた. そうした中,大手金融機関が破綻したことにより,CDS対象企業のデフォルトが続くと売り手であるカウンターパーティーに膨大な保証支払い義務が生じることが表面化された. つまり,カウンターパーティー自体のデフォルトが危惧されるようになった. このことにより,CDS取引におけるカウンターパーティーリスクが注目されるようになった.

一般的にCDSの価値はプレミアムを基にしているが,本研究においてはキャッシュフローの総額として捉える. このCDS価値に対するカウンターパーティーリスクの影響を捉えるため,モデルを導出しリスク分析を行う. また,カウンターパーティーリスクを評価する方法としてEPE,CVAを用いる. CDS価値の導出は,S.Crépey et al,[2009]により提唱されたマルコフ・コピュラモデルを参考にする. マルコフ・コピュラモデルとはマルコフとコピュラの性質を有するモデルである. マルコフ性とは,未来の挙動は現在の情報のみから決定され,過去の挙動と無関係であるという性質である. この性質により,参照企業とカウンターパーティーのデフォルトを確率的に捉えることが可能となる. 次に,コピュラの性質より参照企業とカウンターパーティーにおける個々のデフォルト確率から同時デフォルト確率の導出が可能となる. また,シミュレーションをおこなう際のキャリブレーションが容易になる.

このモデルを用いて数値実験とシミュレーションをおこなう. 数値実験ではモデルのパラメーターを変動させることにより,各パラメーターがCDS価値及びEPE,CVAに与える影響について分析をおこなう. 次に,シミュレーションでは東京金融取引所が公表しているCDS参考価格からキャリブレーションをおこない,カウンターパーティーリスクを考慮する理論上のCDS価格を導出する. また,モンテカルロ法によりヘッジ戦略のシミュレーションもおこなう.

2 CDS取引

CDS取引とは、債券を直接移転することなく、信用リスクのみを移転することのできるデリバティブ取引である。つまり、CDS取引により債権契約を結んでいる債権者は、債務者のデフォルトリスクのみをヘッジすることができる。CDS取引におけるデフォルトとは、「倒産」、「支払不履行」、「リストラクチャリング」の発生を意味します。そのため、企業が存続していてもデフォルトとみなされることもあります。CDS取引において、債務者を参照企業、債権者をプロテクションの買い手、CDSの発行者をプロテクションの売り手と呼ばれる。CDS取引において、プロテクションの買い手はプロテクションの売り手から参照企業の債務に対する保証を得る。その対価として、プロテクションの買い手はプロテクションの売り手に対して契約期間に応じてプレミアムを支払う。本研究ではOTCデリバティブを想定している。OTCデリバティブとは、証券取引所を通さず証券会社等の店頭でデリバティブの相対取引を行うことであり、店頭デリバティブとも呼ばれる。

2.1 CDS価値モデル

CDS取引の構造からモデルを導出する。本研究は、カウンターパーティーリスクの分析を目的としているため、カウンターパーティーリスクを考慮しないときと考慮するときに分けてモデルを導出する。また、これ以降ではカウンターパーティーリスクを考慮するときのCDSをRisky CDS、考慮しないときのCDSをRisk-free CDSと呼ぶ。

2.1.1 Risk-free CDSモデル

CDSの価値は、期待キャッシュフローの総額で表現される。よって、キャッシュフロー総額を導出する。Risk-free CDSのキャッシュフローは

- a. プレミアムの支払い総額 $S(t)$
- b. 参照企業のデフォルトに対する保証額 $D_1(t)$

の2点である。リスク中立測度下の確率空間を $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 、割引過程を β_t とするとキャッシュフロー $p_T(t)$ は

$$\beta_t p_T(t) = -S(t) + D_1(t)$$

と表せる。ただし、 $S(t)$ と $D_1(t)$ は割引価値とする。

a. プレミアムの支払い総額

本研究では、保証対象となる債券価格を1と仮定する。よって、プレミアムはその料率であるスプレッド κ を用いて $1 \times \kappa$ で表現できる。つまり、プレミアムとスプレッドが一致する。また、プレミアムの支払いが連続であると仮定すると、 $S(t)$ は連続的に支払われたプレミアムを連続的に割り引いた総額となる。つまり、プレミアムの総額は

$$S(t) = \kappa \int_{t \wedge \tau_1 \wedge T}^{\tau_1 \wedge T} \beta_s ds \quad (2.1)$$

と表せる。

b. 参照企業のデフォルトに対する保証額

参照企業のデフォルトを想定する。プロテクションの売り手が保証する額は、参照企業のデフォルトにより回収できなかった債務の額となる。よって、参照企業のデフォルト時刻を τ_1 、参照企業からの回収率を R_1 とすると

$$D_1(t) = \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \leq T\}} \quad (2.2)$$

と表せる。

以上より、Risk-free CDS のキャッシュフロー $p_T(t)$ は

$$\beta_t p_T(t) = -\kappa \int_{t \wedge \tau_1 \wedge T}^{\tau_1 \wedge T} \beta_s ds + \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \leq T\}}$$

となる。このとき、Risk-free CDS の価値過程 $P_T(t)$ は次のように定義される。

$$P_T(t) = \mathbb{E}_t[p_T(t)] \quad (2.3)$$

よって、価値過程 $P_T(t)$ は

$$P_T(t) = \mathbb{E}_t \left[-\kappa \int_{t \wedge \tau_1 \wedge T}^{\tau_1 \wedge T} \frac{\beta_s}{\beta_t} ds + \frac{\beta_{\tau_1}}{\beta_t}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \leq T\}} \right] \quad (2.4)$$

となる。

2.1.2 Risky CDS モデル

Risk-free CDS モデル同様にキャッシュフローからモデルを導出する。Risky CDS のキャッシュフローは以下の4点である。

- | | |
|---------------------------|--------------|
| a. プレミアムの支払い総額 | $S'(t)$ |
| b. 参照企業のデフォルトに対する保証額 | $D'_1(t)$ |
| c. カウンターパーティーのデフォルトによる精算額 | $D'_2(t)$ |
| d. 同時デフォルトにおける回収額 | $D'_{12}(t)$ |

ただし、 $S'(t), D'_1(t), D'_2(t), D'_{12}(t)$ は割引価値とする。よって、キャッシュフロー $\pi_T(t)$ は、

$$\beta_t \pi_T(t) = -S'(t) + D'_1(t) + D'_2(t) + D'_{12}(t)$$

と表せる。ここで、 $S'(t)$ と $D'_1(t)$ は $S(t)$ と $D_1(t)$ にカウンターパーティーのデフォルト時刻 τ_2 を考慮した形になる。また、 $D'_2(t), D'_{12}(t)$ は Risky CDS 特有の概念である。

a. プレミアムの支払い総額

Risk-free CDS と同様に $S'(t)$ は連続的に支払われたプレミアムを連続的に割り引いた総額となる。ただし、カウンターパーティーのデフォルトを考慮する必要がある。つまり、プレミアムの総額は $S(t)$ の積分区間に τ_2 を加えて次のように表せる。

$$S'(t) = \kappa \int_{t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T}^{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T} \beta_s ds \quad (2.5)$$

b. 参照企業のデフォルトに対する保証額

これも,Risk-free CDS と同様に $D'_1(t)$ は参照企業のデフォルトにより回収できなかった債務の額となる. ただし, カウンターパーティーが参照企業より先にデフォルトしないという条件が必要になる. つまり, 参照企業のデフォルトに対する保証額は $D_1(t)$ に $\mathbb{I}_{\{\tau_1 < \tau_2\}}$ を加えて次のように表せる.

$$D'_1(t) = \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \leq T\}}\mathbb{I}_{\{\tau_1 < \tau_2\}} \quad (2.6)$$

c. カウンターパーティーのデフォルトによる精算額

カウンターパーティーがデフォルトしたとき, デリバティブ契約を終了させその時点の時価で取引の清算を行うことが通例となっている. よって, デフォルト時刻における CDS 価値を $\chi_{(\tau_2)}$, カウンターパーティーからの回収率を R_2 とすると精算額は

$$D'_2(t) = \beta_{\tau_2}\mathbb{I}_{t < \tau_2 \leq T}\mathbb{I}_{\tau_2 < \tau_1}\left[R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-\right] \quad (2.7)$$

と表せる.

d. 同時デフォルトにおける回収額

参照企業とカウンターパーティーが同時にデフォルトすると, 債務に対する完全な保証が得られない. そこで, 回収額は保証額に回収率を掛けて以下のように表せる.

$$D'_{12}(t) = \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \leq T\}}R_2\mathbb{I}_{\{\tau_1 = \tau_2\}} \quad (2.8)$$

以上より,Risky CDS のキャッシュフロー $\pi_T(t)$ は

$$\begin{aligned} \beta_t\pi_T(t) = & -\kappa \int_{t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T}^{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T} \beta_s ds + \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \leq T\}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau_1 < \tau_2\}} + R_2\mathbb{I}_{\{\tau_1 = \tau_2\}}\right] \\ & + \beta_{\tau_2}\mathbb{I}_{\{t < \tau_2 \leq T\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}}\left[R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-\right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる. このとき,Risky CDS の価値過程 $\Pi_T(t)$ は次のように定義される.

$$\Pi_T(t) = \mathbb{E}_t[\pi_T(t)] \quad (2.10)$$

よって, 価値過程 $\Pi_T(t)$ は

$$\begin{aligned} \Pi_T(t) = \mathbb{E}_t \left[& -\kappa \int_{t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T}^{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T} \frac{\beta_s}{\beta_t} ds + \frac{\beta_{\tau_1}}{\beta_t}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \leq T\}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau_1 < \tau_2\}} + R_2\mathbb{I}_{\{\tau_1 = \tau_2\}}\right] \right. \\ & \left. + \frac{\beta_{\tau_2}}{\beta_t}\mathbb{I}_{\{t < \tau_2 \leq T\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}}\left[R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-\right] \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる.

2.2 EPE(Expected Positive Exposure)

EPE とは, カウンターパーティーのデフォルトを考慮した期待エクスポージャーである. このエクスポージャーとは, 決済前にカウンターパーティーがデフォルトすることにより被る損失であり損失リスクを評価するために用いられる概念である. ここで, カウンターパーティーのデフォルト時のエクスポージャー (ED) を $\xi_{(\tau_2)}$ とすると,EPE は

$$EPE(t) = \mathbb{E}\left[\xi_{(\tau_2)} \mid \tau_2 = t\right] \quad (2.12)$$

と定義される. このとき, エクスポージャー (ED) は以下のようになる.

$$\xi_{(\tau_2)} = \begin{cases} (1 - R_2)(1 - R_1) & \tau_2 = \tau_1 \leq T, \\ P_{\tau_2}^+(1 - R_2) & \tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.13)$$

2.3 CVA(Credit Value Adjustment)

CVA は, CDS 価値の調整額を意味する. つまり, カウンターパーティーリスクを評価したものであり, 以下のように定義される.

$$\beta_t CVA_t = \mathbb{I}_{\{t < \tau_2\}} \mathbf{E}_t [\beta_{\tau_2} \xi_{(\tau_2)}] \quad (2.14)$$

以上の定義より, CDS の価値過程を用いて以下の定理を導出できる.

定理 2.1.

CVA は, Risky CDS 価値過程 $\Pi_T(t)$ と Risk-free CDS 価値過程 $P_T(t)$ を用いて以下のように表現することができる.

$$CVA_t = P_T(t) - \Pi_T(t), \quad t < \tau_2$$

つまり, CVA はカウンターパーティーリスクを考慮することによる CDS の下落価値を表している. なお, 本定理の証明は付録 A.1 に示した.

3 フィルトレーション変換

本章では、インディケーター関数で表現していた企業の状態を確率的に求める準備としてフィルトレーション変換をおこなう。参照企業の状態を H^1 , カウンターパーティーの状態を H^2 とし、生存状態を 0, デフォルト状態 1 で表現する。つまり、 $H_t^i = \mathbb{I}_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1, 2$ で定義できる。また、 $H = (H^1, H^2)$ とする。

ここで、フィルトレーション $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ となる場合を想定する。このとき、 \mathbb{F} は以下のように与えられる。

$$\mathbb{F} = \mathbb{H} = (\mathcal{H}_t^1 \vee \mathcal{H}_t^2)_{t \in [0, T]}$$

ただし、 $\mathcal{H}_t^i = \sigma(H_s^i; 0 \leq s \leq t)$ とする。

このフィルトレーション変換における定理を以下に示す。

定理 3.1.

(i) $t \in [0, T]$ において \mathcal{H}_t^i 可測な確率変数を Y_t とすると

$$Y_t = y_0(t)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} + y_1(t, \tau_1)\mathbb{I}_{\{\tau_1 \leq t < \tau_2\}} + y_2(t, \tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq t < \tau_1\}} + y_3(t, \tau_1, \tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_1 \vee \tau_2 < t\}}$$

が成り立つ。ただし、 $y_0(t), y_1(t, \tau_1), y_2(t, \tau_2), y_3(t, \tau_1, \tau_2)$ は確定関数とする。

(ii) 積分可能な確率変数を Z とすると

$$\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \mathbb{E}_t[Z] = \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \frac{\mathbb{E}[Z \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}]}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)}$$

が成り立つ。

(iii) Risky CDS 価値過程を $\Pi_t = \Pi(t, H_t)$ とするとき、 $\Pi(t, H_t)$ は $\mathbb{R}^+ \times E_1 \times E_1$, $E_1 = \{0, 1\}$ で定義される。つまり、時刻と参照企業及びカウンターパーティーの状態関数で示される。このとき、 $\Pi(t, e) = 0$, $e \neq (0, 0)$ となる。よって、 $(t < \tau_1 \wedge \tau_2)$ のときのみ値を持ち、以下の確定関数により得られる。

$$\Pi(t, 0, 0) = u(t) := \frac{\mathbb{E}[\pi_T(t)]}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)} \quad (3.1)$$

よって、全ての時刻において価値過程 Π_t は

$$\Pi_t = (1 - H_t^1)(1 - H_t^2)u(t) \quad (3.2)$$

と表せる。

(iv) フィルトレーション \mathbb{H} における適合関数 $\tilde{\chi}(\cdot), v(\cdot), \tilde{\xi}(\cdot, \cdot), CVA(\cdot)$ への変換は次のようになる。

$$\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} \chi(\tau_2) = \mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} \tilde{\chi}(\tau_2) \quad , \quad \mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} P_{\tau_2} = \mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} v(\tau_2) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \xi_{(\tau_2)} &= \tilde{\xi}(\tau_1, \tau_2) \\ &:= \mathbb{I}_{\{\tau_2 = \tau_1 \leq T\}}(1 - R_2)(1 - R_1) + \mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T\}} \left[v(\tau_2) - \{R_2 \tilde{\chi}^+(\tau_2) - \tilde{\chi}^-(\tau_2)\} \right] \end{aligned}$$

$$CVA_t = \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} CVA(t) \quad (3.4)$$

(v) $t \in [0, T]$ のとき、式 (3.4) を満たす $CVA(\cdot)$ は次のように定義される。

$$\beta_t CVA(t) := \int_t^T \beta_s EPE(s) \frac{\mathbb{P}(\tau_2 \in ds)}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)} \quad (3.5)$$

なお、本定理の証明は付録 A.2 に示した。

4 マルコフ・コピュラ

本章では, カウンターパーティーと参照企業のデフォルト過程 $H = (H^1, H^2)$ におけるマルコフ・コピュラモデルについて説明する. マルコフ・コピュラモデルとはマルコフとコピュラの性質を有するモデルである. マルコフ性とは, 未来の挙動は現在の情報のみから決定され, 過去の挙動と無関係であるという性質である. この性質により, 参照企業とカウンターパーティーのデフォルトを確率的に捉えることが可能となる. 次に, コピュラの性質により周辺分布と依存構造を表すコピュラから同時分布を導くことができる. つまり, 個々のデフォルト確率とコピュラから同時デフォルト確率を得ることができる. (スクラーの定理) この性質により, モデルのキャリブレーションが容易となる. マルコフコピュラの欠点は, デフォルト感染を考慮していないことである. つまり, 他の企業のデフォルトに影響を与えるような企業のデフォルトをモデルに適合できない. そこで, 同時デフォルトが表現できないという通常の仮定を緩め τ_1 と τ_2 に依存関係を持たせる方法を紹介する.

4.1 マルコフ・コピュラの導入

マルコフ・コピュラにおける企業の推移状態を以下に示す.

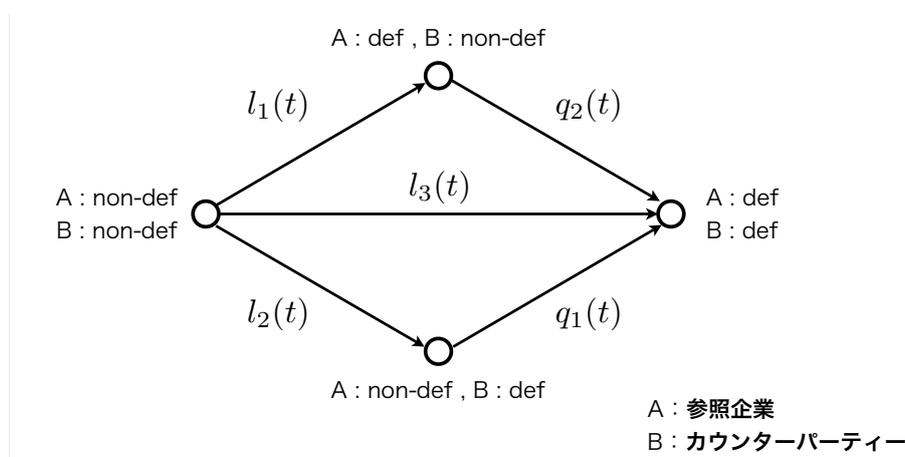


図1 マルコフコピュラにおける推移状態

図1のように推移率 $l(t), q(t)$ を定義する. この図における A は参照企業, B はカウンターパーティー, non-def は生存, def はデフォルトを表している. この状態を基に確率空間 $(\Omega, \mathbb{H}, \mathbb{P})$, マルコフ連鎖のデフォルト過程 $H = (H^1, H^2)$, 状態空間 $E = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ とすると, 生成行列 $A(t)$ は

$$A(t) = \begin{bmatrix} -l(t) & l_1(t) & l_2(t) & l_3(t) \\ 0 & -q_2(t) & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & -q_1(t) & q_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. これは, 参照企業とカウンターパーティーにおける状態の推移率を表している. この行列における行はその時刻における状態, 列は次の瞬間に推移する状態を表しており, それぞれ $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ の4つの状態がある. つまり, 1行2列目は2社とも生存している状態(初期状態)から参照企業のみがデフォルトする推移率, 1行3列目は初期状態からカウンターパーティーのみがデフォルトする推移率を表している. また, 1行4列目は初期状態から2社ともデフォルトする推移率を表している. つまり, 同時デフォルトが起こる

推移率である. このように推移状態に同時デフォルトを導入することが本モデルの特徴である. この生成行列では, 各状態における行和を 0 とするため対角要素を調整する. つまり, $l(t) = l_1(t) + l_2(t) + l_3(t)$ となるように $l(t)$ を決定する. これは, 生成行列から推移確率を導出する際に必要になるためである. また, 時刻 $(t, t + dt)$ の間に次の状態に推移する確率は, 推移率 $\times dt$ で表せる. つまり, 初期状態 $(0, 0)$ から時刻 $(t, t + dt)$ 間に参照企業がデフォルトする (状態 $(1, 0)$ に推移する) 確率は $l_1(t)dt$, カウンターパーティーがデフォルトする (状態 $(0, 1)$ に推移する) 確率は $l_2(t)dt$ のように表せる.

仮定 4.1.

生成行列における各要素の関係を次のように仮定する.

$$\begin{aligned} q_1(t) &= l_1(t) + l_3(t) \\ q_2(t) &= l_2(t) + l_3(t) \end{aligned}$$

これは, 参照企業やカウンターパーティーの推移率が状態に依存せず, 常に一定であることを仮定している. よって, 初期状態 $(0, 0)$ における参照企業のデフォルト推移率 (単独デフォルト $l_1(t)$ と同時デフォルト $l_3(t)$ を合わせた推移率) とカウンターパーティーがデフォルトしている状態 $(0, 1)$ における参照企業のデフォルト推移率 $q_1(t)$ が同値になる. つまり, どのような状態においても参照企業のデフォルト総推移率は $q_1(t)$ になることを意味している. また, カウンターパーティーのデフォルト推移率においても同様である. この仮定により, 以下のように参照企業の生成行列 A_1 とカウンターパーティーの生成行列 A_2 を分けて表現することができる.

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} -q_1(t) & q_1(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{bmatrix} -q_2(t) & q_2(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで, 新たなデフォルト過程 $H^{\{1\}}, H^{\{2\}}, H^{\{1,2\}}$ を次のように定義する.

$$H^{\{1,2\}} = [H^1, H^2], \quad H^{\{1\}} = H^1 - H^{\{1,2\}}, \quad H^{\{2\}} = H^2 - H^{\{1,2\}} \quad (4.1)$$

また, $t \in [0, T]$ とすると,

$$H_t^{\{1\}} = \mathbb{I}_{\{\tau_1 \leq t, \tau_1 \neq \tau_2\}}, \quad H_t^{\{2\}} = \mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq t, \tau_1 \neq \tau_2\}}, \quad H_t^{\{1,2\}} = \mathbb{I}_{\{\tau_1 = \tau_2 \leq t\}}$$

と表せる. このとき, $(\mathcal{H}^l)_{l \in I}$, $I = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ のフィルトレーションは, \mathbb{H} となる.

定理 4.1.

マルコフ・コピュラをモデルに導入するために必要な定理を以下に示す.

