法政大学学術機関リポジトリ

HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2025-01-03

ハイブリッド型ペナルティ法における面内変 形線材要素の開発

竹内, 則雄 / HORITA, Takashi / TAKEUCHI, Norio / 堀田, 貴 史

(出版者 / Publisher)
法政大学情報メディア教育研究センター
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学情報メディア教育研究センター研究報告
(巻 / Volume)
24
(開始ページ / Start Page)
13
(終了ページ / End Page)
19
(発行年 / Year)
2011-06-01
(URL)
https://doi.org/10.15002/00007213

ハイブリッド型ペナルティ法における面内変形線材要素の開発

Development of Linear Element for in-Plane Deformation

of Hybrid-type Penalty Method

堀田 貴史¹⁾ 竹内 則雄²⁾ Takashi Horita, Norio Takeuchi

注政大学大学院システムデザイン研究科
 法政大学理工学部機械工学科

In the discrete limit analysis of the complex structure and the material using HPM, the analysis becomes possible at a realistic level when modeling with the linear element as well as FEM. However, HPM is a just developed model, and since the Solid element has been preceded and developed, the line element is not prepared. Then, we develop the linear element of HPM for the analysis of the framed structure and the analysis combined with the solid or plane element. This paper shows brief formulation of a truss element, a beam element, and the linear element that combined them based on the cubic displacement field in a three-dimensional problem. In addition, the accuracy of the solution of proposed element is confirmed according to simple example.

Keywords : HPM, Beam Element, Truss Element

1. はじめに

有限要素法(FEM)などにより構造物や複合材料の 応力解析を行うとき、その構造物や、構造の一部、 あるいは部材の一部を理想化し、簡略化して梁やト ラスなどの線材要素で近似することが度々ある.例 えば、鉄筋コンクリートの鉄筋や、地盤中の杭など がその例である.現実的なレベルで構造解析を行お うとすれば、このような複雑な構造を簡素化するモ デル化は避けては通れない手法である.

ところで、著者らは、進行型の破壊解析のために、 ハイブリッド型ペナルティ法(HPM: Hybrid-type Penalty Method)を開発した¹⁾⁻³⁾. HPM はハイブリッ ド型仮想仕事の原理⁴⁾に基づく方法であるが、不連 続 Galerkin (dG: discontinuous Galerkin)法⁵⁾におけ る IP 有限要素法(IP FEM: interior penalty FEM)⁶⁾と同 様に、解析領域を小さな部分領域に分割し、部分領 域毎に独立な変位場を仮定して、境界上での変位の 連続性をペナルティ関数により近似的に導入する.

原稿受付 2011 年 2 月 26 日 発行 2011 年 6 月 1 日 Copyright © 2011 Hosei University このとき,部分領域間の境界において,表面力が求 められる.この表面力を利用して剛体ばねモデル (RBSM: Rigid Bodies-Spring Model)⁷¹と同様なすべり や引張破壊などの進行型破壊を導入すれば⁸⁾⁹⁾, RBSM と同様な離散化極限解析を行うことが可能で ある.

はじめに述べたように、より複雑な構造や部材を モデル化して HPM による離散化極限解析を行う場 合、FEM と同様、線材を用いてモデル化すると現実 的な解析が可能になる.しかし、HPM は開発されて 間もないモデルであり、Solid 要素の開発を先行して 行ってきたため、線材要素が整備されていない.

そこで、本論文では、骨組構造や、Solid 要素ある いは平面要素と組み合わせることができる HPM に おける面内変形線材要素を開発することを目的とし て、三次元問題における3次の変位場をもとに、ト ラス要素と梁要素、それらを組み合わせた線材要素 の定式化を行う.さらに簡単な計算例で解の精度を 確認する.

2. ハイブリッド型仮想仕事の原理と変位場

(1) ハイブリッド型仮想仕事式

骨組構造解析では、合力としてのベクトル量を扱うため、古くからマトリックス表示による定式化が行われている¹⁰⁾.本論文でも、その習慣にしたがい、マトリックス表示により定式化を展開する.

