

# スライディングモード制御による微分ゲーム の極値探索

坂本, 憲昭 / SAKAMOTO, Noriaki

---

(出版者 / Publisher)

法政大学経済学部学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

経済志林 / 経済志林

(巻 / Volume)

78

(号 / Number)

4

(開始ページ / Start Page)

321

(終了ページ / End Page)

339

(発行年 / Year)

2011-03-10

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00007455>

# スライディングモード制御による 微分ゲームの極値探索

坂 本 憲 昭

## 概要

本論文は、モデルの状態遷移を表すシステム行列 (A) が未知である線形 2 次形式の微分ゲーム ( $\dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2$ ) に対して、ニューラルネットワークを用いた自己適応型スライディングモード制御により Nash 解を探索するものである。シミュレーションの結果、引用文献の Nash 解と Riccati 代数方程式による最適制御の解と比較して優位な解が得られたことを示す。

## 1. はじめに

微分ゲームとスライディングモード制御の歴史的つながりを述べる。1960年に当時ソ連の数学者Filippovが微分方程式の右辺が不連続な場合の解 (Filippov 1960), 1961年にAlimovが微分方程式の右辺に不確かさがある場合の解を示した (Alimov 1961)。微分ゲームのバイブル的存在Isaacsの”Differential Games” は1965年発行である (Isaacs 1965)。これらの研究を基礎としてカリフォルニア大学のLeitmann, Gutmanらは、不確かさをもつ微分ゲームに対する不連続な入力(制御ロジック)を提案し (Stalford 1971, Gutmann 1975a,1975b), その後、この制御ロジックはDeterministic

ControllerまたはMin-Max Controllerと称され1980年代まで関連研究の発表が続く（例えば、Leitmann 1979, Cheres 1989など）。

Filippovによる微分方程式の右辺が不連続な場合の研究は、ソ連において別の流れとして、可変構造制御理論（Variable Structure Control）および、のちのスライディングモード制御（Sliding Mode Control）の出発点となる。1969年に不確かさに打ち勝つスライディングモードの基本形が発表され（Drazenovic 1969）、Utkin 1977年のサーベイ論文により西側諸国に広く知られるようになる。どちらの流れも、微分方程式の右辺に不確かさや不連続を有する場合にも解の存在条件を前提にして、提案する戦略的理論的安定性を示すものである。

Leitmann, Gutmanらの制御ロジックとスライディングモード制御は、どちらも制御対象の不確かさや外乱に打ち勝つために、制御入力を切換えて、状態を設計した関数に拘束する手法である。したがってその一体化は必然的であり、Gutman 1982, Ryan 1984, Madami-Esfahani 1986, Chen 1986等により、安定性、切換関数への拘束性、不確かさや外乱に対する感度についての議論に続く。その後は制御理論・制御工学の分野において、スライディングモード制御が主となり、理論的研究、解析、実機への適用と研究が今日まで継続されている。

一方、微分ゲーム問題に対しては、近年では  $H^\infty$  制御の適用（Uchida 1989）や確率微分方程式の活用などがおこなわれている（向谷 2009に解説）。また、モデルに不確かさや外乱を有する場合、特異摂動システム、大規模システムなどの問題に対するアプローチとして、たとえば、向谷 1995, Amato 2002, Broek 2003, 向谷2003, Gallegos 2005, Mukaidani 2007などがあげられる。しかしながら、微分ゲームモデルの不確かさに関する従来研究では、モデルの値が不正確（not know exactly）でもよいが、未知（unknown）には対応しておらず、その分野の研究はおこなわれていないようである。そこで、著者はおもにプロセス系を制御対象としてモデルの情報が未知でも適用可能なセルフチューニング的なスライディングモード制

御を提案しており、本論文でこの手法を微分ゲーム問題に拡張する。評価（コスト）関数に対応するため、解を探索する学習ツールとしてニューラルネットワークを用いる。

2章では対象とする微分ゲーム問題と代表的な解法のひとつである最適制御を示す。3章ではスライディングモード制御の概要を説明し、微分ゲーム問題に対する研究事例を紹介する。4章において著者が提案するセルフチューニング的な自己適応型スライディングモード制御を紹介し、5章で微分ゲーム問題に対応するためニューラルネットワークを導入する。6章では数値例で提案手法の有効性を示す。最後にまとめと今後の課題を述べる。

## 2. 微分ゲーム問題

### (1) 対象モデル

本研究では以下の2次の線形時不変システム、

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), X(0) = X_0 \text{ (初期値)} \\ X(t) &= [x_1(t) \ x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2, u_1(t) \in \mathbb{R}, u_2(t) \in \mathbb{R}, t \text{ は時刻} \end{aligned} \quad (1)$$

