

# 自己組織型状態空間モデルを用いたネットワークトラヒックの成分分解

天野, 康浩 / AMANO, Yasuhiro

---

(発行年 / Year)

2010-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2010-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

P377.5  
M34  
2009-3

2009年度 修士論文

自己組織型状態空間モデルを用いた  
ネットワークトラヒックの成分分解

指導教授 八名 和夫 教授

法政大学大学院 工学研究科  
情報電子工学専攻 修士課程

アマノ ヤスヒロ

08R4103 天野 康浩

# Abstract

This paper proposes a statistical method for the decomposition of the short term network traffic data. The method introduces a self-organizing state space modeling of the time series. The proposed method has been compared with conventional Kalman filter or the particle filter approach. The new method is capable of describing the characteristic nature of the network traffic data of the mean dependence of fluctuation variance. The proposed method showed better squared error characteristics compared to conventional models. The method will open a new prospect to tie the state space signal modeling with microscopic constructive modeling of the network traffic.

# 目次

|                      |    |
|----------------------|----|
| 序論                   | 4  |
| 第1章 状態推定法            | 5  |
| 1.1 状態空間モデル          | 5  |
| 1.2 カルマンフィルタ         | 7  |
| 1.2.1 平滑化            | 8  |
| 1.3 粒子フィルタ           | 10 |
| 1.3.1 リサンプリング法について   | 11 |
| 1.3.2 粒子フィルタのアルゴリズム  | 11 |
| 1.3.3 平滑化            | 12 |
| 1.3.4 分布の非ガウス化       | 13 |
| 第2章 超パラメータの時間変化      | 14 |
| 2.1 自己組織型状態空間モデル     | 14 |
| 第3章 成分構成モデル          | 16 |
| 3.1 ネットワークトラヒックの成分分解 | 16 |
| 3.1.1 トренд成分        | 16 |
| 3.1.2 残差成分           | 17 |
| 第4章 パラメータ推定          | 18 |
| 4.1 時系列モデルの尤度計算      | 18 |
| 4.2 超パラメータ探索法        | 21 |
| 4.2.1 グリッドサーチ法       | 21 |
| 4.2.2 ランダムサーチ法       | 22 |
| 第5章 ネットワークトラヒックの成分分解 | 23 |
| 5.1 対象データ            | 23 |
| 5.1.1 平均二乗誤差         | 23 |
| 5.2 推定結果             | 24 |

|                     |    |
|---------------------|----|
| 5.3 考察 . . . . .    | 49 |
| 結論                  | 50 |
| 謝辞                  | 51 |
| 付 録 A カルマンフィルタの導出   | 53 |
| A.1 1期先予測 . . . . . | 53 |
| A.2 フィルタ . . . . .  | 53 |
| A.3 平滑化 . . . . .   | 55 |
| 付 録 B 粒子フィルタの導出     | 57 |
| B.1 1期先予測 . . . . . | 57 |
| B.2 フィルタ . . . . .  | 58 |

# 序論

近年ネットワークの広帯域化やインターネットを介した大容量通信サービスの発展にともないネットワークは社会インフラとして定着し、利用人口およびトラフィック量は増加の一途をたどっている。

時々刻々と変化するネットワークトラフィックの下で安定した通信を維持するには、観測されたネットワークトラフィックから需要予測をし、ネットワークの効率的な設計と運用をすることが必要不可欠である。

ネットワークトラフィックの統計的モデル化に関する研究は長期相関性など時系列としてのマクロな統計的性質を調べる現象的なモデリングと、要素トラフィックの重畳としてとらえる構成的モデリングに大別される。

本論文では現象的なモデリングに着目し、状態空間モデルを用いてネットワークトラフィックを表現することで成分分解を試みる。この成分を分析し、ネットワークトラフィックに潜在する統計的性質を明らかにする。

対象データには法政大学小金井校舎の WAN のトラフィックデータを用い、短期ネットワークに含まれる複雑な変動成分を成分分解する手法に自己組織型状態空間モデルの導入を提案する。[1]-[4] これにより従来の手法からの推定精度の向上を試みる。その比較手法としてカルマンフィルタ、および粒子フィルタを用い、3通りの推定法で推定する。[5]-[7]

また、各成分を特徴づける超パラメータの推定は最尤推定法でおこなう。それぞれの推定結果の適合度は対象データとの平均二乗誤差により比較し、最適な推定法を選択する。

本論文は5章から構成されており、1章では状態空間モデルの概念とカルマンフィルタ、および粒子フィルタのアルゴリズム、2章では自己組織型状態空間モデルのアルゴリズム、3章では状態空間モデルに適用させる成分構成モデル、4章では最尤推定法と超パラメータ探索法、5章では3つの推定法の性能を比較するシミュレーション、ならびに解析対象である WAN のトラフィックデータの成分分解について述べる。

# 第1章 状態推定法

本章では、時系列解析で用いられるさまざまなモデルを統一的に取り扱う状態空間モデルと、状態推定法の1つであるカルマンフィルタ、および粒子フィルタのアルゴリズムについて述べる。

## 1.1 状態空間モデル

観測された  $m$  次元の時系列  $y_n$  を表現する次のようなモデルを状態空間モデル (state space model) と呼ぶ。

$$x_n = f(x_{n-1}, v_n) \quad (1.1)$$

$$y_n = h(x_n, w_n) \quad (1.2)$$

式 1.1 をシステム方程式と呼び、状態  $x_n$  は直接観測できない  $k$  次元のベクトルである。  $v_n$  をシステムノイズと呼び、任意の確率密度関数  $q(v; Q)$  の分布に独立にしたがう系列である。また、  $v_n$  の次元は  $m$  とし、  $Q$  は密度関数  $q$  を規定するパラメータである。式 1.2 を観測方程式と呼び、状態  $x_n$  によって時系列  $y_n$  を表現したものである。  $w_n$  を観測ノイズと呼び、任意の確率密度関数  $r(w; R)$  の分布にしたがう系列である。また、  $w_n$  の次元は  $m$  である。  $f_n, h_n$  はそれぞれ時点  $n$  における状態遷移関数ならびに状態から観測値を抽出する関数である。これらの関係をブロック図として図 1.1 に示す。

時系列解析で用いられるモデルの多くはこの非線形非ガウス型の状態空間モデルの形で表現し、統一的に取り扱うことができる。このとき状態空間モデルは、システム方程式を信号の発生メカニズムを表す式、観測方程式を信号を実際に観測するときにノイズが加わる様子を表していると解釈できる。

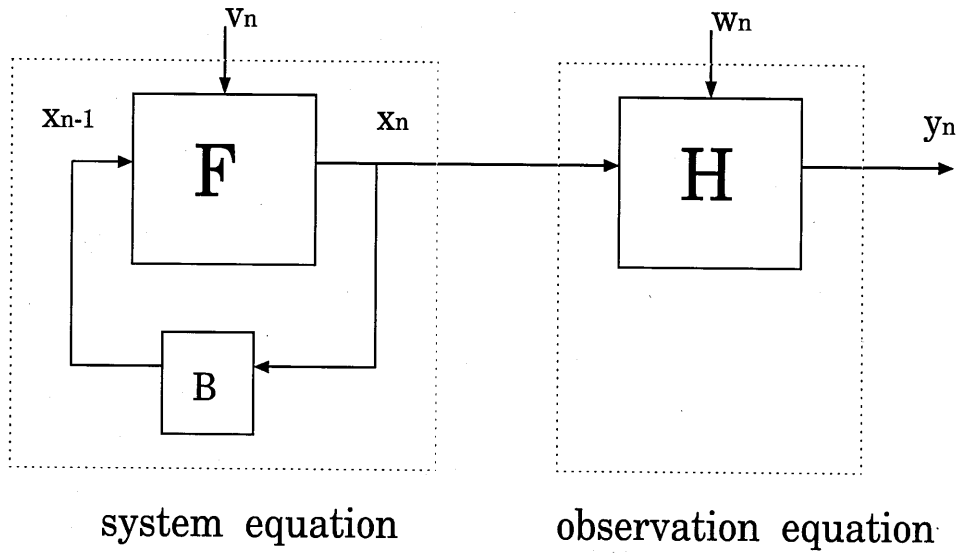


図 1.1: 状態空間モデルのブロック図

一般的な状態空間モデルからシステム方程式および観測方程式を線形演算に限定したものを線形状態空間モデルと呼ぶ。

$$x_n = Fx_{n-1} + Gv_n \quad (1.3)$$

$$y_n = Hx_n + w_n \quad (1.4)$$

式 1.3, および式 1.4 における  $F, G, H$  は, それぞれ  $k \times k, k \times m, l \times k$  の行列である。線形状態空間モデルのノイズ分布が正規分布にしたがう場合は線形ガウス型状態空間モデルと呼ばれる。このときシステムノイズ  $v_n$  は  $m$  次元の正規分布  $N(0, Q_n)$  に, 観測ノイズ  $w_n$  は正規分布  $N(0, R_n)$  にしたがう。また,  $Q_n, R_n$  はそれぞれの正規分布の分散共分散行列である。



## 1.2 カルマンフィルタ

観測値  $Y_n = y_1, y_2, \dots, y_n$  に基づいて時刻  $j$  における状態  $x_n$  の推定をおこなう場合を考える.  $j < n$  の場合は予測 (prediction) と呼ばれ, 観測区間より先の将来の状態を推定する.  $j = n$  の場合はフィルタ (filtering) と呼ばれ, 観測区間の最終時点すなわち現在の状態を推定する.  $j > n$  の場合は平滑化 (smoothing) と呼ばれ, 現在までの観測値に基づいて過去の状態を推定する.

これらの状態を推定するには, 観測値  $Y_n$  が与えられた下での状態  $x_n$  の条件付き確率の分布  $p(x_n|Y_n)$  を求めればよい. ところが, 式 1.3, 1.4 の状態空間モデルは線形モデルであり, しかも  $v_n, w_n$  および  $x_0$  がすべて正規分布にしたがうので, これらの条件付き分布は正規分布となる. したがって, 状態空間モデルの状態推定では条件付き分布を規定する平均ベクトルと分散共分散行列だけを求めればよい. 一般に観測値  $y_1, y_2, \dots, y_n$  が与えられた下での状態  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の条件付き同時分布を求めるには莫大な計算量を要する. ところが状態空間モデルに対しては, 逐次的な計算アルゴリズムによって状態  $x_n$  の条件付き周辺分布を極めて効率的に計算できる. これがカルマンフィルタ (Kalman filter) と呼ばれるアルゴリズムである. ここでは状態  $x_n$  の条件付き平均と分散共分散行列を

$$\begin{aligned} x_{n|j} &\equiv E(x_n|Y_j) \\ V_{n|j} &\equiv E(x_n - x_{n|j})(x_n - x_{n|j})^t \end{aligned} \quad (1.5)$$

と表す. ただし, カルマンフィルタで取り扱うのは  $j = n-1$  の場合 (1 期先予測) と  $j = n$  の場合 (フィルタ) である. 式 1.6, 1.7 で示すように, 1 期先予測とフィルタを交互に繰り返すことにより, これらを順次求めることができる.

### 1 期先予測

$$\begin{aligned} x_{n|n-1} &= Fx_{n-1|n-1} \\ V_{n|n-1} &= FV_{n-1|n-1}F^T + GQG^T \end{aligned} \quad (1.6)$$

1 期先予測のアルゴリズムでは,  $x_n$  の予測値 (平均) ベクトル  $x_{n|n-1}$  は  $x_{n-1}$  のフィルタ  $x_{n-1|n-1}$  に推移行列  $F_n$  をかければよい. また, その分散共分散行列  $V_{n|n-1}$  は 2 項からなり, 第 1 項は  $F_n$  による変換の影響, 第 2 項はシステムノイズ  $v_n$  の影響を表す.

## フィルタ

$$\begin{aligned} K_n &= V_{n|n-1}H^T(HV_{n|n-1}H^T + R)^{-1} \\ x_{n|n} &= x_{n|n-1} + K_n(y_n - Hx_{n|n-1}) \\ V_{n|n} &= (I - K_nH)V_{n|n-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

フィルタリングのアルゴリズムでは、まずカルマンゲインと呼ばれる  $K_n$  が求められる。また、 $y_n - Hx_{n|n-1}$  は  $y_n$  の予測誤差、 $HV_{n|n-1}H^T + R_n$  はその分散共分散行列である。このとき、 $x_n$  のフィルタの平均ベクトルは予測ベクトル  $x_{n|n-1}$  と予測誤差にカルマンゲインをかけたものの和として求められる。また、

$$x_{n|n} = K_n y_n + (I - K_n H)x_{n|n-1} \quad (1.8)$$

とも表せることから、 $x_{n|n}$  は新しい観測値  $y_n$  と予測ベクトル  $x_{n|n-1}$  の加重和となっていることがわかる。 $V_{n|n}$  は

$$V_{n|n} = V_{n|n-1} - K_n H V_{n|n-1} \quad (1.9)$$

と表せるが、右辺第2項は観測値  $y_n$  からの情報によって  $x_n$  の状態推定の精度が改善された部分を表している。

### 1.2.1 平滑化

平滑化の場合は時系列  $Y_N = y_1, y_2, \dots, y_N$  が与えられたとき途中の状態  $x_n$  を推定するならば、平滑化に関してもカルマンフィルタと同様に、固定区間平滑化と呼ばれるアルゴリズムがある。フィルタが時刻  $n$  までの観測値だけを用いて  $x_n$  を推定しているのに対し、平滑化のアルゴリズムは得られているすべての観測値を用いて推定をおこなう。したがって、平滑化をおこなえば一般にフィルタよりも精度のよい状態推定ができる。

## 平滑化

$$\begin{aligned} A_n &= V_{n|n}F^TV_{n+1|n}^{-1} \\ x_{n|N} &= x_{n|n} + A_n(x_{n+1|N} - x_{n+1|n}) \\ V_{n|N} &= V_{n|n} + A_n(V_{n+1|N} - V_{n+1|n})A_n^T \end{aligned} \quad (1.10)$$

平滑化のアルゴリズムではカルマンフィルタの結果  $x_{n|n-1}$ ,  $x_{n|N}$ ,  $V_{n|n-1}$ ,  $V_{n|n}$  が計算に用いられる。したがって、平滑化をおこなうためには、まずカル

マンフィルタによって  $x_{n|n-1}, x_{n|N}, V_{n|n-1}, V_{n|N} (n = 1, 2, \dots, N)$  を求めたあと、式 1.10 の平滑化アルゴリズムで  $x_{N-1|N}, V_{N-1|N}$  から順に時間的に逆方向に  $x_{1|N}, V_{1|N}$  まで求めればよい。なお、平滑化アルゴリズムを実行するためには初期値  $x_{N|N}, V_{N|N}$  が必要であるが、これらもカルマンフィルタによって求められる。

以上の方法で求めた状態  $x_n$  の予測を用いて、時系列の予測が実現できる。すなわち、状態  $x_n$  と時系列  $y_n$  の関係が式 1.4 によって与えられているため、 $Y_n$  が与えられたときの  $y_{n+j}$  の平均と分散共分散行列を  $y_{n+j|n} \equiv E(y_{n+j}|Y_n), d_{n+j|n} \equiv Cov(y_{n+j}|Y_n)$  と表すと、

$$\begin{aligned} Y_{n+j|n} &= E(H_{n+j}x_{n+j} + w_{n+j}|Y_n) \\ &= H_{n+j}x_{n+j|n} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} d_{n+j|n} &= Cov(H_{n+j}x_{n+j} + w_{n+j}|Y_n) \\ &= H_{n+j}Cov(x_{n+j}|Y_n)H_{n+j}^t + H_{n+j}Cov(x_{n+j}, w_{n+j}|Y_n) \\ &\quad + Cov(w_{n+j}, x_{n+j}|Y_n)H_{n+j}^t + Cov(w_{n+j}|Y_n) \\ &= H_{n+j}V_{n+j|n}H_{n+j}^t + R_{n+j} \end{aligned} \quad (1.12)$$

が得られる。このように、時系列の観測値  $Y_n$  に基づく  $Y_{n+j}$  の予測分布は平均  $y_{n+j|n}$ 、分散共分散行列  $d_{n+j|n}$  の正規分布となり、それらは式 1.11, 1.12 により簡単に求められる。このとき、 $y_{n+j}$  の予測値は  $y_{n+j|n}$ 、また、その標準誤差は  $(d_{n+j|n})^{\frac{1}{2}}$  で与えられる。

### 1.3 粒子フィルタ

粒子フィルタは分布を多数の独立な実現値 (粒子) で表現することで時系列の状態を推定する. ここで, カルマンフィルタと同様に観測値  $Y_n = y_1, y_2, \dots, y_n$  に基づいて時刻  $j$  における状態  $x_n$  の推定をおこなう場合を考える.