はじめに弾性問題の基礎方程式を示すと以下のようである.

(応力-ひずみ関係) $\sigma = D\varepsilon$ (2)

(ひずみー変位関係) $\varepsilon = Lu$ (3)

ここで、u, ε , σ は、それぞれ、変位、ひずみ、応 カベクトルであり、D は構成行列、f は物体力を 表している.また、L は微分作用素であり、 Ω は境 界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ で囲まれた領域である.ただし、 Γ_u は変位が与えられる境界、 Γ_σ は表面力が与えられ る境界で、以下の条件を満たしている.

(幾何学的境界条件) $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_u} = \overline{\boldsymbol{u}}$ (given) (4)

(力学的境界条件) $\sigma|_{\Gamma_{\sigma}} \hat{n} = \hat{t}$ (given) (5)

ここで、t は単位面積あたりの表面力で、 $t = n\sigma$ であり、n は境界上の外向き法線ベクトルの成分を並べた行列である.また、上付の へは既知量を表している.





いま, Fig.1(a) に示すように, 領域 $\Omega \in M$ 個の 部分領域に分割する. このとき, Fig.1(b) に示す隣 接する 2 つの部分領域 $\Omega^{(a)} \geq \Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ における付帯条件

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(a)} = \widetilde{\boldsymbol{u}}^{(b)} \text{ on } \Gamma_{\langle ab \rangle}$$
 (6)

を考慮すると、ハイブリッド型の仮想仕事式が以下 のように求められる.

$$\sum_{e=1}^{M} \left(\int_{\Omega^{(e)}} [\boldsymbol{L} \delta \boldsymbol{u}]^{t} \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Omega^{(e)}} \delta \boldsymbol{u}^{t} \boldsymbol{f} dV \right) - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \boldsymbol{u}^{t} \boldsymbol{t} dS$$
$$- \sum_{s=1}^{N} \left(\delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \boldsymbol{\lambda} (\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(a)} - \widetilde{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \, dS \right) = 0$$
(7)

ただし, $\tilde{u}^{(a)}$ ならびに $\tilde{u}^{(b)}$ は, それぞれ, 部分領 域 $\Omega^{(a)} \geq \Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の変位を表し ている. また, λ は, $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の表面力を意味して いる.

(2) 3次の変位場

HPM では,要素毎に独立な変位場を仮定する.いま,三次元問題における3次の変位場¹¹⁾に対して, Fig.2 のような線材の座標系に従った面内変形状態の3次変位場を求めると次のようになる.



Fig.2 Coordinate System for 2D Beam

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{N}_{d}^{(e)} \boldsymbol{d}^{(e)} + \boldsymbol{N}_{\varepsilon}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \boldsymbol{N}_{g}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{X}^{(e)} + \boldsymbol{N}_{c}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{XX}^{(e)} \quad (8)$$

ここで、**U**は線材の任意点における X および Z 方向 の変位、 $d^{(e)}$ は要素基準点(通常、図心)における剛 体変位、 $\epsilon^{(e)}$ は要素内のひずみ、 $\epsilon_x^{(e)}$ はひずみの X および Z による 1 階微分、同様に、 $\epsilon_{xx}^{(e)}$ は、2 階微 分であり、以下のとおりである.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U} &= [U, W]^{t} , \boldsymbol{d}^{(e)} = [U_{o}, W_{o}, \Theta_{o}]^{t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} &= [\varepsilon_{o_{X}}, \varepsilon_{o_{Z}}, \gamma_{o_{XZ}}]^{t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}_{X} &= [(\varepsilon_{o_{X}})_{X}, (\varepsilon_{o_{Z}})_{X}, (\gamma_{o_{XZ}})_{X}, (\varepsilon_{o_{Z}})_{Z}, (\varepsilon_{o_{X}})_{Z}, (\gamma_{o_{XZ}})_{Z}]^{t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}_{XX} &= [(\varepsilon_{o_{X}})_{XX}, (\varepsilon_{o_{Z}})_{XX}, (\gamma_{o_{XZ}})_{XX}, (\varepsilon_{o_{X}})_{XZ}, (\varepsilon_{o_{Z}})_{XZ}, (\varepsilon_{o_{Z}})_{ZZ}, (\varepsilon_{o_{Z}})_{ZZ}]^{t} \end{aligned}$$

また, $N_d^{(e)}$, $N_{\varepsilon}^{(e)}$, $N_g^{(e)}$, $N_c^{(e)}$ は座標の関数として 表わされる係数行列で,以下のとおりである.

