

### ハイブリッド型ペナルティ法における面内変 形線材要素の開発

竹内, 則雄 / HORITA, Takashi / TAKEUCHI, Norio / 堀田, 貴  
史

---

(出版者 / Publisher)

法政大学情報メディア教育研究センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学情報メディア教育研究センター研究報告

(巻 / Volume)

24

(開始ページ / Start Page)

13

(終了ページ / End Page)

19

(発行年 / Year)

2011-06-01

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00007213>

## ハイブリッド型ペナルティ法における面内変形線材要素の開発

### Development of Linear Element for in-Plane Deformation of Hybrid-type Penalty Method

堀田 貴史<sup>1)</sup> 竹内 則雄<sup>2)</sup>  
Takashi Horita, Norio Takeuchi

<sup>1)</sup> 法政大学大学院システムデザイン研究科

<sup>2)</sup> 法政大学理工学部機械工学科

In the discrete limit analysis of the complex structure and the material using HPM, the analysis becomes possible at a realistic level when modeling with the linear element as well as FEM. However, HPM is a just developed model, and since the Solid element has been preceded and developed, the line element is not prepared. Then, we develop the linear element of HPM for the analysis of the framed structure and the analysis combined with the solid or plane element. This paper shows brief formulation of a truss element, a beam element, and the linear element that combined them based on the cubic displacement field in a three-dimensional problem. In addition, the accuracy of the solution of proposed element is confirmed according to simple example.

**Keywords** : HPM, Beam Element, Truss Element

#### 1. はじめに

有限要素法(FEM)などにより構造物や複合材料の応力解析を行うとき、その構造物や、構造の一部、あるいは部材の一部を理想化し、簡略化して梁やトラスなどの線材要素で近似することが度々ある。例えば、鉄筋コンクリートの鉄筋や、地盤中の杭などがその例である。現実的なレベルで構造解析を行おうとすれば、このような複雑な構造を簡素化するモデル化は避けては通れない手法である。

ところで、著者らは、進行型の破壊解析のために、ハイブリッド型ペナルティ法(HPM : Hybrid-type Penalty Method)を開発した<sup>1)-3)</sup>。HPMはハイブリッド型仮想仕事の原理<sup>4)</sup>に基づく方法であるが、不連続 Galerkin (dG : discontinuous Galerkin) 法<sup>5)</sup>におけるIP有限要素法(IP FEM : interior penalty FEM)<sup>6)</sup>と同様に、解析領域を小さな部分領域に分割し、部分領域毎に独立な変位場を仮定して、境界上での変位の連続性をペナルティ関数により近似的に導入する。

このとき、部分領域間の境界において、表面力が求められる。この表面力を利用して剛体ばねモデル(RBSM : Rigid Bodies-Spring Model)<sup>7)</sup>と同様なすべりや引張破壊などの進行型破壊を導入すれば<sup>8) 9)</sup>、RBSMと同様な離散化極限解析を行うことが可能である。

はじめに述べたように、より複雑な構造や部材をモデル化して HPM による離散化極限解析を行う場合、FEMと同様、線材を用いてモデル化すると現実的な解析が可能になる。しかし、HPMは開発されて間もないモデルであり、Solid要素の開発を先行して行ってきたため、線材要素が整備されていない。

そこで、本論文では、骨組構造や、Solid要素あるいは平面要素と組み合わせることができる HPM における面内変形線材要素を開発することを目的として、三次元問題における3次の変位場をもとに、トラス要素と梁要素、それらを組み合わせた線材要素の定式化を行う。さらに簡単な計算例で解の精度を確認する。

2. ハイブリッド型仮想仕事の原理と変位場

(1) ハイブリッド型仮想仕事式

骨組構造解析では、合力としてのベクトル量を扱うため、古くからマトリックス表示による定式化が行われている<sup>10)</sup>。本論文でも、その習慣にしたがい、マトリックス表示により定式化を展開する。

はじめに弾性問題の基礎方程式を示すと以下のようである。

$$(釣り合い方程式) \quad L^t \sigma + f = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

$$(応力-ひずみ関係) \quad \sigma = D \epsilon \quad (2)$$

$$(ひずみ-変位関係) \quad \epsilon = L u \quad (3)$$

ここで、 $u, \epsilon, \sigma$  は、それぞれ、変位、ひずみ、応力ベクトルであり、 $D$  は構成行列、 $f$  は物体力を表している。また、 $L$  は微分作用素であり、 $\Omega$  は境界  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$  で囲まれた領域である。ただし、 $\Gamma_u$  は変位が与えられる境界、 $\Gamma_\sigma$  は表面力が与えられる境界で、以下の条件を満たしている。

$$(幾何学的境界条件) \quad u|_{\Gamma_u} = \bar{u} \text{ (given)} \quad (4)$$

$$(力学的境界条件) \quad \sigma|_{\Gamma_\sigma} \hat{n} = \hat{t} \text{ (given)} \quad (5)$$