予測分布に従う粒子  $\{p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}\}$  は 1 期前のフィルタの実現値である  $\{f_{n-1}^{(1)}, \dots, f_{n-1}^{(m)}\}$  から生成でき, フィルタの実現値  $\{f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(m)}\}$  は予測分布の実現値である  $\{p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}\}$  のリサンプリングで生成することができる.

#### 1 期先予測

予測のステップでは, 1 期前の状態  $x_{n-1}$  の条件つき分布  $p(x_{n-1}|Y_{n-1})$  の実現値とみなせる  $m$  個の粒子  $\{f_{n-1}^{(1)}, \dots, f_{n-1}^{(m)}\}$  およびシステムノイズ  $v_n$  の独立な実現値とみなせる粒子  $\{v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(m)}\}$  が与えられているものとする. すなわち,  $j = 1, \dots, m$  について

$$f_{n-1}^{(j)} \sim p(x_{n-1}|Y_{n-1}), \quad v_n^{(j)} \sim q(v) \quad (1.13)$$

が成り立つものとする. このとき,

$$p_n^{(j)} = F(f_{n-1}^{(j)}, v_n^{(j)}) \quad (1.14)$$

によって定義された  $p_n^{(j)}$  は,  $x_n$  の 1 期先予測分布から生成された粒子とみなすことができる.

#### フィルタ

次にフィルタのステップでは, まず観測値  $y_n$  に基づく粒子  $p_n^{(j)}$  の尤度 (あるいはベイズ係数)  $\alpha_n^{(j)}$  を計算する. すなわち,  $j = 1, \dots, m$  について

$$\alpha_n^{(j)} = p(y_n | p_n^{(j)}) r(G(y_n, p_n^{(j)})) \left| \frac{\partial G}{\partial y_n} \right| \quad (1.15)$$

とする. ただし,  $G$  は関数  $H$  の逆関数,  $r$  は観測ノイズ  $w$  の密度関数である.  $\alpha_n^{(j)}$  は, 粒子  $p_n^{(j)}$  の重要度を表す, 重み関数と考えることができる.

次に,  $p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}$  を尤度  $\alpha_n^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(m)}$  に比例した確率でリサンプリングを行うことにより  $m$  個の粒子  $f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(m)}$  を求める. すなわち, 新しい粒子  $f_n^{(j)}, (j = 1, \dots, m)$  を

$$f_n^{(j)} = \begin{cases} p_n^{(1)}, & \text{確率 } \alpha_n^{(1)} / (\alpha_n^{(1)} + \dots + \alpha_n^{(m)}) \\ \vdots \\ p_n^{(m)}, & \text{確率 } \alpha_n^{(m)} / (\alpha_n^{(1)} + \dots + \alpha_n^{(m)}) \end{cases} \quad (1.16)$$

の復元抽出により求める。このとき  $\{f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(m)}\}$  はフィルタ分布  $p(x_n | Y_n)$  からの実現値とみなすことができる。

### 1.3.1 リサンプリング法について

フィルタリングのステップで必要となるリサンプリングの方法について検討する。ランダムサンプリングに基づく基本的なアルゴリズムは以下のようなになる。  $j = 1, \dots, m$  について、以下の1～3を繰り返す。

1. 固定した  $\alpha \in [0, 1)$  について、乱数  $u_n^{(j)} = \frac{j - \alpha}{m}$  を生成する。
2.  $\frac{1}{C} \sum_{l=1}^{i-1} \alpha_n^{(l)} < u_n^{(j)} \leq \frac{1}{C} \sum_{l=1}^i \alpha_n^{(l)}$  を満たす  $i$  を探す。ただし  $C = \sum_{l=1}^m \alpha_n^{(l)}$
3. フィルタの粒子を  $f_n^{(j)} = p_n^{(i)}$  により求める。

### 1.3.2 粒子フィルタのアルゴリズム

これまで説明してきた粒子フィルタのアルゴリズムの一連の流れを概略図に示し、説明する。

1. 時刻  $n - 1$  の各フィルタ粒子  $f_{n-1|n-1}$  を式 1.12 に当てはめ、現時点での予測粒子  $p_{n|n-1}$  を生成する。
2. 得られた予測粒子  $p_{n|n-1}$  の時刻  $n$  のデータへの適合度、つまり各粒子の尤度を式 (1.13) から求め評価する。
3.  $\{p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}\}$  から  $\{\alpha_n^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(m)}\}$  に比例する確率で  $m$  回のリサンプリングを行い、 $\{f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(m)}\}$  を生成する。つまり求めた尤度に比例する確率でリサンプリングを行い、適合度の高い粒子を増やし、低い粒子を消滅させ精度を上げる。

この操作を繰り返すのが粒子フィルタである。

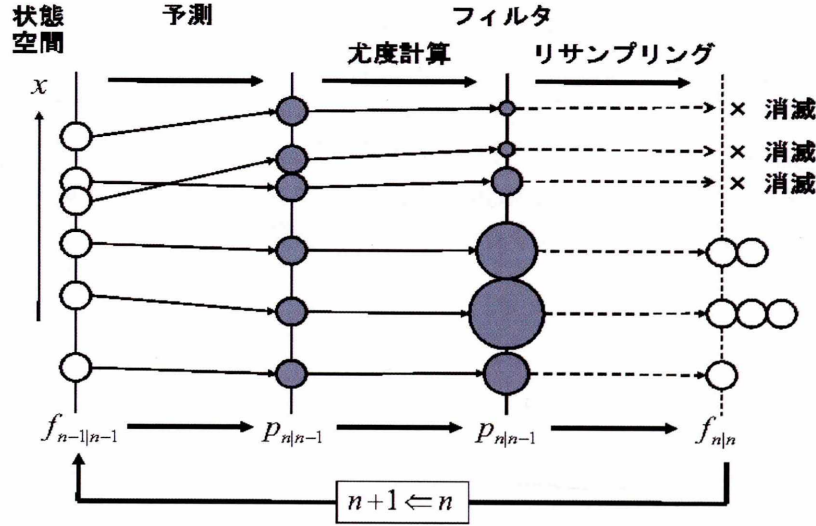


図 1.2: 粒子フィルタアルゴリズムの概略図

### 1.3.3 平滑化

#### 平滑化

粒子フィルタでは過去の粒子を保存することにより, 平滑化の場合に拡張することができる. 以下では,  $(s_{1|n}^{(j)}, \dots, s_{n|n}^{(j)})^T$  は同時分布  $p(x_1, \dots, x_n | Y_n)$  の  $j$  番目の実現値を示すものとする. このとき平滑化のためには, 粒子フィルタのアルゴリズムの 3 番目の項目を以下のように変更するだけでよい.

3''.  $j = 1, \dots, m$  について  $(s_{n-L|n}^{(j)}, \dots, s_{n-1|n-1}^{(j)}, p_n^{(j)})$  のリサンプリングにより  $(s_{n-L|n}^{(j)}, \dots, s_{n-1|n}^{(j)}, s_{n|n}^{(j)})$  を生成する.

ただし,  $f_n^{(j)} = s_{n|n}^{(j)}$  で  $L$  は固定した値とする.  $L$  は大きすぎると粒子が一点に集中してしまうため, あまり大きくせず通常は 30 程度以下にする. 本論文では,  $L$  を 20 に設定した.

### 1.3.4 分布の非ガウス化

本論文では粒子フィルタのシステムノイズ, 観測ノイズの分布をコーシー分布とした. コーシー分布は同一のパラメータを持つガウス分布に比べ裾の重い分布である. この性質より, システムノイズ分布では高い頻度で発生する滑らかな変動と, 低い頻度で発生する急激な変動の両方を同時に表現できる. また観測ノイズ分布では高い頻度で発生する観測ノイズと低い頻度で発生する外れ値を同時に表現でき, 外れ値の影響を軽減できる. これにより急激な変化や外れ値を多く含む非線形なデータの状態推定が可能となる.

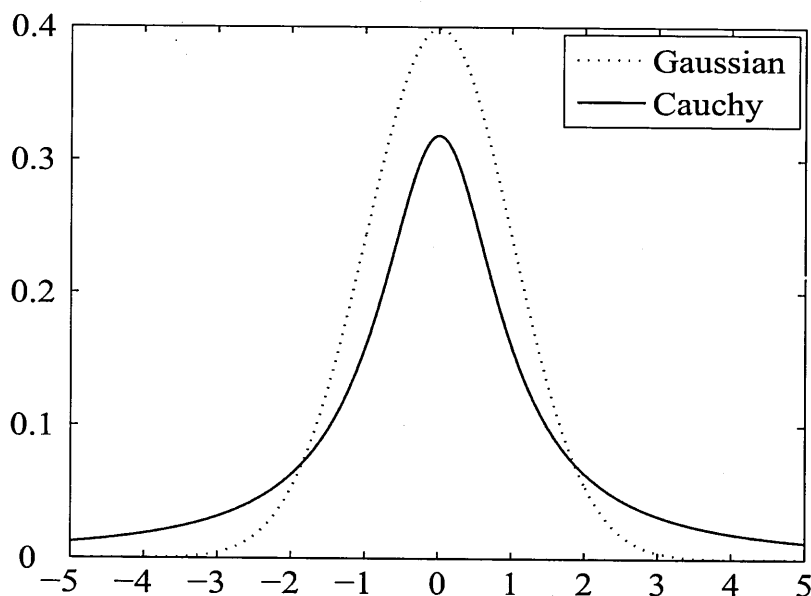


図 1.3: 分布による確率密度関数の違い

## 第2章 超パラメータの時間変化

本章では, 超パラメータを状態に含むことで時間とともに変化させる自己組織型状態空間モデルについて述べる.

### 2.1 自己組織型状態空間モデル

従来の状態空間モデルの場合, 超パラメータの分散は時間に依存せず, 一定と仮定されている. そのため変化の激しい時系列に対し誤差幅が大きくなり, 時系列に潜む情報の抽出が十分ではない. この問題を解決するために開発された超パラメータを時間とともに自動的に調整するモデルを自己組織型状態空間モデル (self-organizing state space model) と呼ぶ. 自己組織型状態空間モデルは状態ベクトルを拡張し, 超パラメータベクトル  $\theta_n$  を付け加え

$$z_n = \begin{bmatrix} x_n \\ \theta_n \end{bmatrix}, \theta_n = \begin{bmatrix} \log_{10} \tau_n^2 \\ \log_{10} \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

と定義する. ここで超パラメータベクトル  $\theta_n$  の対数値をモデル化したのは,  $\theta_n$  の正值性を保証するためである. さらに拡張したシステム方程式, 観測方程式を

$$z_n = f(z_{n-1}, v_n) \quad (2.2)$$

$$y_n = h(z_n, w_n) \quad (2.3)$$

と定義する. また, 超パラメータベクトル  $\theta_n$  は

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \varepsilon_n \quad (2.4)$$

と時間とともに変化させていく.  $\varepsilon_n$  のように超パラメータを特徴づけるパラメータを超々パラメータと呼ぶ.



このモデルは, 形式的には次のような状態空間モデルで表現できる.

$$\begin{bmatrix} t_n \\ \log_{10} \tau_n^2 \\ \log_{10} \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{n-1} \\ \log_{10} \tau_{n-1}^2 \\ \log_{10} \sigma_{n-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_n \\ \varepsilon_\tau \\ \varepsilon_\sigma \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$y_n = \begin{bmatrix} 1, 0, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_n \\ \log_{10} \tau_n^2 \\ \log_{10} \sigma_n^2 \end{bmatrix} + w_n \quad (2.6)$$

状態ベクトル  $z_n$  は  $t_n$  に超パラメータベクトル  $\theta_n$  を付加したもので定まる. 初期の超パラメータベクトルは例えば  $\log_{10} \tau_0^2([-4, 4])$ ,  $\log_{10} \sigma_0^2([-4, 2])$  のようなものを考える. ここで  $U([\cdot])$  は一様分布を表す.

このように一般状態空間モデルと自己組織型状態空間モデルの間には, 数式化した際に表面的な違いはない. その違いは, 状態ベクトルの成分に超パラメータを含むかどうかだけである. よって, 拡張したシステム方程式, および観測方程式はそのまま粒子フィルタに適用可能であり, 超パラメータも自動的に調整していくため対数尤度の最大化無しに 1 度の平滑化で最適な超パラメータと状態の推定が可能となる.

## 第3章 成分構成モデル

本章では、状態空間モデルに適用させる各成分構成モデルについて述べる。

### 3.1 ネットワークトラヒックの成分分解

ネットワークトラヒックを成分分解する際、対象とするネットワークトラヒックはさまざまな成分の組合せによって構成されていると考える。

今回は以下で示す各成分からモデルを構成する。

#### 3.1.1 トレンド成分

トレンド成分とは時系列の全体的な推移を表現する成分を示している。これは経済時系列などでよく見られる変動傾向であり、この長期的な変動傾向を推定し把握することは、時系列が持つ変動傾向を予測するだけではなく、定常 AR などの不規則変動へのモデル化に対しても、長期的変動傾向を除外してパラメータ推定をおこなえるため有効である。また、本論文では跳躍的変動を有する成分もトレンド成分に含め表現する。

トレンド成分を時系列のモデルに適用させるため、式 3.1 のように制約する。

$$\nabla^L t_n \quad (3.1)$$

$L$  は階差の深度を示しており、 $\nabla t_n = t_n - t_{n-1}$  を意味する。また、 $t_n$  は  $n$  時点におけるトレンド成分の値を示している。このようにトレンド成分を定義したとき、トレンド成分は以下のように更新される。この例では、 $L = 2$  とする。

$$\begin{aligned}
\nabla^2 t_n &= v_{n,t} \\
\nabla t_n - \nabla t_{n-1} &= v_{n,t} \\
(t_n - t_{n-1}) - (t_{n-1} - t_{n-2}) &= v_{n,t} \\
t_n &= 2t_{n-1} - t_{n-2} + v_{n,t} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

式3.2では、 $n$ 時点におけるトレンド成分 $t_n$ は2時点前までの2点に正規的な変動を加えた値である。このことから、トレンド成分を状態空間モデルに適用する場合、状態ならびに係数行列を以下のように定義することで実現できる。

$$\begin{aligned}
x_n &= \begin{bmatrix} t_n \\ t_{n-1} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

なお、今回はトレンド成分の階差深度はすべて $L = 2$ とし推定をおこなった。

### 3.1.2 残差成分

残差成分とは各成分を推定し、それらだけでは表現しきれない残りの変動成分を表現している。状態空間モデルにおいて残差成分は観測ノイズであり、推定された成分と対象となるネットワークトラヒック時系列との差として求められる。

$$w_n = y_n - Hx_n \quad (3.4)$$

$w_n$ は残差成分の値、および状態空間モデルにおける観測ノイズを示す。

ここで、状態を $t_n$ 、残差を $w_n$ とすると、式1.4をトレンド成分と残差成分で表現できる。

$$y_n = t_n + w_n \quad (3.5)$$

## 第4章 パラメータ推定

本章では、未知である超パラメータの決定法として最尤推定法、また、尤度関数を用いた超パラメータの探索方法について述べる。

### 4.1 時系列モデルの尤度計算

超パラメータ  $\theta$  によって規定される時系列モデルがあり、その状態空間モデルが与えられているとする。長さ  $N$  の時系列  $y_1, \dots, y_N$  が与えられた場合、この時系列モデルによって定まる  $y_1, \dots, y_N$  の  $N$  次元同時密度関数を  $f_N(y_1, \dots, y_N | \theta)$  と表す。このとき、このモデルの尤度は

$$L(\theta) = f_N(y_1, \dots, y_N) \quad (4.1)$$

によって定義される。ここで、 $n = N, N-1, \dots, 2$  について

$$f_n(y_1, \dots, y_n | \theta) = f_{n-1}(y_1, \dots, y_{n-1} | \theta) p(y_n | y_1, \dots, y_{n-1}, \theta) \quad (4.2)$$