Copyright © 2011 Hosei University

3. 軸変形要素

トラス構造などでは、軸方向変形のみ生ずる部材が 用いられる.構造解析では、こういった部材をトラ ス部材と呼ぶことがある.ここでは、このトラス部 材における変位場と要素剛性行列に該当する HPM の軸剛性行列を求める.

(1)1次の軸方向変位場

Fig.2 に示す座標系にしたがって求めた二次元状態に対する 3 次変位場の式(8)から,1 次の軸方向変位場を求める.式(8)において,2 次と 3 次の項を無視すると軸方向の変位Uは以下のようになる.

$$U = U_o + Z\Theta_o + X\varepsilon_{o_X} + \frac{1}{2}Z\gamma_{o_{XZ}}$$
(9)

ここで、軸方向の変位のみを考慮するなら、剛体回 転 $\Theta_0 = 0$ であり、さらに $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = 0$ である. したがって、式(9)から求められる1次の軸方向変位 場 U_N は以下のようになる.

$$U_{N} = \boldsymbol{N}_{N}^{(e)} \boldsymbol{U}_{N}^{(e)}$$

$$\boldsymbol{U}_{N}^{(e)} = \lfloor U_{o} \quad \varepsilon_{o_{X}} \rfloor^{t} , \quad \boldsymbol{N}_{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & X \end{bmatrix}$$
(10)

(2) トラス部材の軸剛性行列

式(10)で表される軸方向変位場から軸方向のひず みを求めると以下のようになる.

$$\varepsilon_{X} = \mathbf{B}_{N}^{(e)} \mathbf{U}_{N}^{(e)}$$

$$\mathbf{B}_{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(11)

一方,一軸状態を仮定する軸変形問題の応力-ひ ずみ関係は,フックの法則にしたがい

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \tag{12}$$

と表される.式(11)(12)を式(7)の仮想仕事式における 第1項に適用すると、以下の関係が得られる.

$$\begin{split} \int_{\Omega^{(e)}} [\boldsymbol{L} \delta \boldsymbol{u}]^t \boldsymbol{\sigma} dV \\ &= \int_{\Omega^{(e)}} \delta \varepsilon_x^{(e)} E \varepsilon_x^{(e)} \, dV \\ &= \left(\delta \boldsymbol{U}_N^{(e)} \right)^t \int_{-L/2}^{L/2} {}^t \boldsymbol{B}_N^{(e)} \left(\int_A E dA \right) \boldsymbol{B}_N^{(e)} \, dx \boldsymbol{U}_N^{(e)} \end{split}$$

 $= \left(\delta U_{N}^{(e)}\right)^{t} D_{N}^{(e)} U_{N}^{(e)}$ (13)

ここで, $D_N^{(e)}$ が軸剛性行列で,以下のとおりである.

$$\boldsymbol{D}_{N}^{(e)} = EA \int_{-L/2}^{L/2} {}^{t} \boldsymbol{B}^{(e)} \boldsymbol{B}^{(e)} \, dx = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$
(14)

4. 曲げ変形要素

一般に,曲げ変形を受ける部材をはり部材と呼ん でいる.ここでは,この面内曲げ変形部材に関する 変位場と HPM の曲げ剛性行列を求める.