を考える。A は  $2 \times 2$  の定数行列（以下、システム行列とよぶ）、B は  $2 \times 1$  の正の定数行列（以下、入力行列とよぶ）であり、(A, B) は可制御とする。誤解を生じない限り今後は (t) を省略する。

式(1) を微分ゲーム理論で扱うモデルと考えれば、2名のプレーヤーが参加する非零和・非協力の線形2次形式の微分ゲームであり、 $x$  はゲームの状態変数、 $u$  は各プレーヤーの戦略を表す。一方、制御工学からみれば2入力の線形時不変な2次システムであり、 $x$  は状態変数、 $u$  は制御入力を表す。

次に、微分ゲーム理論ではコスト関数、制御工学では評価関数（または2次形式評価関数、quadratic cost function）を導入する。添字の1,2は各プ

レーヤーに対応する。

$$J_1 = \int_0^{\infty} (X^T Q_1 X + U^T R_1 U) dt, \quad U^T = [u_1 \quad u_2], \quad (2)$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} (X^T Q_2 X + U^T R_2 U) dt \quad (3)$$

設計者が設計する重み行列,  $Q_{1,2}$  ( $2 \times 2$  の対象準正定行列) の値を大きくとると状態がゼロに到達する時間が速くなり, 同じく重み  $R$  ( $2 \times 2$  の対象準正定行列) の値を大きくすると制御入力小さくなる。各重みの設定は任意であるが, 状態が任意の初期位置から原点に収束するまでの到達時間を短くするためには, それだけ過大な制御入力を要求することになりトレードオフの問題である。

目的は  $X(\infty) = 0$  を保証しつつ,  $J_1 + J_2$  を最小にする戦略  $U$ , 具体的には

$$u_1 = K_1 X = [k_{11} \quad k_{12}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = K_2 X = [k_{21} \quad k_{22}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

の,  $K_1, K_2$  を求めることである。この値が微分ゲーム問題では Nash 解 (またはナッシュ均衡解 Nash equilibrium) であり<sup>1)</sup>, 制御工学では状態フィードバックゲインという。なお,  $K_1, K_2$  は一意に決まるものではない。

## (2) 最適制御

解を求める方法は微分ゲームの分野, 制御工学の分野とそれぞれにおいて非常に多くの研究が発表されている。典型的な解である Nash 解は, 制御工学分野における最適制御問題に定式化できることが知られている (Starr 1969 P163, 望月 1989, Basar 1995 P247, Engwerda 2005 P359)。すなわち, Riccati 代数方程式 (algebraic Riccati equation) の解を用いる手法である。具体的には式 (4) の,  $K_1, K_2$  を次式から求める。

1) 研究者によっては異論があるかもしれないが, 本稿では提案手法と比較のために 6 章で引用する文献 Pan 2004 の表現をそのまま用いた。

$$K_i = -R_i^{-1}B_i^T P_i, \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

$P$  は次のRiccati代数方程式の正定対象解である。

$$A^T P_i + P_i A + Q - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i = 0 \quad (6)$$

$K_1, K_2$  を求める際には、式(6)からわかるようにすべての情報 ( $A, B, Q, R$ ) が必要であることを指摘しておく。

### 3. スライディングモード制御

一方、解法のひとつとして近年スライディングモード制御 (Sliding Mode Control, 以下SMC) による極値探索が提案されている (Pan 2004, Jimenez 2006)。SMCは制御対象のパラメータ変動や外乱などの不確かさに打ち勝つ制御ロジックであり、その特徴は、設計した切換関数に制御対象の状態を拘束することで強いロバスト性 (頑健性) を有することにある。拘束された状態は切換関数上を目標値に向かって収束し、この拘束されている状態をスライディングモードという。以下にSMCの概要を説明する。適用するユーザーは始めに切換関数を設計する。本論文では対象が2次システムであるから切換関数を直線、および、目標値を原点として次式で定義する。

$$\text{切換関数 : } SX = s_1 x_1 + s_2 x_2, \quad s_1 > 0, \quad s_2 > 0 \quad (7)$$

制御入力は、状態を切換関数に拘束するための切換入力  $u_{sw}$  と、スライディングモードにある状態を原点 ( $X \rightarrow 0$ ) に収束するための等価入力  $u_{eq}$  の和で与える。

$$\text{制御入力 : } u = u_{eq} + u_{sw} \quad (8)$$

切換入力とは、切換関数 (式(7)) に対する状態の位置に応じて、 $u_{sw}$  の符号を切り換えるものである。制御された状態の概念をFig.1の位相平面図で