が成り立つことを繰り返し適用すると、時系列モデルの尤度は条件付き密度関数の積により

$$L(\theta) = \prod_{n=1}^N p(y_n | y_1, \dots, y_{n-1}, \theta) = \prod_{n=1}^N p(y_n | Y_{n-1}, \theta) \quad (4.3)$$

と表現できるが、簡単のため  $Y_0 = \emptyset$  とし、 $f_1(y_1 | Y_{n-1}, \theta)$  と表す。このとき対数尤度 (loglikelihood) は

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{n=1}^N \log p(y_n | Y_{n-1}, \theta) \quad (4.4)$$

で与えられる。

ここで、カルマンフィルタの場合は正規性が仮定されているため、 $p()$  は正規分布に従い

$$p(y_n|Y_{n-1}, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^l |d_{n|n-1}|^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_n - y_{n|n-1})^t d_{n|n-1}^{-1} (y_n - y_{n|n-1})\right\} \quad (4.5)$$

と表せる。これを式 4.4 に代入することでこの時系列モデルの対数尤度は

$$l(\theta) = -\frac{1}{2}\left\{N \log 2\pi + \sum_{n=1}^N \log |d_{n|n-1}| + \sum_{n=1}^N (y_n - y_{n|n-1})^t d_{n|n-1}^{-1} (y_n - y_{n|n-1})\right\} \quad (4.6)$$

で求められる。

また、粒子フィルタの場合は予測分布のモンテカルロ近似

$$p(y_n|Y_{n-1}) = \int p(y_n|x_n)p(x_n|Y_{n-1})dx_n \cong \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m p(y_n|p_n^{(j)}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \alpha_n^{(j)} \quad (4.7)$$

を用いる。これを式 4.4 に代入することでこの時系列モデルの対数尤度は

$$l(\theta) = \sum_{n=1}^N \log p(y_n|Y_{n-1}) \cong \sum_{n=1}^N \log\left(\sum_{j=1}^m \alpha_n^{(j)}\right) - N \log m \quad (4.8)$$

と近似できる。

これらからカルマンフィルタは式 4.6、粒子フィルタは式 4.8 により対数尤度を計算するための統一的なアルゴリズムが得られたことになる。このとき、時系列モデルの最適値は対数尤度を最大化する超パラメータ  $\theta$  を真のパラメータとして採択すればよい。

また、カルマンフィルタは式 4.6 の最大化によって超パラメータを求められるが、この方法は通常かなりの計算量を必要とする。そのため、以下に示す方法によって直接数値的最適化を適用するパラメータ次元の縮約により、対数尤度の最大化にかかる計算量の減少を図る。

線形状態空間モデルの式 1.3, 1.4 において  $w_n$  の分散が  $R_n = \sigma^2$  で一定とする。このとき

$$\begin{aligned} V_{n|n-1} &= \sigma^2 \tilde{V}_{n|n-1}, & V_{n|n} &= \sigma^2 \tilde{V}_{n|n}, \\ Q_n &= \sigma^2 \tilde{Q}_n, & \tilde{R} &= 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

によって新たに  $\tilde{V}_{n|n}$ ,  $\tilde{V}_{n|n-1}$ ,  $\tilde{Q}_n$  および  $\tilde{R}$  を定義すると, これらのパラメータを用いてもカルマンフィルタの式 1.6, 1.7 から同一の結果を与えることがわかる. まず, 1 期先予測のステップでは,  $V_{n-1|n-1}$ ,  $V_{n|n-1}$  の代わりに  $\tilde{V}_{n-1|n-1}$ ,  $\tilde{V}_{n|n-1}$  を用いても同等な結果が得られる. また, フィルタのステップでは

$$\begin{aligned} K_n &= V_{n|n-1} H^t (H V_{n|n-1} H^t + R_n)^{-1} \\ &= \sigma^2 \tilde{V}_{n|n-1} H^t \sigma^{-2} (H \tilde{V}_{n|n-1} H^t)^{-1} \\ &= \tilde{V}_{n|n-1} H^t (H \tilde{V}_{n|n-1} H^t + \tilde{R})^{-1} \\ &= \tilde{K}_n \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる. したがって,  $\tilde{R} = 1$  においてもカルマンゲイン  $\tilde{K}_n$  は  $K_n$  と同一となり, フィルタリングのステップでも  $V_{n|n}$ ,  $V_{n|n-1}$  を用いてよいことがわかる. また, 以上の計算において状態の平均  $x_{n|n-1}$ ,  $x_{n|n}$  は何ら変化していない.

よって,  $R_n$  が時間的に変化しない場合には,  $R = \sigma^2$  が未知数の場合にも  $R = 1$  においてカルマンフィルタを適用すればよい. このとき, 式 1.12 より  $d_{n|n-1} = \sigma^2 \tilde{d}_{n|n-1}$  となるので,

$$\ell(\theta) = -\frac{1}{2} \left\{ N \log 2\pi\sigma^2 + \sum_{n=1}^N \log \tilde{d}_{n|n-1} + \sum_{n=1}^N \frac{(y_n - y_{n|n-1})^2}{\tilde{d}_{n|n-1}} \right\} \quad (4.11)$$

となる. したがって,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{N}{\sigma^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{n=1}^N \frac{(y_n - y_{n|n-1})^2}{\tilde{d}_{n|n-1}} \right\} = 0 \quad (4.12)$$

より,  $\sigma^2$  の最尤推定値が

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{(y_n - y_{n|n-1})^2}{\tilde{d}_{n|n-1}} \quad (4.13)$$

で求められる. さらに, 超パラメータベクトルのうち  $\sigma^2$  以外のものを  $\theta^*$  とすると, 式 4.13 を式 4.11 に代入して

$$\ell(\theta^*) = -\frac{1}{2} \left\{ N \log 2\pi \hat{\sigma}^2 + \sum_{n=1}^N \log \tilde{d}_{n|n-1} + N \right\} \quad (4.14)$$

となる。この方法により数値最適化のアルゴリズムで求めるパラメータの次元を一つだけ減少させることができる。以上の方法をまとめると次のようになる。

1.  $R=1$  においてカルマンフィルタを適用する。
2. 式 4.13 により  $\hat{\sigma}^2$  を求める。
3. 式 4.14 により対数尤度  $\ell(\theta^*)$  を求める。
4. 1～3 のステップを繰り返しながら、数値的最適化によって対数尤度  $\ell(\theta^*)$  を最大化し、最尤推定値  $\hat{\theta}^*$  を求める。

## 4.2 超パラメータ探索法

対数尤度の最大化に対する超パラメータ  $\theta$  をグリッドサーチ法、およびランサムサーチ法によって探索する。

### 4.2.1 グリッドサーチ法

グリッドサーチ法とは、超パラメータベクトル  $\theta$  の各要素を一定の範囲、区間に限定し、その中で目的関数を最大化する値を選択する方法である。

#### グリッドサーチ法のアルゴリズム

1. システムノイズおよび観測ノイズを任意の範囲で  $\times 10^{-1}$  ステップでサーチし、最大対数尤度を  $\max$  (初期値は大きな負の値とする。) とする。
2. 前回の  $\max$  と今回の  $\max$  を比較し、前回の  $\max$  より大きければ更新、小さければ保持。
3. ステップ 2. を範囲の終端まで繰り返す。

#### 4.2.2 ランダムサーチ法

ランダムサーチ法とは、グリッドサーチ法により求められた超パラメータベクトル $\theta$ の各要素周辺を探索し、より詳細に目的関数を最大化する値を選択する方法である。

##### ランダムサーチ法のアルゴリズム

1. グリッドサーチによって決められた範囲内で最も尤度の高い値を探す。
2. その周辺の $\pm 30\%$ の範囲でランダムに100回探索し、最も高い尤度を持つ点を $max$ とする。
3. 最大尤度が前回よりも高ければ、更新された $max$ から再度同一方向に探索する。低ければステップ5.へ。
4. 最大尤度が更新されればステップ3.へ、更新されなければステップ2.へ。
5. 最大尤度が前回よりもすべて低いなら $max$ を推定点として終了。

上記のアルゴリズムにより、超パラメータ $\theta$ の推定が可能となる。また、ランダムサーチ法は無作為に超パラメータを探索するため、結果に若干のバラつきが生じる。そこで、このアルゴリズムを15回試行し、その中央値の結果を最適値として採用する。



## 第5章 ネットワークトラヒック の成分分解

本章では, 前章までのアルゴリズムを用いて, カルマンフィルタ, 粒子フィルタ, および自己組織型状態空間モデルの3つの推定法で成分分解をおこなう.

### 5.1 対象データ

まずシミュレーションデータを用いてそれぞれの推定法の性能の評価をおこなう. シミュレーションデータは全体的に滑らかな変動を持ち, 短期の跳躍的変動 ( $n = 80 \sim 85$ ), 長期の跳躍的変動 ( $n = 130 \sim 180$ ), 突発的変動 ( $n = 40, 240$ ) を付加した 288 点のデータである. 次に実データを用いてそれぞれの推定精度の比較をおこなう. 実データは 2009 年 7 月 1 日 ~ 7 日の一週間の法政大学小金井校舎の WAN(入側) の 24 時間のトラヒックデータを用いた. これは 1 点を 5 分とした 288 点のデータである. これらのデータを式 1.4 のようにトレンド成分, 残差成分の 2 成分に分解する.

ここで初期設定として粒子フィルタ, 自己組織型状態空間モデルの粒子数は 1000, 超パラメータを探索するグリッドサーチの探索範囲は  $10^{20} \sim 10^{20}$ , 自己組織型状態空間モデルの超パラメータ  $\theta_n$  の初期粒子はシミュレーションデータでは  $U([-4, 3])$ , 実データでは  $U([5, 10])$  の一様分布とする.

また, 自己組織型状態空間モデルでは対数尤度最大化の必要がない. そのため, 超々パラメータの探索ではランダムサーチによる詳細な探索はおこなわず, グリッドサーチのみでおこなう.

#### 5.1.1 平均二乗誤差

平均二乗誤差 (MSE) は値のバラつき具合を示す値である. 本論文では, 対象データと推定したトレンド成分の適合度を示すために用いる.

$$MSE = \frac{\sum_{n=1}^N (y_n - x_n)^2}{N} \quad (5.1)$$

## 5.2 推定結果

ランダムサーチ法, グリッドサーチ法により求められた超パラメータ  $\theta$ , 超々パラメータ  $\varepsilon$ , ならびに平均二乗誤差を表 5.1-5.24 に示す. カルマンフィルタ, 粒子フィルタ, および自己組織型状態空間モデルのトレンド成分, ならびに自己組織型状態空間モデルの推定時の超パラメータ  $\theta$  の変化の様子を図 5.1-5.24 に示す.

表 5.1: シミュレーションデータの推定結果 (Kalman)

| 推定法           | $\tau^2$ | $\sigma^2$ | $MSE$  |
|---------------|----------|------------|--------|
| <i>Kalman</i> | 0.6772   | 6.5857     | 7.3965 |

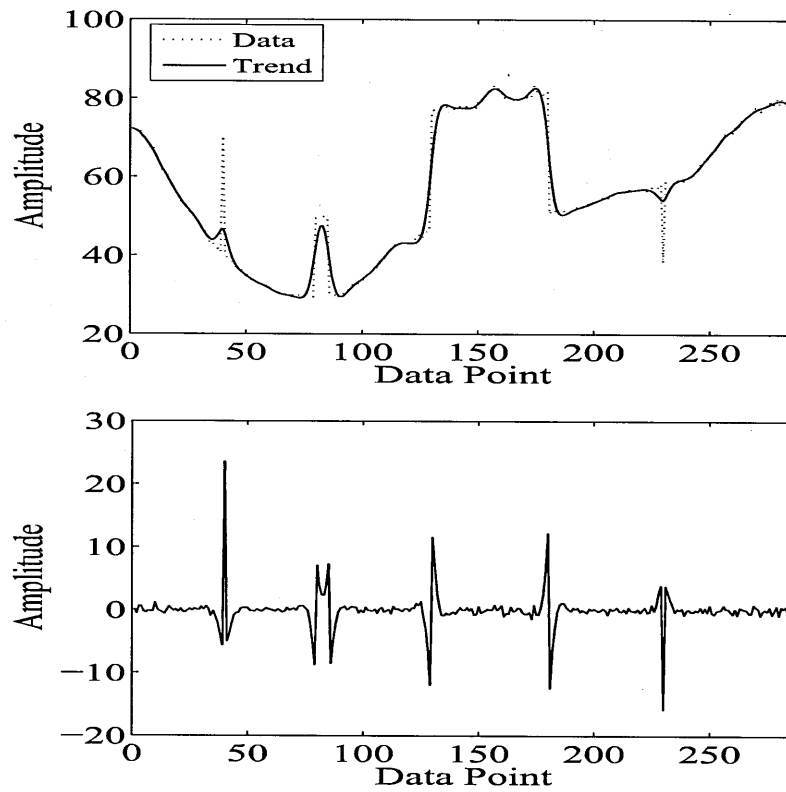


図 5.1: シミュレーションデータの推定結果 (Kalman)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.2: シミュレーションデータの推定結果 (particle)

| 推定法      | $\tau^2$ | $\sigma^2$ | $MSE$  |
|----------|----------|------------|--------|
| particle | 0.0122   | 0.0131     | 6.2052 |

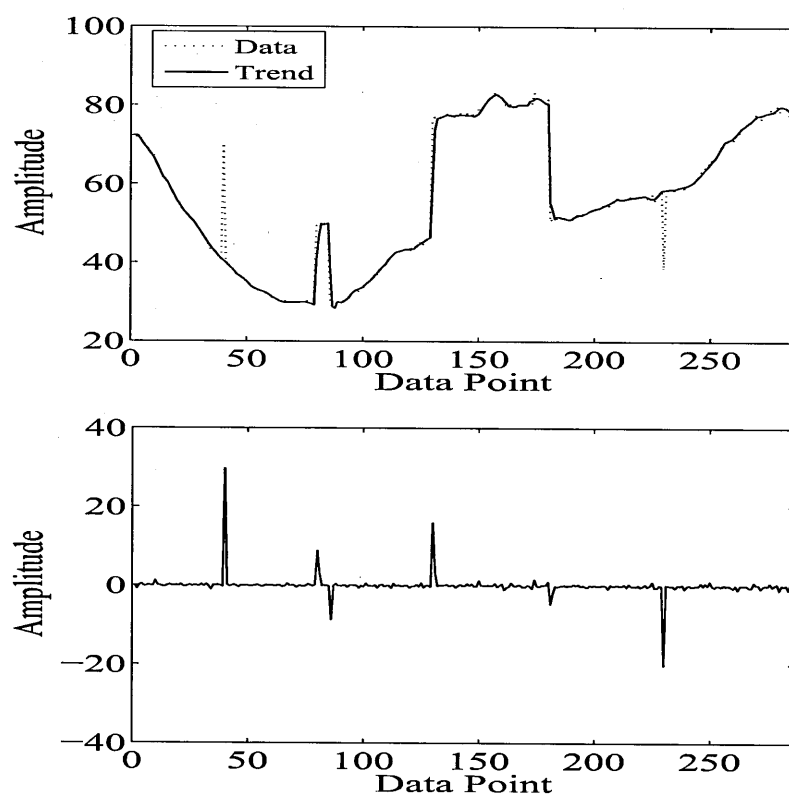


図 5.2: シミュレーションデータの推定結果 (particle)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.3: シミュレーションデータの推定結果 (sooss)

| 推定法   | $\varepsilon_v^2$ | $\varepsilon_w^2$       | $MSE$  |
|-------|-------------------|-------------------------|--------|
| sooss | 0.0081            | $4.0984 \times 10^{-4}$ | 4.8495 |