(1)3次の曲げ変形変位場

一般に、曲げ変形部材のたわみは3次関数で表す ことができる.いま、式(8)において、Bernoulli-Euler の仮定から、 $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = 0$ と仮定すれば、はりのた わみは次のように表される.

$$W = W_o - X\Theta_o - \frac{1}{2}X^2 (\varepsilon_{o_X})_z - \frac{1}{6}X^3 (\varepsilon_{o_X})_{XZ} \quad (15)$$

一方,平面保持の法則からはりの水平方向の変位 は次のように表される.

$$U = -Z \frac{\partial W}{\partial X}$$

= $Z\Theta_o + XZ(\varepsilon_{o_X})_z + X^2 Z/2(\varepsilon_{o_X})_{XZ}$ (16)

したがって,梁要素の変位場は以下のようになる.

$$U_{M} = \mathbf{Z} \mathbf{N}_{M}^{(e)} U_{M}^{(e)}$$

$$U_{M} = \lfloor U, W \rfloor^{t}$$

$$U_{M}^{(e)} = \lfloor W_{o} \ \Theta_{o} \ (\varepsilon_{o_{X}})_{z} \ (\varepsilon_{o_{X}})_{xz} \rfloor^{t}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & Z & XZ & X^{2}Z^{/2} \\ 1 & -X & -X^{2}/2 & -X^{3}/6 \end{bmatrix}$$
(17)

(2) はり要素の曲げ剛性行列

曲げに伴うひずみは,式(16)を X で微分すること により以下のように求められる.

$$\varepsilon_{X} = Z \boldsymbol{B}_{M}^{(e)} \boldsymbol{U}_{M}^{(e)}$$

$$\boldsymbol{B}_{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & X \end{bmatrix}$$
(18)

Copyright © 2011 Hosei University

一方,はり部材の応力-ひずみ関係は,式(12)に 示したフックの法則にしたがうものとする.このと き,式(7)の仮想仕事式における第1項は,式(18)を 用いて以下のように表される.

$$\int_{\Omega^{(e)}} [\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u}]^{t}\boldsymbol{\sigma}dV$$

$$= \int_{\Omega^{(e)}} \delta\varepsilon_{x}^{(e)} E\varepsilon_{x}^{(e)} dV$$

$$= \left(\delta\boldsymbol{U}_{M}^{(e)}\right)^{t} \int_{-L/2}^{L/2} {}^{t}\boldsymbol{B}_{M}^{(e)} \left(\int_{A} Z^{2} E dA\right) \boldsymbol{B}_{M}^{(e)} dx \boldsymbol{U}_{M}^{(e)}$$

$$= \left(\delta\boldsymbol{U}_{M}^{(e)}\right)^{t} \boldsymbol{D}_{M}^{(e)} \boldsymbol{U}_{M}^{(e)}$$
(19)

ここで, $D_M^{(e)}$ が曲げ剛性行列で, E を弾性係数, I を断面二次モーメントとし,以下のように表される.

ただし,
$$I = \int_A Z^2 dA$$

5. 一般的な線材要素

(1) 部材剛性行列

Bernoulli-Euler の仮定(平面保持の法則)に基づく 線材の変形は、軸方向変形と曲げ変形の和で表すこと ができる.

$$\left. \begin{array}{l} U = U_0 - Z \frac{\partial W_0}{\partial X} \\ W = W_0 \end{array} \right\}$$

$$(21)$$

したがって,式(21)で表される線材要素の変位場は,式(10)(17)より以下のように表される.

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{N}^{(e)} \boldsymbol{U}^{(e)}$$

$$\boldsymbol{U} = \lfloor U, W \rfloor^{t}$$

$$\boldsymbol{U}^{(e)} = \lfloor U_{o} \quad W_{o} \quad \Theta_{o} \quad \varepsilon_{o_{X}} \quad (\varepsilon_{o_{X}})_{z} \quad (\varepsilon_{o_{X}})_{xz} \rfloor^{t}$$

$$\boldsymbol{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Z & X & XZ & X^{2}Z/2 \\ 0 & 1 & -X & 0 & -X^{2}/2 & -X^{3}/6 \end{bmatrix}$$
(22)

Copyright © 2011 Hosei University

以上より,軸変形と曲げ変形を考慮した線材要素の 剛性行列は,式(13)(19)より以下のようになる.