(i) $l \in I$ において H^l の強度を $q_l(t, H_t)$ とし, その適合関数を $q_l(t, e)$ とすると以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned} q_{\{1\}}(t, e) &= \mathbb{I}_{\{e_1=0\}} (\mathbb{I}_{\{e_2=0\}} l_1(t) + \mathbb{I}_{\{e_2=1\}} q_1(t)) \\ q_{\{2\}}(t, e) &= \mathbb{I}_{\{e_2=0\}} (\mathbb{I}_{\{e_1=0\}} l_2(t) + \mathbb{I}_{\{e_1=1\}} q_2(t)) \\ q_{\{1,2\}}(t, e) &= \mathbb{I}_{\{e=(0,0)\}} l_3(t) \end{aligned}$$

これは, 強度がそれぞれの状態における推移率となるためである.

また, 過程 M^l を次のように定義する.

$$M_t^l = H_t^l - \int_0^t q_l(s, H_s) ds$$

ただし,

$$q_{\{1\}}(t, H_t) = (1 - H_t^1)((1 - H_t^2)l_1(t) + H_t^2 q_1(t)) \quad (4.2)$$

$$q_{\{2\}}(t, H_t) = (1 - H_t^2)((1 - H_t^1)l_2(t) + H_t^1 q_2(t)) \quad (4.3)$$

$$q_{\{1,2\}}(t, H_t) = (1 - H_t^1)(1 - H_t^2)l_3(t) \quad (4.4)$$

とする. このとき, 過程 M^l はマルチンゲールである.

(ii) $H^i, i = 1, 2$ の強度を $(1 - H_t^i)q_i(t)$ とすると過程 M^i は次のように定義される.

$$M_t^i = H_t^i - \int_0^t (1 - H_s^i)q_i(s)ds$$

これもまた, マルチンゲールとなる.

(iii) H^1 と H^2 は, 生成行列 $A_1(t)$ と $A_2(t)$ から得られるマルコフ過程である.

(iv) $s < t$ において, 推移確率は

$$\mathbb{P}(\tau_1 > s, \tau_2 > t) = e^{-\int_0^s l(u)du} e^{-\int_s^t q_2(u)du}$$

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t, \tau_2 > s) = e^{-\int_0^s l(u)du} e^{-\int_s^t q_1(u)du}$$

さらに,

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t) = e^{-\int_0^t q_1(u)du}, \quad \mathbb{P}(\tau_2 > t) = e^{-\int_0^t q_2(u)du}$$

$$\mathbb{P}(\tau_1 > s, \tau_2 \in dt) = q_2(t)e^{-\int_0^s l(u)du} e^{-\int_s^t q_2(u)du} dt$$

$$\mathbb{P}(\tau_1 \in dt, \tau_2 > s) = q_1(t)e^{-\int_0^s l(u)du} e^{-\int_s^t q_1(u)du} dt$$

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t, \tau_2 \in dt) = q_2(t)e^{-\int_0^t l(u)du} dt$$

$$\mathbb{P}(\tau_1 \in dt, \tau_2 > t) = q_1(t)e^{-\int_0^t l(u)du} dt$$

$$\mathbb{P}(\tau_1 \wedge \tau_2 > t) = \exp\left(-\int_0^t l(u)du\right)$$

と表せる.

(v) H^1 と H^2 の相関は,

$$\rho_d(t) = \frac{\exp\left(\int_0^t l_3(s)ds\right) - 1}{\sqrt{\left(\exp\left(\int_0^t q_1(s)ds\right) - 1\right)\left(\exp\left(\int_0^t q_2(s)ds\right) - 1\right)}}$$

と表せる.

なお, 本定理の証明は付録 A.3 に示した.

4.2 コピュラ

ここでは, 2社とも生存する確率をコピュラを用いて表現する方法を紹介する. まず, デフォルト時刻 τ_1, τ_2 を次のように定義する.

$$\tau_1 = \eta_1 \wedge \eta_3, \quad \tau_2 = \eta_2 \wedge \eta_3$$

ここで, η_1 は状態 $(1, 0)$, η_2 は状態 $(0, 1)$, η_3 は状態 $(1, 1)$ を表している. また, η_i に関する確率は推移率 $l_i(t)$ をパラメータとし, 独立な指数確率変数である. $0 \leq s, t$ のとき参照企業が時刻 s , カウンターパーティーが時刻 t

まで生存する確率は

$$\mathbb{P}(\tau_1 > s, \tau_2 > t) = \mathbb{P}(\eta_1 > s)\mathbb{P}(\eta_2 > t)\mathbb{P}(\eta_3 > s \vee t)$$

と表せる。 $l_i(t)$ が一定で、確率が同時指数確率変数となる場合においては、マーシャルオルキン・コピュラ関数 C を用いて次のように表せる。

$$\mathbb{P}(\tau_1 > s, \tau_2 > t) = C\left(\mathbb{P}(\eta_1 > s)\mathbb{P}(\eta_2 > t)\right)$$

つまり、 η_1 と η_2 のコピュラによって同時デフォルト時刻 η_3 における確率を表現している。ここで、マーシャルオルキン・コピュラとは、 $p, q \in [0, 1]$ において次のように定義されるコピュラである。

$$C(p, q) = pq \min(p^{-\alpha_1}, q^{-\alpha_2})$$

ただし

$$\alpha_i = \frac{l_3}{l_i + l_3}$$

とする。

この定義を用いると、参照企業が時刻 s 、カウンターパーティーが時刻 t まで生存する確率は

$$\mathbb{P}(\tau_1 > s, \tau_2 > t) = \mathbb{P}(\eta_1 > s)\mathbb{P}(\eta_2 > t)\min\left\{\mathbb{P}(\eta_1 > s)^{-\frac{l_3}{l_1+l_3}}, \mathbb{P}(\eta_2 > t)^{-\frac{l_3}{l_2+l_3}}\right\}$$

と表せる。

5 プライシング

本章では、キャッシュフローから導出した価値モデルをマルコフ・コピュラにより確率的に捉える。そのため、定理 3.1 における式 (3.2) より $\Pi_t = \Pi(t, H_t) = (1 - H_t^1)(1 - H_t^2)u(t)$, 式 (3.1) より $\Pi(t, 0, 0) = u(t)$, 同様にフィルトレーション \mathbb{H} の適合関数における変換式 (3.3)(3.4)(3.5) を用いる。ここで、割引過程 β_t は金利 $r(t)$ を用いて

$$\beta_t = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$$

と表せる。また、回収率 R_1, R_2 は一定であると仮定する。

5.1 Risk-free CDS 価値関数

はじめに $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ における Risk-free CDS 価値関数の定理を以下に示す。

定理 5.1.

Risk-free CDS 価値 P_t は次のように表現される。

$$P_t = P(t, H_t^1) = (1 - e_1)v(t)$$

このとき、価値関数 $v(t)$ は

$$\beta_t v(t) = \int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s q_1(u)du} p(s) ds \quad (5.1)$$

と表せる。ただし、 $p(s)$ は

$$p(s) = (1 - R_1)q_1(s) - \kappa \quad (5.2)$$

とする。また、価値関数 $v(t)$ は次式を満たす。

$$\begin{cases} v(T) = 0 \\ \frac{dv}{dt}(t) - (r(t) + q_1(t))v(t) + p(t) = 0, \quad t \in [0, T) \end{cases} \quad (5.3)$$

なお、本定理の証明は付録 A.4 に示した。

5.2 Risky CDS 価値関数

次に Risk-free CDS 価値関数の定理を以下に示す。

定理 5.2.

Risky CDS 価値関数 $u(t)$ は

$$\beta_t u(t) = \int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s l(u)du} \pi(s) ds \quad (5.4)$$

と表せる。ただし、 $\pi(s)$ は

$$\pi(s) = (1 - R_1)[l_1(s) + R_2 l_3(s)] + l_2(s)[R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] - \kappa \quad (5.5)$$

とする。また、価値関数 $u(t)$ は次式を満たす。

$$\begin{cases} u(T) = 0 \\ \frac{du}{dt}(t) - (r(t) + l(t))u(t) + \pi(t) = 0, \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (5.6)$$

なお、本定理の証明は付録 A.5 に示した。

5.3 EPE と CVA

最後に EPE と CVA の定理を以下に示す。

定理 5.3.

時刻 $t \in [0, T]$ のとき、式 (3.3), (3.4), (3.5) より EPE(t) と CVA(t) は次のように表される。

$$EPE(t) = \left[(1 - R_2)(1 - R_1) \frac{l_3(t)}{q_2(t)} + \left\{ v(t) - (R_2 \tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^-) \right\} \frac{l_2(t)}{q_2(t)} \right] e^{-\int_0^t l_1(u) du} \quad (5.7)$$

$$CVA(t) = \int_t^T \beta_s \left[(1 - R_2)(1 - R_1) l_3(s) + \left\{ v(s) - (R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-) \right\} l_2(s) \right] e^{-\int_t^s l(u) du} ds$$

また、 $\chi_{(\tau_2)} = P(\tau_2)$, $\tilde{\chi} = v$ のとき EPE(t) は

$$\begin{aligned} EPE(t) &= EPE^0(t) \\ &:= (1 - R_2) \left[(1 - R_1) \frac{l_3(t)}{q_2(t)} + v_{(t)}^+ \frac{l_2(t)}{q_2(t)} \right] e^{-\int_0^t l_1(u) du} \end{aligned} \quad (5.8)$$

と定義される。また、CVA(t) は

$$\begin{aligned} CVA(t) &= CVA^0(t) \\ &:= \int_t^T (1 - R_2) \beta_s \left[(1 - R_1) l_3(s) + v^+(s) l_2(s) \right] e^{-\int_t^s l(u) du} ds \end{aligned}$$

と定義される。

なお、本定理の証明は付録 A.6 に示した。

6 ヘッジ戦略

本章では, 市場で取得可能な Risk-free CDS を用いて Risky CDS のヘッジをおこなう. ヘッジ戦略の導出には最小分散法を用いる.

6.1 ダイナミックプライシング

ヘッジ戦略の準備として CDS 価値過程の微分形を示す. ここでの CDS 価値は, 現在時刻までのキャッシュフロー価値を考慮した割引価値とする.

6.1.1 Risk-free CDS

はじめに, Risk-free CDS 価値関数の微分形を示す.

定理 6.1.

時刻 t までの支払い総額を含めた Risk-free CDS の割引価値 \hat{P} はマルチンゲールである. また, 次のように表現される.

$$\hat{P} = \beta_t P_t + p_t(0)$$

このとき, $[0, \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T]$ における微分形は

$$d\hat{P} = \beta_t \delta P_1(t) dM_t^1$$

となる. ただし,

$$\delta P_1(t) = 1 - R_1 - v(t)$$

とする.

証明

Risk-free CDS の割引価値 \hat{P} は, 式 (5.1) より

$$\hat{P} = \beta_t (1 - H_t^1) v(t) + p_t(0)$$

と表せる. これを微分する.

$$\begin{aligned} d\hat{P} &= v(t)(1 - H^1) d\beta_t - \beta_t v(t) dH_t^1 + \beta_t (1 - H^1) dv(t) + dp_t(0) \\ &= \beta_t (1 - H^1) \left[-(r(t) + q_1(t)) v(t) dt + dv(t) \right] - \beta_t v(t) dM_t^1 + dp_t(0) \end{aligned}$$

ここで, 式 (5.3) より $dv(t)$ は

$$dv(t) = \left[(r(t) + q_1(t)) v(t) - (1 - R_1) q_1(t) + \kappa \right] dt$$

となる. よって, $d\hat{P}$ は次のように表せる.

$$d\hat{P} = \beta_t (1 - H^1) \left[-(1 - R_1) q_1(t) + \kappa \right] dt - \beta_t v(t) dM_t^1 + dp_t(0)$$

次に $dp_t(0)$ について解く. キャッシュフロー価値 $p_t(0)$ は, 定理 4.1.(ii) を用いて

$$p_t(0) = -\kappa \int_0^t \beta_s (1 - H_s^1) ds + (1 - R_1) \int_0^t \beta_s dM_s^1 + (1 - R_1) \int_0^t \beta_s q_1(s) (1 - H_s^1) ds$$

と表せる。(参考:式 (A.5)) よって $dp_t(0)$ は

$$dp_t(0) = -\kappa\beta_t(1 - H_t^1)dt + (1 - R_1)\beta_t dM_t^1 + (1 - R_1)\beta_t q_1(t)(1 - H_t^1)dt$$

となる. 以上より $d\hat{P}$ は次のように表せる.

$$d\hat{\Pi} = \beta_t(1 - R_1 - v(t))dM_t^1$$

□

6.1.2 Risky CDS

次に Risky CDS 価値過程の微分形を示す.

定理 6.2.

時刻 t までのキャッシュフロー価値を考慮した Risky CDS の割引価値 $\hat{\Pi}$ は, マルチンゲールである. また, 次のように表現される.

$$\hat{\Pi} = \beta_t \Pi_t + \pi_t(0)$$

このとき, $[0, \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T]$ における微分形は

$$d\hat{\Pi} = \beta_t \left(\delta\Pi_{\{1\}}(t)dM_t^{\{1\}} + \delta\Pi_{\{2\}}(t)dM_t^{\{2\}} + \delta\Pi_{\{1,2\}}(t)dM_t^{\{1,2\}} \right)$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{\{1\}}(t) &= 1 - R_1 - u(t) \\ \delta\Pi_{\{2\}}(t) &= R_2\tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^- - u(t) \\ \delta\Pi_{\{1,2\}}(t) &= R_2(1 - R_1) - u(t) \end{aligned}$$

とする.

証明

RiskyCDS の割引価値 $\hat{\Pi}$ は, 式 (5.4) 及び H^l の定義式 (4.1) より

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} &= \beta_t(1 - H_t^1)(1 - H_t^2)u(t) + \pi_t(0) \\ &= \beta_t(1 - H^{\{1\}} - H^{\{2\}} - H^{\{1,2\}})u(t) + \pi_t(0) \end{aligned}$$

と表せる. これを微分する.

$$\begin{aligned} d\hat{\Pi} &= u(t) \left(1 - H^{\{1\}} - H^{\{2\}} - H^{\{1,2\}} \right) d\beta_t + \beta_t \left(1 - H^{\{1\}} - H^{\{2\}} - H^{\{1,2\}} \right) du(t) \\ &\quad - \beta_t u(t) \left(dH^{\{1\}} + dH^{\{2\}} + dH^{\{1,2\}} \right) + d\pi_t(0) \\ &= \beta_t u(t) \left(1 - H^{\{1\}} - H^{\{2\}} - H^{\{1,2\}} \right) [-r(t) - l_1(t) - l_2(t) - l_3(t)] dt \\ &\quad + \beta_t \left(1 - H^{\{1\}} - H^{\{2\}} - H^{\{1,2\}} \right) du(t) - \beta_t u(t) \left(dM^{\{1\}} + dM^{\{2\}} + dM^{\{1,2\}} \right) + d\pi_t(0) \end{aligned}$$

ここで, 式 (5.6) より $du(t)$ は

$$du(t) = \left[(r(t) + l(t))u(t) - (1 - R_1)[l_1(s) + R_2l_3(s)] - l_2(s)[R_2\tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] + \kappa \right] dt \quad (6.1)$$

となる. よって, $d\widehat{\Pi}$ は次のように表せる.

$$\begin{aligned} d\widehat{\Pi} = & \beta_t \left(1 - H^{\{1\}} - H^{\{2\}} - H^{\{1,2\}} \right) \left[-(1 - R_1) [l_1(s) + R_2 l_3(s)] - l_2(s) [R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] + \kappa \right] dt \\ & - \beta_t u(t) \left(dM^{\{1\}} + dM^{\{2\}} + dM^{\{1,2\}} \right) + d\pi_t(0) \end{aligned}$$

次に $d\pi_t(0)$ について解く. キャッシュフロー価値 $\pi_t(0)$ は, 定理 4.1.(ii) を用いて

$$\begin{aligned} \pi_t(0) = & -\kappa \int_0^t \beta_s (1 - H_s^1) (1 - H_s^2) ds \\ & + (1 - R_1) \int_0^t \beta_s (1 - H_{s-}^2) dM_s^{\{1\}} + (1 - R_1) \int_0^t \beta_s (1 - H_s^2) q_{\{1\}}(s, H_s) ds \\ & + \int_0^t \beta_s [R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] (1 - H_{s-}^1) dM_s^{\{2\}} + \int_0^t \beta_s [R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] (1 - H_{s-}^1) q_{\{2\}}(s, H_s) ds \\ & + R_2 (1 - R_1) \int_0^t \beta_s dM_s^{\{1,2\}} + R_2 (1 - R_1) \int_0^t \beta_s q_{\{1,2\}}(s, H_s) ds \end{aligned}$$

と表せる.(参考:式 (A.7)) よって $d\pi_t(0)$ は

$$\begin{aligned} d\pi_t(0) = & \beta_t (1 - H_t^1) (1 - H_t^2) \left[-\kappa + (1 - R_1) l_1(t) + [R_2 \tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^-] l_2(t) + R_2 (1 - R_1) l_3(t) \right] dt \\ & + (1 - R_1) \beta_t (1 - H_t^2) dM_t^{\{1\}} + \beta_t [R_2 \tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^-] (1 - H_t^1) dM_t^{\{2\}} + R_2 (1 - R_1) \beta_t dM_t^{\{1,2\}} \\ = & \beta_t \left(1 - H^{\{1\}} - H^{\{2\}} - H^{\{1,2\}} \right) \left[-\kappa + (1 - R_1) l_1(t) + [R_2 \tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^-] l_2(t) + R_2 (1 - R_1) l_3(t) \right] dt \\ & + (1 - R_1) \beta_t (1 - H_t^2) dM_t^{\{1\}} + \beta_t [R_2 \tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^-] (1 - H_t^1) dM_t^{\{2\}} + R_2 (1 - R_1) \beta_t dM_t^{\{1,2\}} \end{aligned}$$

となる. 以上より $d\widehat{\Pi}$ は次のように表せる.

$$\begin{aligned} d\widehat{\Pi} = & -\beta_t u(t) \left(dM^{\{1\}} + dM^{\{2\}} + dM^{\{1,2\}} \right) \\ & + (1 - R_1) \beta_t (1 - H_t^2) dM_t^{\{1\}} + \beta_t [R_2 \tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^-] (1 - H_t^1) dM_t^{\{2\}} + R_2 (1 - R_1) \beta_t dM_t^{\{1,2\}} \end{aligned}$$

ここでは, $[0, \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T]$ において考えているため

$$d\widehat{\Pi} = \left[1 - R_1 - u(t) \right] \beta_t dM_t^{\{1\}} + \beta_t [R_2 \tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^- - u(t)] dM_t^{\{2\}} + \left[R_2 (1 - R_1) - u(t) \right] \beta_t dM_t^{\{1,2\}}$$

となる.