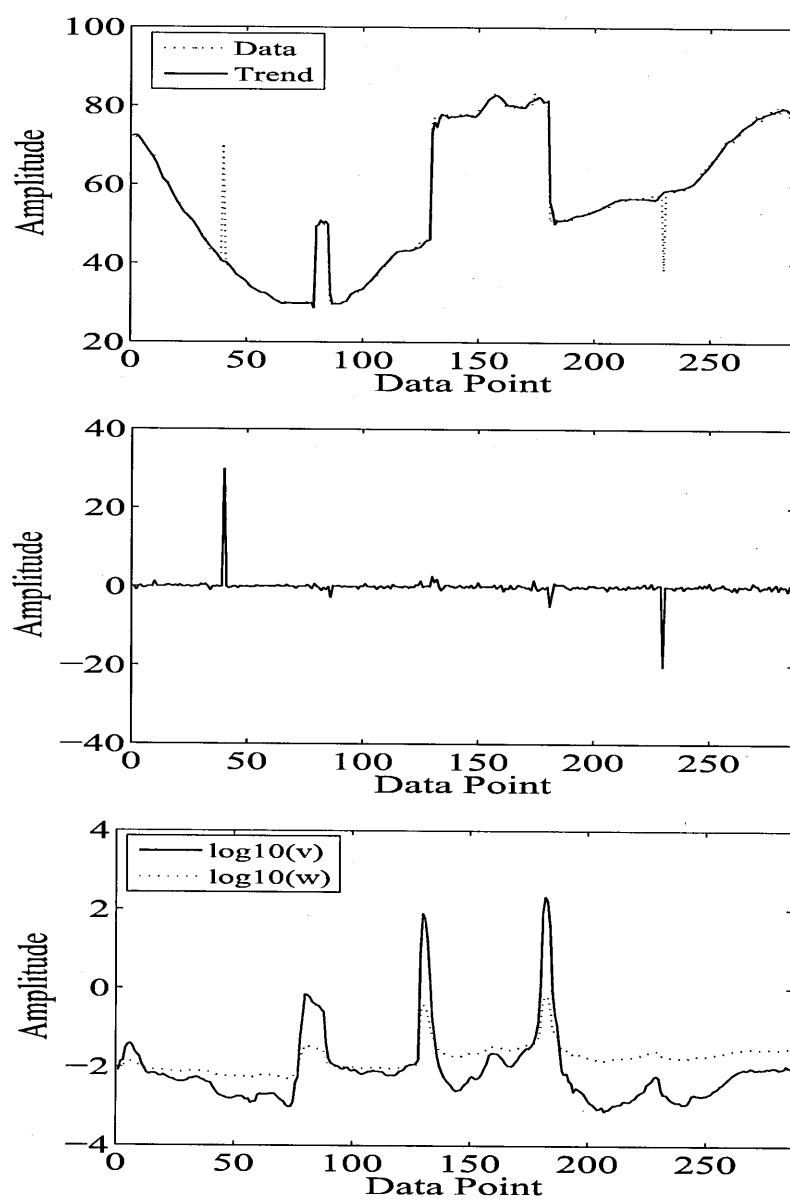


図 5.3: シミュレーションデータの推定結果 (sooss)[トレンド成分 (上), 残差成分 (中), 超パラメータの変化 (下)]

表 5.4: 2009 年 7 月 1 日の推定結果 (Kalman)

| 推定法           | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|---------------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| <i>Kalman</i> | $5.2703 \times 10^3$ | $7.0817 \times 10^5$ | $4.5436 \times 10^{10}$ |

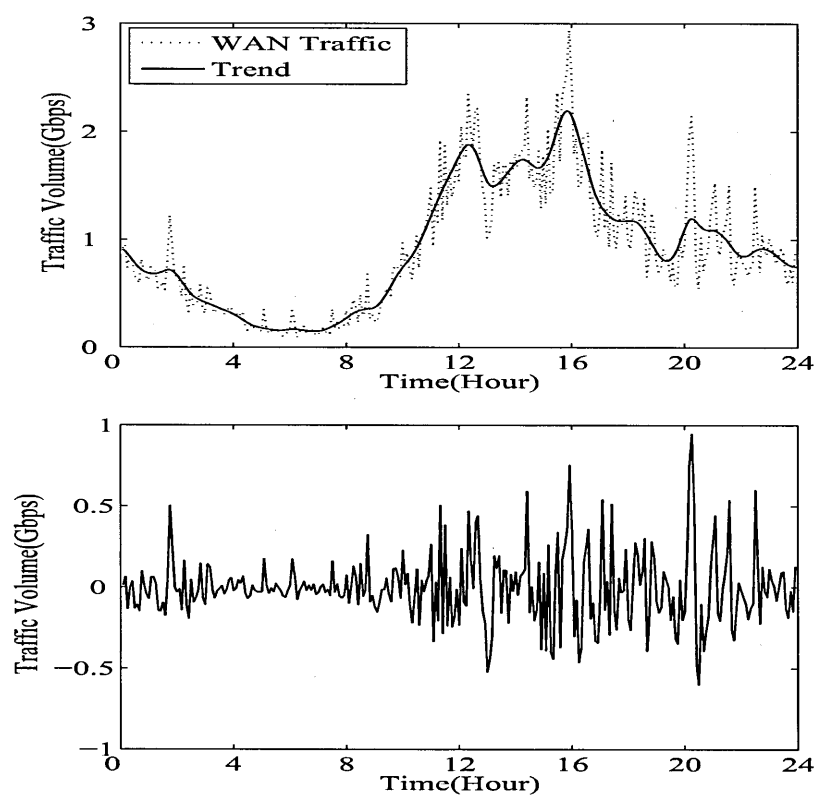


図 5.4: 2009 年 7 月 1 日の推定結果 (Kalman)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.5: 2009 年 7 月 1 日の推定結果 (particle)

| 推定法      | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|----------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| particle | $2.4084 \times 10^8$ | $1.8991 \times 10^9$ | $3.5055 \times 10^{10}$ |

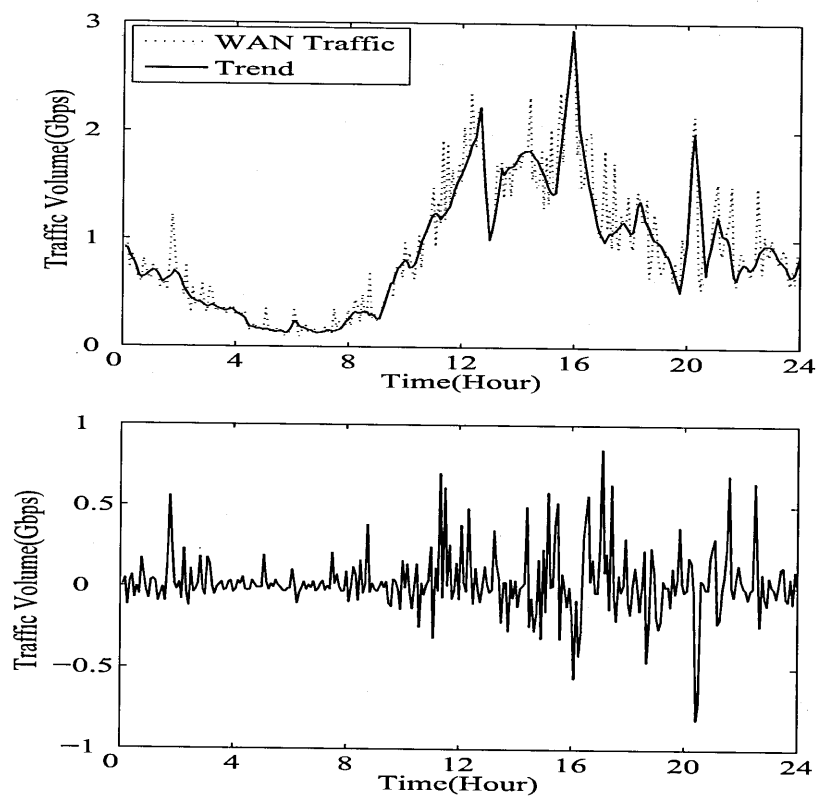


図 5.5: 2009 年 7 月 1 日の推定結果 (particle)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.6: 2009 年 7 月 1 日の推定結果 (soss)

| 推定法  | $\varepsilon_v^2$       | $\varepsilon_w^2$       | $MSE$                   |
|------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| soss | $1.0000 \times 10^{-9}$ | $1.0000 \times 10^{-6}$ | $2.8155 \times 10^{10}$ |

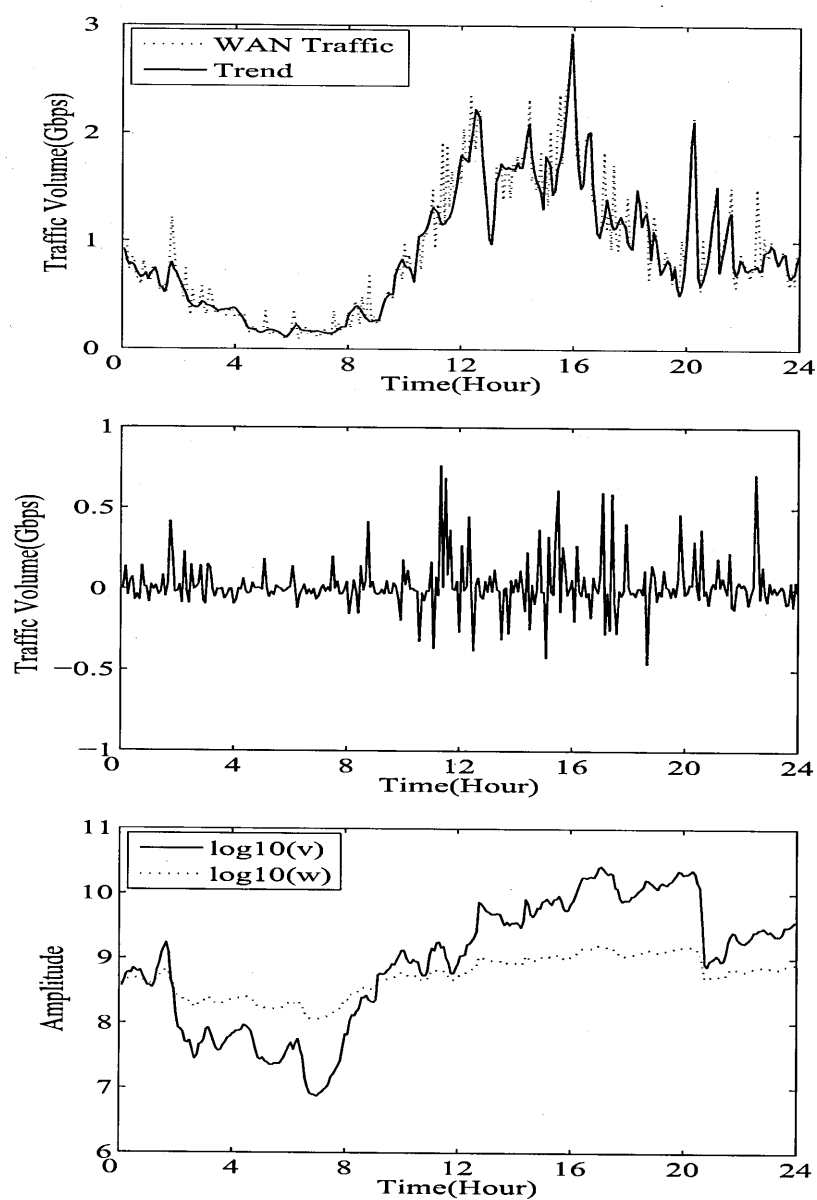


図 5.6: 2009 年 7 月 1 日の推定結果 (soss)[トレンド成分 (上), 残差成分 (中), 超パラメータの変化 (下)]



表 5.7: 2009 年 7 月 2 日の推定結果 (Kalman)

| 推定法           | $\tau^2$ | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|---------------|----------|----------------------|-------------------------|
| <i>Kalman</i> | 1.2537   | $1.3594 \times 10^3$ | $1.0341 \times 10^{11}$ |

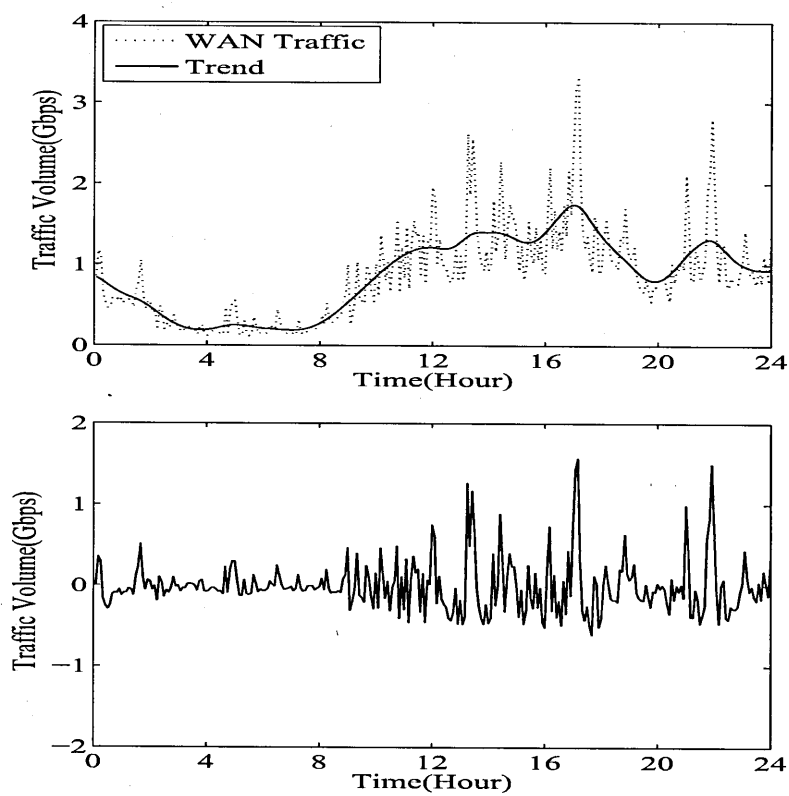


図 5.7: 2009 年 7 月 2 日の推定結果 (Kalman)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.8: 2009 年 7 月 2 日の推定結果 (particle)

| 推定法      | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|----------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| particle | $8.7814 \times 10^7$ | $3.0033 \times 10^9$ | $7.1703 \times 10^{10}$ |

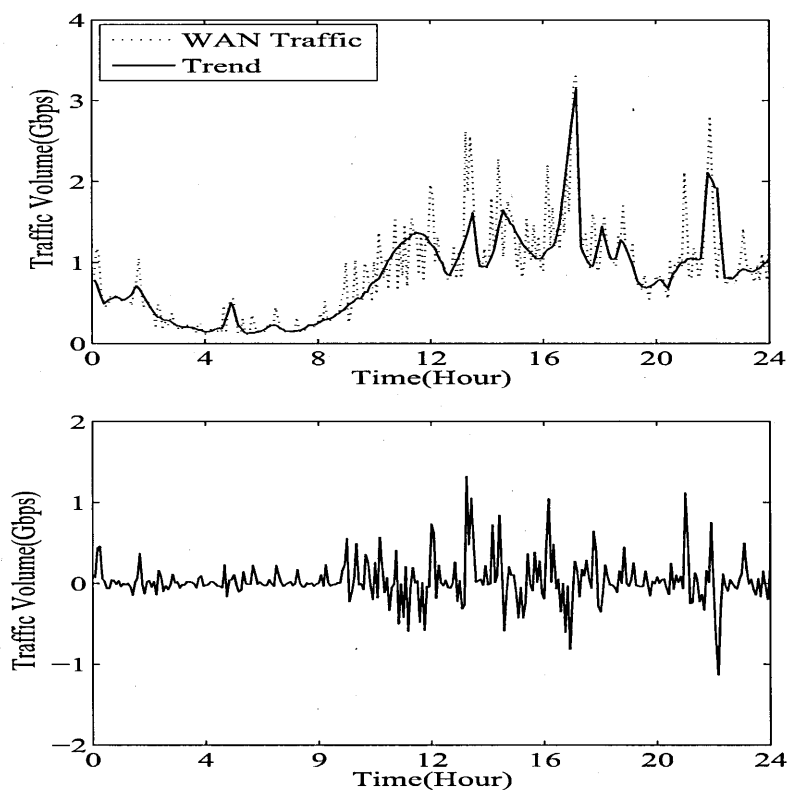


図 5.8: 2009 年 7 月 2 日の推定結果 (particle)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.9: 2009 年 7 月 2 日の推定結果 (soSS)

| 推定法  | $\varepsilon_v^2$       | $\varepsilon_w^2$       | $MSE$                   |
|------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| soSS | $1.0000 \times 10^{-6}$ | $1.0000 \times 10^{-4}$ | $5.7295 \times 10^{10}$ |