示す。SMC適用による応答は、状態は任意の初期位置から切換関数に収束して拘束され、原点（目標値）まで滑る軌道を描く。

Pan 2004は、SMCによる極値探索がNash解を得る問題に拡張できることを示した。式(7)の切換関数を

$$SX = J_i - g_i, \dot{g}_i = -\rho_i, i = 1, 2 \quad (9)$$

と定義することに特徴がある ( $J_{1,2}$  は式(2), (3))。しかしながら、この手法は対象モデルや評価関数などのすべての情報が必要であり、その場合には、Riccati代数方程式を解くことが可能である。したがって、最適制御と比較して有利な特徴を見出すことができない。さらに、Nash解よりも良い結果を得るために、 $\rho_i$  を正の定数や1次関数で与えるなどの試行錯誤を必要とする。

Jimenez 2006は、外乱を有する時変システムを対象モデルとし、Nashによるアプローチを適用するためにSMCを使って外乱を推定する。その結果によればSMCを付加した方が良好な結果を得ることを示している。このよ

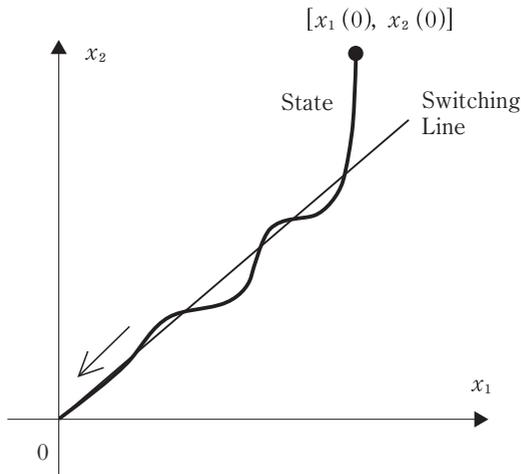


Fig.1 スライディングモード

うに最近の研究では、1章でも述べたが式(1)の時変  $(A(t), B(t))$ , パラメータ変動, 外乱などが研究対象となっている。

#### 4. 自己適応型スライディングモード制御

Jimenez 2006が外乱を扱ったように、現実には外乱のほかにもパラメータ変動や不確かさなどが存在する場合が多い。そのような制御対象を扱う制御ロジックがロバスト制御であり、そのひとつがSMCである。しかしながら、SMCを適用するためにはロバスト性に依存して正確ではなくても制御対象の規範 (nominal) モデルが必要である。そこで著者はSMCをより容易に適用できるように、制御対象のシステム行列, 入力行列および外乱などの不確かさの情報が未知で、状態変数と目標値, 切換関数のみから制御入力を算出する自己適応型スライディングモード制御 (Self-adaptation Sliding Mode Controller, 以下SA-SMC) を提案し、その有効性を示してきた (坂本 2006a, 2006b, 2010)。

本論文では、システム行列が未知の線形2次形式の微分ゲームを対象として、SA-SMCに評価関数を最小にする切換関数をニューラルネットワークにより探索することを新たに付加し、その制御応答からNash解を得ることを検討する。Pan 2004, Jimenez 2006の手法に比べて、(1) システム行列の情報を必要としない、(2) ニューラルネットワークの若干の調整だけで済む、(3) さまざまな評価関数を容易に扱うことができる、などの特徴を有する。

以下では、1入力システムでSA-SMCの導出を紹介すると同時に安定性を証明する。証明のためにモデルのパラメータを設定しているが、制御入力を算出する際にはシステム行列のパラメータは不要である。なお、実際のモデル式(1)に適用する具体的な方法については、ニューラルネットワークを含めて次章で説明する。

式(1)は2次の線形時不変システムであるから、1入力のみを考えれば以下の可制御正準形に変形することができる。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1x_1 + a_2x_2 + bu \end{cases} \quad (10)$$

切換関数を前章と同じく次式で定義する。

$$\sigma = SX = s_1x_1 + s_2x_2 \quad (7)$$

$s_1, s_2$ はユーザーが唯一設定しなければならないパラメータである。上式を微分して式(10)の関係より、

$$\dot{\sigma} = s_1\dot{x}_1 + s_2\dot{x}_2 = s_1x_2 + s_2\dot{x}_2 \quad (11)$$

ここで制御入力を

$$u = u_{eq} + u_{sw} \quad (12)$$

とおく。始めに状態を原点に収束させる等価入力  $u_{eq}$  をスライディングモード状態

$$\sigma = \dot{\sigma} = 0, u_{sw} = 0 \quad (13)$$

であることを利用して求める。式(11), (13)より

$$\begin{aligned} s_2\dot{x}_2 &= -s_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{s_1}{s_2}\right)x_2 \end{aligned} \quad (14)$$