□

6.2 最小分散ヘッジング

Risk-free CDS 価値過程 \widehat{P} を用いた自己調達戦略 ψ により Risky CDS 価値過程 $\widehat{\Pi}$ をヘッジする. このヘッジ戦略は最小分散法により導出する. つまり, 以下の式を満たす ψ^{va} とする.

$$\min \left[\text{Var} \left[\widehat{\Pi}_T - \int_0^T \psi_t^{va} d\widehat{P}_t \right] \right]$$

価値過程 \widehat{P} 及び $\widehat{\Pi}$ は, マルチンゲールである. この最小分散法による自己調達戦略 ψ は, 国田・渡辺表現定理を用いて以下のように与えられる.

$$\psi_t^{va} = \frac{d\langle \widehat{\Pi}, \widehat{P} \rangle_t}{d\langle \widehat{P} \rangle_t}$$

ここで、ダイナミックプライスから $t < \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T$ におけるヘッジ戦略 ψ^{va} は

$$\begin{aligned}\psi_t^{va} &= \frac{l_1(t)[\delta\Pi_{\{1\}}(t)][\delta P_1(t)] + l_3(t)[\delta\Pi_{\{1,2\}}(t)][\delta P_1(t)]}{q_1(t)[\delta P_1(t)]^2} \\ &= \frac{l_1(t)[1 - R_1 - u(t)] + l_3(t)[R_2(1 - R_1) - u(t)]}{q_1(t)[1 - R_1 - v(t)]}\end{aligned}\quad (6.2)$$

と表せる。また、 $(\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T, T]$ においては $\psi^{va} = 0$ となる。次に、ヘッジ戦略の効果を以下に示す。

$$\frac{\text{Var}\left[\widehat{\Pi}_T - \int_0^T \psi_t^{va} d\widehat{P}_t\right]}{\text{Var}\left[\widehat{\Pi}_T\right]} = \frac{\text{Var}\left[\widehat{\Pi}_T\right] + \text{Var}\left[\int_0^T \psi_t^{va} d\widehat{P}_t\right] - 2\text{Cov}\left[\widehat{\Pi}_T, \int_0^T \psi_t^{va} d\widehat{P}_t\right]}{\text{Var}\left[\widehat{\Pi}_T\right]}\quad (6.3)$$

ただし、

$$\begin{aligned}\text{Var}\left[\widehat{\Pi}_T\right] &= \mathbb{E}\left[\langle \widehat{\Pi} \rangle_T\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T} l_1(t)[\delta\Pi_{\{1\}}(t)]^2 + l_2(t)[\delta\Pi_{\{2\}}(t)]^2 + l_3(t)[\delta\Pi_{\{1,2\}}(t)]^2 dt\right] \\ \text{Var}\left[\int_0^T \psi_t^{va} d\widehat{P}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\left\langle \int_0^T \psi_t^{va} d\widehat{P}_t \right\rangle_T\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T} q_1(t)[\psi_t^{va} \delta P_1(t)]^2 dt\right] \\ \text{Cov}\left[\widehat{\Pi}_T, \int_0^T \psi_t^{va} d\widehat{P}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\left\langle \widehat{\Pi}_T, \int_0^T \psi_t^{va} d\widehat{P}_t \right\rangle_T\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T} [l_1(t)\delta\Pi_{\{1\}}(t) + l_3(t)\delta\Pi_{\{1,2\}}(t)]\psi_t^{va} \delta P_1(t) dt\right]\end{aligned}$$

とする。

7 実装

本章では、これまで示してきた式をシミュレーションが可能な形式に実装する。また、デフォルト強度が定数のときと時間により変動するときの2パターンに分けて示す。

7.1 線形強度

はじめに、デフォルト強度が時間により線形的に変化する場合を示す。マルコフコピュラモデルの基関数は、周辺デフォルト強度関数 q_1, q_2 及び生成行列 $A(t)$ における依存強度関数 l_3 となる。ここで、 $i = 1, 2$ において定数 a_i と b_i を用いて

$$q_i(t) = a_i + b_i t \quad , \quad l_3(t) = a_3 + b_3 t \quad (7.1)$$

と定義する。ただし、デフォルト確率が1を超えないように $b_i > -\frac{a_i}{T}$ とする。また、 a_3 と b_3 は

$$a_3 = \alpha \min\{a_1, a_2\} \quad , \quad b_3 = \alpha \min\{b_1, b_2\} \quad (7.2)$$

とする。

Risk-free CDS のスプレッド κ_i は、時刻0におけるCDS価値 $P_T(0)$ が0になるように設定されるため次のように支払いプレミアムの割引総額と割引保証額が等しくなる。

$$\kappa_i \int_0^T \beta_t e^{-\int_0^t q_i(s) ds} dt = (1 - R_i) \int_0^T \beta_t q_i(t) e^{-\int_0^t q_i(s) ds} dt$$

ここで、式(7.1)より

$$\kappa_i \int_0^T \beta_t \exp\left(-a_i t - \frac{b_i}{2} t^2\right) dt = (1 - R_i) \int_0^T \beta_t (a_i + b_i t) \exp\left(-a_i t - \frac{b_i}{2} t^2\right) dt$$

と表せる。よって、スプレッド κ_i は

$$\kappa_i = (1 - R_i) \frac{\int_0^T \beta_t (a_i + b_i t) \exp\left(-a_i t - \frac{b_i}{2} t^2\right) dt}{\int_0^T \beta_t \exp\left(-a_i t - \frac{b_i}{2} t^2\right) dt} \quad (7.3)$$

となる。また、定理4.1(v)で導出した相関係数 ρ_d は

$$\begin{aligned} \rho_d(T) &= \frac{\exp\left(\int_0^T a_3 + b_3 t dt\right) - 1}{\sqrt{\left(\exp\left(\int_0^T a_1 + b_1 t dt\right) - 1\right) \left(\exp\left(\int_0^T a_2 + b_2 t dt\right) - 1\right)}} \\ &= \frac{\exp\left(a_3 T + \frac{b_3}{2} T^2\right) - 1}{\sqrt{\left(\exp\left(a_1 T + \frac{b_1}{2} T^2\right) - 1\right) \left(\exp\left(a_2 T + \frac{b_2}{2} T^2\right) - 1\right)}} \end{aligned} \quad (7.4)$$

と表せる。次に、 α を導出する。まず、式(7.4)を変形する。

$$\exp\left(a_3 T + \frac{b_3}{2} T^2\right) = 1 + \rho_d \sqrt{\left\{\exp\left(a_1 T + \frac{b_1}{2} T^2\right) - 1\right\} \left\{\exp\left(a_2 T + \frac{b_2}{2} T^2\right) - 1\right\}}$$

ここで、両辺の対数をとると

$$a_3 T + \frac{b_3}{2} T^2 = \ln \left[1 + \rho_d \sqrt{\left\{\exp\left(a_1 T + \frac{b_1}{2} T^2\right) - 1\right\} \left\{\exp\left(a_2 T + \frac{b_2}{2} T^2\right) - 1\right\}} \right]$$

となる。左辺の a_3 と b_3 は、式 (7.2) で表されるため

$$\alpha \left(aT + \frac{b}{2}T^2 \right) = \ln \left[1 + \rho_d \sqrt{\left\{ \exp \left(a_1T + \frac{b_1}{2}T^2 \right) - 1 \right\} \left\{ \exp \left(a_2T + \frac{b_2}{2}T^2 \right) - 1 \right\}} \right]$$

となる。ただし、

$$a = \min\{a_1, a_2\} \quad , \quad b = \min\{b_1, b_2\} \quad (7.5)$$

とする。以上より、 α は

$$\alpha = \frac{\ln \left[1 + \rho_d \sqrt{\left\{ \exp \left(a_1T + \frac{b_1}{2}T^2 \right) - 1 \right\} \left\{ \exp \left(a_2T + \frac{b_2}{2}T^2 \right) - 1 \right\}} \right]}{aT + \frac{b}{2}T^2} \quad (7.6)$$

と表せる。

7.2 定数強度

線形強度において $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ となる場合を考える。つまり、強度が時間により変動しない定数強度について示す。この場合において強度は

$$q_1(t) = a_1 \quad , \quad q_2(t) = a_2 \quad , \quad l_3(t) = a_3$$

となる。このとき、相関係数 ρ_d は式 (7.4) より

$$\rho_d = \frac{e^{a_3T} - 1}{\sqrt{(e^{a_1T} - 1)(e^{a_2T} - 1)}} \quad (7.7)$$

となる。また、この式から a_3 は次のように計算できる。

$$e^{a_3T} = \rho_d \left(1 + \sqrt{(e^{a_1T} - 1)(e^{a_2T} - 1)} \right)$$

ここで対数を取り、整理すると

$$a_3 = \frac{1}{T} \ln \left[\rho_d \left(1 + \sqrt{(e^{a_1T} - 1)(e^{a_2T} - 1)} \right) \right] \quad (7.8)$$

となる。一般的に、定数強度モデルにおける Risk-free CDS 価値は 0 となる。つまり、 $b_1 = 0$ のとき $v \equiv 0$ となる。このとき、EPE は、式 (5.7) より

$$EPE(t) = \left[(1 - R_2)(1 - R_1) \frac{a_3}{a_2} + \left\{ v(t) - (R_2 \tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^-) \right\} \frac{l_2(t)}{a_2} \right] e^{-\int_0^t l_1(u) du}$$

ここで、 $v \equiv 0$ より $\tilde{\chi}_{(t)} = 0$ となるため

$$EPE(t) = (1 - R_2)(1 - R_1) \frac{a_3}{a_2} e^{-\int_0^t l_1(u) du}$$

となる。また、 $l_1(t) = q_1(t) - l_3(t)$ より $l_1(t) = a_1 - a_3$ となる。よって

$$\begin{aligned} EPE(t) &= (1 - R_2)(1 - R_1) \frac{a_3}{a_2} e^{-\int_0^t a_1 - a_3 du} \\ &= (1 - R_2)(1 - R_1) \frac{a_3}{a_2} e^{-(a_1 - a_3)t} \end{aligned} \quad (7.9)$$

と表せる. 次に金利 $r(t) = r$ を仮定する. このとき, Risky CDS 価値関数 $u(t)$ は式 (5.4) より

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_t^T \frac{\beta_s}{\beta_t} e^{-\int_t^s l(u) du} [(1 - R_1)\{l_1(s) + R_2 l_3(s)\} + l_2(s)\{R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-\} - \kappa] ds \\ &= \int_t^T e^{-\int_t^s r + l(u) du} [(1 - R_1)\{l_1(s) + R_2 l_3(s)\} - \kappa] ds \end{aligned}$$

となる. ここで $l(t) = q_1(t) + q_2(t) - l_3(t)$ より $l(t) = a_1 + a_2 - a_3$ となるため

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_t^T e^{-\int_t^s r + a_1 + a_2 - a_3 du} [(1 - R_1)\{a_1 - a_3 + R_2 a_3\} - \kappa] ds \\ &= \int_t^T e^{-(r + a_1 + a_2 - a_3)(s-t)} [(1 - R_1)(R_2 - 1)a_3 + (1 - R_1)a_1 - \kappa] ds \end{aligned}$$

と表せる. また, $v(t) = 0$ より

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_t^T e^{-\int_t^s r + a_1(u) du} [(1 - R_1)a_1(s) - \kappa] ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

つまり, $(1 - R_1)a_1(s) - \kappa = 0$ となることが分かる. よって,

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_t^T e^{-(r + a_1 + a_2 - a_3)(s-t)} (1 - R_1)(R_2 - 1)a_3 ds \\ &= -(1 - R_1)(1 - R_2)a_3 \frac{1 - e^{-(r + a_1 + a_2 - a_3)(T-t)}}{r + a_1 + a_2 - a_3} \end{aligned}$$

となる. 最後に, CVA は Risky CDS 価値と Risk-free CDS 価値の差で表されるため

$$\begin{aligned} CVA(t) &= v(t) - u(t) \\ &= -u(t) \end{aligned}$$

と表せる.

ここで, 係数の値が微小なときについて考える. つまり $r + a_1 + a_2 - a_3 \simeq 0$ となるとき $u(0)$ の要素は

$$\lim_{r + a_1 + a_2 - a_3 \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-(r + a_1 + a_2 - a_3)T}}{r + a_1 + a_2 - a_3} = T$$

となる. よって

$$CVA(0) \simeq (1 - R_1)(1 - R_2)a_3 T$$

と表せる. また, 式 (7.8) より

$$CVA(0) \simeq (1 - R_1)(1 - R_2) \ln \left[\rho_d \left(1 + \sqrt{(e^{a_1 T} - 1)(e^{a_2 T} - 1)} \right) \right]$$

となる. 最後に $CVA(0)$ は

$$CVA(0) \simeq (1 - R_1)(1 - R_2) \rho_d \sqrt{a_1 a_2} T$$

とも表現できる.

7.3 キャリブレーション

式 (7.1) のパラメータ a_i 及び b_i は, 実際取引されている参照企業とカウンターパーティーの CDS 曲線からキャリブレーションが可能である. これは, 実際取引されている CDS を Risk-free CDS とみなし, 式 (7.3) を用いてキャリブレーションをおこなう. また, パラメータ α においては契約期間内に 2 社ともデフォルトする確率が反映されるバスケット CDS を用いてキャリブレーションが可能である. しかし, このようなデータが入手できない場合において α を設定する実用的な方法が重要である. この方法を以下に示す. まず, α は 2 社ともデフォルトする確率から導出することができる. これは, 線形強度の実装において示している. よって, 実際取引されている CDS 価格から導出した参照企業とカウンターパーティーのデフォルト確率 $p_i, i = 1, 2$ から 2 社ともデフォルトする確率を導出する. 2 社ともデフォルトする確率 $p_{1,2}(T)$ は, 2 変量の正規分布関数と相関係数 ρ の標準ガウスコピュラを用いて次のように表現できる.

$$p_{1,2}(T) = \mathcal{N}_2^\rho \left(\mathcal{N}_1^{-1}(p_1(T)), \mathcal{N}_1^{-1}(p_2(T)) \right) \quad (7.10)$$

ただし, \mathcal{N}_1 は標準ガウス分布の c.d.f (累積分布関数) を表している. また, \mathcal{N}_2^ρ は相関係数 ρ の標準ガウスコピュラを表している. 以上より α のキャリブレーションが可能となる.

8 数値実験

本章の目的は、定数強度及び線形強度を用いて各種パラメータの数値を導出し、それを基に CDS 価値、EPE、CVA の数値実験をおこなうことである。また、数値実験における初期データとして金利 r 、各回収率 R_1, R_2 、満期 T 、参照企業におけるデフォルト強度の要素 a_1, b_1 、スプレッド κ_1 を設定する。ただし、スプレッド κ_1 は、式 (7.3) から導出した適正なスプレッドとする。

8.1 アルゴリズム

はじめに数値実験をおこなうためのアルゴリズムを紹介する。ここでは、線形強度に関して取り扱う。定数強度に関しては、線形強度のアルゴリズムにおいて $b_1 = b_2 = 0$ のときを考えればよい。初めに、初期データを用いてカウンターパーティーにおけるデフォルト強度の要素 a_2, b_2 及びガウスコピュラの相関係数 ρ を変動させたときの各種パラメータ ($\kappa_2, \rho_d, \alpha, p_{1,2}, CVA(0)$) を導出する。計算は、カウンターパーティーを保証対象としたときのスプレッド κ_2 、2社デフォルト確率 $p_{1,2}$ 、相関係数 ρ_d 、2社デフォルト強度の要素 $\alpha, CVA(0)$ の順でおこなう。

(i) スプレッド κ_2

スプレッド κ_2 は以下の式より数値解を導出する。

$$\kappa_2 = (1 - R_2) \frac{\int_0^T \beta_t (a_2 + b_2 t) \exp\left(-a_2 t - \frac{b_2}{2} t^2\right) dt}{\int_0^T \beta_t \exp\left(-a_2 t - \frac{b_2}{2} t^2\right) dt}$$

この式は、式 (7.3) において $i = 2$ としたものである。

(ii) 2社デフォルト確率 $p_{1,2}$

2社デフォルト確率の数値解は、各デフォルト確率からガウスコピュラを用いて導出する。よって、はじめに各デフォルト確率 p_1, p_2 を計算する。 $i = 1, 2$ のとき生存確率は

$$\mathbb{P}(\tau_i > T) = e^{-\int_0^T q_i(u) du}$$

と表せた。よってデフォルト確率は

$$p_i = 1 - e^{-\int_0^T q_i(u) du}$$

となる。また、推移率を線形強度に直すと

$$p_i = 1 - e^{-a_i T - \frac{b_i}{2} T^2}$$

となり、個々のデフォルト確率が求められた。次に、ガウスコピュラの式 (7.10) を用いる。つまり、各デフォルト確率における累積分布関数の確率点 q_1, q_2 を求め、その確率点を以下の二次元累積正規分布関数に適合させ2社デフォルト確率を計算する。

$$N_2^\rho(x_1, x_2) = \int^{q_2} \int^{q_1} \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left[-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right] dx_1 dx_2$$

この二次元累積正規分布関数は、 $x_1 \sim N(0, 1), x_2 \sim N(0, 1)$ 、相関係数を ρ としたときを考えている。

(iii) 相関係数 ρ_d

相関係数 ρ_d は、式 (7.4) から計算できる。しかし、現時点では2社デフォルト強度の要素 a_3, b_3 が分からない

ため $\exp(a_3T + \frac{b_3}{2}T^2)$ の部分が計算できない. そこで, デフォルト確率 $p_1, p_2, p_{1,2}$ から $\exp(a_3T + \frac{b_3}{2}T^2)$ を求める. まず, デフォルトが起こらない確率 p_0 は

$$\begin{aligned} p_0 &= \mathbb{P}(\tau_1 \wedge \tau_2 > T) \\ &= \exp\left(-\int_0^T l(u)du\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^T q_1(u) + q_2(u) - l_3(u)du\right) \end{aligned}$$

と表せる. この式を, 線形強度で表すと

$$\begin{aligned} p_0 &= \exp\left(-\left(a_1 + a_2 - a_3\right)T - \frac{\left(b_1 + b_2 - b_3\right)T^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-a_1T - \frac{b_1}{2}T^2\right) \exp\left(-a_2T - \frac{b_2}{2}T^2\right) \exp\left(a_3T + \frac{b_3}{2}T^2\right) \\ &= (1 - p_1)(1 - p_2) \exp\left(a_3T + \frac{b_3}{2}T^2\right) \end{aligned}$$

となる. また, p_0 は次のようにも表せる.

$$p_0 = 1 - (p_1 + p_2 - p_{1,2})$$

以上より

$$\exp\left(a_3T + \frac{b_3}{2}T^2\right) = \frac{1 - (p_1 + p_2 - p_{1,2})}{(1 - p_1)(1 - p_2)}$$

となる. 以上より式 (7.4) の要素が全て求められた. よって, 相関係数 ρ_d が計算できる.

(iv) デフォルト強度の要素 α

2社デフォルト強度の要素 α は, 式 (7.6) より導出する.

(v) EPE(0)

EPE(0) は, 式 (5.8) より次のように表せる.

$$EPE(0) = (1 - R_2) \left[(1 - R_1) \frac{a_3}{a_2} + v_{(0)}^+ \frac{a_2 - a_3}{a_2} \right] \quad (8.1)$$

ただし, 価値関数 $v(0)$ は, 式 (5.1) 及び (5.2) より

$$\begin{aligned} v(0) &= \int_0^T \beta_t e^{-\int_0^t q_1(s)ds} \left[(1 - R_1)q_1(t) - \kappa_1 \right] dt \\ &= \int_0^T \beta_t \exp\left(-a_1t - \frac{b_1}{2}t^2\right) \left[(1 - R_1)q_1(t) - \kappa_1 \right] dt \end{aligned}$$

となる.

(vi) CVA(0)

CVA(0) は, Risk-free CDS 価値関数 $v(0)$ と Risky CDS 価値関数 $u(0)$ の差で表される. よって, $u(0)$ を計算する. 価値関数 $u(0)$ は, 式 (5.4) 及び (5.5) より

$$\begin{aligned} u(0) &= \int_0^T \beta_t e^{-\int_0^t l(s)ds} \pi(t) dt \\ &= \int_0^T \beta_t \exp\left(-\left(a_1 + a_2 - a_3\right)t - \frac{\left(b_1 + b_2 - b_3\right)t^2}{2}\right) \pi(t) dt \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 $\pi(t)$ は

$$\begin{aligned}\pi(t) &= (1 - R_1)[l_1(t) + R_2 l_3(t)] + l_2(t)[R_2 \tilde{\chi}(t)^+ - \tilde{\chi}(t)^-] - \kappa_1 \\ &= (1 - R_1)[(a_1 - a_3) + (b_1 - b_3)t + R_2(a_3 + b_3 t)] \\ &\quad + [(a_2 - a_3) + (b_2 - b_3)t][R_2 \tilde{\chi}(t)^+ - \tilde{\chi}(t)^-] - \kappa_1\end{aligned}$$

となる。また、 $\tilde{\chi}(t) = v(0)$ とする。以上より価値関数 $v(0)$ 及び $u(0)$ が求められた。よって、 $CVA(0)$ は

$$CVA(0) = v(0) - u(0)$$

より導出できる。

8.2 数値例

数値例として時刻0におけるパラメータの値を導出し、数値実験の参考とする。

8.2.1 定数強度

ここでは、デフォルト強度が時間により変化しない企業を想定する。つまり、定数強度 ($b_1 = b_2 = 0$) において上記のアルゴリズムを計算した数値例を示す。表1は定数強度におけるデータ、表2はデータを基にカウンターパーティーのデフォルト強度 a_2 及びコピュラの相関係数 ρ を変動させたときの数値例である。

表1 定数強度におけるデータ

r	R_1	R_2	T	a_1	κ_1
5%	40%	40%	10years	0.0140	84bp

表2 定数強度における数値例

a_2	κ_2	ρ	ρ_d	α	$p_{1,2}$	EPE(0)	CVA(0)
0.0083	50bp	10%	0.0373	0.0511	0.0138	0.0184	0.0011
0.0125	75bp	10%	0.0412	0.0443	0.0196	0.0159	0.0014
0.0167	100bp	10%	0.0437	0.0514	0.0254	0.0155	0.0018
0.0250	150bp	10%	0.0468	0.0687	0.0354	0.0139	0.0023
0.0083	50bp	40%	0.1842	0.2505	0.0272	0.0902	0.0054
0.0125	75bp	40%	0.1948	0.2175	0.0365	0.0783	0.0069
0.0167	100bp	40%	0.2054	0.2386	0.0451	0.0720	0.0084
0.0250	150bp	40%	0.2122	0.3066	0.0586	0.0618	0.0105
0.0083	50bp	70%	0.4006	0.5382	0.0470	0.1937	0.0117
0.0125	75bp	70%	0.4191	0.4607	0.0608	0.1659	0.0149
0.0167	100bp	70%	0.4312	0.4917	0.0725	0.1484	0.0175
0.0250	150bp	70%	0.4277	0.6048	0.0887	0.1219	0.0210

表2における考察を以下に述べる。ただし、カウンターパーティーリスクの分析において重要なCVAとEPEの考察を先に示す。また、その根拠としてその他パラメーターの考察を示す。

(i)CVA (Credit Value Adjustment)

CVA(0)は、カウンターパーティーのデフォルト強度 a_2 及びコピュラの相関係数 ρ に対して増加傾向を有する。また、 $\tilde{\chi} = v(0) = 0$ を考慮するとCVAの増加要因が同時デフォルト確率の増加であることが分かる。これは、同時デフォルトにより保証額の支払いが行われないリスクが増すためである。

(ii)EPE (Expected Positive Exposure)

EPE(0)は、デフォルト強度 a_2 に対して減少傾向を有するが、コピュラの相関係数 ρ に対しては増加傾向を有する。これは、Risk-free CDS 価値過程 $v(0)$ が0となるためである。つまり、同時デフォルトの期待損失額の

みが EPE(0) に反映されるためである。以上を踏まえて、式 (8.1) より明らかなようにカウンターパーティーのデフォルト強度と同時デフォルト強度の比が EPE(0) を決定する。

(iii) スプレッド [κ_2]

スプレッド κ_2 は、デフォルト強度 a_2 に対して増加傾向を有するがコピュラの相関係数 ρ に対しては依存関係を持たない。これは、スプレッド κ_2 がカウンターパーティーを保証対象とした CDS のスプレッドとして考えているためである。また、デフォルト強度とデフォルト確率が対数比例の関係にあることから以下の関係が成り立つ。

デフォルト強度の増加 → デフォルト確率の増加 → 保証額の増加 → スプレッドの増加

(iv) 2社デフォルト確率 [$p_{1,2}$]