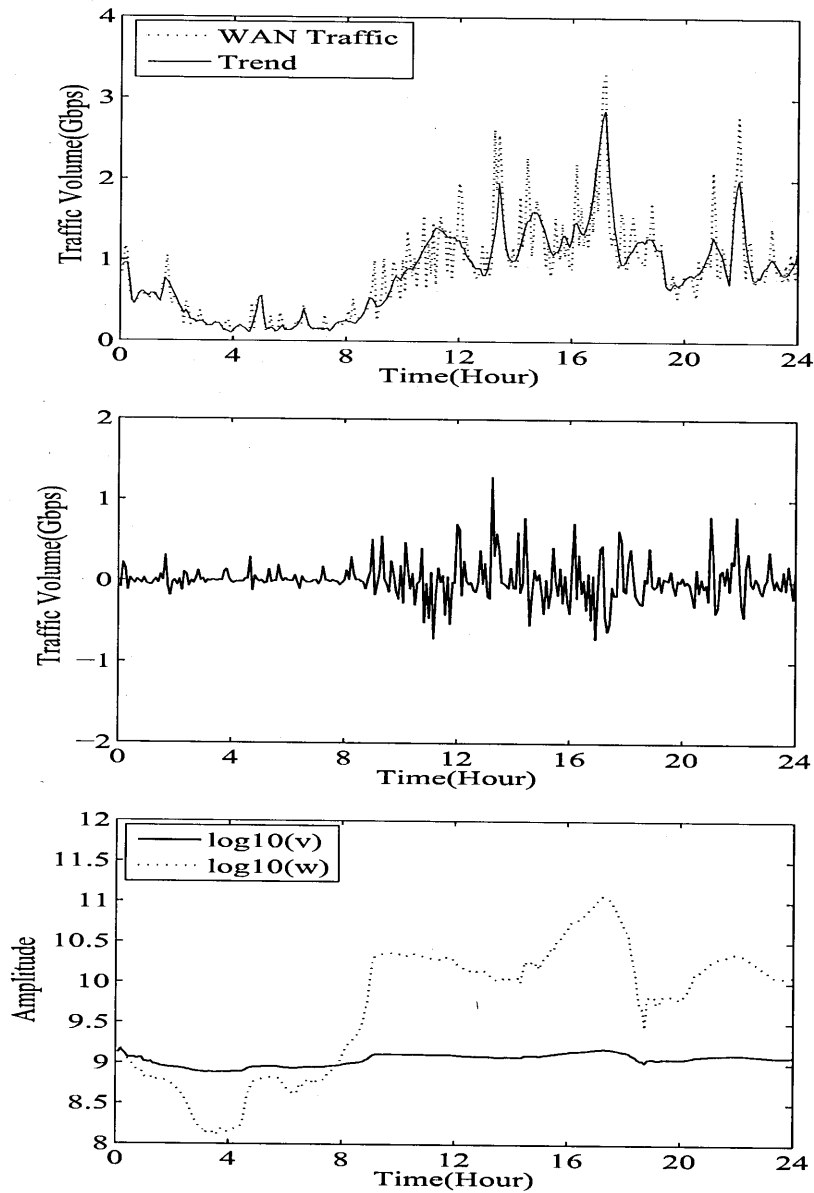


図 5.9: 2009 年 7 月 2 日の推定結果 (soSS)[トレンド成分 (上), 残差成分 (中), 超パラメータの変化 (下)]

表 5.10: 2009 年 7 月 3 日の推定結果 (Kalman)

| 推定法           | $\tau^2$           | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|---------------|--------------------|----------------------|-------------------------|
| <i>Kalman</i> | $3.8915 \times 10$ | $4.3578 \times 10^3$ | $1.3944 \times 10^{11}$ |

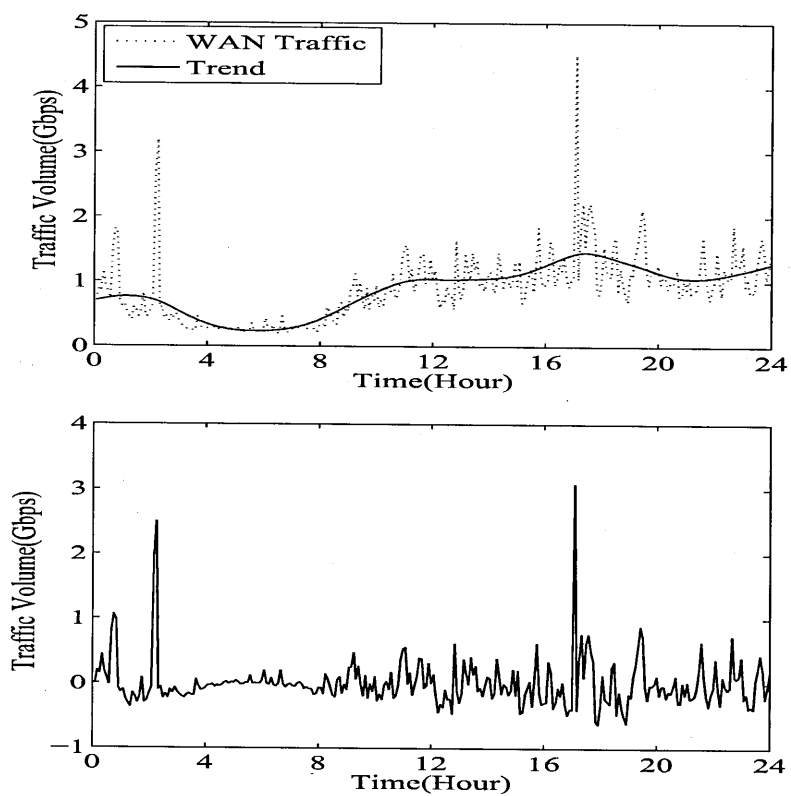


図 5.10: 2009 年 7 月 3 日の推定結果 (Kalman)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.11: 2009 年 7 月 3 日の推定結果 (particle)

| 推定法      | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|----------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| particle | $7.7267 \times 10^7$ | $7.2807 \times 10^9$ | $1.2314 \times 10^{11}$ |

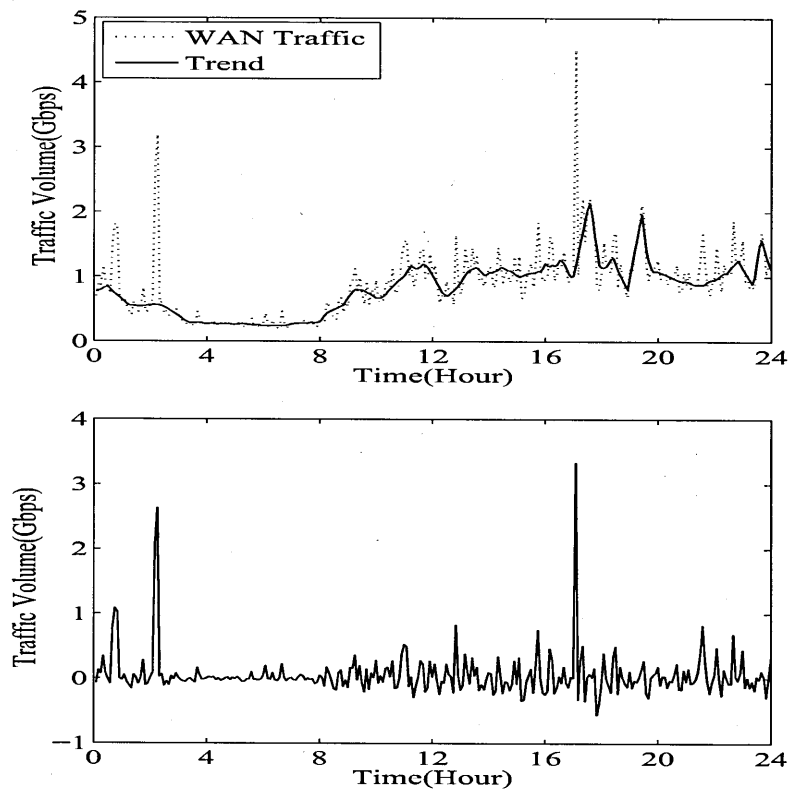


図 5.11: 2009 年 7 月 3 日の推定結果 (particle)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.12: 2009 年 7 月 3 日の推定結果 (soss)

| 推定法  | $\varepsilon_v^2$       | $\varepsilon_w^2$       | $MSE$                   |
|------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| soss | $1.0000 \times 10^{-4}$ | $1.0000 \times 10^{-5}$ | $1.0481 \times 10^{11}$ |

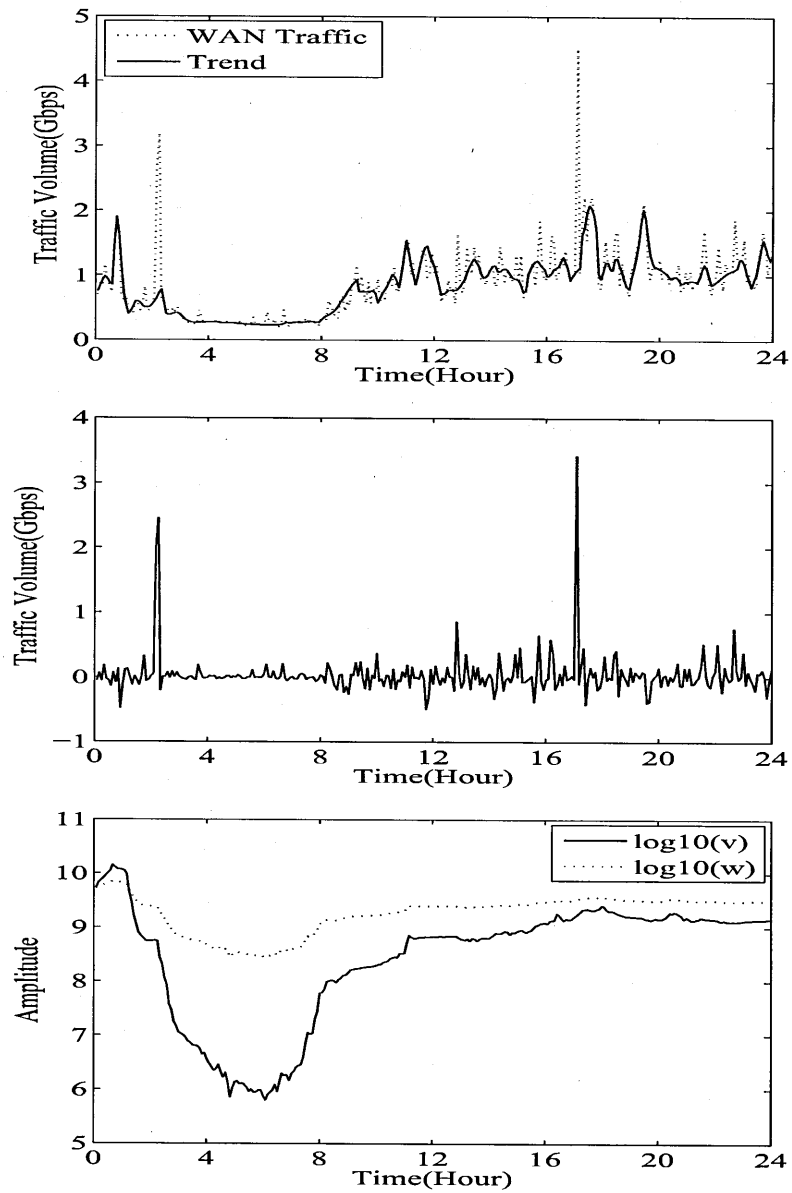


図 5.12: 2009 年 7 月日の推定結果 (soss)[トレンド成分 (上), 残差成分 (中), 超パラメータの変化 (下)]

表 5.13: 2009 年 7 月 4 日の推定結果 (Kalman)

| 推定法           | $\tau^2$                | $\sigma^2$         | $MSE$                   |
|---------------|-------------------------|--------------------|-------------------------|
| <i>Kalman</i> | $7.7589 \times 10^{-2}$ | $1.0017 \times 10$ | $4.4812 \times 10^{10}$ |

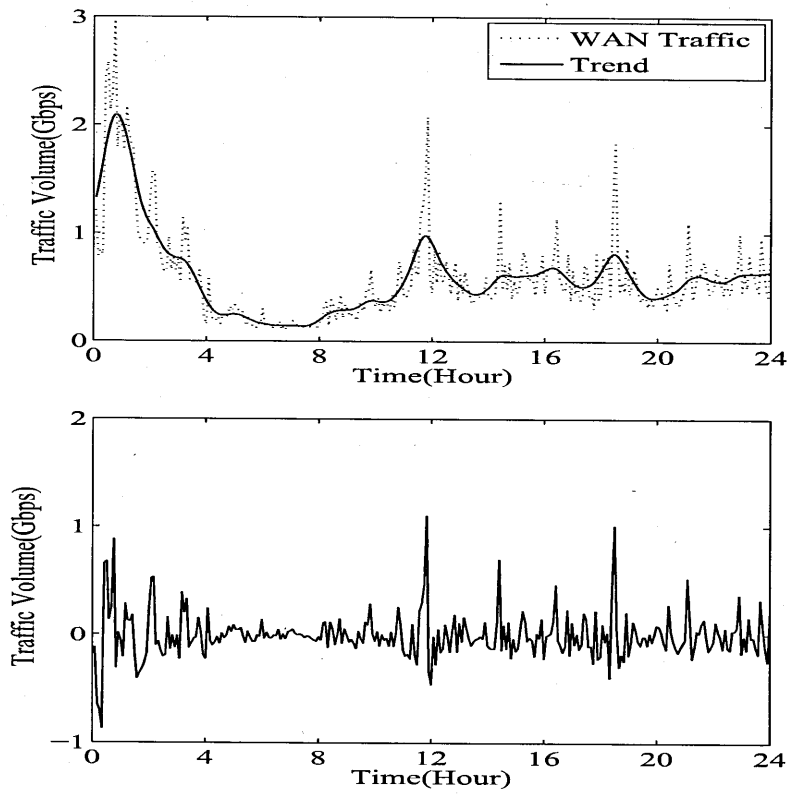


図 5.13: 2009 年 7 月 4 日の推定結果 (Kalman)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.14: 2009 年 7 月 4 日の推定結果 (particle)

| 推定法      | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|----------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| particle | $7.5499 \times 10^7$ | $1.5609 \times 10^9$ | $3.2825 \times 10^{10}$ |

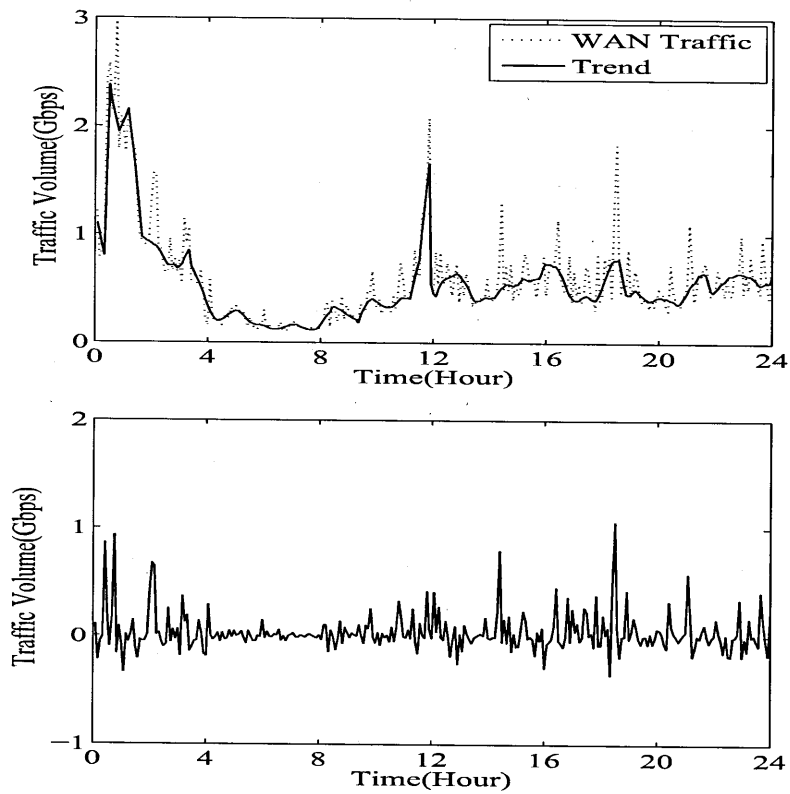


図 5.14: 2009 年 7 月 4 日の推定結果 (particle)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]



表 5.15: 2009 年 7 月 4 日の推定結果 (soss)

| 推定法  | $\varepsilon_v^2$       | $\varepsilon_w^2$        | $MSE$                   |
|------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| soss | $1.0000 \times 10^{-4}$ | $1.0000 \times 10^{-19}$ | $2.8745 \times 10^{10}$ |