なお,式(7)における第二項(物体力)と第三項(表 面力)に関しても同様に,以下のようにして離散化 される.

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta \boldsymbol{u}^{t} \boldsymbol{f} dV = \int_{\Omega^{(e)}} (\delta \boldsymbol{U}_{N}^{(e)})^{t} (\boldsymbol{N}_{N}^{(e)})^{t} \boldsymbol{f} dV + \int_{\Omega^{(e)}} (\delta \boldsymbol{U}_{M}^{(e)})^{t} (\boldsymbol{N}_{M}^{(e)})^{t} (\boldsymbol{Z}^{(e)})^{t} \boldsymbol{f} dV \quad (24)$$
$$\int_{\Gamma^{(e)}} \delta \boldsymbol{u}^{t} \boldsymbol{t} dS = \int_{\Gamma^{(e)}} (\delta \boldsymbol{U}_{N}^{(e)})^{t} (\boldsymbol{N}_{N}^{(e)})^{t} \boldsymbol{t} dS$$

$$+\int_{\Gamma^{(e)}}^{\cdot} (\delta \boldsymbol{U}_{M}^{(e)})^{t} (\boldsymbol{N}_{M}^{(e)})^{t} (\boldsymbol{Z}^{(e)})^{t} \boldsymbol{t} dS \qquad (25)$$

(2) 座標変換

いま,Fig.3に示す長さLの線要素について考える. このとき,式(22)の変位場におけるパラメータを部 材の中央に設定し,部材端部における変位およびた わみ角を求めると以下のようになる.



Fig.3 Linear Element and Local Coordinate System

$$\boldsymbol{\Theta}^{(e_i)} = \boldsymbol{N}_B^{(e_i)} \boldsymbol{U}^{(e)} \tag{26}$$

ここで、端点1の成分は以下のとおりである.

 $\mathbf{\Theta}^{(e_1)} = | U^{(e_1)} \quad W^{(e_1)} \quad \Theta^{(e_1)} |^t$

法政大学情報メディア教育研究センター研究報告 Vol.24

c

$$\boldsymbol{N}_B^{(e_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -L/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L/2 & 0 & -(L/2)^2/2 & (L/2)^3/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -(L/2) & (L/2)^2/2 \end{bmatrix}$$

また,端点2の場合,以下のようになる.

$$\begin{split} \boldsymbol{\Theta}^{(e_2)} &= \lfloor U^{(e_2)} \quad W^{(e_2)} \quad \boldsymbol{\Theta}^{(e_2)} \rfloor^t \\ \boldsymbol{N}^{(e_2)}_B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L/2 & 0 & -(L/2)^2/2 & -(L/2)^3/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (L/2) & (L/2)^2/2 \end{bmatrix} \end{split}$$



Fig.4 Global and Local Coordinate System

これまでの議論は, Fig.3 に示すような部材座標系 (X - Z) 基づくものである. 一般的な骨組構造では, 部材は様々な方向に配置されるため, Fig.4 に示すよ うな統一された全体座標系(x - z) に変換する必要 がある. これは, 局所座標系の端点の変位とたわみ 角を $\Theta^{(e_i)}$ とし,全体座標系の端点の変位とたわみ 角を $\theta^{(e_i)}$ とすると,以下のようになる.

$$\boldsymbol{\theta}^{(e_i)} = \boldsymbol{R}^{(e)} \boldsymbol{\Theta}^{(e_i)} \qquad (27)$$
$$\boldsymbol{\theta}^{(e_i)} = | \boldsymbol{u}^{(e_i)} \quad \boldsymbol{w}^{(e_i)} \quad \boldsymbol{\theta}^{(e_i)} |^t$$