2社デフォルト確率 $p_{1,2}$ は、デフォルト強度 a_2 及びコピュラの相関係数 ρ に対して増加傾向を有する。これは、個々のデフォルトが起きやすくコピュラの相関が高いときほど2社デフォルト及び同時デフォルトが起きやすくなることを意味している。

(v) デフォルトの相関係数 [ρ_d]

デフォルトの相関係数 ρ_d は、2社デフォルト確率 $p_{1,2}$ と同様にデフォルト強度 a_2 及びコピュラの相関係数 ρ に対して増加傾向を有する。つまり、2社デフォルト及び同時デフォルトが起きやすいときほどデフォルトの相関係数は高くなる。

(vi) 同時デフォルト強度の要素 [α]

同時デフォルト強度の要素 α とデフォルト強度 a_2 を比較すると、 a_2 が単調増加しているのに比べ、 α は一度減少してから増加している。これは、全ての相関係数 ρ について同じ動きをする。理由は、式 (7.6) から明らかなように α が $a = \min(a_1, a_2)$ に反比例するためである。つまり、カウンターパーティーのデフォルト強度 a_2 が参照企業のデフォルト強度 a_1 を超えるまでは減少し、その後増加する。また、コピュラの相関係数 ρ に対して増加傾向を有する。これは、2社デフォルトが起きやすいときほど同時デフォルト強度の要素である α が大きくなることを意味している。

8.2.2 線形増加強度

ここでは、デフォルト強度が増加する企業を想定する。つまり、線形的に増加する場合 ($b_2 > 0$) における数値例を示す。ただし、パラメータはスプレッドが定数強度のときと同値になるように設定した。つまり、同評価の参照企業及びカウンターパーティーにおいてデフォルト強度の線形増加が与える影響を分析する。表 3 は線形増加強度におけるデータ、表 4 はカウンターパーティーのデフォルト強度の要素 a_2, b_2 及びコピュラの相関係数 ρ を変動させたときの数値例である。

表 3 線形増加強度におけるデータ

r	R_1	R_2	T	a_1	b_1	κ_1
5%	40%	40%	10years	0.0095	0.0010	84bp

表 4 線形増加強度における数値例

a_2	b_2	κ_2	ρ	ρ_d	α	$p_{1,2}$	EPE(0)	CVA(0)
0.0056	0.0006	50bp	10%	0.0379	0.0521	0.0147	0.0188	0.0014
0.0085	0.0009	75bp	10%	0.0418	0.0472	0.0211	0.0170	0.0019
0.0122	0.0010	100bp	10%	0.0443	0.0521	0.0269	0.0146	0.0023
0.0189	0.0014	150bp	10%	0.0474	0.0700	0.0376	0.0126	0.0031
0.0056	0.0006	50bp	40%	0.1861	0.2534	0.0286	0.0912	0.0057
0.0085	0.0009	75bp	40%	0.1999	0.2230	0.0388	0.0803	0.0075
0.0122	0.0010	100bp	40%	0.2073	0.2404	0.0472	0.0674	0.0089
0.0189	0.0014	150bp	40%	0.2141	0.3100	0.0615	0.0561	0.0112
0.0056	0.0006	50bp	70%	0.4028	0.5416	0.0490	0.1950	0.0119
0.0085	0.0009	75bp	70%	0.4257	0.4675	0.0640	0.1683	0.0154
0.0122	0.0010	100bp	70%	0.4333	0.4933	0.0753	0.1383	0.0180
0.0189	0.0014	150bp	70%	0.4294	0.6085	0.0924	0.1101	0.0216

表 4 における考察を以下に述べる。ただし、定数強度のとき (表 2) との比較を中心とする。

(i)CVA (Credit Value Adjustment)

CVA(0) は、定数強度のときと同様にカウンターパーティーにおけるデフォルト強度 $a_2 + b_2t$ 及びコピュラの相関係数 ρ に対して増加傾向を有する。ただし、CVA(0) は定数強度のときに比べ大きくなる。これは、CVA(0) の増加要因である同時デフォルト強度が定数強度に比べ大きくなるためである。この結果より、同評価の参照企業とカウンターパーティーならばデフォルト強度が変化しない方 (定数強度) と契約したほうが適正な価格に近い価格で取引できるということが明らかとなる。

(ii)EPE (Expected Positive Exposure)

EPE(0) は、定数強度のときと同様にカウンターパーティーのデフォルト強度と同時デフォルト強度の比が決定要因となる。ただし、初期時刻におけるデフォルト強度 a_2 に対する EPE(0) の変動は定数強度に比べ大きくなる。つまり、同評価のカウンターパーティーであってもデフォルト強度が時間により増加するカウンターパーティーと契約した方が契約時 (時刻 0) のデフォルト強度に対する EPE の差は大きくなる。

(iii) スプレッド [κ_2]

スプレッド κ_2 は、定数強度のときと同様にデフォルト強度 $a_2 + b_2t$ に対して増加傾向を有するがコピュラの相関係数 ρ に対しては依存関係を持たない。ただし、同評価のデフォルト強度 $a_2 + b_2t$ は線形増加強度の方が小さくなる。これは、デフォルト強度の要素 b_2 が正の値をとりデフォルト強度が時間に比例して増加するためである。

(iv) 2社デフォルト確率 [$p_{1,2}$]

2社デフォルト確率 $p_{1,2}$ は、定数強度のときと同様にデフォルト強度 a_2 及びコピュラの相関係数 ρ に対して増加傾向を有する。ただし、2社デフォルト確率 $p_{1,2}$ は線形増加強度の方が高くなる。これは、カウンターパーティーのデフォルト確率 p_2 が定数強度に比べ高くなるためである。

(v) デフォルトの相関係数 [ρ_d]

デフォルトの相関係数 ρ_d は、定数強度のときと同様にデフォルト強度 $a_2 + b_2t$ 及びコピュラの相関係数 ρ に対して増加傾向を有する。ただし、デフォルトの相関係数 ρ_d は線形増加強度の方が大きくなる。これは、2社

デフォルト確率 $p_{1,2}$ が定数強度に比べ高くなるためである。

(vi) 同時デフォルト強度の要素 $[\alpha]$

同時デフォルト強度の要素 α とデフォルト強度 $a_2 + b_2t$ を比較すると、定数強度のときと同様に a_2 が単調増加しているのに比べ、 α は一度減少してから増加している。これは、式 (7.6) から明らかなように α が $a = \min(a_1, a_2), b = \min(b_1, b_2)$ に反比例するためである。つまり、 a_2 が a_1 を超えるまでは減少し、その後増加する。ただし、 b に関しては常に $b_2 > b_1$ が成り立つため減少の要素にはならない。また、デフォルト強度の要素 α はアフィン強度の方が大きくなる。これは、2社確率デフォルト確率 $p_{1,2}$ が定数強度に比べ高くなるためである。

8.2.3 線形減少強度

ここでは、デフォルト強度が増加する参照企業と減少するカウンターパーティーを想定する。つまり、カウンターパーティーのデフォルト強度が線形的に減少する場合 $b_2 < 0$ における数値例を示す。ただし、契約時のデフォルト強度 a_2 が線形増加強度のときと同値になるように設定した。つまり、カウンターパーティーにおけるデフォルト強度の増減が与える影響を分析する。参照企業のデータは、線形増加強度のときと同様に表 3 を用いる。このとき、カウンターパーティーのデフォルト強度の要素 a_2, b_2 及びコピュラの相関係数 ρ を変動させた数値例を表 5 に示した。

表 5 線形減少強度における数値例

a_2	b_2	κ_2	ρ	ρ_d	α	$p_{1,2}$	EPE(0)	CVA(0)
0.0056	-0.0002	28bp	10%	0.0319	0.0594	0.0083	0.0214	0.0009
0.0085	-0.0003	43bp	10%	0.0359	0.0545	0.0122	0.0196	0.0012
0.0122	-0.0004	62bp	10%	0.0377	0.0649	0.0169	0.0182	0.0016
0.0189	-0.0005	100bp	10%	0.0439	0.1042	0.0258	0.0189	0.0024
0.0056	-0.0002	28bp	40%	0.1618	0.2994	0.0175	0.1078	0.0038
0.0085	-0.0003	43bp	40%	0.1784	0.2686	0.0244	0.0967	0.0052
0.0122	-0.0004	62bp	40%	0.1892	0.3226	0.0322	0.0904	0.0067
0.0189	-0.0005	100bp	40%	0.2618	0.4829	0.0457	0.0874	0.0093
0.0056	-0.0002	28bp	70%	0.3511	0.6445	0.0309	0.2320	0.0081
0.0085	-0.0003	43bp	70%	0.3874	0.5769	0.0424	0.2077	0.0110
0.0122	-0.0004	62bp	70%	0.4092	0.6883	0.0545	0.1929	0.0141
0.0189	-0.0005	100bp	70%	0.4326	0.9950	0.0734	0.1801	0.0190

表 5 における考察を以下に示した。ただし、線形増加強度のとき (表 4) との比較を中心とする。

(i) CVA (Credit Value Adjustment)

CVA(0) は、線形増加強度のときと同様にカウンターパーティーにおけるデフォルト強度 $a_2 + b_2t$ 及びコピュラの相関係数 ρ に対して増加傾向を有する。ただし、CVA(0) は線形増加強度のときに比べ小さくなる。これは、CVA(0) の増加要因である同時デフォルト強度が線形増加強度に比べ小さくなるためである。ただし同時デフォルト強度の比較は、強度と対数比例の関係がある確率 $p_{1,2}$ を用いた。また、この結果から契約時のデフォルト強度が同値なカウンターパーティーならば減少する方 (線形減少強度) と契約した方が適正な価格に

近い価格で取引できるということが明らかとなる。

(ii) Expected Positive Exposure -EPE(0)

EPE(0) は、線形増加強度のときと同様にカウンターパーティーのデフォルト強度と同時デフォルト強度の比が決定要因となる。ただし、デフォルト強度の要素 a_2 に対する EPE(0) の変動は線形増加強度のときに比べ小さくなる。これは、EPE(0) が同時デフォルト強度の要素 a_3 とカウンターパーティーのデフォルト強度の要素 a_2 の比によって決定されるためである。つまり、この比に大きな影響を与える α の値が線形増加強度のときに比べ大きくなるため EPE(0) の減少幅が小さくなる。また、 $\rho = 10\%$, $a_2 = 0.0122 \rightarrow 0.0189$ において EPE(0) が増加している。これは、 $a_1 < a_2$ における α の増加率 $\frac{0.1042}{0.0649} = 1.6055$ が a_2 の増加率 $\frac{0.0189}{0.0122} = 1.5491$ を上回るためである。

(iii) スプレッド κ_2

スプレッド κ_2 は、線形増加強度のときと同様にデフォルト強度 $a_2 + b_2 t$ に対して増加傾向を有するがコピュラの相関係数 ρ に対しては依存関係を持たない。ただし、スプレッド κ_2 の値は線形増加強度のときに比べ低くなる。これは、線形増加強度のときに比べカウンターパーティーのデフォルト確率 p_2 が低くなるためである。

(iv) 2社デフォルト確率 $p_{1,2}$

2社デフォルト確率 $p_{1,2}$ は、線形増加強度のときと同様にデフォルト強度 $a_2 + b_2 t$ 及びコピュラの相関係数 ρ に対して増加傾向を有する。ただし、2社デフォルト確率 $p_{1,2}$ の値は線形増加強度のときに比べ低くなる。これは、線形増加強度のときに比べカウンターパーティーのデフォルト確率 p_2 が低くなるためである。

(v) デフォルトの相関係数 ρ_d

デフォルトの相関係数 ρ_d は、線形増加強度のときと同様にデフォルト強度 $a_2 + b_2 t$ 及びコピュラの相関係数 ρ に対して増加傾向を有する。ただし、相関係数 ρ_d は線形増加強度のときに比べ低くなる。これは、2社デフォルト確率 $p_{1,2}$ が線形増加強度のときに比べ低くなるためである。

(vi) 同時デフォルト強度の要素 α

同時デフォルト強度の要素 α とデフォルト強度 $a_2 + b_2 t$ を比較すると、線形増加強度のときと同様に強度が単調増加しているのに比べ、 α は一度減少してから増加する。これは、式 (7.6) から明らかのように α が $a = \min(a_1, a_2)$, $b = \min(b_1, b_2)$ に反比例するためである。つまり、 a_2 が a_1 を超えるまでは減少し、その後増加していく。ただし、 b に関しては常に $b_2 < b_1$ が成り立ち減少要素になるが、 a_2 に比べ b_2 が小さいため影響度が小さい。また、デフォルト強度の要素 α は線形増加強度のときに比べ大きくなる。これは、線形減少強度のときには α がデフォルト確率の減少要因 b_2 にもかかるためである。

8.3 価値関数

前述した数値例を参考に数値実験を行い、価値関数 $v(t)$, $u_0(t)$, $u_1(t)$ を比較する。価値関数 $v(t)$, $u_0(t)$, $u_1(t)$ の時間による変化を数値例におけるスプレッド κ_2 , コピュラの相関係数 ρ の数値ごとに示す。ただし、図 2 は定数強度、図 3 は線形増加強度、図 4 は線形減少強度を表している。ここで、 $u_0(t)$ とは Risky CDS 価値関数 $u(t)$ の式 (5.4) 及び (5.5) において $\tilde{\chi}(t) = v(t)$ としたものである。また、 $u_1(t)$ は $\tilde{\chi}(t) = u_0(t)$ としたものである。