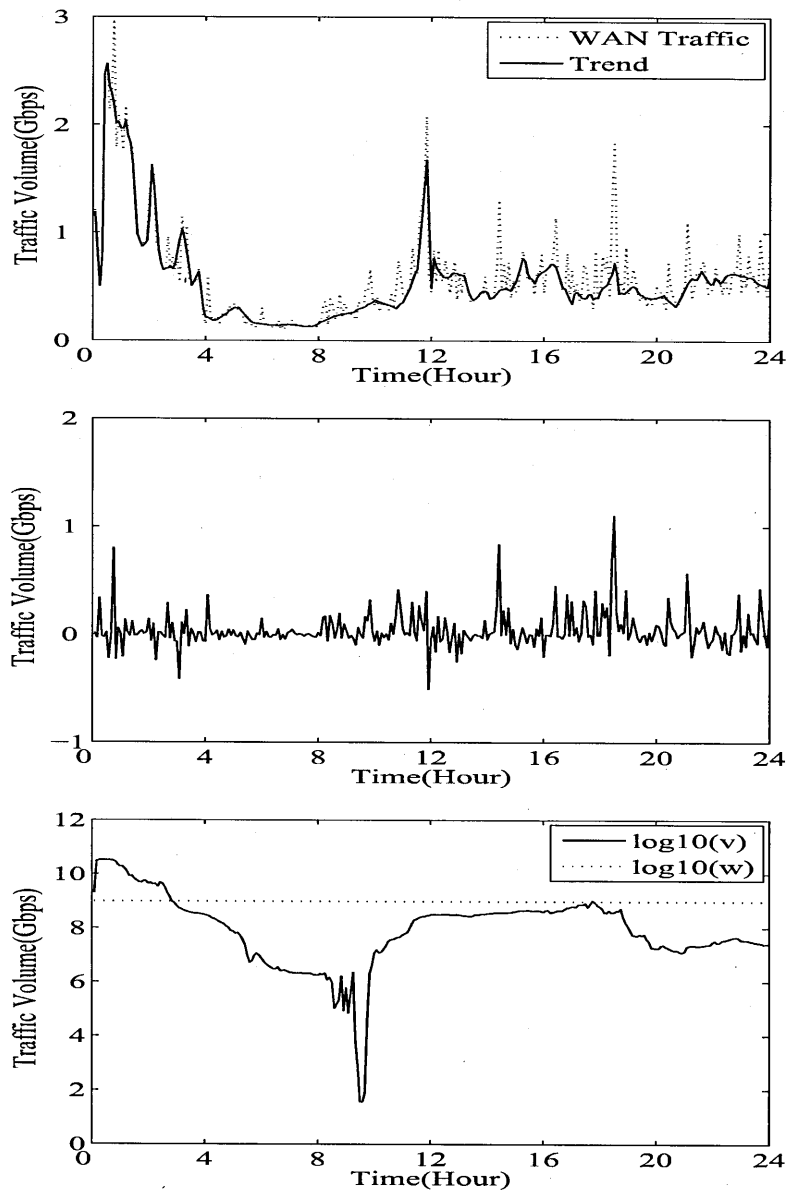


図 5.15: 2009 年 7 月 4 日の推定結果 (soss)[トレンド成分 (上), 残差成分 (中), 超パラメータの変化 (下)]

表 5.16: 2009 年 7 月 5 日の推定結果 (Kalman)

| 推定法           | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|---------------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| <i>Kalman</i> | $7.7269 \times 10^3$ | $3.0804 \times 10^5$ | $4.5575 \times 10^{10}$ |

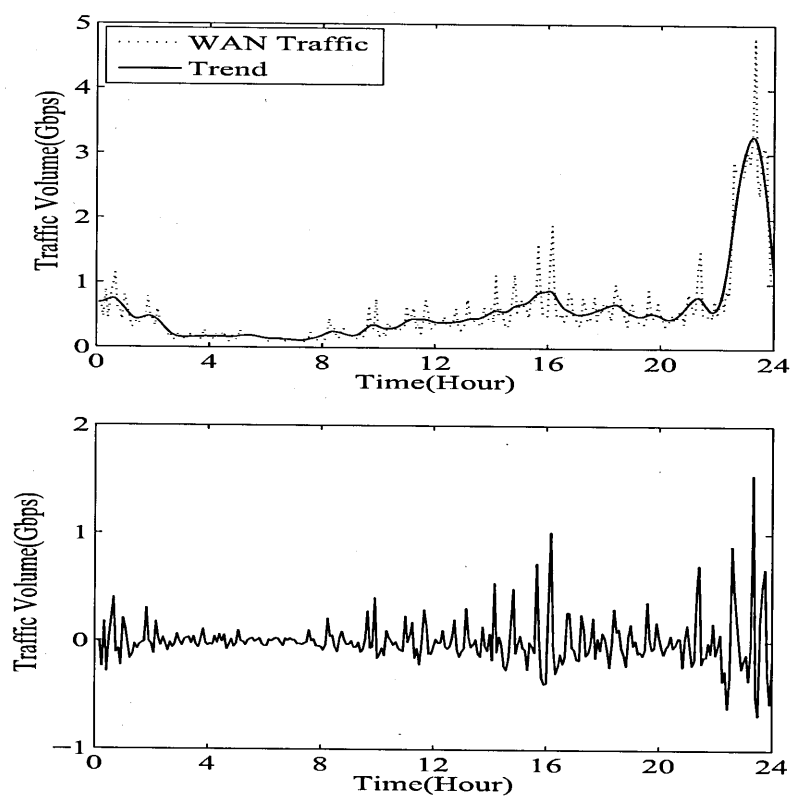


図 5.16: 2009 年 7 月 5 日の推定結果 (Kalman)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.17: 2009 年 7 月 5 日の推定結果 (particle)

| 推定法      | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|----------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| particle | $7.2234 \times 10^6$ | $4.0579 \times 10^9$ | $5.9194 \times 10^{10}$ |

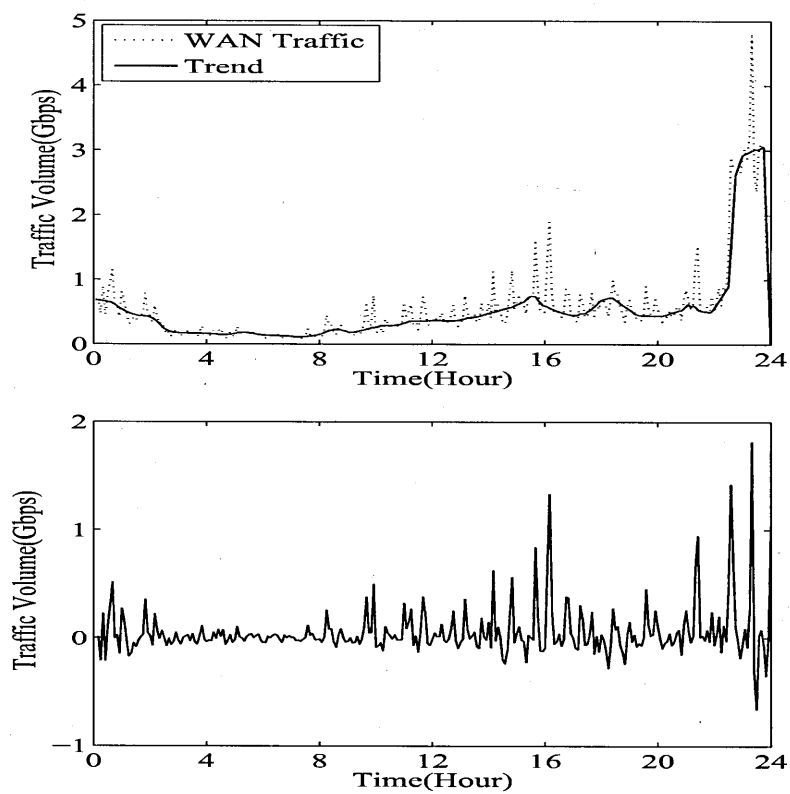


図 5.17: 2009 年 7 月 5 日の推定結果 (particle)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.18: 2009 年 7 月 5 日の推定結果 (sooss)

| 推定法   | $\varepsilon_v^2$       | $\varepsilon_w^2$       | $MSE$                   |
|-------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| sooss | $1.0000 \times 10^{-3}$ | $1.0000 \times 10^{-7}$ | $3.9531 \times 10^{10}$ |

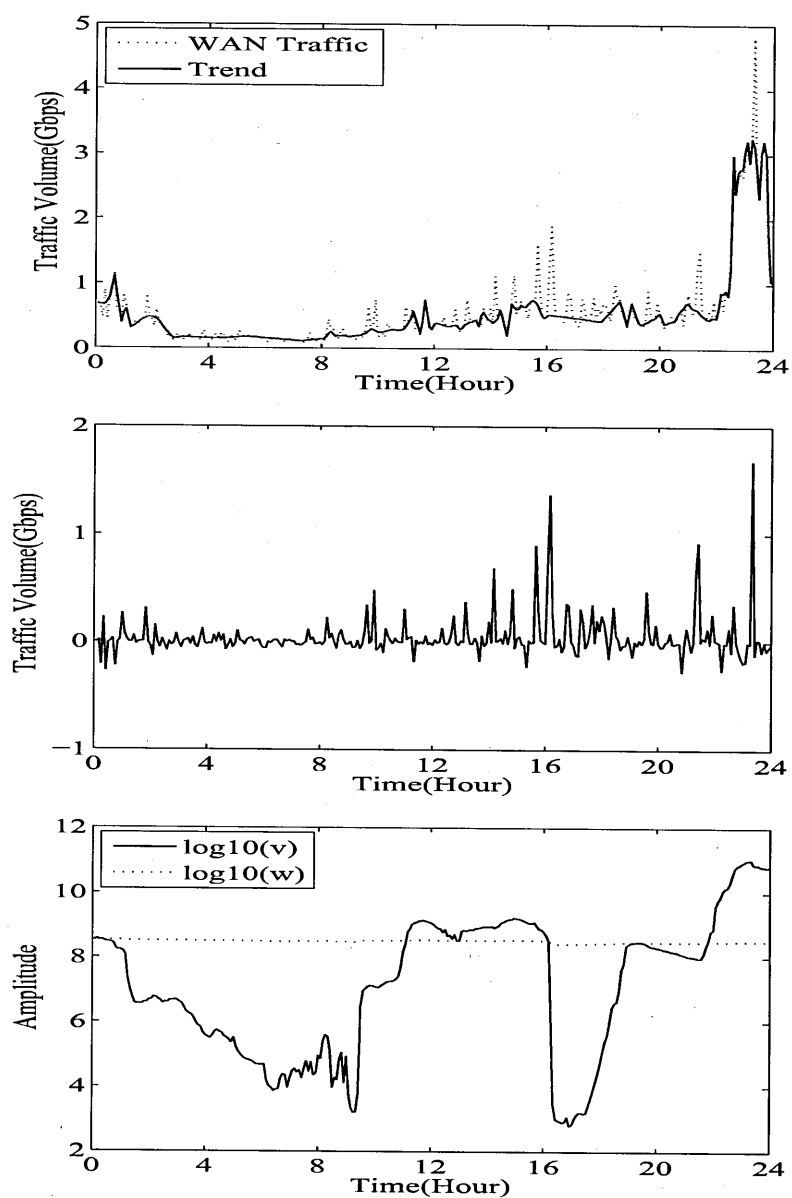


図 5.18: 2009 年 7 月 5 日の推定結果 (sooss)[トレンド成分 (上), 残差成分 (中), 超パラメータの変化 (下)]

表 5.19: 2009 年 7 月 6 日の推定結果 (Kalman)

| 推定法           | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|---------------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| <i>Kalman</i> | $1.4269 \times 10^5$ | $7.0258 \times 10^5$ | $8.2323 \times 10^{10}$ |

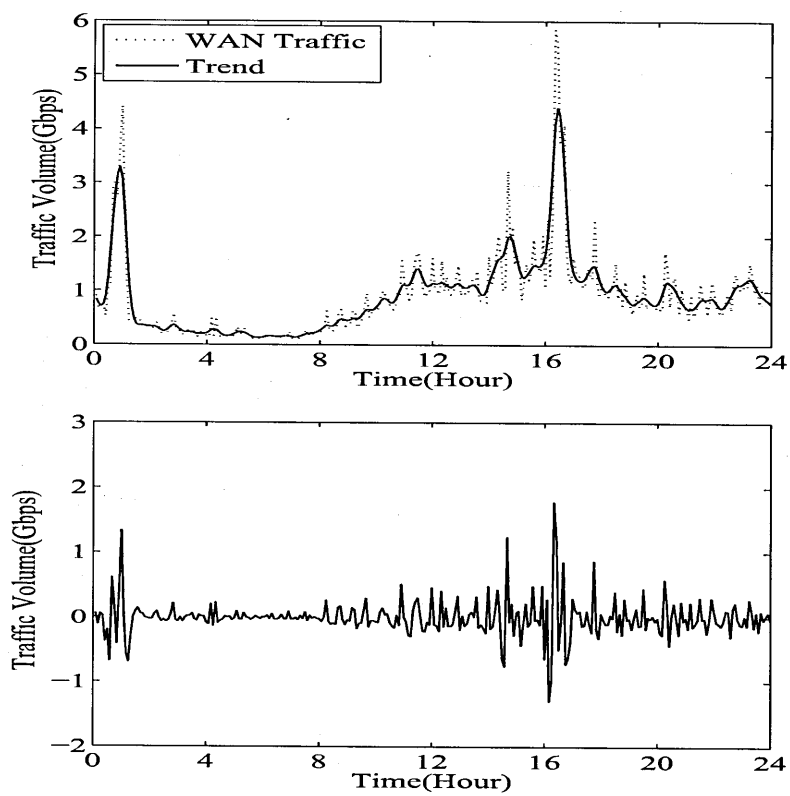


図 5.19: 2009 年 7 月 6 日の推定結果 (Kalman)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.20: 2009 年 7 月 6 日の推定結果 (particle)

| 推定法      | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|----------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| particle | $6.8086 \times 10^8$ | $2.8817 \times 10^9$ | $8.7419 \times 10^{10}$ |

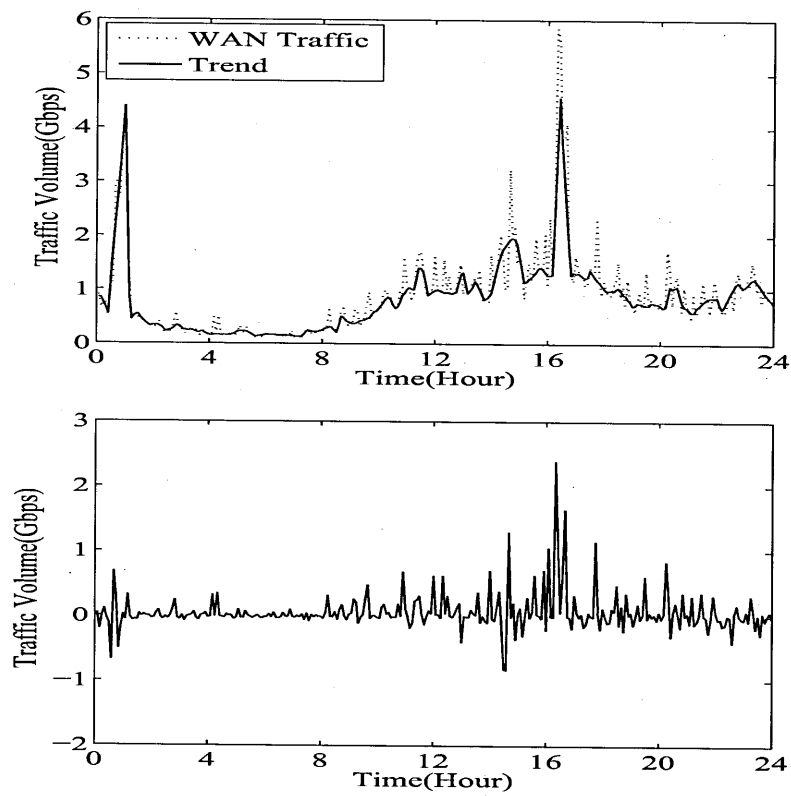


図 5.20: 2009 年 7 月 6 日の推定結果 (particle)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.21: 2009 年 7 月 6 日の推定結果 (sooss)

| 推定法   | $\varepsilon_v^2$       | $\varepsilon_w^2$        | $MSE$                   |
|-------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| sooss | $1.0000 \times 10^{-2}$ | $1.0000 \times 10^{-12}$ | $5.3515 \times 10^{10}$ |