上式左辺に式(10)の  $\dot{x}_2$  右辺を代入して  $u_{sw} = 0$  より

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + bu_{eq} &= -\left(\frac{s_1}{s_2}\right)x_2, \\ u_{eq} &= -\left(\frac{s_1}{s_2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)x_2 - \left(\frac{1}{b}\right)a_1x_1 - \left(\frac{1}{b}\right)a_2x_2 \end{aligned} \quad (15)$$

等価入力  $u_{eq}$  を算出するに際し、上式の  $a_1$ ,  $a_2$  が未知である条件より推定値として  $a_1^E$ ,  $a_2^E$  とおく。

$$u_{eq} \triangleq -\left(\frac{s_1}{s_2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)x_2 - \left(\frac{1}{b}\right)a_1^E x_1 - \left(\frac{1}{b}\right)a_2^E x_2 \quad (16)$$

この推定値を求めるための準備として、次式を求めておく。式(11)を用いて

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{b}\right)\dot{\sigma} &= \left(\frac{1}{b}\right)s_1 x_2 + \left(\frac{1}{b}\right)s_2 \dot{x}_2 \\ &= \left(\frac{1}{b}\right)s_1 x_2 + \left(\frac{1}{b}\right)s_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + b u_{eq} + b u_{sw}) \\ &= \left(\frac{1}{b}\right)s_1 x_2 + \left(\frac{1}{b}\right)s_2 a_1 x_1 + \left(\frac{1}{b}\right)s_2 a_2 x_2 + \left\{-\left(\frac{s_1}{b}\right)x_2 - \left(\frac{1}{b}\right)a_1^E x_1 - \left(\frac{1}{b}\right)a_2^E x_2\right\} + s_2 u_{sw} \\ &= \left(\frac{s_2}{b}\right)(a_1 - a_1^E)x_1 + \left(\frac{s_2}{b}\right)(a_2 - a_2^E)x_2 + s_2 u_{sw} \end{aligned}$$

Lyapunovの安定定理を用いて状態が原点に収束することを保証する。Lyapunov関数を

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\right)\sigma^2 + \frac{1}{2}\{(a_1 - a_1^E)^2 + (a_2 - a_2^E)^2\} \quad (18)$$

と定義する。 $b$  は正の定数であるから  $V \geq 0$  を満たす。続いて導関数を求める。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma\left(\frac{1}{b}\right)\dot{\sigma} + \{-\dot{a}_1^E (a_1 - a_1^E) - \dot{a}_2^E (a_2 - a_2^E)\} \\ &= \sigma\left\{\left(\frac{s_2}{b}\right)(a_1 - a_1^E)x_1 + \left(\frac{s_2}{b}\right)(a_2 - a_2^E)x_2 + s_2 u_{sw}\right\} + \{-\dot{a}_1^E (a_1 - a_1^E) - \dot{a}_2^E (a_2 - a_2^E)\} \\ &= \left\{\left(\frac{s_2}{b}\right)ax_1 - \dot{a}_1^E\right\}(a_1 - a_1^E) + \left\{\left(\frac{s_2}{b}\right)ax_2 - \dot{a}_2^E\right\}(a_2 - a_2^E) + s_2 \sigma u_{sw} \end{aligned}$$

ここで

$$\dot{a}_1^E \triangleq \left(\frac{s_2}{b}\right)\sigma x_1, \quad \dot{a}_2^E \triangleq \left(\frac{s_2}{b}\right)\sigma x_2 \quad (19)$$

と定義すれば、

$$\dot{V} \leq |s_2 \sigma| u_{sw}$$

さらに、切換入力を次式で定義すれば、

$$u_{sw} \triangleq -|s_2 \sigma| \operatorname{sgn}(s_2 \sigma) \quad (20)$$

$$\dot{V} \leq -(s_2 \sigma)^2 s_2 \leq 0$$

$V \geq 0$ ,  $\dot{V} \leq 0$ より安定性が証明された。

式(19)を制御中に計算機にて数値積分して式(16)に代入、および式(20)により制御入力を算出する。また、状態変数の微分値は、制御中に計算機にて数値微分により求める。

適用するユーザーが唯一設定しなければならないパラメータは、式(7)の切換関数の係数  $[s_1, s_2]$  である。これまでに著者は、調節アルゴリズムによりセルフチューニングして切換関数を決定する手法を提案し(坂本 2006b)、いくつかの実験でその効果を示してきたが、今回はこれまで検討しなかった評価関数(式(2), (3))を導入する。