ここで、 $u^{(e_i)}$, $w^{(e_i)}$ は、要素 eにおける端点 iの中 立軸に関する水平および垂直方向の変位であり、 $\theta^{(e_i)}$ はたわみ角である.また、 $\mathbf{R}^{(e)}$ は座標変換行 列で、Fig.4 の部材傾斜角度を α とするとき、以下の とおりである.

$$\boldsymbol{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0\\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なお, $\theta^{(e_i)}$ は,式(26)(27)より以下の関係にある.

$$\boldsymbol{\theta}^{(e_i)} = \boldsymbol{R}^{(e)} \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{p}}^{(e_i)} \boldsymbol{U}^{(e)}$$
(28)

(3) 付帯条件の処理

式(6)で表される付帯条件について考えてみる. Fig.5 は隣接する線材要素の関係を示した図である.

Copyright © 2011 Hosei University

図中、 \tilde{z} は、隣接する2要素間に設けた任意座標軸 である.線材の場合、中立軸におけるx方向、およ びz方向の変位 $u^{(e_i)}$ 、 $w^{(e_i)}$ とたわみ角 $\theta^{(e_i)}$ が等し いとき、式(6)の付帯条件を満たしたことになる.



Fig.5 Two Adjoining Linear Elements

すなわち,式(6)の付帯条件は,以下のように考える ことができる.

$$\boldsymbol{\theta}^{(a_2)} = \boldsymbol{\theta}^{(b_1)} \tag{28}$$

いま,たわみ角の連続性を,下記のように,Fig.5 に示した 2 要素の接触面に設けた座標軸 \tilde{z} に垂直 な成分の連続性で表現することもできる.

$$\widetilde{z}\theta^{(a_2)} = \widetilde{z}\theta^{(b_1)} \tag{29}$$

これを用いることで、付帯条件式(28)は、以下の ように整理して表すことができる.

$$\widetilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\theta}^{(a_2)} = \widetilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\theta}^{(b_1)}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix}$$
(30)

このとき、2 要素間の相対変位 $\delta_{\langle ab \rangle}$ は以下のよう に表される.

$$\delta_{\langle ab\rangle} = \widetilde{Z}B_{\langle ab\rangle}U_{\langle ab\rangle}$$
(31)
$$U_{\langle ab\rangle} = \lfloor U^{(a)} , U^{(b)} \rfloor^{t}$$
$$B_{\langle ab\rangle} = \lfloor -R^{(a)}N_{B}^{(a_{2})} , R^{(b)}N_{B}^{(b_{1})} \rfloor$$

ところで、式(7)のハイブリッド型仮想仕事式にお ける λ は、 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力を意味している. HPM では、これを相対変位とペナルティ関数の積で表し ている¹⁾. 線材要素委に関しても、これまでの HPM と同様、式(30)(31)を考慮して以下のように仮定する.

$$\lambda_{\langle ab \rangle} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle}$$
(32)
$$\lambda_{\langle ab \rangle} = \lfloor \lambda_{x \langle ab \rangle} , \lambda_{z \langle ab \rangle} , \lambda_{\widetilde{z} \langle ab \rangle} \rfloor^{t}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle} = \lfloor \delta_{x \langle ab \rangle} , \delta_{z \langle ab \rangle} , \delta_{\widetilde{z} \langle ab \rangle} \rfloor$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} p_{x} & 0 & 0 \\ 0 & p_{z} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\widetilde{z}} \end{bmatrix}$$

ここで、 $p_x = p_z = p_z^2 = p$ はペナルティ関数である. いま、式(31)を用いると、式(32)は以下のように表される.

$$\lambda_{\langle ab\rangle} = k \tilde{Z} B_{\langle ab\rangle} U_{\langle ab\rangle} \tag{33}$$

以上から,ハイブリッド型仮想仕事式(7)の付帯条 件に関する項は以下のようになる.

$$\delta \int_{\Gamma_{\langle ab\rangle}} \lambda_{\langle ab\rangle} \cdot (-\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(a)} + \widetilde{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \, dS$$