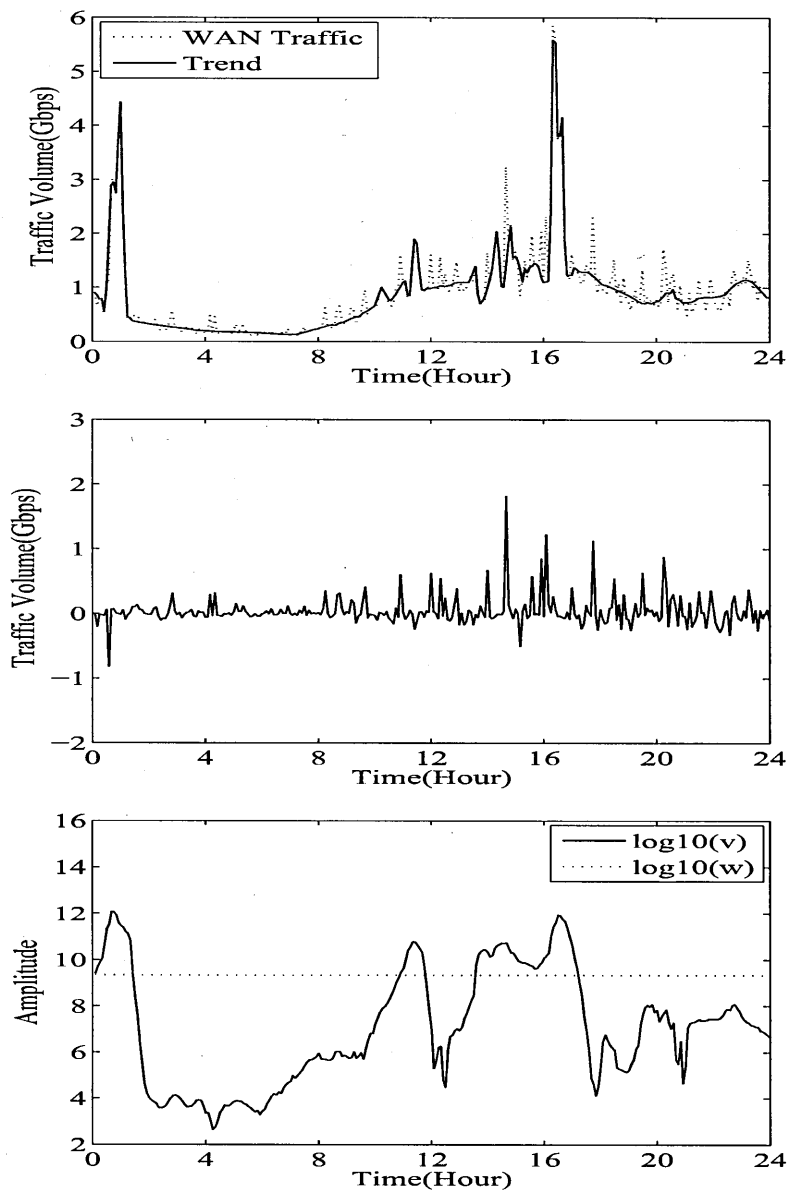


図 5.21: 2009 年 7 月 6 日の推定結果 (sooss)[トレンド成分 (上), 残差成分 (中), 超パラメータの変化 (下)]

表 5.22: 2009 年 7 月 7 日の推定結果 (Kalman)

| 推定法           | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|---------------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| <i>Kalman</i> | $1.9287 \times 10^3$ | $1.2355 \times 10^7$ | $1.3256 \times 10^{11}$ |

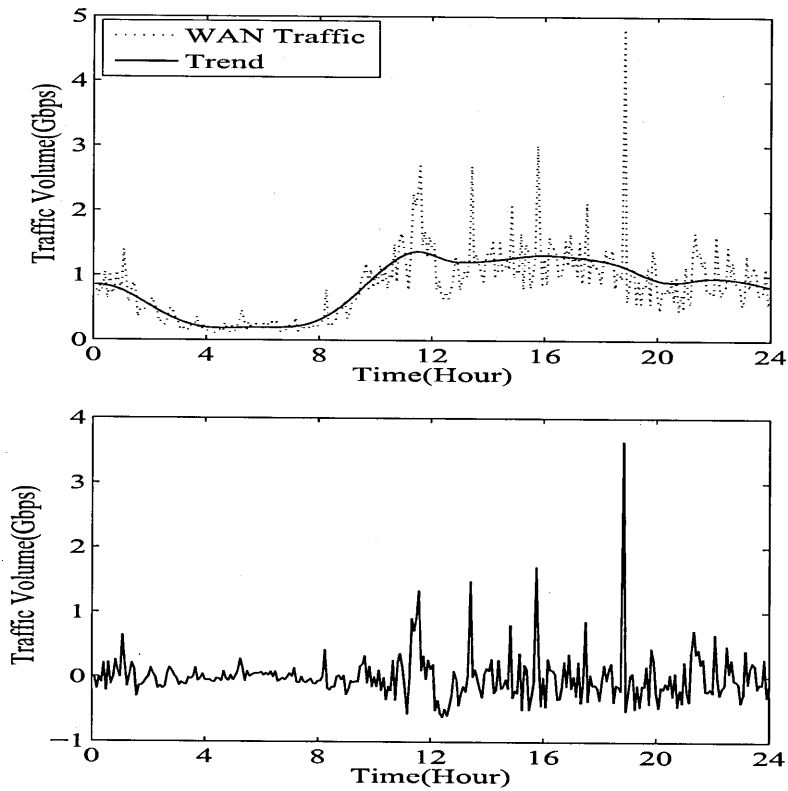


図 5.22: 2009 年 7 月 7 日の推定結果 (Kalman)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]



表 5.23: 2009 年 7 月 7 日の推定結果 (particle)

| 推定法             | $\tau^2$             | $\sigma^2$           | $MSE$                   |
|-----------------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| <i>particle</i> | $2.9652 \times 10^8$ | $3.3514 \times 10^9$ | $1.1207 \times 10^{11}$ |

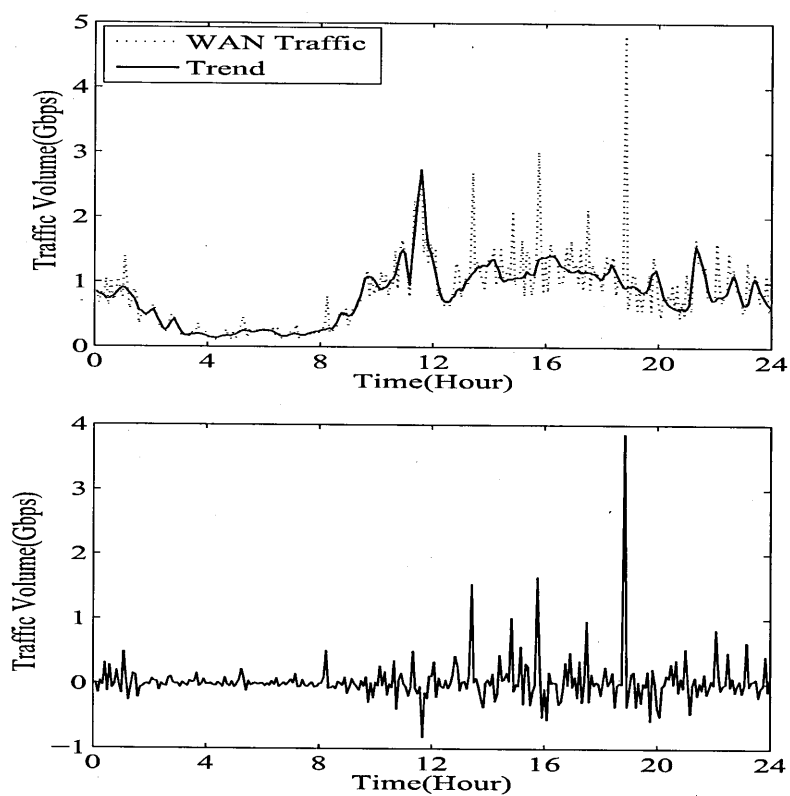


図 5.23: 2009 年 7 月 7 日の推定結果 (particle)[トレンド成分 (上), 残差成分 (下)]

表 5.24: 2009 年 7 月 7 日の推定結果 (sooss)

| 推定法   | $\varepsilon_v^2$       | $\varepsilon_w^2$       | $MSE$                   |
|-------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| sooss | $1.0000 \times 10^{-7}$ | $1.0000 \times 10^{-6}$ | $1.0931 \times 10^{11}$ |

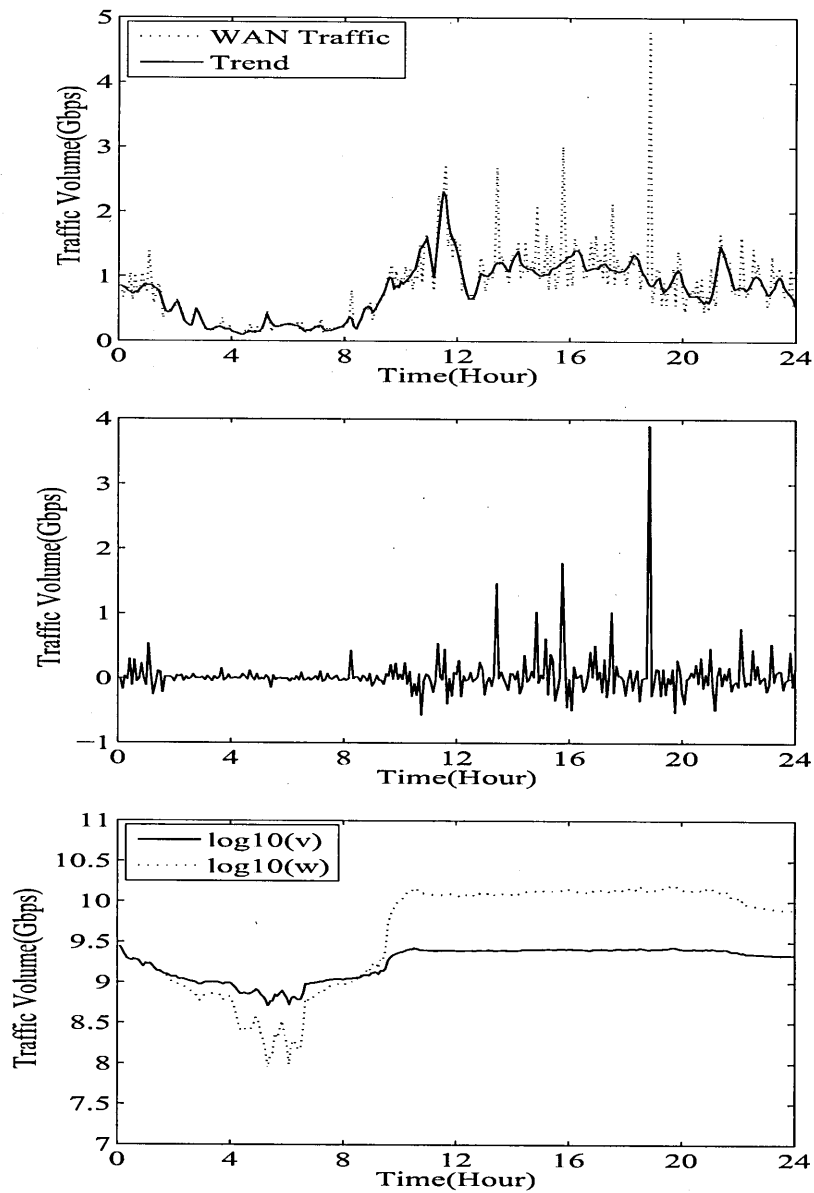


図 5.24: 2009 年 7 月 7 日の推定結果 (sooss)[トレンド成分 (上), 残差成分 (中), 超パラメータの変化 (下)]

### 5.3 考察

シミュレーションデータ, 実データすべての推定結果において自己組織型状態空間モデルの平均二乗誤差が最も小さく適合度が高いと示している.

シミュレーションデータの結果については, 推定結果のトレンド成分を比較する. カルマンフィルタでは跳躍的変動にはゆっくりと追従し, 突発的変動に影響されたトレンドが表現されている. しかし, 粒子フィルタ, 自己組織型状態空間モデルでは跳躍的変動には瞬時に追従し, 突発的変動の影響も回避したトレンドが表現されている. また, 短期の跳躍的変動は突発的変動に性質に近いが, すべての推定法でトレンド成分として表現されている. これより, 変動が5点ほど継続すれば局所的に増加したトラヒックもトレンドとして表現できると考えられる.

この結果を踏まえて実データの結果についても, 推定結果のトレンド成分を比較する. 全体的に複雑な変動が多いがシミュレーションデータの推定結果と同様にカルマンフィルタと粒子フィルタ, 自己組織型状態空間モデルとでは推定結果に大きな差がみられる. これはシステムノイズ, および観測ノイズに前提として与えた分布の違いによるものだと考えられる. 跳躍的変動に対してはシステムノイズにコーシー分布を用いたため予測の段階で急激な変動も含む幅広い変動を表現することができた. また, 突発的変動に対しては観測ノイズにコーシー分布を用いたため観測値と予測値が大きく離れても, 実現値として表現することができた. しかし, ガウス分布では性質上中央値付近の値しかとらないため大きな変動でもゆっくりと反応してしまい, 瞬時に追従, 回避ができなかったと考えられる. さらに, 自己組織型状態空間モデルでは超パラメータが時間とともに変化するため, 超パラメータの分散が一定である従来の推定法では同時に対応することが困難な小さな変動, 大きな変動の双方により詳細に対応できている.

よって, ネットワークトラヒックの成分分解には非線形非ガウス型の状態空間モデルを適用可能な粒子フィルタでの推定が適しており, 超パラメータを変化させながら最適な推定をおこなう自己組織型状態空間モデルの導入により推定精度のさらなる向上が期待できる.

また, 自己組織型状態空間モデルの超々パラメータをグリッドサーチ法のみで探索することで計算量は粒子フィルタと比べ大幅に減少し, 逐次推定に対する実用性の向上が考えられる.

## 結論

本論文では、WANのトラフィックデータを対象とした短期ネットワークトラフィックについて、統計的性質を分析するモデルに自己組織型状態空間モデルを導入することで推定精度の向上を示すことができた。また、超パラメータの時間変化をトラフィックパワーの時間推移と捉えることで構成的モデリングとの関連付けが可能になると考えられる。

しかし、成分構成モデルがトレンド成分と残差成分の2成分のみであったため、自己組織型状態空間モデルを用いてもモデル化し切れなかった突発的変動成分などが残差成分として表現されてしまった。また、超パラメータを時間とともに変化させることにより変動の激しいに対してもより追従するようになったが、他の成分で表現されるべき部分までトレンド成分として表現されているという懸念も残る。

今後は、自己組織型状態空間モデルに時変係数AR成分などの不規則変動成分を取り入れ突発的変動成分をモデル化することで残差成分の減少を図るとともに、トレンド成分の追従度の検証もおこなっていく。そして、構成的モデリングの精密化やトラフィック長期予測などへの応用に発展させ、ネットワークトラフィックの統計的性質をさらに明らかにしていきたい。

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、御指導、御教示いただいた八名 和夫教授に深く感謝致します。

また、四年間数多くの御協力をいただいた西本 将也氏、早坂 健志氏、依田 浩和氏、宮島 崇之氏、ならびに諸先輩方、そして八名研究室の皆様  
に厚く御礼申し上げます。

## 関連図書

- [1] Kitagawa, G, “A self-organizing state-space model”, Journal of the American Statistical Association, Vol.93, pp.1203-1215, 1998.
- [2] 北川源四郎, “知識発見と自己組織型の統計モデル”, bit 別冊発見科学とデータマイニング, pp.159-168, 2000.
- [3] 矢野浩一・佐藤整尚, “初期分布付き自己組織型状態空間モデルによる金融時系列解析の最前線:t 分布付き確率的ボラティリティ変動モデルへの応用”, FSA リサーチ・レビュー, pp.143-166, 2006.
- [4] 市村直幸, “自己組織型状態空間モデルを用いた運動軌跡のフィルタリング”, 情報処理学会研究報告, 2001-CVIM-128-2, pp.9-16, 2001.
- [5] 北川源四郎, “時系列解析入門”, 岩波書店, 2005.
- [6] 北川源四郎, “モンテカルロフィルタおよび平滑化について”, 統計数理, Vol.44, No.1, pp.31-48, 1996.
- [7] 樋口知之, “粒子フィルタ”, 電子情報通信学会誌, Vol.88, No.12, 989-994, 2005.
- [8] 天野康浩, “状態空間モデルを用いたネットワークトラヒックの成分分解”, 電子情報通信学会技術研究報告, ネットワークシステム 109(188), pp.13-17, 2009.