## 5. ニューラルネットワークによる切換関数の探索

一般的なSMCの切換関数  $S$  の設計方法として

$$S = R^{-1} B^T P \quad (21)$$

が知られている(野波 1994)。右辺は式(5)に示したRiccati代数方程式を用いる解と同じである。SA-SMCではシステム行列が未知を前提にしているためRiccati代数方程式を解くことはできない。そこで、SA-SMCを適用して制御しつつ評価関数を最小にする切換関数を探索すれば、それがNash解のひとつに相当するはずである。すなわち、評価関数を最小にする式(7)を探索することができれば、それは式(21)の左辺であり、Riccati代数方程

式を用いるNash解のひとつに相当する。

制御中に評価関数を最小にする切換関数を探索するために、学習ツールとしてニューラルネットワーク (Neural Network, 以下NN) を適用する。SMCにNNを活用した研究はすでにいくつも提案されているが、いずれも制御対象や外乱の同定、等価入力や切換入力を決定するために用いられている (例えば, 美口 1997, Hwang 2002, Topalov 2007)。これらの従来研究のなかでTsai 2004は, NNにより切換関数の値, 式(7)の  $\sigma$  が最小になるように学習して等価入力  $u_{eq}$  を求めている。このアルゴリズムを利用して, 評価関数  $J$  が最小になるように学習して切換関数の係数  $[s_1, s_2]$  を求めるNNをSA-SMCに付加することにする。以下, SA-SMC+NNと称する。

適用するNNは, 一般的な3層 (入力, 中間, 出力), 学習は誤差逆伝搬法である。信号の流れをFig.2に示す。すべてを計算機上で実現しているため, 対象モデルの微分方程式を4次のRunge-Kutta法により解いているが, 実機や現実問題に適用する場合には, この部分が実データ  $x_1, x_2$  となる。制御開始から切換関数をNNの出力により動的に与え, 同時に  $J$

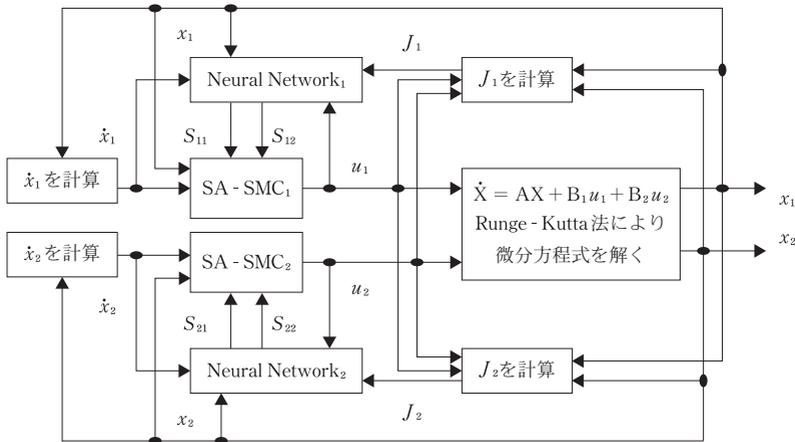


Fig.2 NNを適用したSA-SMCによる極値探索

が小さくなるようにNNで学習をおこなう。すなわち, 制御前学習ではなくオンライン学習である。

## 6. シミュレーションによる検討

Pan 2004で用いられた数値例を検討する。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 \\ 0.1 & -0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R_1 = 0.2 \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R_2 = 0.1$$

文献で求められているNash解は  $K_1 = [1.643 \quad 0.0265]$ ,  $K_2 = [0.095 \quad 3.6658]$ 。御系設計ツールOctave<sup>2)</sup>により最適制御を求めると  $K_1 = [1.647 \quad 0.102]$ ,  $K_2 = [0.0699 \quad 3.6649]$ である (Table.1 No.1, No.2参照)。これらの値を用いたシミュレーション結果をTable.2 No.1, No.2に示す。Table.2の  $t_1$ ,  $t_2$  の値はそれぞれ制御開始から  $x_1 < 0.1$ ,  $x_2 < 0.1$  を満足するまでの収束時間である。Nash解と最適制御の状態フィードバックゲインは値が近く, シミュレーション結果にも大きな違いはみられない。これは微分ゲーム問題が最適制御問題に定式化できることを裏付けているといえよう。

次にSA-SMC+NNの適用結果をTable.3に示す。NNは学習であり常に同じ結果を得られないので, 10回の試行のうち  $J_1 + J_2$  および  $t_1 + t_2$  の最悪値と最良値の結果を示す。代表してNo.5の応答の履歴をFig.3~Fig.5に示す。評価関数および収束時間の最悪値でもNash解と最適制御によるフィードバック制御よりも良好な結果 (コストが小さく, 収束時間が早い) を得ている。