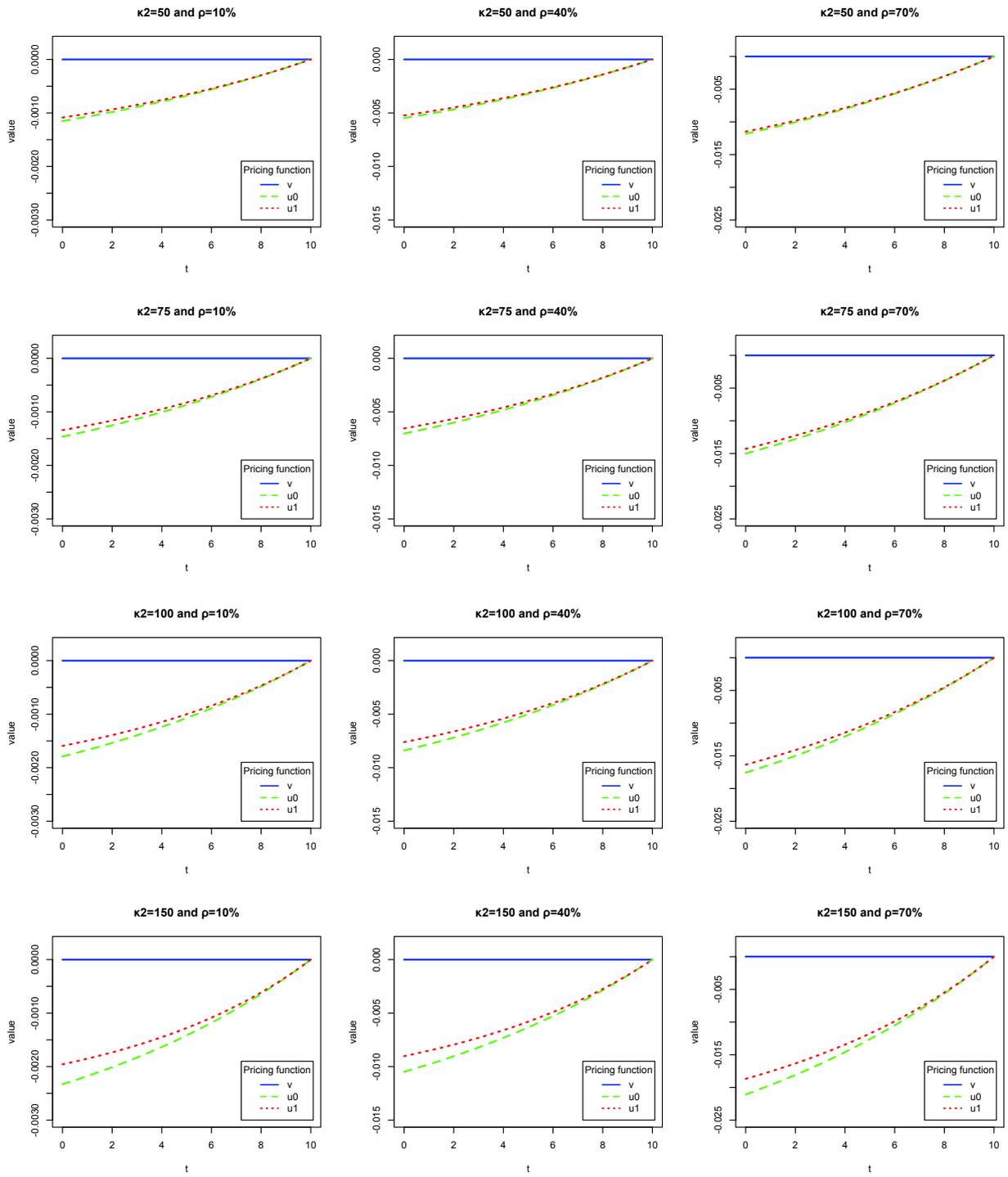


図2 定数強度における価値関数の推移

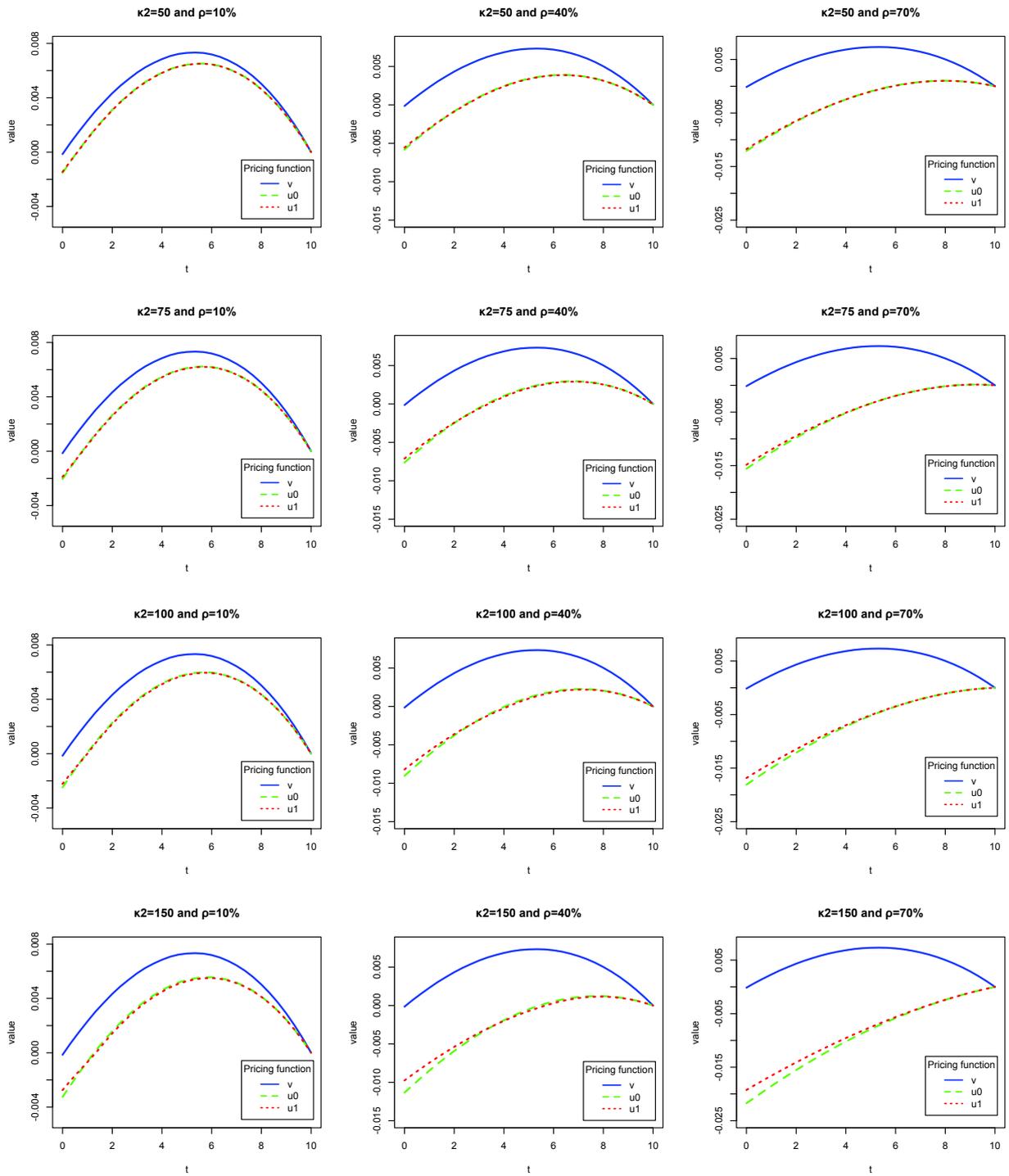


図3 線形増加強度における価値関数の推移

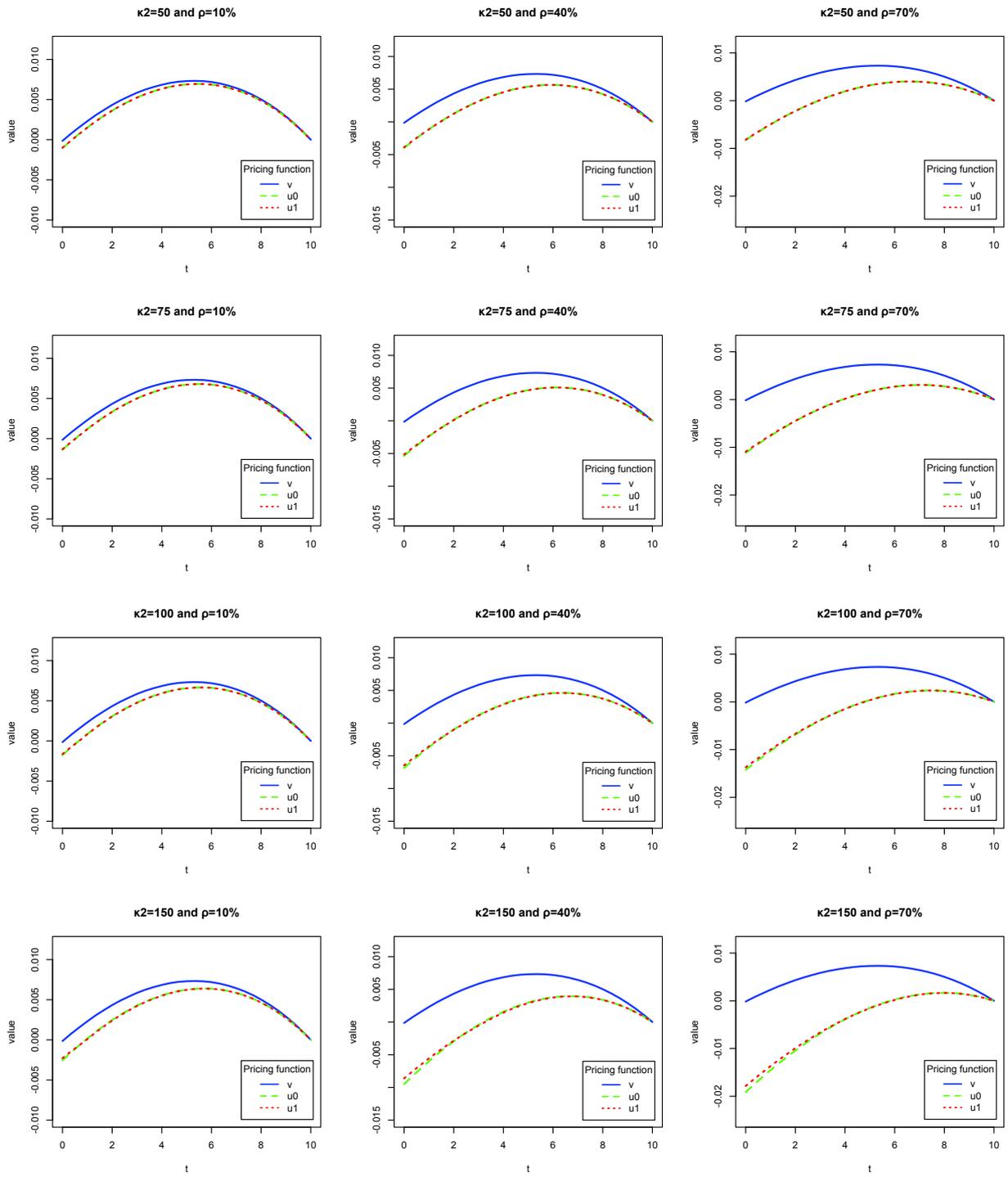


図4 線形減少強度における価値関数の推移

8.3.1 定数強度における考察

図 2 における共通点として Risk-free CDS の価値関数 $v(t)$ が常に 0 となることが挙げられる。これは、強度が時間により変化しないため常にスプレッド κ_1 と保証額が一致するためである。また、 $u_0(t), u_1(t)$ が $v(t)$ より低くなるのはカウンターパーティーリスクを考慮しているためである。つまり、カウンターパーティーのデフォルトにより保証額が支払われない可能性があるため CDS 価値が下落している。

次に、 $u_0(t)$ と $u_1(t)$ を比較する。 $u_0(t)$ が $u_1(t)$ より低いのはカウンターパーティーがデフォルトしたときの精算額 $R_2\tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^-$ の値が u_0 の方が低いためである。ここから、 $u_0(t)$ と $u_1(t)$ の差が精算額における差を CDS 価値に反映させた額であることが分かる。また、 $u_0(t), u_1(t)$ が曲線となるのは指数関数で表現されるためである。

個々の図に注目する。図 2 は、数値例における表 2 を基にしており κ_2 と ρ で示した。まず、 κ_2 の変化による価値関数の変化を分析する。全ての ρ において κ_2 が増加すると $u_0(t), u_1(t)$ が減少する。これは、 κ_2 の増加がカウンターパーティーのデフォルト確率 p_2 の増加を意味しており、保証額が支払われない確率が高くなるためである。また、デフォルト確率 p_2 の増加はカウンターパーティーがデフォルトしたときの期待精算額の増加にも繋がるため $u_0(t)$ と $u_1(t)$ の差が大きくなっていく。

次に ρ の変化による価値関数の変化を分析する。全ての κ_2 において ρ が増加すると $u_0(t), u_1(t)$ が減少する。これは、 ρ の増加が同時デフォルト強度 a_3 の増加を意味しているためである。つまり、同時デフォルトにより保証額の支払いが行われなくなるリスクが高まり CDS 価値が低下する。

8.3.2 線形増加強度における考察

図 3 における考察を述べる。ただし、定数強度との比較を中心とする。定数強度との一番の違いは価値関数 $v(t)$ の推移軌道である。定数強度では $v(t) = 0$ の直線となるが、線形増加強度においては上に凸の放物線を描く。これは、参照企業のデフォルト強度が時間により増加するため定数のスプレッド κ_1 では保証額の増加をとらえられないためである。また、初期時刻及び満期 T で $v(t) = 0$ となる。初期時刻については、スプレッド κ_1 が時刻 0 において保証額と一致するように設定されるためである。また、満期 T に関しては契約の残存期間が 0 となるためである。次に、価値関数 $u_0(t), u_1(t)$ と $v(t)$ を比較する。定数強度のときと同様に価値関数 $u_0(t), u_1(t)$ は、 $v(t)$ より低くなる。これは、カウンターパーティーリスクを考慮しているためである。つまり、カウンターパーティーのデフォルトにより保証額が支払われない可能性があるため CDS 価値が下落している。次に、 $u_0(t)$ と $u_1(t)$ を比較する。定数強度においては常に $u_0(t) \leq u_1(t)$ が成り立つが線形増加強度においては価値関数 $u_0(t)$ と $u_1(t)$ に以下のような関係が成り立つ。

$$\begin{cases} u_0(t) < u_1(t) & 0 \leq t < s \\ u_0(t) \geq u_1(t) & s \leq t < T \\ u_0(t) = u_1(t) & t = T. \end{cases}$$

ただし、時刻 s は $0 < s < T$ において

$$R_2v_{(s)}^+ - v_{(s)}^- = R_2u_{0(s)}^+ - u_{0(s)}^-$$

を満たすものとする。以上より、 $u_0(t)$ と $u_1(t)$ の差が精算額における差を CDS 価値に反映させた額であることが分かる。また、線形増加強度における $u_0(t), u_1(t)$ が上に凸の放物線となるのは価値関数 $v(t)$ の影響をうけるためである。

個々の図に注目する。図 3 は、数値例における表 4 を基にしており κ_2 と ρ で示した。まず、 κ_2 の変化による価値関数の変化を分析する。定数強度のときと同様に、全ての ρ において κ_2 が増加すると $u_0(t), u_1(t)$ が減少す

る。これは、 κ_2 の増加がカウンターパーティーのデフォルト確率 p_2 の増加を意味しており、保証額が支払われない確率が高くなるためである。また、デフォルト確率 p_2 の増加はカウンターパーティーがデフォルトしたときの期待精算額の増加にも繋がるため $u_0(t)$ と $u_1(t)$ の差が大きくなっていく。

次に ρ の変化による価値関数の変化を分析する。定数強度のときと同様に、全ての κ_2 において ρ が増加すると $u_0(t), u_1(t)$ が減少する。これは、 ρ の増加が同時デフォルト強度 $a_3 + b_3t$ の増加を意味しているためである。つまり、同時デフォルトにより保証額の支払いが行われなくなるリスクが高まり CDS 価値が低下する。

8.3.3 線形減少強度における考察

図 3 における考察を述べる。ただし、線形増加強度との比較を中心とする。価値関数 $v(t)$ の推移軌道は、線形増加強度のときと同じになる。これは、参照企業に関するデータが同じためである。次に、価値関数 $u_0(t), u_1(t)$ と $v(t)$ を比較する。 $v(t)$ が線形増加強度のときと等しくなるが $u_0(t), u_1(t)$ は線形減少強度の方が大きくなる。これは、カウンターパーティーのデフォルト強度の減少により線形増加強度に比べデフォルト確率が低くなるためである。また、カウンターパーティーの評価が異なることから明らかである。

次に、 $u_0(t)$ と $u_1(t)$ を比較する。図 4 では $u_0(t)$ と $u_1(t)$ の差が小さいため分かりづらいが、価値関数 $u_0(t)$ と $u_1(t)$ には線形増加強度のときと同様の関係 (8.2) が成り立つ。よって、線形減少強度においても $u_0(t)$ と $u_1(t)$ の差が精算額における差を CDS 価値に反映させた額となることが明らかである。

個々の図に注目する。図 4 は、数値例における表 5 を基にしており κ_2 と ρ で示した。

まず、 κ_2 の変化による価値関数の変化を分析する。線形増加強度のときと同様に、全ての ρ において κ_2 が増加すると $u_0(t), u_1(t)$ が減少する。これは、 κ_2 の増加がカウンターパーティーのデフォルト確率 p_2 の増加を意味しているためである。また、デフォルト確率 p_2 の増加はカウンターパーティーがデフォルトしたときの期待精算額の増加にも繋がるため $u_0(t)$ と $u_1(t)$ の差が大きくなっていく。

次に ρ の変化による価値関数の変化を分析する。線形増加強度のときと同様に、全ての κ_2 において ρ が増加すると $u_0(t), u_1(t)$ が減少する。これは、 ρ の増加が同時デフォルト強度 $a_3 + b_3t$ の増加を意味しているためである。つまり、同時デフォルトにより保証額の支払いが行われなくなるリスクが高まり CDS 価値が低下する。以上より、デフォルト強度が減少するときは増加するときに比べカウンターパーティーリスクが価格に与える影響が小さいことが明らかとなる。

8.4 EPE(Expected Positive Exposure)

次に EPE の数値実験を行う。EPE(t) は、式 (5.8) より次のように表せる。

$$EPE(t) = (1 - R_2) \left[(1 - R_1) \frac{a_3 + b_3t}{a_2 + b_2t} + v_{(t)}^+ \frac{a_2 - a_3 + (b_2 - b_3)t}{a_2 + b_2t} \right] \exp \left[-(a_1 - a_3)t - \frac{(b_1 - b_3)}{2} t^2 \right] \quad (8.2)$$

この式を用いてコピュラの相関係数 ρ が 10%, 40%, 70% のときにおける EPE(t) の推移を示す。

8.4.1 定数強度

はじめに、定数強度における EPE の推移を図 5 に示す。

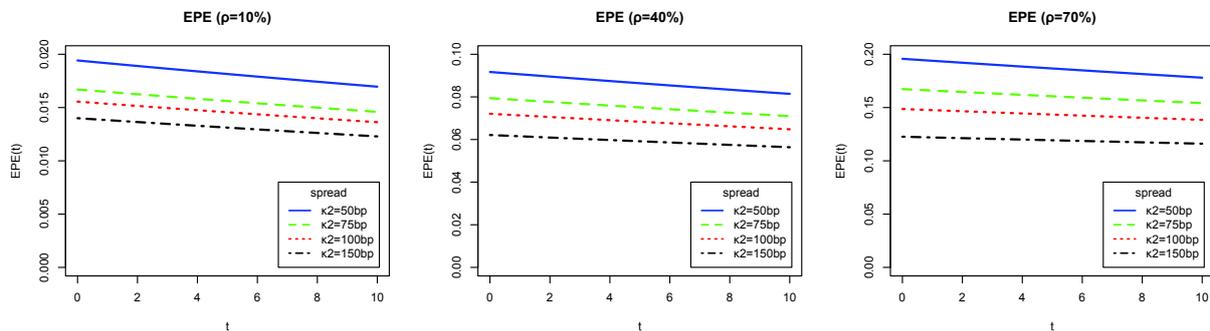


図 5 定数強度における EPE の推移

図 5 より、全てのスプレッド κ_2 において EPE(t) は満期に近づくにつれ減少している。図 5 では線形的に減少しているように見えるが式 (8.2) から明らかなように参照企業の生存確率を表す指数関数に従い減少している。これは、定数強度において $v(t) = 0$ となるためである。また、スプレッド κ_2 が増加すると EPE(t) は減少する。これは、スプレッド κ_2 の増加がカウンターパーティーのデフォルト強度 a_2 の増加を意味しているためである。次に相関係数 ρ に関して比較する。相関係数 ρ に対して EPE(t) は増加傾向を有する。これは、相関係数 ρ の増加が EPE(t) の増加要因である同時デフォルト強度 a_3 の増加を意味するためである。以上より、相関係数 ρ が高くスプレッド κ_2 が低いときほど EPE(t) は高くなる。

8.4.2 線形増加強度

次に、線形増加強度における EPE の推移を図 6 に示す。

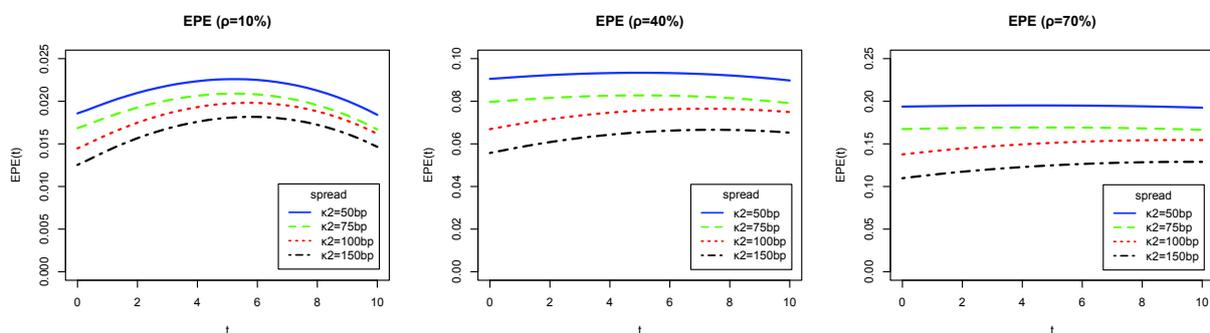


図 6 線形増加強度における EPE の推移

図 6 より、全てのスプレッド κ_2 において EPE(t) の軌跡は上に凸の放物線となる。これは、価値関数 $v(t)$ の影響を受けるためである。また、定数強度のときと同様にスプレッド κ_2 が増加すると EPE(t) は減少する。これは、スプレッド κ_2 の増加がカウンターパーティーのデフォルト強度 $a_2 + b_2 t$ の増加を意味しているため

である。次に相関係数 ρ に関しても、定数強度のときと同様に相関係数 ρ の増加つまり同時デフォルト強度 $a_3 + b_3t$ の増加はエクスポージャーの増加に繋がるため、EPE(t) は相関係数 ρ が増加すると増加する。以上より、定数強度のときと同様に相関係数 ρ が高くスプレッド κ_2 が低いときほど EPE(t) は高くなる。また、相関係数 ρ が小さくスプレッド κ_2 が大きいときほど価値関数 $v(t)$ の影響を受けやすい。

8.4.3 線形減少強度

最後に、線形減少強度における EPE の推移を図 6 に示す。

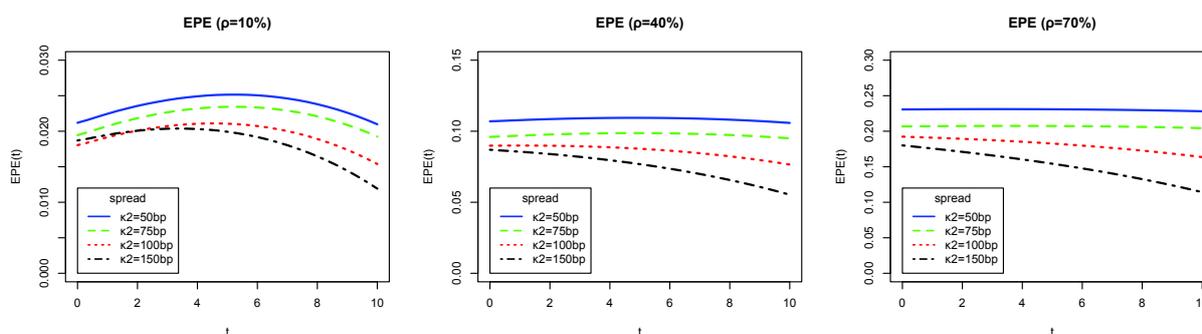


図 7 線形減少強度における EPE の推移

図 7 より、線形増加強度のときと同様に相関係数 ρ が小さくスプレッド κ_2 が大きいときほど価値関数 $v(t)$ の影響を受けカーブが大きくなることから分かる。また、相関係数 ρ が高くスプレッド κ_2 が低いときほど EPE(t) は高くなる。ただし、 $\rho = 10\%$ のときの EPE(t) に注目するとスプレッド $\kappa_2 = 150\text{bp}$ のときの EPE(0) が $\kappa_2 = 100\text{bp}$ のときの EPE(0) を上回っている。この理由は、表 5 の考察で示している。次に、価値関数 $v(t)$ の影響が大きい $\rho = 10\%$ のときを除いて EPE(t) の傾向を分析する。線形増加強度のときは、増加傾向を有していたが線形減少強度に関しては減少傾向を有する。これは、カウンターパーティーのデフォルト強度に対する同時デフォルト強度の割合の変化によって説明できる。線形増加強度における同時デフォルト強度の割合は時間より増加していくが、線形減少強度においては減少していくためである。

8.5 CVA(Credit Value Adjustment)

次に CVA の数値実験を行う。CVA(t) は、価値関数 $u_0(t)$ と $v(t)$ の差で表される。よって、コピュラの相関係数 ρ が 10%, 40%, 70% のときにおける CVA の推移を以下に示す。

8.5.1 定数強度

はじめに、定数強度における CVA の推移を図 8 に示す。

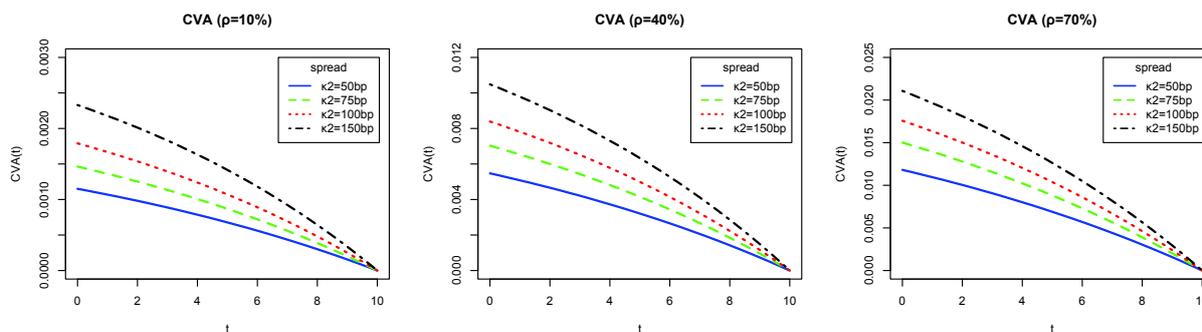


図 8 定数強度における CVA の推移

図 8 より, CVA が時間の経過により減少し満期において 0 になる。これは、満期においてカウンターパーティーリスクの有無に関係なく CDS 価値が 0 になるためである。また、図 2 より $v(t) = 0$ となるため定数強度における CVA(t) は、 $-u_0(t)$ となる。よって、 κ_2, ρ の変化による CVA(t) の変化は $u_0(t)$ のときと逆になる。また、定数強度における CVA の減少要因は CDS 契約における残存期間の減少のみである。よって、CVA のカーブは残存期間による減少を表している。

8.5.2 線形増加強度

次に、線形増加強度における CVA の推移を図 9 に示す。

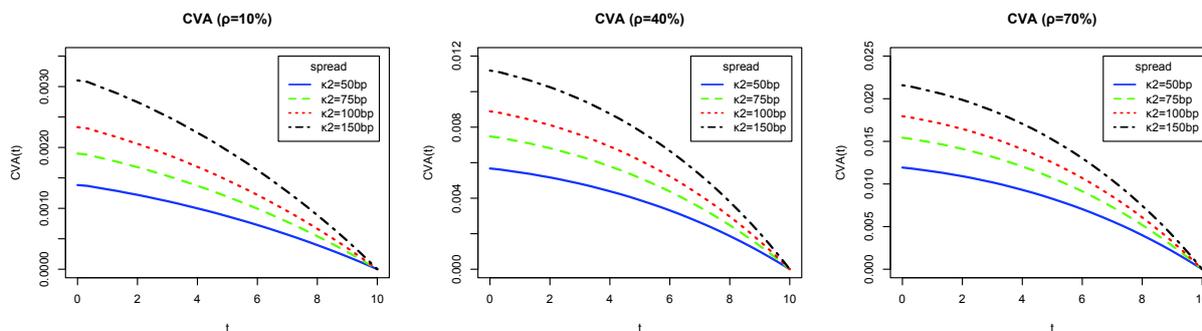


図 9 線形増加強度における CVA の推移

図 9 より, CVA は定数強度のときと同様に時間の経過により減少し満期において 0 になる。また、価値関数

$v(t), u_0(t)$ は上に凸の放物線を描いていたがその差をとることで指数関数に従い減少することが明らかになった。ここで,CVA の値を定数強度のときと比較する。ただし, 図 9 だけでは分かりにくいいため表 2 及び表 ?? の CVA(0) を参考にする。時刻 0 における CVA は全ての κ_2, ρ において定数強度のときに比べ大きくなる。また, 時間における CVA(t) の減少のカーブが定数強度のとき比べ大きくなる。これは, 残存期間の減少が CVA の減少要因となる一方でデフォルト強度の増加が CVA の増加要因となるためである。以上より,CVA(t) は常に線形増加強度の方が大きくなる。つまり, 同じ評価のカウンターパーティーであってもデフォルト強度が一定の方と契約すると CVA が小さくなるということがいえる。