ここで、 $t$  は単位面積あたりの表面力で、 $t = n\sigma$  であり、 $n$  は境界上の外向き法線ベクトルの成分を並べた行列である。また、上付の  $\hat{\phantom{x}}$  は既知量を表している。

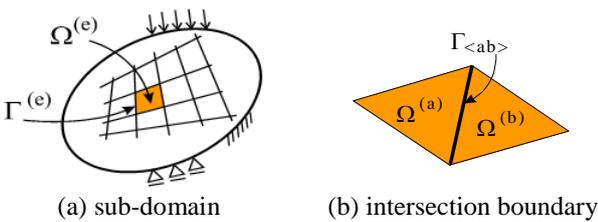


Fig.1 Sub-domain  $\Omega^{(a)}$  and  $\Omega^{(b)}$  and Boundary  $\Gamma_{<ab>}$

いま、Fig.1(a) に示すように、領域  $\Omega$  を  $M$  個の部分領域に分割する。このとき、Fig.1(b) に示す隣接する 2 つの部分領域  $\Omega^{(a)}$  と  $\Omega^{(b)}$  の共通の境界  $\Gamma_{<ab>}$  における付帯条件

$$\tilde{u}^{(a)} = \tilde{u}^{(b)} \text{ on } \Gamma_{<ab>} \quad (6)$$

を考慮すると、ハイブリッド型の仮想仕事式が以下のように求められる。

$$\sum_{e=1}^M \left( \int_{\Omega^{(e)}} [L \delta u]^t \sigma dV - \int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f dV \right) - \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^t t dS - \sum_{s=1}^N \left( \delta \int_{\Gamma_{<s>}} \lambda (\tilde{u}^{(a)} - \tilde{u}^{(b)}) dS \right) = 0 \quad (7)$$

ただし、 $\tilde{u}^{(a)}$  ならびに  $\tilde{u}^{(b)}$  は、それぞれ、部分領域  $\Omega^{(a)}$  と  $\Omega^{(b)}$  における境界  $\Gamma_{<ab>}$  上の変位を表している。また、 $\lambda$  は、 $\Gamma_{<ab>}$  上の表面力を意味している。

(2) 3 次の変位場

HPM では、要素毎に独立な変位場を仮定する。いま、三次元問題における 3 次の変位場<sup>11)</sup> に対して、Fig.2 のような線材の座標系に従った面内変形状態の 3 次変位場を求めると次のようになる。

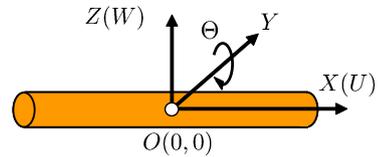


Fig.2 Coordinate System for 2D Beam

$$U = N_d^{(e)} d^{(e)} + N_\epsilon^{(e)} \epsilon^{(e)} + N_g^{(e)} \epsilon_x^{(e)} + N_c^{(e)} \epsilon_{xx}^{(e)} \quad (8)$$

ここで、 $U$  は線材の任意点における  $X$  および  $Z$  方向の変位、 $d^{(e)}$  は要素基準点(通常、図心)における剛体変位、 $\epsilon^{(e)}$  は要素内のひずみ、 $\epsilon_x^{(e)}$  はひずみの  $X$  および  $Z$  による 1 階微分、同様に、 $\epsilon_{xx}^{(e)}$  は、2 階微分であり、以下のとおりである。

$$U = [U, W]^t, \quad d^{(e)} = [U_o, W_o, \Theta_o]^t$$

$$\epsilon^{(e)} = [\epsilon_{ox}, \epsilon_{oz}, \gamma_{oxz}]^t$$

$$\epsilon_x^{(e)} = [(\epsilon_{ox})_x, (\epsilon_{oz})_x, (\gamma_{oxz})_x, (\epsilon_{oz})_z, (\epsilon_{ox})_z, (\gamma_{oxz})_z]^t$$

$$\epsilon_{xx}^{(e)} = [(\epsilon_{ox})_{xx}, (\epsilon_{oz})_{xx}, (\gamma_{oxz})_{xx}, (\epsilon_{ox})_{xz}, (\epsilon_{oz})_{xz}, (\epsilon_{ox})_{zz}, (\epsilon_{oz})_{zz}, (\gamma_{oxz})_{zz}]^t$$