この結果を参照して  $S_1 = [s_{11}, s_{12}]$ ,  $S_2 = [s_{21}, s_{22}]$  (式(21)の左辺) を定めてNash解および最適制御に相当する値 (状態フィードバックゲイン) を

2) <http://www.gnu.org/software/octave/>

求める。Fig.5から、 $S_1 = [s_{11}, s_{12}]$ ,  $S_2 = [s_{21}, s_{22}]$  の各位相図がヒステリシスをもつ直線に近い応答になっている。このほかの結果も同様である。 $S_1$ ,  $S_2$  を定めるために、理論上はNNとしては評価関数を最小にする値として出力しているので、この直線上の点であれば任意の箇所でもよいと考えられるが、最悪の評価関数の値に対応したときを考えて、 $\|S_1\|$ ,  $\|S_2\|$ の最大値を採用する。その値をTable.4に示す。

**Table.1 Nash解と最適制御（状態フィードバックゲイン）**

No.		$K_1$		$K_2$	
		$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{21}$	$k_{22}$
1	Nash 解	1.643	0.0265	0.095	3.666
2	最適制御	1.647	0.102	0.0699	3.665

**Table.2 Nash解と最適制御によるシミュレーション結果**

No.		$J_1$	$J_2$	$J_1 + J_2$	$t_1 = (x_1 < 0.1)$	$t_2 = (x_2 < 0.1)$	$t_1 + t_2$
1	Nash 解	947	2966	3913	2.3	4.2	6.5
2	最適制御	947	3040	3987	2.3	4.3	6.6

**Table.3 SA-SMC+NNによるシミュレーション結果**

No.		$J_1$	$J_2$	$J_1 + J_2$	$t_1 = (x_1 < 0.1)$	$t_2 = (x_2 < 0.1)$	$t_1 + t_2$
3	$J_1 + J_2$ 最悪値	1485	1423	<b>2909</b>	1.5	1.5	3.1
4	$t_1 + t_2$ 最悪値	1179	1521	2701	2.5	2.2	<b>4.7</b>
5	$J_1 + J_2$ 最良値	1274	1362	<b>2637</b>	2.6	1.8	4.4
6	$t_1 + t_2$ 最良値	1485	1423	2909	1.5	1.5	<b>3.1</b>

**Table.4 状態フィードバックゲイン（探索結果）**

No.	SA-SMC+NN	$K_1$		$K_2$	
		$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{21}$	$s_{22}$
3	$J_1 + J_2$ 最悪値	2.035	2.145	1.789	1.843
4	$t_1 + t_2$ 最悪値	1.176	1.021	1.237	0.711
5	$J_1 + J_2$ 最良値	0.943	1.611	1.627	0.574
6	$t_1 + t_2$ 最良値	2.035	2.145	1.789	1.843

Table.5 シミュレーション結果 (探索結果による状態フィードバック)

No.		$J_1$	$J_2$	$J_1 + J_2$	$t_1 = (x_1 < 0.1)$	$t_2 = (x_2 < 0.1)$	$t_1 + t_2$
7	Table4 No.3&No.6	1997	1453	3451	0.7	1.1	<b>1.8</b>
8	Table4 No.4	1279	1324	<b>2603</b>	1.5	1.4	2.9
9	Table4 No.5	1370	1337	2707	1.2	1.5	2.7

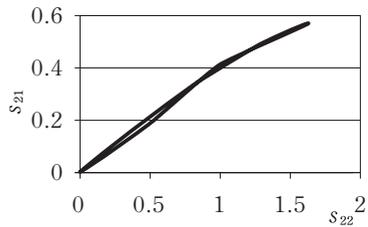
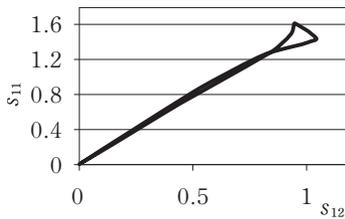
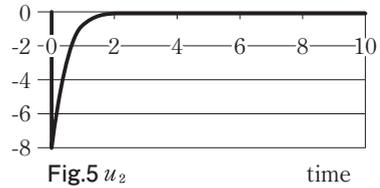
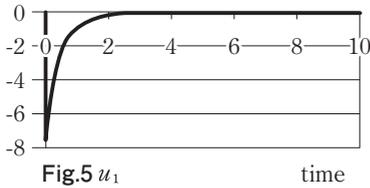
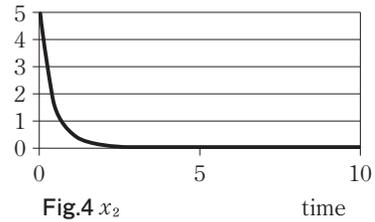
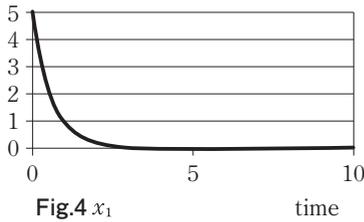