= $-\delta \int_{\Gamma_{\langle ab\rangle}} \delta^{t}_{\langle ab\rangle} \cdot \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\langle ab\rangle} \, dS$
= $-\delta \boldsymbol{U}^{t}_{\langle ab\rangle} \boldsymbol{B}^{t}_{\langle ab\rangle} \int_{\Gamma_{\langle ab\rangle}} \left(\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{t} \boldsymbol{k} \widetilde{\boldsymbol{Z}}\right) \, dS \, \boldsymbol{B}_{\langle ab\rangle} \boldsymbol{U}_{\langle ab\rangle}$
= $-\delta \boldsymbol{U}^{t}_{\langle ab\rangle} \boldsymbol{B}^{t}_{\langle ab\rangle} \boldsymbol{k}_{\langle ab\rangle} \boldsymbol{B}_{\langle ab\rangle} \boldsymbol{U}_{\langle ab\rangle}$ (34)

ここで,

$$\boldsymbol{k}_{\langle ab\rangle} = \int_{\Gamma_{\langle ab\rangle}} \left(\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{t} \boldsymbol{k} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \right) \, dS = \begin{bmatrix} p \widetilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & p \widetilde{A} & 0 \\ 0 & 0 & p \widetilde{I} \end{bmatrix} \quad (35)$$

であり, \widetilde{A} および \widetilde{I} は, それぞれ, 局所座標系 \widetilde{z} に 沿った断面積と断面二次モーメントである.

いま,部分領域に関する自由度 $U^{(e)}$ と全自由度 U を関連づける行列を $A^{(e)}$ とし, $U_{<ab>}$ と全自 由度を関連づける行列を $\mathcal{M}_{<ab>}$ として,これまで の関係をハイブリッド型仮想仕事式(7)に代入する と,最終的に,以下の離散化方程式が得られる.

$$KU = P$$

$$K = \sum_{e=1}^{M} K^{(e)} + \sum_{s=1}^{N} K_{\langle s \rangle}$$

$$P = \sum_{e=1}^{M} P^{(e)}$$
(36)

ここで、それぞれの係数は、

$$\begin{split} \boldsymbol{K}^{(e)} &= \left(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(e)}\right)^{t} \boldsymbol{D}^{(e)} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{(e)} \\ \boldsymbol{K}_{~~} &= \boldsymbol{\mathcal{M}}^{t}_{~~} \boldsymbol{B}^{t}_{~~} \boldsymbol{k}_{~~} \boldsymbol{B}_{~~} \boldsymbol{\mathcal{M}}_{~~} \\ \boldsymbol{P}^{(e)} &= \left(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(e)}\right)^{t} \left\{ \int_{\Omega^{(e)}} \left((\boldsymbol{N}_{N}^{(e)})^{t} + (\boldsymbol{N}_{M}^{(e)})^{t} (\boldsymbol{Z}^{(e)})^{t} \right) \boldsymbol{f} dV \\ &+ \int_{\Gamma^{(e)}} \left((\boldsymbol{N}_{N}^{(e)})^{t} + (\boldsymbol{N}_{M}^{(e)})^{t} (\boldsymbol{Z}^{(e)})^{t} \right) \boldsymbol{t} dV \right\} \end{split}~~~~~~~~~~~~$$

であり,全体係数行列は,要素内剛性と付帯条件の 関係を重ね合わせた結果となっている.

6. 計算例

本論文で展開した考え方を簡単な計算例によって 検証する.

(1) 片持ち梁

はじめに, Fig.6 に示すように,90 度に折れ曲が った片持ちばりの解析を行う.図中に寸法と材料定 数を示す.単位が記載されていないが,この例は精 度を確認のための問題であり,単位系は適切に設定 されているものとする.断面形状は,高さが2,奥 行きが1の矩形断面とする.荷重はB点に集中荷重 P=20 が作用している.



Fig.6 Cantilever Beam

以下に,はり理論のよる結果と本モデルによる変 位解の結果を示す.