# 付 録 A カルマンフィルタの 導出

## A.1 1期先予測

式 1.3 から 1 期先の平均値と分散を導出する.

$$\begin{aligned}x_{t|t-1} &= E[x_t|Y_{t-1}] \\&= E[Fx_{t-1} + Gv_t|Y_{t-1}] \\&= FE[x_{t-1}|Y_{t-1}] + GE[v_t|Y_{t-1}] \\&= Fx_{t-1|t-1} + 0\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}V_{t|t-1} &= E[(x_t - x_{t|t-1})^2] \\&= E[(F(x_{t-1} - x_{t-1|t-1}) + Gv_t)^2] \\&= FE[(x_{t-1} - x_{t-1|t-1})^2]F^T + GE[v_t^2]G^T \\&= FV_{t-1|t-1}F^T + GQG^T\end{aligned}\tag{A.2}$$

なお, ここで  $Q$  はシステムノイズの分散であり,  $Q = \sigma^2$  である点に注意する. また, 式 1.4 に見られるような  $G^T$  の肩の  $T$  は転置行列を意味している.

## A.2 フィルタ

式から  $y_t$  の予測誤差を  $\epsilon_t$  とすると,

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= y_t - E[y_t|Y_{t-1}] \\&= Hx_t + w_t - E[Hx_t + w_t|Y_{t-1}] \\&= Hx_t + w_t - HE[x_t|Y_{t-1}] \\&= H(x_t - x_{t|t-1}) + w_t\end{aligned}\tag{A.3}$$

と表せる. これより

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\epsilon_t) &= E[(H(x_t - x_{t|t-1}) + w_t)^2] \\
&= HE[(x_t - x_{t|t-1})^2]H^T + E[w_t^2] \\
&= HV_{t|t-1}H^T + R
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(x_t, \epsilon_t) &= \text{Cov}(x_t, H(x_t - x_{t|t-1}) + w_t) \\
&= E[(x_t - x_{t|t-1})^2]H^T + E[(x_t - x_{t|t-1})w_t] \\
&= V_{t|t-1}H^T
\end{aligned} \tag{A.5}$$

式 A.4 で  $R$  は観測ノイズの分散値であり,  $R = \tau^2$  である. このとき  $Y_t = \{Y_{t-1}, y_t\} = Y_{t-1} \oplus \epsilon_t$  と, 正規分布の場合に  $x_t$  の  $Y_t$  に関する条件つき期待値が直交射影で表現できることを利用し, 以下のように表せる.

$$\begin{aligned}
x_{t|t} = E[x_t|Y_t] &= \text{Proj}(x_t|Y_t) \\
&= \text{Proj}(x_t|Y_{t-1}, \epsilon_t) \\
&= \text{Proj}(x_t|Y_{t-1}) + \text{Proj}(x_t|\epsilon_t)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$\text{Proj}(x_t|\epsilon_t)$  は  $x_t$  を  $\epsilon_t$  に回帰させることで得られるため, 式 A.4, A.5 により

$$\begin{aligned}
\text{Proj}(x_t|\epsilon_t) &= \text{Cov}(x_t, \epsilon_t)\text{Var}(\epsilon_t)^{-1}\epsilon_t \\
&= V_{t|t-1}H^T(HV_{t|t-1}H^T + R)^{-1}\epsilon_t
\end{aligned} \tag{A.7}$$

ここで  $\epsilon_t$  に対する回帰ベクトル  $V_{t|t-1}H^T(HV_{t|t-1}H^T + R)^{-1}$  を  $K_t$  とし, カルマンゲインと呼ぶ. したがって

$$x_{t|t} = x_{t|t-1} + K_t\epsilon_t \tag{A.8}$$

が得られる. さらに

$$\begin{aligned}
V_{t|t-1} &= E[(x_t - x_{t|t-1})^2] \\
&= E[(x_t - x_{t|t} + K_t\epsilon_t)^2] \\
&= V_{t|t} + K_t\text{Var}(\epsilon_t)K_t^T
\end{aligned} \tag{A.9}$$

これより

$$V_{t|t} = V_{t|t-1} - K_tHV_{t|t-1} \tag{A.10}$$

となる.



### A.3 平滑化

$\delta_{t-1} \equiv x_{t+1} - x_{t+1|t}$  を  $x_{t+1}$  の予測誤差とし,  $Z_t \equiv Y_t \oplus \delta_{t+1} \oplus \{v_{t+1}, \dots, v_T, w_{t+1}, \dots, w_T\}$  とすると,

$$\begin{aligned} z_t &\equiv \text{Proj}(x_t|Z_t) \\ &= \text{Proj}(x_t|Y_t) + \text{Proj}(x_t|\delta_{t+1}) \\ &\quad + \text{Proj}(x_t|v_{t+1}, \dots, v_T, w_{t+1}, \dots, w_T) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

とでき, 各項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{Proj}(x_t|Y_t) &= x_{t|t} \\ \text{Proj}(x_t|\delta_{t+1}) &= \text{Cov}(x_t, \delta_{t+1}) \text{Var}(\delta_{t+1})^{-1} \delta_{t+1} \\ \text{Proj}(x_t|v_{t+1}, \dots, v_T, w_{t+1}, \dots, w_T) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

となる. さらに

$$\begin{aligned} \text{Var}(\delta_{t+1}) &= V_{t+1|t} \\ \text{Cov}(x_t, \delta_{t+1}) &= \text{Cov}(x_t, F(x_t - x_{t|t}) + Gv_{t+1}) \\ &= E(x_t - x_{t|t})^2 F^T \\ &= V_{t|t} F^T \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

よって,  $A_t = V_{t|t} F^T V_{t+1|t}^{-1}$  とすると以下が求まる.

$$z_t = x_{t|t} + A_t(x_{t+1} - x_{t+1|t}) \quad (\text{A.14})$$

ここで,  $Z_t$  が  $Y_t$  を生成することを考慮すると,

$$\begin{aligned} x_{t|T} &= \text{Proj}(x_t|Y_T) \\ &= \text{Proj}(\text{Proj}(x_t|Z_T)|Y_T) \\ &= \text{Proj}(z_t|Y_T) \\ &= x_{t|t} + A_t(x_{t+1|T} - x_{t+1|t}) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

が得られる. さらに

$$x_t - x_{t|T} + A_t x_{t+1|T} = x_t + x_{t|t} + A_t x_{t+1|t} \quad (\text{A.16})$$

として  $E[(x_t - x_{t|T})x_{t+1|T}^T] = E[(x_t - x_{t|t})x_{t+1|t}^T] = 0$  を用い,

$$V_{t|T} + A_t E[x_{t+1|T} x_{t+1|T}^T] A_t^T = V_{t|t} + A_t E[x_{t+1|t} x_{t+1|t}^T] A_t^T \quad (\text{A.17})$$

が得られる. ここでさらに,

$$E[(x_{t+1} - x_{t+1|T})x_{t+1|T}^T] = 0$$

$$E[(x_t - x_{t|t})x_{t+1|t}^T] = 0$$

を用いると

$$\begin{aligned} E[x_{t+1|T}x_{t+1|T}^T] &= E[(x_{t+1|T} - x_{t+1} + x_{t+1})(x_{t+1|T} - x_{t+1} + x_{t+1})^T] \\ &= V_{t+1|T} + E[x_{t+1}x_{t+1}^T] + 2E[(x_{t+1|T} - x_{t+1})x_{t+1}^T] \\ &= V_{t+1|T} + E[x_{t+1}x_{t+1}^T] - 2E[(x_{t+1|T} - x_{t+1})(x_{t+1|T} - x_{t+1}^T)] \\ &= E[x_{t+1}x_{t+1}^T] - V_{t+1|T} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$E[x_{t+1|t}x_{t+1|t}^T] = E[x_{t+1}x_{t+1}^T] - V_{t+1|t} \quad (\text{A.19})$$

となる. これを式 A.17 に代入し, 以下を得る.

$$V_{t|T} = V_{t|t} + A_t(V_{t+1|T} - V_{t+1|t})A_t^T \quad (\text{A.20})$$

## 付 録 B 粒子フィルタの導出

### B.1 1期先予測

状態  $x_{n-1}$  の条件付き分布  $p(x_{n-1}|Y_{n-1})$ , の実現値とみなせる.  $m$  個の粒子  $f_{n-1}^{(1)}, \dots, f_{n-1}^{(m)}$  およびシステムノイズ  $v_n$  の独立値とみなせる. 粒子  $v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(m)}$  が与えられているものとする. すなわち,  $i = 1, \dots, m$  について

$$f_{n-1}^{(i)} \sim p(x_{n-1}|Y_{n-1}), v_n^{(i)} \sim q(v) \quad (\text{B.1})$$

が成り立つものとする. このとき,  $x_n$  の1期先予測分布は

$$\begin{aligned} p(x_n|Y_{n-1}) &= \iint p(x_n, x_{n-1}, v_n|Y_{n-1}) dx_{n-1} dv_n \\ &= \iint p(x_n|x_{n-1}, v_n|Y_{n-1}) \\ &\quad p(v_n|x_{n-1}, Y_{n-1}) p(x_{n-1}|Y_{n-1}) dx_{n-1} dv_n \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

と表せるが, システムノイズはそれ以前の状態や観測値と独立であることから  $p(v_n|x_{n-1}, Y_{n-1}) = p(v_n)$ , また,  $x_n$  は  $x_{n-1}$  と  $v_n$  だけに依存することから  $p(x_n|x_{n-1}, v_n, Y_{n-1}) = p(x_n|x_{n-1}, v_n) = \delta(x_n - F(x_{n-1}, v_n))$  が成り立つので

$$\begin{aligned} p(x_n|Y_{n-1}) &= \iint \delta(x_n - F(x_{n-1}, v_n)) p(v_n) p(x_{n-1}|Y_{n-1}) dx_{n-1} dv_n \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

が得られる. したがって,  $p(v_n)$  と  $p(x_{n-1}|Y_{n-1})$  の実現値  $v_n^{(j)}$  および  $f_{n-1}^{(j)}$  が得られているときには,  $p(x_n|Y_{n-1})$  の実現値  $p_n^{(j)}$  が

$$p_n^{(j)} = F(f_{n-1}^{(j)}, v_n^{(j)}) \quad (\text{B.4})$$

により得られる.

## B.2 フィルタ

分布  $p(x_n|Y_{n-1})$  の  $m$  個の独立な粒子  $p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}$  が与えられているとき、分布  $p(x_n|Y_{n-1})$  は経験分布関数

$$P_n(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(x, p_n^{(i)}) \quad (\text{B.5})$$

により近似していることに相当する。ただし、 $I(x, a)$  は  $x < a$  のとき  $I(x, a) = 0$ 、その他のとき  $I(x, a) = 1$  により定義される関数である。これは予測分布  $p(x_n|Y_{n-1})$  が確率関数

$$P_r(x_n = p_n^{(j)}|Y_{n-1}) = \frac{1}{m}, j = 1, \dots, m \quad (\text{B.6})$$

により近似されることを意味している。このとき、観測値  $y_n$  が与えられ、事後分布が

$$\begin{aligned} P_r(x_n = p_n^{(j)}|Y_n) &= P_r(x_n = p_n^{(j)}|Y_{n-1}, y_n) \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P_r(x_n = p_n^{(j)}, y_n \leq y < y_n + \Delta|Y_{n-1})}{P_r(y_n \leq y < y_n + \Delta|Y_{n-1}))} \\ &= \frac{p(y_n|p_n^{(j)})P_r(x_n = p_n^{(j)}|Y_{n-1})}{\sum_{i=1}^m p(y_n|p_n^{(i)})P_r(x_n = p_n^{(i)}|Y_{n-1})} \\ &= \frac{\alpha_n^{(j)} \cdot \frac{1}{m}}{\sum_{i=1}^m \alpha_n^{(i)} \cdot \frac{1}{m}} = \frac{\alpha_n^{(j)}}{\sum_{i=1}^m \alpha_n^{(i)}} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

で求められる。この  $P_r((x_n) = p_n^{(j)}|Y_n)$  に対応する累積分布関数

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^m \alpha_n^{(i)}} \sum_{i=1}^m \alpha_n^{(i)} I(x, p_n^{(i)}) \quad (\text{B.8})$$

は  $m$  個の点  $p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}$  だけで  $\alpha_n^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(m)}$  に比例する量のジャンプをもつ。

この式 B.8 により、フィルタの分布の近似が得られたことになるが、次の時点で予測のステップの計算式 B.1 を行うためには等確率の  $m$  個の粒子  $f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(m)}$  で表現しなおす必要がある。これは式 B.8 の分布を経験分布関数

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(x, f_n^{(i)}) \quad (\text{B.9})$$

により表現することに相当するが,  $m$  個の粒子  $\{p_n^{(j)}, \dots, p_n^{(m)}\}$  を確率

$$P_r(f_n^{(j)} = p_n^{(j)} | Y_n) = \frac{\alpha_n^{(j)}}{\alpha_n^{(1)} + \dots + \alpha_n^{(m)}}, j = 1, \dots, m \quad (\text{B.10})$$

でリサンプリングすることにより  $\{f_n^{(j)}, \dots, f_n^{(m)}\}$  を求めることができる.

$P_r(x_1 = s_{1|n-1}^{(j)}, \dots, x_{n-1} = s_{n-1|n-1}^{(j)} | Y_{n-1}) = 1/m$ , および  $v_n^{(j)} \sim q(v)$  が成り立つものとし,  $(p_{1|n-1}^{(j)}, \dots, p_{n|n-1}^{(j)})$  を以下のように定義する.

$$p_{i|n-1}^{(j)} = \begin{cases} s_{i|n-1}^{(j)} & i = 1, \dots, n-1 \\ F(s_{n-1|n-1}^{(j)}, v_n^{(j)}) & i = n \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

このとき,  $(p_{1|n-1}^{(j)}, \dots, p_{n|n-1}^{(j)})$  は観測値  $Y_{n-1}$  が与えられたときの  $(x_1, \dots, x_n)$  の同時分布の実現値とみなすことができる.

次に観測値  $y_n$  が与えられるとき, 分布  $P_r(x_1 \leq p_{1|n-1}^{(j)}, \dots, x_n \leq p_{n|n-1}^{(j)} | Y_{n-1})$  は次のよう更新される.

$$\begin{aligned} & P_r(x_1 = p_{1|n-1}^{(j)}, \dots, x_n = p_{n|n-1}^{(j)} | Y_n) \\ &= P_r(x_1 = p_{1|n-1}^{(j)}, \dots, x_n = p_{n|n-1}^{(j)} | Y_{n-1}, y_n) \\ &= \frac{p(y_n | x_n = p_{n|n-1}^{(j)}, \dots, x_1 = p_{1|n-1}^{(j)})}{p(y_n | Y_{n-1})} \\ &\times P_r(x_1 = p_{1|n-1}^{(j)}, \dots, x_n = p_{n|n-1}^{(j)} | Y_{n-1}) \\ &= \frac{p(y_n | p_{n|n-1}^{(j)}) P_r(x_1 = p_{1|n-1}^{(j)}, \dots, x_n = p_{n|n-1}^{(j)} | Y_{n-1})}{p(y_n | Y_{n-1})} \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

$p_{n|n-1}^{(j)}$  はフィルタのアルゴリズム式 B.5 の  $p_n^{(j)}$  と同一なので, 平滑化の分布  $p(x_1, \dots, x_n | Y_n)$  は  $m$  個の  $n$  次元ベクトル  $(p_{1|n-1}^{(j)}, \dots, p_{n|n-1}^{(j)})^T, j = 1, \dots, m$  をフィルタの場合と同じ重みでリサンプリングすればよいことになる.