Table.4の値を用いて、Nash解と最適制御と同様にシミュレーションした結果がTable.5である（No.3とNo.6は状態フィードバックゲインが同じ値なので同一結果）。Table.2と比較してすべての場合で優位な結果を得ており、平均で評価関数は26%、収束時間は62%改善された。

## 7. おわりに

ある線形2次形式の微分ゲーム問題に対して、ニューラルネットワークを付加した自己適応型スライディングモード制御によりNash解を探索する手法を提案した。提案手法は、制御ロジックを適用する手間はがあるが、システム行列が未知であっても適用可能である。また、複雑な評価関数が設定された場合、Riccati代数方程式を解くことが困難な場合でも、ニューラルネットワークによる学習により容易に適用することができる。すなわち、ブラックボックスな微分ゲーム問題に対して、状態変数からのみ制御入力を計算して制御をおこない、状態変数をゼロに収束させれば、Nash解のひとつが得られるものである。数値例では、引用文献のNash解と制御系設計ツールで求めた最適制御と比較して優位な結果を得た。今後の課題としては、 $S_1$ ,  $S_2$  を選択する方法の検討、外乱を有する場合の検討などがあげられる。

## 文献

- Alimov, Yu. I. (1961). On The Application of Lyapunov's Direct Method to Differential Equations with Ambiguous Right Sides, *Automation and Remote Control*, Vol.22, No.7, pp.713-725.
- Amato, F., Mattei, M. and Pironti, A. (2002). Guaranteeing cost strategies for linear quadratic differential games under uncertain dynamics, *Automatica*, Vol.38, pp.507-515.
- Basar, T. and Olsder, G.J. (1995). *Dynamic Noncooperative Game Theory* (Second Edition), Academic Press.
- Broek, W. A., Engwerda, J. C., and Schumacher, J. M. (2003). Robust Equilibria in Indefinite Linear-Quadratic Differential Games, *Journal of Optimization Theory and Applications*: Vol.119, No.3, pp.565-595.
- Cheres, E., Gutman, S. and Palmor, Z. J. (1989). Stabilization of Uncertain Dynamic Systems Including State Delay, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol.34, No.11, pp.1199-1203.
- Chrn, Y. H. (1986). On the Deterministic Performance of Uncertain Dynamical Systems, *International Journal of Control*, Vol.43, No.5, pp.1557-1579.
- Drazenovic, B. (1969). The Invariance Conditions in Variable Structure Systems, *Automatica*, Vol.5, pp.287-295.
- Engwerda, J. C. (2005). *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*, John Wiley & Sons Ltd.
- Filippov, A. F. (1960). Application of the theory of differential equations with discontinuous right-hand sides to non-linear problems in automatic control, *First IFAC Congress, Moscow(USSR)*, pp.923f.
- Gallegos, C. J. (2005). Solving the Coupled Riccati Equation for the N-Players LQ Differential Game, *2nd International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ICEEE) and XI Conference on Electrical Engineering (CIE 2005)*, Mexico City, Mexico. September 7-9, pp.365-369.
- Gutman, S. and Leitmann, G. (1975a). On a Class of Linear Differential Games, *Journal of mathematical Analysis and Applications*, Vol.17, NOS.5/6, pp.511-522.
- Gutman, S. and Leitmann, G. (1975b). Stabilizing Control for Linear Systems with Bounded Parameter and Input Uncertainty Proceed. *7th IFIP Conference on Optimization Techniques*, Nice, Springer Verlag, pp.729-755.