Table 1 Displacemen	nt of Cantilever Beam
---------------------	-----------------------

	A 点		B 点	
	HPM	梁理論	HPM	梁理論
x方向	0.0100001	0.01	0.885015	0.885
z方向	0.750015	0.75	0.750015	0.75

Table 1 は変位解を比較した表である.はり理論に よる解と本手法による解はほぼ一致している.5 桁 目あたりで解が異なるのは、ペナルティ関数の値に よるもので、十分な精度で解が得られている.

Copyright © 2011 Hosei University

(2) 門型ラーメン

次の例題として、Fig.7 に示す門型ラーメンに集中 荷重が作用した場合の例を取り上げる.構造寸法や 材料定数等は図に示すとおりである.断面形状は, 高さが2,奥行きが1の矩形断面とする.なお,先 の例題同様,単位系は適切に設定されているものと する.



Table 2 は、本手法と梁理論の変位を比較した表で ある.先ほどの解析例と同様、5 桁目あたりで誤差 が生じているが、これも、ペナルティ関数の影響で、 良好な精度で解が得られることが分かる.

Table 2 Displacement of Framed Structure

	A 点		B 点	
	HPM	梁理論	HPM	梁理論
x方向	0.184686	0.184679	0.179736	0.179728
z方向	0.0042373	0.0042373	0.0042373	0.0042373

7. まとめ

本論文では、骨組構造や Solid 要素あるいは平面 要素と組み合わせて解析が可能な HPM における線 材要素を開発した.解析解と同じ精度が得られるよ う、軸方向変形に関しては 1 次式で、曲げ変形に関 しては 3 次式で近似する変位場をもとに HPM の定 式化を行った.

この変位場は、要素毎に独立に設定されており、 変位の連続性をペナルティ関数によって導入する. 線材要素の場合、中立軸における並行変位に加え、 たわみ角の連続性を加えることで、これに対応する 方法を示した.

最後に,簡単な計算例をとおして,手法の妥当性 を検討したところ,ペナルティ関数による影響が含 まれるものの,十分な精度で変位解が得られた.

本手法は,弾性解析ではなく,塑性解析を目的と しており,今後,ペナルティ関数にヒンジの概念を 導入することで,離散化極限解析の手法を確立する 必要がある.

参考文献

- [1]竹内則雄、大木裕久、上林厚志、草深守人、"ハ イブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用 した離散化モデルによる材料非線形解析"、日本 計算工学会論文集, No.20010002, 2001
- [2] 大木裕久,竹内則雄,"ハイブリッド型ペナルティ法による上下界解析",日本計算工学会論文集, No.20060020,2006
- [3] Takeuchi, N., Tajiri, Y. and Hamasaki, H., "Development of modified RBSM for rock mechanics using principle of hybrid-type virtual work", *Analysis of Discontinuous Deformation : New Developments and Applications*, (G.Ma and Y.Zhou), pp.395-403, Research Publishing Service, 2009
- [4] Washizu, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, New York, 1968
- [5] Arnold, D.N., Brezzi,F., Cockburn, B. and Marini, L.D., "Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems", *SIAM journal on numerical analysis*, Vol.39, No.5: pp.1749-1779, 2002
- [6] Arnold, D.N., "An interior penalty finite element method with discontinuous elements", SIAM J. on numerical analysis, 19, No.4: pp.742-760, 1982
- [7] Kawai, T., "New element models in discrete structural analysis", J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.114, pp.1867-193,1977
- [8] 竹内則雄, "地盤力学における離散化極限解析", 培風館, 1991
- [9] 竹内則雄,上田眞稔,上林厚志,鬼頭宏明,斉藤, 成彦,冨田充宏,樋口晴紀,"鉄筋コンクリート 構造の離散化極限解析法",丸善,2005
- [10]Martin, H.C., "Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis", McGRAW-HILL, New York, 1966
- [11]見原理一,大木裕久,竹内則雄,草深守人,"高 次変位場を用いたハイブリッド型ペナルティ法 について",計算工学講演会論文集,Vol.10, No.2, pp.705-708, 2005

Copyright $\[mathbb{C}$ 2011 Hosei University