8.5.3 線形減少強度

最後に, 線形減少強度における CVA の推移を図 10 に示す。

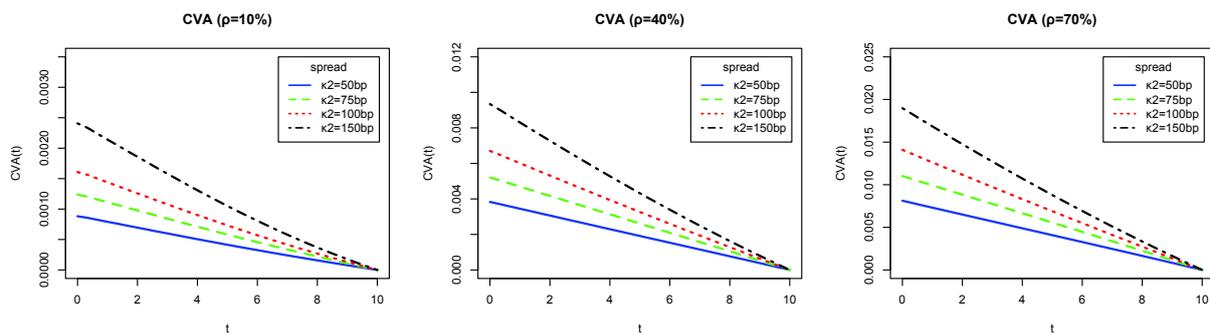


図 10 線形減少強度における CVA の推移

図 10 より,CVA は線形増加強度のときと同様に時間の経過により減少し満期において 0 になる。ただし, 線形増加強度のときと比べるとカーブの向きが逆になる。これは,CDS 契約における残存期間の減少だけでなくデフォルト強度の減少も CVA の減少要因となるためである。また,CVA(t) は常に線形減少強度のときが小さくなる。以上より, 時刻 0 におけるデフォルト強度が同値であるカウンターパーティーではデフォルト強度が減少する方と契約すると CVA が小さくなるということがいえる。

8.6 コピュラの相関係数 ρ における CVA(0) の推移

最後にコピュラの相関係数 ρ における CVA(0) の推移を定数強度, 線形増加強度, 線形減少強度の3つに分けて図 11 に示す。

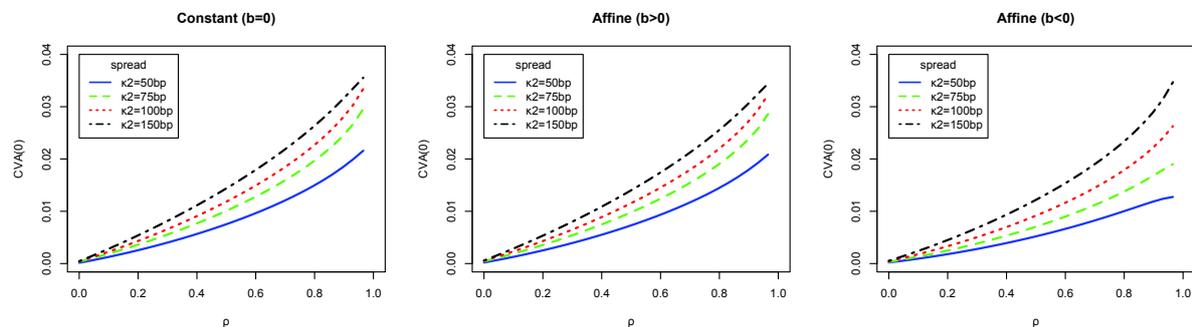


図 11 相関係数 ρ における CVA(0) の推移

図 11 より, 全ての強度において CVA(0) は相関係数 ρ に対して指数的に増加する。これは, 相関係数 ρ の増加により同時デフォルト確率が高まりカウンターパーティーリスクが増加するためである。同様にスプレッド κ_2 の増加は, カウンターパーティーのデフォルト確率の増加を意味しているためカウンターパーティーリスクの増加に繋がる。以上より, カウンターパーティーの選択における相関係数 ρ の重要性が分かる。特に, スプレッド κ_2 が高い場合には相関係数 ρ の影響が大きくなる。

次に, 定数強度と線形増加強度を比較する。CVA の軌道は非常に似ているが CVA(0) の値は線形増加強度の方が大きくなる。つまり, 同評価のカウンターパーティーにおいてデフォルト強度が一定なものが増加するものでは相関係数 ρ による影響の違いは少ない。ただし, 強度が一定となるカウンターパーティーと契約した方が CVA(0) は小さくなる。最後に, 線形増加強度と線形減少強度を比較する。線形減少強度における CVA(0) は, 線形増加強度と比べスプレッド κ_2 による変化率が高くなる。つまり, 相関係数 ρ が高くデフォルト強度が減少するカウンターパーティーと契約するときほどスプレッド κ_2 の選択が重要になる。

9 シミュレーション

本章では, 東京金融取引所が公表している 2011 年 2 月 10 日における 5 年満期の CDS 参考価格を用いてシミュレーションを行う. 本シミュレーションでは参照企業をトヨタ自動車, カウンターパーティーを三井住友銀行, みずほコーポレート銀行の 2 行としてカウンターパーティーリスクの分析を行う.

9.1 データ

シミュレーションにおけるデータを表 6 に示す.

表 6 シミュレーションデータ

	κ_1	R	r	T	a
トヨタ自動車	62bp	40%	1.3%	5years	0.0103
三井住友銀行	74.5bp	40%	1.3%	5years	0.0124
みずほコーポレート銀行	89.9bp	40%	1.3%	5years	0.0150

表 6 におけるデフォルト強度 a は, 参考価格 (Risk-free CDS 価格) から導出した. また, 金利 r は 2011 年 2 月 10 日における長期金利とした. ただし, 回収率は独自に設定した. このデータを基に以下の式より Risky CDS 価格を導出する. ただし, トヨタ自動車のデフォルト強度を a_1 回収率を R_1 , 三井住友銀行とみずほコーポレート銀行におけるデフォルト強度を a_2 回収率を R_2 とする.

$$\kappa_2 = \frac{\int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s l(u) du} \left[(1 - R_1) \{l_1(s) + R_2 l_3(s)\} + l_2(s) \{R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-\} \right] ds}{\int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s l(u) du} ds}$$

ただし

$$l(t) = a_1 + a_2 - a_3, \quad l_1(t) = a_1, \quad l_2(t) = a_2, \quad l_3(t) = a_3$$

とする. これは, 式 (5.4) より導出できる. シミュレーションではコピュラの相関係数 ρ が 10%, 40%, 70% の 3 パターンについて行なう.

9.2 Risky CDS 価格

シミュレーション結果を表 7 に示す. ただし, Risky CDS 価格を κ_2 , コピュラの相関係数を ρ , 参照企業とカウンターパーティーにおけるデフォルトの相関係数を ρ_d とする.

表 7 シミュレーション結果

	$\rho = 10\%$		$\rho = 40\%$		$\rho = 40\%$	
	κ_2	ρ_d	κ_2	ρ_d	κ_2	ρ_d
三井住友銀行	60.9bp	2.7%	55.7bp	15.1%	47.0bp	36.2%
みずほコーポレート銀行	60.7bp	2.8%	54.8bp	15.5%	46.8bp	36.6%

表 7 より, トヨタ自動車における理論上の Risky CDS 価格と CDS の参考価格 62bp を比較する. まず, 参考価格が常に Risky CDS の価格より高くなることが明らかである. これは, 同時デフォルトにより保証額が支払われないリスク等を考慮するためである. また, カウンターパーティを三井住友銀行とした Risky CDS 価格の方が高くなる. つまり, 三井住友銀行と CDS 契約を結んだ方が理論価格に近い価格で取引できる. これは, 三井住友銀行の方が評価が高いためである. 次に, トヨタ自動車と三井住友銀行との相関係数 ρ_d が 15.1%, みずほコーポレート銀行との相関係数 ρ_d が 2.8% であると仮定する. このとき, 評価の低いみずほコーポレート銀行と契約する Risky CDS 価格の方が取引価格に近くなる. つまり, カウンターパーティの選択においてデフォルト強度の推移などの個別評価と同様に参照企業との関係を選考基準にする必要がある.

9.3 ヘッジング

ここでは, モンテカルロ法によりデフォルト時刻を導出し, ヘッジ戦略のシミュレーションをおこなう. 本シミュレーションは, 表 6 における参照企業をトヨタ自動車, カウンターパーティを三井住友銀行としたときのデータを基に試行回数を 1000 回としておこなう. また, シミュレーションにおいてデフォルトの相関係数の期待値が 15.1% になるように, 二分法で算出した相関を参照企業がデフォルトしたときのカウンターパーティのデフォルト確率に適用させる. つまり, 参照企業のデフォルトはカウンターパーティのデフォルトに影響を与えるが, カウンターパーティのデフォルトは参照企業に影響を与えないと仮定した. また, 同時デフォルトのカウンタは同日のデフォルトとする. つまり, 1825 日として計算をおこなう. これらの条件で自己調達戦略を式 (6.2), ヘッジ効果を式 (6.3) を用いて算出する. このヘッジシミュレーションの結果を表 8 に示す.

表 8 ヘッジング結果

def-1	def-2	def-3	ヘッジ効果
47	75	11	5.83%

表 8 における def-1 はトヨタ自動車のデフォルト回数, def-2 は三井住友銀行のデフォルト回数, def-3 は同時デフォルトの回数である. このヘッジ効果は, Risky CDS 価値を Risk-free CDS の売り戦略により抑えた分散の割合である. つまり, Risky CDS を保有していると仮定したとき, Risk-free CDS の売り戦略をおこなうことによりヘッジをおこなわないときの 5.83% まで分散を抑えることができた.

10 結論

本論文では、CDS 取引の構造から一般的な取引価格を示す Risk-free CDS 価値モデルとカウンターパーティーリスクを考慮した Risky CDS 価値モデルを導出した。また、この2つのモデルから EPE と CVA を導き、カウンターパーティーリスクを分析した。モデルに関しては、同時デフォルトを考慮したマルコフ・コンピュータモデルを採用した。これにより、シミュレーションにおけるキャリブレーションが容易になった。本論文では、カウンターパーティーリスクを分析するために数値実験を行った。

この結果を以下にまとめる。実際の取引価格は常にカウンターパーティーリスクを考慮した理論上の価格より高くなる。つまり、CDS 取引はカウンターパーティーに有利な取引であることが明らかになった。ただし、企業にとって CDS 取引はリスクヘッジの手段として有用であるため、適正な価格に近い価格で取引を行う方法が重要となる。この方法とは、CDS 取引におけるカウンターパーティーの選択方法を意味する。

ここで、数値実験より明らかになった選択基準を示す。カウンターパーティーの選択においては、カウンターパーティーの評価と参照企業との相関関係が重要になる。直感的にも信用度の高い金融機関と CDS 取引をした方が適正な価格に近いということは理解できる。しかし、評価の高いカウンターパーティーであっても参照企業との相関が高ければ、評価の低いカウンターパーティーに劣ることもある。つまり、適正な相関を導出し、カウンターパーティーの評価と総合的に判断する必要がある。また、数値実験においてはデフォルト強度の推移（一定、増加、減少）によって比較した。その結果、デフォルト強度の推移が価格に与える影響が明らかとなった。特に時間による CVA の推移では、デフォルト強度が増加するカウンターパーティーを選択すると CVA が早々に減少していくことが分かった。これは、契約期間内の累積価格差がデフォルト強度の推移により大きく異なることを意味し、カウンターパーティーの選択基準としてデフォルト強度の推移も重要であることが示された。ただし、デフォルト強度が減少するカウンターパーティー（特に参照企業との相関が高い）を選択する場合は、評価による CVA の差が大きくなるため注意が必要である。

本論文では、デフォルト強度の推移を定数と線形変化で捉えたが実際にはランダムに変化する。そのため、今後の研究としてデフォルト強度にランダム性を取り入れ CVA の分散を分析することが挙げられる。また、シミュレーションにおいても本研究では1時点における CDS 価格からキャリブレーションを行ったが、より実践的なシミュレーションにするために CDS 価格の推移からキャリブレーションを行うことも重要になる。

A 付録

A.1 CVA の性質 (定理 2.1 の証明)

証明

式 (2.4), (2.11), (2.14) から $\tau_1 \leq t < \tau_2$ のとき, $\Pi_t = P_t = CVA_t = 0$ となり定理 2.1 が成り立つ. よって, $t < \tau_1 \wedge \tau_2$ のときを考える. このとき, キャッシュフロー $\beta_t p_T(t)$ と $\beta_t \pi_T(t)$ の差は

$$\begin{aligned} \beta_t(p_T(t) - \pi_T(t)) &= -\kappa \int_{t \wedge \tau_1 \wedge T}^{\tau_1 \wedge T} \beta_s ds + \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \leq T\}} \\ &\quad + \kappa \int_{t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T}^{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T} \beta_s ds - \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \leq T\}} [\mathbb{I}_{\{\tau_1 < \tau_2\}} + R_2\mathbb{I}_{\{\tau_1 = \tau_2\}}] \\ &\quad - \beta_{\tau_2}\mathbb{I}_{\{t < \tau_2 \leq T\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} [R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-] \end{aligned}$$

と表せる. ここで, $t < \tau_1 \wedge \tau_2$ より

$$\begin{aligned} \beta_t(p_T(t) - \pi_T(t)) &= -\kappa \left[\int_t^{\tau_1 \wedge T} \beta_s ds + \int_{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T}^t \beta_s ds \right] + \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{\tau_1 \leq T\}} [1 - \mathbb{I}_{\{\tau_1 < \tau_2\}} - R_2\mathbb{I}_{\{\tau_1 = \tau_2\}}] \\ &\quad - \beta_{\tau_2}\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq T\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} [R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-] \\ &= -\kappa \int_{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T}^{\tau_1 \wedge T} \beta_s ds + \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{\tau_1 \leq T\}} [\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq \tau_1\}} - R_2\mathbb{I}_{\{\tau_1 = \tau_2\}}] \\ &\quad - \beta_{\tau_2}\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq T\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} [R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

となる. カウンターパーティーが参照企業よりも先にデフォルトするときの Risk-free CDS のキャッシュフロー $\beta_{\tau_2} p_T(\tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq T\}}$ は

$$\begin{aligned} \beta_{\tau_2} p_T(\tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq T\}} &= \beta_{\tau_2} p_T(\tau_2) \\ &= -\kappa \int_{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T}^{\tau_1 \wedge T} \beta_s ds + \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1 \leq T\}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と表せる. これは, 割引キャッシュフロー価値 $\beta_{\tau_2} p_T(t)$ が $\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq T\}} = 1$ のときにのみ値をとり, その他のときに 0 となるためである. また, 式 (A.1) の第 1 項及び第 2 項に注目すると, 式 (A.2) より

$$\begin{aligned} -\kappa \int_{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T}^{\tau_1 \wedge T} \beta_s ds + \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{\tau_1 \leq T\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq \tau_1\}} &= -\kappa \int_{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T}^{\tau_1 \wedge T} \beta_s ds \\ &\quad + \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{\tau_1 \leq T\}} [\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} + \mathbb{I}_{\{\tau_2 = \tau_1\}}] \\ &= \beta_{\tau_2} p_T(\tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq T\}} + \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{\tau_1 \leq T\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 = \tau_1\}} \end{aligned}$$

と変換できる. よって

$$\begin{aligned} \beta_t(p_T(t) - \pi_T(t)) &= \beta_{\tau_2} p_T(\tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq T\}} + \beta_{\tau_1}(1 - R_1)\mathbb{I}_{\{\tau_1 \leq T\}} [\mathbb{I}_{\{\tau_1 = \tau_2\}} - R_2\mathbb{I}_{\{\tau_1 = \tau_2\}}] \\ &\quad - \beta_{\tau_2}\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq T\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} [R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-] \\ &= \beta_{\tau_2} p_T(\tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T\}} + \beta_{\tau_2}(1 - R_1)(1 - R_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 = \tau_1 \leq T\}} \\ &\quad - \beta_{\tau_2}\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T\}} [R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-] \end{aligned}$$

となる. 第2項目は同時デフォルト項であるため β_{τ_1} を β_{τ_2} に変換し, 割引過程を統一した. ここで, 式を整理すると

$$\beta_t(p_T(t) - \pi_T(t)) = \begin{cases} \beta_{\tau_2}(1 - R_1)(1 - R_2) & \tau_2 = \tau_1 \leq T, \\ \beta_{\tau_2}(p_T(\tau_2) - [R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-]) & \tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と表せる. CDS の価値過程はキャッシュフローの条件付き期待値で表現されるため両辺に条件付き期待値をとり

$$\beta_t \mathbb{E}_{\tau_2} [(p_T(t) - \pi_T(t))] = \begin{cases} \beta_{\tau_2}(1 - R_1)(1 - R_2) & \tau_2 = \tau_1 \leq T, \\ \beta_{\tau_2}(P_{\tau_2} - R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-) & \tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と表せる. ここで, $\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T$ のときに注目する. カウンターパーティーのデフォルト時刻 τ_2 における CDS 価値 $\chi_{(\tau_2)}$ は, $P_T(\tau_2)$ と同値であるため, 次のように示せる.

$P_T(\tau_2) = \chi_{(\tau_2)} \leq 0$ のとき

$$\beta_{\tau_2}(P_{\tau_2} - R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-) = \beta_{\tau_2}P_{\tau_2}^+(1 - R_2)$$

$P_T(\tau_2) = \chi_{(\tau_2)} < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \beta_{\tau_2}(P_{\tau_2} - R_2\chi_{(\tau_2)}^+ - \chi_{(\tau_2)}^-) &= \beta_{\tau_2}(P_{\tau_2} - \chi_{(\tau_2)}^-) \\ &= 0 \\ &= \beta_{\tau_2}P_{\tau_2}^+(1 - R_2) \end{aligned}$$

となる. 以上より

$$\beta_t \mathbb{E}_{\tau_2} [(p_T(t) - \pi_T(t))] = \begin{cases} \beta_{\tau_2}(1 - R_1)(1 - R_2) & \tau_2 = \tau_1 \leq T, \\ \beta_{\tau_2}P_{\tau_2}^+(1 - R_2) & \tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と表せる. ここで, エクスポージャーの定義式 (2.12) より

$$\beta_t \mathbb{E}_{\tau_2} [(p_T(t) - \pi_T(t))] = \beta_{\tau_2} \xi_{(\tau_2)}$$

となる. 本証明では, 価値過程の差 $P_t - \Pi_t$ を示したいため両辺に条件付き期待をとる.

$$\beta_t \mathbb{E}_t [\mathbb{E}_{\tau_2} [(p_T(t) - \pi_T(t))]] = \mathbb{E}_t [\beta_{\tau_2} \xi_{(\tau_2)}]$$

条件付き期待値のタワールールより

$$\beta_t \mathbb{E}_t [(p_T(t) - \pi_T(t))] = \mathbb{E}_t [\beta_{\tau_2} \xi_{(\tau_2)}]$$

また, 価値過程の定義と CVA の定義から

$$\beta_t CVA_t = \beta_t (P_t - \Pi_t)$$

となる. 以上より

$$CVA_t = P_t - \Pi_t$$

□

A.2 フィルトレーション変換 (定理 3.1 の証明)

証明

(i) Y_t は, \mathcal{H}_t^i 可測な確率変数である. そのため, デフォルト状態を分けて示したとき時刻 t 以前の情報は既知であり, 確定関数で表現することができる. よって

$$Y_t = y_0(t)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} + y_1(t, \tau_1)\mathbb{I}_{\{\tau_1 \leq t < \tau_2\}} + y_2(t, \tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq t < \tau_1\}} + y_3(t, \tau_1, \tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge t\}}$$

が成り立つ.

(ii) 式の簡略化のため $A = t < \tau_1 \wedge \tau_2$ とすると

$$\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \mathbb{E}_t[Z] = \mathbb{I}_{\{A\}} \mathbb{E}[Z | \mathcal{H}_t]$$

と表せる. また, ルベーク積分すると

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{I}_{\{A\}} \mathbb{E}[Z | \mathcal{H}_t] d\mathbb{P} &= \int_A \mathbb{I}_{\{A\}} Z d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{A\}} Z] \\ &= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{A\}} Z]}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

に変形できる. ここで, $\frac{\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{A\}} Z]}{\mathbb{P}(A)} = c(t)$ とおくと次に示すように $c(t)$ の期待値となる.

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{I}_{\{A\}} \mathbb{E}[Z | \mathcal{H}_t] d\mathbb{P} &= c(t) \mathbb{P}(A) \\ &= \mathbb{E}[c(t)] \end{aligned}$$

この期待値をルベーク積分で表すと

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{I}_{\{A\}} \mathbb{E}[Z | \mathcal{H}_t] d\mathbb{P} &= \int_A c(t) \mathbb{I}_{\{A\}} d\mathbb{P} \\ &= \int_A \frac{\mathbb{E}[Z \mathbb{I}_{\{A\}}]}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{I}_{\{A\}} d\mathbb{P} \end{aligned}$$

となる. $A \in \mathcal{H}_t$ かつ \mathcal{H}_t は生存かデフォルトの情報のみ有していることから, A と A の補集合で任意の A と考えることができる. よって, ルベーク積分内の式は同値になり

$$\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \mathbb{E}_t[Z] = \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \frac{\mathbb{E}[Z \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}]}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)}$$

が成り立つ.