- Gutman, S. and Palmor, Z. (1982). Properties on Min-Max Controllers in Uncertain Dynamical Systems, *SIAM Journal of Control Optimization*, Vol.20, No.6, pp.850-861.
- Hwang, C.-L. and Hsieh, C.-Ye. (2002). A Neuro-Adaptive Variable Structure Control for Partially Unknown Nonlinear Dynamic Systems and Its Application, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol.10, No.2, pp.263-271.
- Isaacs, R. (1965). *Differential Games*. Kruger Publishing Company, Huntington, New York, 2nd edition. First edition: John Wiley and Sons, New York.
- Jimenez, M. and Poznyak, A. (2006). Robust and Adaptive Strategies with Pre-Identification via Sliding Mode Technique in LQ Differential Games, *Proceedings of the 2006 American Control Conference: Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16*, pp.4771-4776.
- Leitmann, G. (1979). Guaranteed Asymptotic Stability for Some Linear Systems With Bounded Uncertainties, *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.101, pp.212-216.
- Madani-Esfahani, S. M., DeCarlo, R. A. and Zak, S. H. (1986). On Deterministic Control of Uncertain Nonlinear Systems, *Proc. American Control Conf., Seattle, Washington, FA5*, pp.1523-1528.
- Mukaidani, H. (2007). Newton's method for solving cross-coupled sign-indefinite algebraic Riccati equations for weakly coupled large-scale systems, *Applied Mathematics and Computation*, 188, pp.103-115.
- Pan, Y. and Ozguner, U. (2004). Sliding Mode Extremum Seeking Control for Linear Quadratic Dynamic Game, *Proceeding of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts June 30 - July 2, WeA19.1*, pp.614-619.
- Ryan, E. P. and Corless, M. (1984). Ultimate Boundedness and Asymptotic Stability of a Class of Uncertain Dynamical via Continuous and Discontinuous Feedback Control, *IMA, Journal of Mathematical Control and Information*, 1, pp.223-242.
- Stalford, H.L. and Leitmann, G. (1971). Sufficient Conditions for Optimality in Two-Person Zero-Sum Differential Games with State and Strategy Constraints, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.33, pp.650-654.
- Starr, A. W. and Ho, Y. C. (1969). Nonzero-Sum Differential Games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.3, No.3, pp.184-206.

- Topalov, A. V., Cascella, G. L., Giordano, V., Cupertion, F. and Kaynak, O. (2007). Sliding Mode Neuro-Adaptive Control of Electric Drives, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.54, No.1, pp.671-679.
- Tsai, C.-H., Chung, H.-Y. and Yu, F.-M. (2004). Neuro-Sliding Mode Control With Its Applications to Seesaw Systems, IEEE Trans., Neural Networks, Vol.15, No.1, pp.124-134.
- Uchida, K. and Fujita, M. (1989). On the central controller: Characterizations via differential games and LEQG control problems, Systems & Control Letters, Vol.13, pp.9-13.
- Utki, V. I. (1977). Variable Structure Systems with Sliding Modes, IEEE Trans., AC-22, No.2, pp.212-222.
- 坂本, 小宮山, 窪田 (2006a). 自己調整型スライディングモード制御 (プロセスおよびメカニカル系のプログラム制御), 電学論D, Vol.126, No.6, pp.700-705.
- 坂本 (2006b). 自己適応型スライディングモードコントローラ (切換面調節アルゴリズムの検討), 第49回自動制御連合講演会, 神戸大学, SA7-1-2.
- 坂本 (2010). 自己適応型スライディングモードコントローラ (切換関数のセルフチューニングと2入力システムへの適用), 第54回システム制御情報学会研究発表講演会, 京都リサーチパーク, W14-6 (2010), pp.75-76.
- 野波, 田 (1994). スライディングモード制御, コロナ社.
- 美口, 呉, 水上 (1997). ニューラルネットワーク推定器を用いた離散時間スライディングモード制御, 計測自動制御学会論文集, Vol.33, No.8, 787-791.
- 向谷, 小林, 沖田 (1995). 特異摂動システムにおける線形2次ナッシュゲームのための再帰的アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, Vol.32, No.1, 1-9.
- 向谷, 水上 (2003). 不確定大規模むだ時間システムの分散2次コスト保証制御, 機械学会論文集C編 Vol.69, No.5, pp.1260-1266.
- 向谷 (2009). 動的ゲーム理論とロバスト性, 計測と制御, Vol.48, No.9, pp.718-723.
- 望月, 加藤 (1989). 微分ゲームに関する一覧書, 日本航空宇宙学会誌, Vol.37, No.428, pp.441-450.

## Extremum Seeking Control of Linear Quadratic Differential Game via Sliding Mode Control

Noriaki SAKAMOTO

### 《Abstract》

This Paper deals with the design of closed loop strategies for a class of two players zero-sum linear quadratic differential games, where each player does not know the state equation. For this game model, an extremum seeking control is proposed that is based on the concept of combining neural network and author's self-adaptive sliding mode controller. A numerical example illustrates an application of the proposed technique, and the simulations results showed a dominant solution in comparison with the Nash solution of reference and an optimal regulator.