(iii) Risky CDS のキャッシュフロー $\pi_T(t)$ は, 初期状態でのみ値をもつため $\pi_T(t) = \pi_T(t) \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}$ が成り立つ. よって, 式 (2.10) は次のように変形できる.

$$\Pi_T(t) = \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \mathbb{E}[\pi_T(t)]$$

ここで, 定理 3.1(ii) より

$$\Pi_t = \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \frac{\mathbb{E}[\pi_T(t) \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}]}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)}$$

キャッシュフロー $\pi_T(t)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}$ を $\pi_T(t)$ に戻し, 状態 H_t^i の定義 $H_t^i = \mathbb{I}_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1, 2$ より

$$\begin{aligned}\Pi_t &= \mathbb{I}_{\{t < \tau_1\}}\mathbb{I}_{\{t < \tau_2\}} \frac{\mathbb{E}[\pi_T(t)]}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)} \\ &= (1 - H_t^1)(1 - H_t^2)u(t)\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし

$$u(t) = \frac{\mathbb{E}[\pi_T(t)]}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)}$$

とする。以上より, $(t < \tau_1 \wedge \tau_2)$ のとき $H_t = 0$ となり, $\Pi(t, 0, 0)$ は次のように表せる。

$$\Pi(t, 0, 0) = u(t) := \frac{\mathbb{E}[\pi_T(t)]}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)}$$

(iv) フィルトレーション \mathbb{H} の適合関数 $\tilde{\chi}(\cdot), v(\cdot), \tilde{\xi}(\cdot, \cdot), CVA(\cdot)$ の定義である。 $CVA(t)$ に関しては, CVA_t が初期状態でのみ値をもつため $CVA_t = \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}CVA_t$ が成り立つ。 よって

$$CVA_t = \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}CVA(t)$$

も成り立つ。

(v) CVA_t の定義式 (2.14) と定理 3.1(iv) から

$$\begin{aligned}\beta_t \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}CVA_t &= \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}\mathbb{E}_t[\beta_{\tau_2}\xi(\tau_2)] \\ &= \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}\mathbb{E}_t[\beta_{\tau_2}\tilde{\xi}(\tau_1, \tau_2)]\end{aligned}$$

となる。また, 定理 3.1(ii) より

$$\beta_t \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}CVA_t = \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \frac{\mathbb{E}[\beta_{\tau_2}\tilde{\xi}(\tau_1, \tau_2)\mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}]}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)}$$

ここで, $EPE(t)$ を導くためにタワールールを用いる。また, エクスポージャー $\tilde{\xi}(\tau_1, \tau_2)$ の定義より, インディケータ関数を変換できる。

$$\begin{aligned}\beta_t \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}CVA_t &= \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \frac{\mathbb{E}[\beta_{\tau_2}\mathbb{E}[\tilde{\xi}(\tau_1, \tau_2)|\tau_2]\mathbb{I}_{\{t < \tau_2 \leq T\}}]}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)} \\ &= \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \frac{\mathbb{E}[\beta_{\tau_2}EPE(\tau_2)\mathbb{I}_{\{t < \tau_2 \leq T\}}]}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)}\end{aligned}$$

$EPE(\tau_2)$ は, カウンターパーティーのデフォルト時の期待エクスポージャーである。 よって, 右辺の期待値を積分で表現すると時刻 t から T の間の微小時間 ds でカウンターパーティーのデフォルトが起きる確率と割引き $EPE(\tau_2)$ を掛けて表すことができる。 よって

$$\beta_t \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}}CVA_t = \mathbb{I}_{\{t < \tau_1 \wedge \tau_2\}} \int_t^T \beta_s EPE(s) \frac{\mathbb{P}(\tau_2 \in ds)}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)} ds$$

となる。以上より

$$\beta_t CVA(t) := \int_t^T \beta_s EPE(s) \frac{\mathbb{P}(\tau_2 \in ds)}{\mathbb{P}(t < \tau_1 \wedge \tau_2)} ds$$

□

A.3 マルコフ・コピュラ (定理 4.1 の証明)

証明

はじめに, 本定理を証明するために必要な Doob-Meyer の分解定理を紹介する.

Doob Meyer の分解定理

劣マルチンゲール過程 X に対して, 単調増加かつ積分可能な過程を A , 積分可能なマルチンゲール過程を M とすると,

$$M = X - A$$

を満たす M が一意的存在する.

この定理は, $X = M + A$ と表すこともできる. つまり, 劣マルチンゲール過程は, ある単調増加トレンドとマルチンゲール過程に一意に分解可能であることを示している.

(i) デフォルト過程 $H_t^l, l \in I = \{\{1\}\{2\}\{1,2\}\}$ は, 生存時に 0, デフォルト時に 1 となる確率過程であり次のように表せる.

$$H_t^{\{1\}} = \sum_{0 < s \leq t} \mathbb{I}_{\{\Delta H_s = (1,0)\}} \quad , \quad H_t^{\{2\}} = \sum_{0 < s \leq t} \mathbb{I}_{\{\Delta H_s = (0,1)\}} \quad , \quad H_t^{\{1,2\}} = \sum_{0 < s \leq t} \mathbb{I}_{\{\Delta H_s = (1,1)\}}$$

これは, ポアソン過程であり劣マルチンゲールである. また, 強度 $q_l(t, H_t)$ の積分は単調増加でありポアソン過程の期待値を表している. よって, Doob-Meyer の分解定理より

$$M_t^l = H_t^l - \int_0^t q_l(s, H_s) ds$$

ただし

$$\begin{aligned} q_{\{1\}}(t, H_t) &= (1 - H_t^1)((1 - H_t^2)l_1(t) + H_t^2 q_1(t)) \\ q_{\{2\}}(t, H_t) &= (1 - H_t^2)((1 - H_t^1)l_2(t) + H_t^1 q_2(t)) \\ q_{\{1,2\}}(t, H_t) &= (1 - H_t^1)(1 - H_t^2)l_3(t) \end{aligned}$$

とする. このとき, M^l はマルチンゲールである.

また, 以下の方法からも M_t^l がマルチンゲールであることが確認できる.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t^l | \mathcal{H}_s] &= \mathbb{E}\left[M_t^l - M_s^l \middle| \mathcal{H}_s\right] + \mathbb{E}\left[M_s^l \middle| \mathcal{H}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[H_t^l - H_s^l - \int_s^t q_l(s, H_s) ds \middle| \mathcal{H}_s\right] + \mathbb{E}\left[M_s^l \middle| \mathcal{H}_s\right] \end{aligned}$$

ここで, 強度 $q_l(t, H_t)$ は一定であるため期待値がはずれ

$$\mathbb{E}[M_t^l | \mathcal{H}_s] = \mathbb{E}\left[H_t^l - H_s^l \middle| \mathcal{H}_s\right] - \int_s^t q_l(s, H_s) ds + \mathbb{E}\left[M_s^l \middle| \mathcal{H}_s\right]$$

となる. また, ポアソン過程 $H_t^l - H_s^l$ は \mathcal{H}_s と独立であるため

$$\mathbb{E}[M_t^l | \mathcal{H}_s] = \mathbb{E}\left[H_t^l - H_s^l\right] - \int_s^t q_l(s, H_s) ds + \mathbb{E}\left[M_s^l \middle| \mathcal{H}_s\right]$$

となる. ポアソン過程の期待値は強度で表せるため

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t^l | \mathcal{H}_s] &= \int_s^t q_l(s, H_s) ds - \int_s^t q_l(s, H_s) ds + \mathbb{E}\left[M_s^l \middle| \mathcal{H}_s\right] \\ &= M_s^l \end{aligned}$$

となり, M_t^i がマルチンゲールであることが示せる.

(ii) (i) と同様に Doob-Mayer の分解定理を用いる. ただし, 参照企業のデフォルトとカウンターパーティーのデフォルトを分けて表現する. つまり, 参照企業のデフォルト過程は $H^1 = H^{\{1\}} + H^{\{12\}}$, カウンターパーティーのデフォルト過程は $H^2 = H^{\{2\}} + H^{\{12\}}$ となる. このデフォルト過程の強度は $(1 - H_s^i)q_i(s)$ で表現できるため, ポアソン過程からその期待値を引いた過程 M_t^i は (i) と同様にマルチンゲールになる. よって,

$$M_t^i = H_t^i - \int_0^t (1 - H_s^i)q_i(s)ds$$

としたとき, 過程 M^i はマルチンゲールである.

(iii) H^1 と H^2 は企業の状態を表しており, その時点における情報のみに依存する. よって, 生成行列 $A_1(t)$ と $A_2(t)$ から得られるマルコフ過程である.

(iv) 推移率から推移確率を導出するために, コルモゴロフの後退方程式を用いる. コルモゴロフの後退方程式とは, $s < t$ において生成行列の要素 $a_{ij}(s)$ と推移確率 $P_{ij}(s, t)$ が満たす次の微分方程式のことである.

$$\frac{\partial}{\partial s} P_{ij}(s, t) = \sum_{k=i}^j a_{ik}(s)P_{kj}(s, t) \quad (\text{A.3})$$

本研究では, 生成行列が 4×4 行列であるため $i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$ となる. また, 生成行列 $A(t)$ の要素を $a_{ij}(t)$ と仮定する. つまり,

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{bmatrix} -l(t) & l_1(t) & l_2(t) & l_3(t) \\ 0 & -q_2(t) & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & -q_1(t) & q_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ 0 & 0 & a_{33}(t) & a_{34}(t) \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と仮定する. 次に, 式 (A.3) から以下のように推移確率を導出する. まず, 微分方程式の右辺を分解し $P_{ij}(s, t)$ を取り出す.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} P_{ij}(s, t) &= \sum_{k=i}^j a_{ik}(s)P_{kj}(s, t) \\ &= a_{ii}(s)P_{ij}(s, t) + \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(s)P_{kj}(s, t) \end{aligned}$$

ここで, $a_{ii}(s)$ は対角要素となるため

$$\begin{aligned} a_{ii}(s) &= - \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(s) \\ &\equiv -a_i(s) \end{aligned}$$

と定義すると,

$$\frac{\partial}{\partial s} P_{ij}(s, t) = -a_i(s)P_{ij}(s, t) + \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(s)P_{kj}(s, t)$$

となる。ここで、 i, j について場合分けをする。

(a) $i > j$

これは、デフォルトした企業が復活することを意味しているため確率 0 となる。

$$P_{ij}(s, t) = 0$$

(b) $i = j$

$$\frac{\partial}{\partial s} P_{ij}(s, t) = -a_i(s)P_{ij}(s, t) + \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(s)P_{kj}(s, t)$$

右辺の第 2 項は、 $k = i + 1$ から $k = j$ までの和となるため $i = j$ では値を持たない。よって、

$$\frac{\partial}{\partial s} P_{ij}(s, t) = -a_i(s)P_{ij}(s, t)$$

この偏微分は、微分に変わり

$$\frac{1}{P_{ij}(s, t)} dP_{ij}(s, t) = -a_i(s) ds$$

となる。ここで、両辺を積分する。

$$\int_s^t \frac{1}{P_{ij}(u, t)} dP_{ij}(u, t) = - \int_s^t a_i(u) du$$

この積分を解くと

$$\log P_{ij}(s, t) - \log P_{ij}(t, t) = - \int_s^t a_i(u) du$$

となる。 $i = j$ においては $P_{ij}(t, t) = 1$ である。よって、 $\log P_{ij}(t, t) = 0$ となる。

$$\log P_{ij}(s, t) = - \int_s^t a_i(u) du$$

ここで、両辺の指数をとると

$$P_{ij}(s, t) = \exp \left\{ - \int_s^t a_i(u) du \right\}$$

となる。

(c) $i < j$

$$\frac{\partial}{\partial s} P_{ij}(s, t) = -a_i(s)P_{ij}(s, t) + \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(s)P_{kj}(s, t)$$

両辺に $e^{\int_s^t a_i(u) du}$ をかける。

$$e^{\int_s^t a_i(u) du} \frac{\partial}{\partial s} P_{ij}(s, t) + e^{\int_s^t a_i(u) du} a_i(s) P_{ij}(s, t) = e^{\int_s^t a_i(u) du} \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(s) P_{kj}(s, t)$$

部分積分の公式より

$$\frac{\partial}{\partial s} e^{\int_s^t a_i(u) du} P_{ij}(s, t) = e^{\int_s^t a_i(u) du} \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(s) P_{kj}(s, t)$$

となる。この偏微分は、微分に変わり

$$de^{\int_s^t a_i(u)du} P_{ij}(s, t) = e^{\int_s^t a_i(u)du} \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(s) P_{kj}(s, t) ds$$

となる。ここで、両辺を積分する。

$$\int_s^t de^{\int_u^t a_i(v)dv} P_{ij}(u, t) = \int_s^t e^{\int_u^t a_i(v)dv} \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(u) P_{kj}(u, t) du$$

この積分を解くと

$$e^{\int_t^t a_i(u)du} P_{ij}(t, t) - e^{\int_s^t a_i(u)du} P_{ij}(s, t) = \int_s^t e^{\int_u^t a_i(v)dv} \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(u) P_{kj}(u, t) du$$

$i < j$ においては、 $P_{ij}(t, t) = 0$ となるため

$$-e^{\int_s^t a_i(u)du} P_{ij}(s, t) = \int_s^t e^{\int_u^t a_i(v)dv} \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(u) P_{kj}(u, t) du$$

となる。

$$\begin{aligned} P_{ij}(s, t) &= -e^{-\int_s^t a_i(u)du} \int_s^t e^{\int_u^t a_i(v)dv} \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(u) P_{kj}(u, t) du \\ &= -\int_s^t e^{-\int_s^u a_i(v)dv} \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(u) P_{kj}(u, t) du \end{aligned}$$

以上より、推移確率 $P_{ij}(s, t)$ は以下のように導出できる。

$$P_{ij}(s, t) = \begin{cases} 0 & i > j, \\ \exp\left\{-\int_s^t a_i(u)du\right\} & i = j, \\ -\int_s^t e^{-\int_s^u a_i(v)dv} \sum_{k=i+1}^j a_{ik}(u) P_{kj}(u, t) du & i < j. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

この式を用いて推移確率を求める。まず、参照企業が時刻 t まで生存している確率は

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t) = e^{-\int_0^t q_1(u)du}$$

となる。これは、生成行列 $A_1(t)$ において式 (A.4) の $i = j$ を用いた。生成行列 $A_2(t)$ において同様に考えると、カウンターパーティーが時刻 t まで生存している確率は

$$\mathbb{P}(\tau_2 > t) = e^{-\int_0^t q_2(u)du}$$

となる。次に、生成行列 $A(t)$ における確率を示す。まず、時刻 t まで 2 社共生存している確率は

$$\mathbb{P}(\tau_1 \wedge \tau_2 > t) = e^{-\int_0^t l(u)du}$$

と表せる. また, 時刻 s まで参照企業が生存かつ時刻 t までカウンターパーティーが生存している確率は

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_1 > s, \tau_2 > t) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{\tau_1 > s\}}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{\tau_2 > t\}}|\mathcal{H}_s\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{\tau_1 > s\}}(1 - H_s^2)\frac{\mathbb{P}(\tau_1 > t)}{\mathbb{P}(\tau_1 > s)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(1 - H_s^1)(1 - H_s^2)e^{-\int_s^t q_2(u)du}\right] \\ &= e^{-\int_0^s l(u)du}e^{-\int_s^t q_2(u)du}\end{aligned}$$

となる. 時刻 s までカウンターパーティーが生存かつ時刻 t まで参照企業が生存している確率も同様に求めると

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t, \tau_2 > s) = e^{-\int_0^s l(u)du}e^{-\int_s^t q_1(u)du}$$

となる. また, dt の間にデフォルトする確率は 推移率 $\times dt$ で定義していたため

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_1 > s, \tau_2 \in dt) &= q_2(t)e^{-\int_0^s l(u)du}e^{-\int_s^t q_2(u)du}dt \\ \mathbb{P}(\tau_1 \in dt, \tau_2 > s) &= q_1(t)e^{-\int_0^s l(u)du}e^{-\int_s^t q_1(u)du}dt \\ \mathbb{P}(\tau_1 > t, \tau_2 \in dt) &= q_2(t)e^{-\int_0^t l(u)du}dt \\ \mathbb{P}(\tau_1 \in dt, \tau_2 > t) &= q_1(t)e^{-\int_0^t l(u)du}dt\end{aligned}$$

と表せる.

(v) デフォルト過程 H_t^i は生存かデフォルトのどちらかを表しているためデフォルトする確率は

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_t^i = 1) &= \mathbb{P}(\tau_i \leq t) \\ &= 1 - e^{-\int_0^t q_i(u)du}\end{aligned}$$

と表せる. ここで, 時刻 t までにデフォルトする確率 $\mathbb{P}(H_t^i = 1)$ を $p_i(t)$ と定義する. このとき, H_t^i の密度関数は

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{d}{dt}p_i(t) \\ &= q_i(t) e^{-\int_0^t q_i(u)du}\end{aligned}$$

となる. ここから, H_t^i の期待値, 分散, 共分散を求め相関係数を導出する. まず, 期待値は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H_t^i] &= \int_0^t \mathbb{I}_{\{\tau_i \leq s\}}q_i(s)e^{-\int_0^s q_i(u)du}ds \\ &= \left[e^{-\int_0^s q_i(u)du}\right]_0^t \\ &= e^{-\int_0^t q_i(u)du}\end{aligned}$$

となる. また, デフォルト過程の 2 乗の期待値は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(H_t^i)^2\right] &= \int_0^t \mathbb{I}_{\{\tau_i \leq s\}}^2 q_i(s)e^{-\int_0^s q_i(u)du}ds \\ &= \left[e^{-\int_0^s q_i(u)du}\right]_0^t \\ &= e^{-\int_0^t q_i(u)du}\end{aligned}$$

となり, $\mathbb{E}[H_t^i]$ と同値になる. よって, 分散は

$$\begin{aligned}\text{Var}[H_t^i] &= \mathbb{E}\left[(H_t^i)^2\right] - \mathbb{E}[H_t^i]^2 \\ &= \left(1 - \mathbb{E}[H_t^i]\right)\mathbb{E}[H_t^i] \\ &= \left(1 - e^{-\int_0^t q_i(u)du}\right)e^{-\int_0^t q_i(u)du}\end{aligned}$$

となる. 次に, 共分散は

$$\begin{aligned}\text{Cov}[H_t^1, H_t^2] &= \text{Cov}[1 - H_t^1, 1 - H_t^2] \\ &= \mathbb{E}[(1 - H_t^1)(1 - H_t^2)] - \mathbb{E}[1 - H_t^1]\mathbb{E}[1 - H_t^2] \\ &= \mathbb{P}(\tau_1 > t, \tau_2 > t) - \mathbb{P}(\tau_1 > t)\mathbb{P}(\tau_2 > t) \\ &= e^{-\int_0^t l(u)du} - e^{-\int_0^t q_1(u)du}e^{-\int_0^t q_2(u)du}\end{aligned}$$

となる. 以上より, 相関係数 $\rho_d(t)$ は

$$\begin{aligned}\rho_d(t) &= \frac{\text{Cov}[H_t^1, H_t^2]}{\sqrt{\text{Var}[H_t^1]\text{Var}[H_t^2]}} \\ &= \frac{e^{-\int_0^t l(u)du} - e^{-\int_0^t q_1(u)du}e^{-\int_0^t q_2(u)du}}{\sqrt{\left(1 - e^{-\int_0^t q_1(u)du}\right)e^{-\int_0^t q_1(u)du}\left(1 - e^{-\int_0^t q_2(u)du}\right)e^{-\int_0^t q_2(u)du}}}\end{aligned}$$

と表せる. ここで, 分母と分子に $e^{\int_0^t q_1(u)du}e^{\int_0^t q_2(u)du}$ をかける.

$$\rho_d(t) = \frac{e^{-\int_0^t l(u)+q_1(u)+q_2(u)du} - 1}{\sqrt{\left(1 - e^{-\int_0^t q_1(u)du}\right)e^{\int_0^t q_1(u)du}\left(1 - e^{-\int_0^t q_2(u)du}\right)e^{\int_0^t q_2(u)du}}}$$

推移率に関する仮定 $q_1(t) = l_1(t) + l_3(t), q_2(t) = l_2(t) + l_3(t)$ より

$$\rho_d(t) = \frac{\exp\left(\int_0^t -l(u) + l_1(u) + l_3(u) + l_2(u) + l_3(u)du\right) - 1}{\sqrt{\left(\exp\left(\int_0^t q_1(s)ds\right) - 1\right)\left(\exp\left(\int_0^t q_2(s)ds\right) - 1\right)}}$$

と表すことができる. この式を整理すると相関係数 $\rho_d(t)$ は

$$\rho_d(t) = \frac{\exp\left(\int_0^t l_3(s)ds\right) - 1}{\sqrt{\left(\exp\left(\int_0^t q_1(s)ds\right) - 1\right)\left(\exp\left(\int_0^t q_2(s)ds\right) - 1\right)}}$$

と導出することができる. □

A.4 Risk-free CDS 価値関数の導出 (定理 5.1 の証明)

証明

Risk-free CDS 価値関数 $v(t)$ は式 (3.3) より

$$\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} v(\tau_2) = \mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1\}} P_{\tau_2}$$

と表せる. フィルトレーション \mathbb{F} における割引キャッシュフローを以下のように定義する. まず, 式 (2.1) よりプレミアム支払いキャッシュフロー $\tilde{S}(t)$ は

$$\tilde{S}(t) = \kappa \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1) ds$$

となる. 次に, 式 (2.2) より参照企業のデフォルトに対する保証額 $\tilde{D}_1(t)$ は

$$\tilde{D}_1(t) = (1 - R_1) \int_t^T \beta_s dH_s^1$$

となる. ここで, 定理 4.1.(ii) を用いて

$$\tilde{D}_1(t) = (1 - R_1) \int_t^T \beta_s dM_s^1 + (1 - R_1) \int_t^T \beta_s q_1(s) (1 - H_s^1) ds$$

と変形する. すると, キャッシュフローの総額 $\tilde{p}_T(t)$ は

$$\beta_t \tilde{p}_T(t) = -\kappa \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1) ds + (1 - R_1) \int_t^T \beta_s dM_s^1 + (1 - R_1) \int_t^T \beta_s q_1(s) (1 - H_s^1) ds \quad (\text{A.5})$$

と表せる. ここで, M^1 はマルチンゲールであり, その積分項もマルチンゲールとなる. よって

$$\mathbb{E}_t[p_T(t)] = \mathbb{E}_t[\tilde{p}_T(t)]$$

が成り立つ. 以上より

$$\beta_t \mathbb{E}_t[p_T(t)] = \mathbb{E}_t \left[-\kappa \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1) ds + (1 - R_1) \int_t^T \beta_s q_1(s) (1 - H_s^1) ds \right] \quad (\text{A.6})$$

と表せる. ここで

$$p(s) = (1 - R_1) q_1(s) - \kappa$$

とおくと

$$\begin{aligned} \beta_t \mathbb{E}_t[p_T(t)] &= \mathbb{E}_t \left[\int_t^T \beta_s (1 - H_s^1) p(s) ds \right] \\ &= \int_t^T \beta_s \mathbb{E}_t[(1 - H_s^1)] p(s) ds \end{aligned}$$

となる. また, $t < s$ のとき定理 4.1.(iii) と定理 3.1.(ii) から

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[(1 - H_s^1)] &= \mathbb{E}_t[(1 - H_s^1) | H_t^1] \\ &= (1 - H_s^1) \frac{\mathbb{P}(\tau_1 > s)}{\mathbb{P}(\tau_1 > t)} \\ &= (1 - H_s^1) e^{-\int_t^s q_1(u) du} \end{aligned}$$

と表せる. よって

$$\beta_t \mathbb{E}_t[p_T(t)] = \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1) e^{-\int_t^s q_1(u) du} p(s) ds$$

となる. キャッシュフローの条件付き期待値は CDS 価値 $P_T(t)$ となるため

$$\beta_t P_T(t) = \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1) e^{-\int_t^s q_1(u) du} p(s) ds$$

となる. また, $P(t, H_t^1) = (1 - e_1)v(t)$ より

$$\beta_t v(t) = \int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s q_1(u) du} p(s) ds$$

と表せる. 最後に両辺に $\frac{1}{\beta_t}$ をかけると

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_t^T \frac{\beta_s}{\beta_t} e^{-\int_t^s q_1(u) du} p(s) ds \\ &= \int_t^T e^{-\int_t^s r(u) + q_1(u) du} p(s) ds \end{aligned}$$

と表せる. 以上より, 価値関数 $v(t)$ を導出できた. 次に $v(t)$ の ODE を求める.

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= -e^{-\int_t^t r(u) + q_1(u) du} p(t) + \int_t^T \{r(u) + q_1(u)\} e^{-\int_t^s r(u) + q_1(u) du} p(s) ds \\ &= \{r(t) + q_1(t)\}v(t) - p(t) \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{dv(t)}{dt} - \{r(t) + q_1(t)\}v(t) + p(t) = 0$$

となる. また, 境界条件は $v(T) = 0$ である. よって, $v(t)$ は次の ODE を満たす.

$$\begin{cases} v(T) = 0 \\ \frac{dv(t)}{dt} - \{r(t) + q_1(t)\}v(t) + p(t) = 0, \quad t \in [0, T) \end{cases}$$

□

A.5 Risky CDS 価値関数の導出 (定理 5.2 の証明)

証明

Risky CDS 価値関数 $v(t)$ は式 (3.1) より

$$u(t) = \frac{\mathbb{E}[\pi_T(t)]}{\mathbb{P}(\tau_1 \wedge \tau_2 > t)}$$

と表せる. また, 定理 4.1.(iv) より分母が求められる. ここで, $H^{\{1\}}, H^{\{2\}}, H^{\{1,2\}}$ に従うように割引キャッシュフローを以下のように書き換える. まず, 式 (2.5) よりプレミアムの支払いキャッシュフロー $\tilde{S}'(t)$ は

$$\tilde{S}'(t) = \kappa \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1)(1 - H_s^2) ds$$

となる. 次に, 式 (2.6) より参照企業のデフォルトに対する保証額 $\tilde{D}'_1(t)$ は

$$\tilde{D}'_1(t) = (1 - R_1) \int_t^T \beta_s (1 - H_{s-}^2) dH_s^{\{1\}}$$

となる. ここで, 定理 4.1.(i) を用いて

$$\tilde{D}'_1(t) = (1 - R_1) \int_t^T \beta_s (1 - H_{s-}^2) dM_s^{\{1\}} + (1 - R_1) \int_t^T \beta_s (1 - H_s^2) q_{\{1\}}(s, H_s) ds$$

と変形する. 以下のキャッシュフローに関しても同様に計算する. 式 (2.7) よりカウンターパーティーのデフォルト精算額 $\tilde{D}'_2(t)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{D}'_2(t) &= \int_t^T \beta_s [R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] (1 - H_{s-}^1) dH_s^{\{2\}} \\ &= \int_t^T \beta_s [R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] (1 - H_{s-}^1) dM_s^{\{2\}} \\ &\quad + \int_t^T \beta_s [R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] (1 - H_s^1) q_{\{2\}}(s, H_s) ds \end{aligned}$$

となる. 最後に (2.8) より同時デフォルトによる回収額 $\tilde{D}'_{12}(t)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{D}'_{12}(t) &= R_2 (1 - R_1) \int_t^T \beta_s dH_s^{\{1,2\}} \\ &= R_2 (1 - R_1) \int_t^T \beta_s dM_s^{\{1,2\}} + R_2 (1 - R_1) \int_t^T \beta_s q_{\{1,2\}}(s, H_s) ds \end{aligned}$$

となる. 以上より割引キャッシュフローの総額 $\tilde{\pi}_T(t)$ は

$$\begin{aligned} \beta_t \tilde{\pi}_T(t) &= -\kappa \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1)(1 - H_s^2) ds \\ &\quad + (1 - R_1) \int_t^T \beta_s (1 - H_{s-}^2) dM_s^{\{1\}} + (1 - R_1) \int_t^T \beta_s (1 - H_s^2) q_{\{1\}}(s, H_s) ds \\ &\quad + \int_t^T \beta_s [R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] (1 - H_{s-}^1) dM_s^{\{2\}} + \int_t^T \beta_s [R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] (1 - H_{s-}^1) q_{\{2\}}(s, H_s) ds \\ &\quad + R_2 (1 - R_1) \int_t^T \beta_s dM_s^{\{1,2\}} + R_2 (1 - R_1) \int_t^T \beta_s q_{\{1,2\}}(s, H_s) ds \end{aligned} \tag{A.7}$$

と表せる. ここで, $M^{\{1\}}, M^{\{2\}}, M^{\{1,2\}}$ はマルチンゲールである. 以上より, 以下の式が成り立つ.

$$\mathbb{E}[\pi_T(t)] = \mathbb{E}[\tilde{\pi}_T(t)]$$

よって

$$\begin{aligned} \beta_t \mathbb{E}[\pi_T(t)] = & \mathbb{E} \left[\kappa \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1)(1 - H_s^2) ds + (1 - R_1) \int_t^T \beta_s (1 - H_s^2) q_{\{1\}}(s, H_s) ds \right. \\ & + \int_t^T \beta_s [R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] (1 - H_{s-}^1) q_{\{2\}}(s, H_s) ds \\ & \left. + R_2 (1 - R_1) \int_t^T \beta_s q_{\{1,2\}}(s, H_s) ds \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

次にこの式の強度 $q_{\{i\}}(s, H_s)$ を推移率を用いて表現する. 式 (4.2) より, $(1 - H_s^2) q_{\{1\}}(s, H_s)$ は

$$\begin{aligned} (1 - H_s^2) q_{\{1\}}(s, H_s) &= (1 - H_s^2)(1 - H_s^1) \left((1 - H_s^2) l_1(s) + H_s^2 q_1(s) \right) \\ &= (1 - H_s^1)(1 - H_s^2)^2 l_1(s) + (1 - H_s^1)(1 - H_s^2) H_s^2 q_1(s) \end{aligned}$$

と表せる. H_s^i はインディケータ関数であるため, 第1項の $(1 - H_s^2)^2$ は $(1 - H_s^2)$ と同値であり, 第2項の $(1 - H_s^2) H_s^2$ は0になる. よって

$$(1 - H_s^2) q_{\{1\}}(s, H_s) = (1 - H_s^1)(1 - H_s^2) l_1(s)$$

となる. 同様に (4.3) より $(1 - H_s^1) q_{\{2\}}(s, H_s)$ を求めると

$$(1 - H_s^1) q_{\{2\}}(s, H_s) = (1 - H_s^1)(1 - H_s^2) l_2(s)$$

となる. これらを式 (A.8) に代入すると

$$\begin{aligned} \beta_t \mathbb{E}[\pi_T(t)] = & \mathbb{E} \left[\pi_T(t) \kappa \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1)(1 - H_s^2) ds + (1 - R_1) \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1)(1 - H_s^2)^2 l_1(s) ds \right. \\ & + \int_t^T \beta_s [R_2 \tilde{\chi}_{(s)}^+ - \tilde{\chi}_{(s)}^-] (1 - H_s^1)^2 (1 - H_s^2) l_2(s) ds \\ & \left. + R_2 (1 - R_1) \int_t^T \beta_s (1 - H_s^1)(1 - H_s^2) l_3(s) ds \right] \end{aligned}$$

となる. ここで, この式を整理すると

$$\beta_t \mathbb{E}[\pi_T(t)] = \mathbb{E} \left[\int_t^T \beta_s (1 - H_s^1)(1 - H_s^2) \left[(1 - R_1) \{l_1(s) + R_2 l_3(s)\} + l_2(s) \{R_2 \tilde{\chi}(s)^+ - \tilde{\chi}(s)^-\} - \kappa \right] ds \right]$$

となる. ここで

$$\pi(s) = (1 - R_1) [l_1(s) + R_2 l_3(s)] + l_2(s) [R_2 \tilde{\chi}(s)^+ - \tilde{\chi}(s)^-] - \kappa$$

とおくと

$$\begin{aligned} \beta_t \mathbb{E}[\pi_T(t)] &= \int_t^T \beta_s \mathbb{E} \left[(1 - H_s^1)(1 - H_s^2) \right] \pi(s) ds \\ &= \int_t^T \beta_s \mathbb{P}(\tau_1 \wedge \tau_2 > s) \pi(s) ds \end{aligned}$$

となる. ここで定理 4.1 (iv) を用いて

$$\beta_t \mathbb{E}[\pi_T(t)] = \int_t^T \beta_s e^{-\int_0^s l(u) du} \pi(s) ds$$

と表せる. また, $u(t) = \frac{\mathbb{E}[\pi_T(t)]}{\mathbb{P}(\tau_1 \wedge \tau_2 > t)}$ より

$$\beta_t u(t) = \int_t^T \beta_s e^{-\int_t^s l(u) du} \pi(s) ds$$

と表せる. 最後に両辺に $\frac{1}{\beta_t}$ をかけると

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_t^T \frac{\beta_s}{\beta_t} e^{-\int_t^s l(u) du} \pi(s) ds \\ &= \int_t^T e^{-\int_t^s r(u) + l(u) du} \pi(s) ds \end{aligned}$$

となり Risky CDS 価値関数 $u(t)$ を導出できた. 次に $u(t)$ の ODE を求める.

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= -e^{-\int_t^t r(u) + l(u) du} \pi(t) + \int_t^T \{r(u) + l(u)\} e^{-\int_t^s r(u) + l(u) du} \pi(s) ds \\ &= \{r(t) + l(t)\} u(t) - \pi(t) \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{du(t)}{dt} - \{r(t) + l(t)\} u(t) + \pi(t) = 0$$

となる. また, 境界条件は $u(T) = 0$ である. よって, $u(t)$ は次の ODE を満たす.

$$\begin{cases} u(T) = 0 \\ \frac{du(t)}{dt} - \{r(t) + l(t)\} u(t) + \pi(t) = 0, \quad t \in [0, T) \end{cases}$$

□

A.6 EPE と CVA の導出 (定理 5.3 の証明)

証明

はじめにカウンターパーティーのデフォルト時刻に関して次のように $\Phi(\tau_2)$ と $\Psi(\tau_2)$ を定義する.

$$\begin{aligned}\Phi(\tau_2) &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{\tau_1=\tau_2 \leq T\}} | \tau_2] \\ \Psi(\tau_2) &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T\}} | \tau_2]\end{aligned}$$

$\Phi(\tau_2)$ は同時デフォルトが起こる条件付き期待値, $\Psi(\tau_2)$ はカウンターパーティーのみがデフォルトする条件付き期待値を表している. 以上より EPE(t) は, $\Phi(\tau_2)$ と $\Psi(\tau_2)$ を用いて

$$EPE(t) = (1 - R_2)(1 - R_1)\Phi(t) + \left\{ v(t) - (R_2\tilde{\chi}_t^+ - \tilde{\chi}_t^-) \right\} \Psi(t)$$

と表される. 次に, $\Phi(\tau_2)$ と $\Psi(\tau_2)$ を求める.

$\Phi(\tau_2)$ と $\Psi(\tau_2)$ は, すべてのボレル関数 f に対して次の性質を有す.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Phi(\tau_2)f(\tau_2)] &= \mathbb{E}[f(\tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_1=\tau_2 \leq T\}}] \\ \mathbb{E}[\Psi(\tau_2)f(\tau_2)] &= \mathbb{E}[f(\tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T\}}]\end{aligned}\tag{A.9}$$

これは, タワールールを用いて示せる. $f(\tau_2) = \mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq t\}}, t \in (0, T]$ とすると, 式 (A.9) の左辺は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Phi(\tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq t\}}] &= \int_0^t \Phi(s)q_2(s)e^{-\int_0^s q_2(u)du} ds \\ \mathbb{E}[\Psi(\tau_2)\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq t\}}] &= \int_0^t \Psi(s)q_2(s)e^{-\int_0^s q_2(u)du} ds\end{aligned}\tag{A.10}$$

と表せる. これは $\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq t\}}$ の密度関数が $q_2(s)e^{-\int_0^s q_2(u)du}$ となるためである. この密度関数に関しては定理 4.1.(v) で示している.

次に, 式 (A.9) の右辺はそれぞれ, 定理 4.1 の (i) と (iv) より以下ようになる. まず, 同時デフォルトに関しては

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq t\}}\mathbb{I}_{\{\tau_1=\tau_2 \leq T\}}] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t dH_s^{\{1,2\}}\right] \\ &= \int_0^t \mathbb{E}\left[(1 - H_s^1)(1 - H_s^2)\right] l_3(s) ds \\ &= \int_0^t e^{-\int_0^s l(u)du} l_3(s) ds\end{aligned}\tag{A.11}$$

と表され, カウンターパーティーのみのデフォルトに関しては

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{\tau_2 \leq t\}}\mathbb{I}_{\{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T\}}] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{I}_{\{s \leq \tau_1 \wedge T\}} dH_s^{\{2\}}\right] \\ &= \int_0^t \mathbb{E}\left[(1 - H_s^1)(1 - H_s^2)\right] l_2(s) ds \\ &= \int_0^t e^{-\int_0^s l(u)du} l_2(s) ds\end{aligned}\tag{A.12}$$

と表される. よって, 式 (A.10), (A.11), (A.12) から次の式が導きだせる.

$$\begin{aligned}\int_0^t \Phi(s)q_2(s)e^{-\int_0^s q_2(u)du} ds &= \int_0^t e^{-\int_0^s l(u)du} l_3(s) ds \\ \int_0^t \Psi(s)q_2(s)e^{-\int_0^s q_2(u)du} ds &= \int_0^t e^{-\int_0^s l(u)du} l_2(s) ds\end{aligned}$$

ここで, t に関して微分すると

$$\begin{aligned}\Phi(t)q_2(t)e^{-\int_0^t q_2(s)ds} &= e^{-\int_0^t l(s)ds}l_3(t) \\ \Psi(t)q_2(t)e^{-\int_0^t q_2(s)ds} &= e^{-\int_0^t l(s)ds}l_2(t)\end{aligned}$$

となる. この式から $\Phi(t)$ と $\Psi(t)$ が求まる.

まず, $\Phi(t)$ は

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \frac{e^{-\int_0^t l(s)ds}l_3(t)}{q_2(t)}e^{\int_0^t q_2(s)ds} \\ &= \frac{e^{-\int_0^t l(s)-l_2(s)-l_3(s)ds}l_3(t)}{q_2(t)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^t l_1(s)ds}l_3(t)}{q_2(t)}\end{aligned}$$

となる. 次に $\Psi(t)$ は

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \frac{e^{-\int_0^t l(s)ds}l_2(t)}{q_2(t)}e^{\int_0^t q_2(s)ds} \\ &= \frac{e^{-\int_0^t l(s)-l_2(s)-l_3(s)ds}l_2(t)}{q_2(t)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^t l_1(s)ds}l_2(t)}{q_2(t)}\end{aligned}$$

となる. 以上より, $EPE(t)$ は

$$EPE(t) = \left[(1-R_2)(1-R_1)\frac{l_3(t)}{q_2(t)} + \left\{ v(t) - (R_2\tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^-) \right\} \frac{l_2(t)}{q_2(t)} \right] e^{-\int_0^t l_1(u)du}$$

となる. 式 (3.5) と定理 4.1(iv) より

$$\begin{aligned}CVA(t) &= \int_t^T \beta_s EPE(s) \frac{P(\tau_2 \in ds)}{P(t < \tau_1 \wedge \tau_2)} ds \\ &= \int_t^T \beta_s EPE(s) e^{\int_0^s l(u)du} e^{-\int_0^s q_2(u)du} q_2(s) ds\end{aligned}$$

となる. 次に $EPE(s)$ を代入したときに整理しやすいように変換する.

$$\begin{aligned}CVA(t) &= \int_t^T \beta_s EPE(s) e^{\int_0^s l(u)du} e^{\int_s^t l(u)du} e^{-\int_0^s q_2(u)du} q_2(s) ds \\ &= \int_t^T \beta_s EPE(s) e^{\int_0^s l_1(u)du} e^{\int_s^t l(u)du} q_2(s) ds\end{aligned}$$

ここで, 式 (5.7) を代入すると

$$CVA(t) = \int_t^T \beta_s \left[(1-R_2)(1-R_1)l_3(t) + \left\{ v(t) - (R_2\tilde{\chi}_{(t)}^+ - \tilde{\chi}_{(t)}^-) \right\} l_2(t) \right] e^{-\int_t^s l(u)du} ds$$

となる. また, $\chi_{(\tau_2)} = P(\tau_2)$, $\tilde{\chi} = v$ となる場合において $EPE(t)$ は

$$\begin{aligned}EPE(t) &= EPE^0(t) \\ &:= \left[(1-R_2)(1-R_1)\frac{l_3(t)}{q_2(t)} + \left\{ v(t) - (R_2\tilde{v}_{(t)}^+ - \tilde{v}_{(t)}^-) \right\} \frac{l_2(t)}{q_2(t)} \right] e^{-\int_0^t l_1(u)du} \\ &= (1-R_2) \left[(1-R_1)\frac{l_3(t)}{q_2(t)} + v_{(t)}^+ \frac{l_2(t)}{q_2(t)} \right] e^{-\int_0^t l_1(u)du}\end{aligned}$$

と定義される. また, $CVA(t)$ は

$$\begin{aligned} CVA(t) &= CVA^0(t) \\ &:= \int_t^T (1 - R_2)\beta_s \left[(1 - R_1)l_3(s) + v^+(s)l_2(s) \right] e^{-\int_t^s l(u)du} ds \end{aligned}$$

と定義される.

□

参考文献

- [1] S.Crépey, M.Jeanblanc, B.Zargari. Counterparty Risk on a CDS in a Markov Chain Copula Model with Joint Defaults. *University of Evry, 2009.*
- [2] MARK H.A.DAVIS. Contagion Models in Credit Risk. *Imperial College London, 2010.*
- [3] MARK H.A.DAVIS. Counterparty risk via Bessel bridge. *Imperial College London, 2010.*
- [4] Giovanni Cesari, John Aquilina, Niels Charpillon, Zlatko Filipović, Gordon Lee, Ion Manda. Modelling, Pricing, and Hedging Counterparty Credit Exposure. *Springer, 2010.*
- [5] Tomasz R.Bielecki, Marek Rutkowski. Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging. *Springer, 2001.*
- [6] 浦谷 規. 無最低理論とマルチンゲール. 朝倉書店, 2005.
- [7] S.E. シュリーブ. ファイナンスのための確率解析Ⅱ. シュプリンガー・ジャパン, 2008.
- [8] Juhn Hull. ファイナンシャルエンジニアリング：デリバティブ取引とリスク管理の総体系, 2008.
- [9] 東京金融取引所. J-CDS. <http://www.j-cds.com/jp/>
- [10] 渡辺 信三. 確率微分方程式. 産業図書, 1991.

謝辞

本論文の作成にあたり、終始懇切丁寧なご指導を頂いた浦谷規教授に感謝の意を表します。また、素晴らしい研究環境を与えて下さったことにも感謝いたします。そして、研究にあたり多くの助言を頂いた安田和弘助教授に感謝いたします。また、多くの助力を頂いた先輩方にも感謝いたします。さらに、多くの時間を共有し、切磋琢磨しながら勉学に励んだ研究室の仲間にも感謝いたします。最後に、学生生活を支えてくれた家族にも感謝いたします。

2011年2月

中川 雅人