また、 $N_d^{(e)}, N_\epsilon^{(e)}, N_g^{(e)}, N_c^{(e)}$  は座標の関数として表わされる係数行列で、以下のとおりである。

$$N_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Z \\ 0 & 1 & -X \end{bmatrix}, \quad N_\epsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} X & 0 & Z/2 \\ 0 & Z & X/2 \end{bmatrix}$$

$$N_g^{(e)} = \begin{bmatrix} X^2/2 & -Z^2/2 & 0 & XZ & 0 & Z^2/2 \\ 0 & XZ & X^2/2 & -X^2/2 & Z^2/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_c^{(e)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} X^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3X^2Z & 2X^3 \\ 3X^2Z & -Z^3 & 3XZ^2 & 0 & 2Z^3 \\ -X^3 & 3XZ^2 & 0 & Z^3 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3. 軸変形要素

トラス構造などでは、軸方向変形のみ生ずる部材が用いられる。構造解析では、こういった部材をトラス部材と呼ぶことがある。ここでは、このトラス部材における変位場と要素剛性行列に該当する HPM の軸剛性行列を求める。

#### (1) 1 次の軸方向変位場

Fig.2 に示す座標系にしたがって求めた二次元状態に対する 3 次変位場の式(8)から、1 次の軸方向変位場を求める。式(8)において、2 次と 3 次の項を無視すると軸方向の変位  $U$  は以下ようになる。

$$U = U_o + Z\theta_o + X\varepsilon_{ox} + \frac{1}{2}Z\gamma_{oxz} \quad (9)$$

ここで、軸方向の変形のみを考慮するならば、剛体回転  $\theta_o = 0$  であり、さらに  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = 0$  である。したがって、式(9)から求められる 1 次の軸方向変位場  $U_N$  は以下ようになる。

$$U_N = \mathbf{N}_N^{(e)} \mathbf{U}_N^{(e)} \quad (10)$$

$$\mathbf{U}_N^{(e)} = [U_o \quad \varepsilon_{ox}]^t, \quad \mathbf{N}_N^{(e)} = [1 \quad X]$$

#### (2) トラス部材の軸剛性行列

式(10)で表される軸方向変位場から軸方向のひずみを求めると以下ようになる。

$$\varepsilon_x = \mathbf{B}_N^{(e)} \mathbf{U}_N^{(e)} \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_N^{(e)} = [0 \quad 1]$$

一方、一軸状態を仮定する軸変形問題の応力-ひずみ関係は、フックの法則にしたがい

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (12)$$

と表される。式(11)(12)を式(7)の仮想仕事式における第 1 項に適用すると、以下の関係が得られる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L}\delta\mathbf{u}]^t \boldsymbol{\sigma} dV$$

$$= \int_{\Omega^{(e)}} \delta\varepsilon_x^{(e)} E\varepsilon_x^{(e)} dV$$

$$= (\delta\mathbf{U}_N^{(e)})^t \int_{-L/2}^{L/2} {}^t\mathbf{B}_N^{(e)} \left( \int_A E dA \right) \mathbf{B}_N^{(e)} dx \mathbf{U}_N^{(e)}$$

$$= (\delta\mathbf{U}_N^{(e)})^t \mathbf{D}_N^{(e)} \mathbf{U}_N^{(e)} \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{D}_N^{(e)}$  が軸剛性行列で、以下のとおりである。

$$\mathbf{D}_N^{(e)} = EA \int_{-L/2}^{L/2} {}^t\mathbf{B}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \quad (14)$$

### 4. 曲げ変形要素

一般に、曲げ変形を受ける部材をはり部材と呼んでいる。ここでは、この面内曲げ変形部材に関する変位場と HPM の曲げ剛性行列を求める。

#### (1) 3 次の曲げ変形変位場

一般に、曲げ変形部材のたわみは 3 次関数で表すことができる。いま、式(8)において、Bernoulli-Euler の仮定から、 $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = 0$  と仮定すれば、はりのたわみは次のように表される。

$$W = W_o - X\theta_o - \frac{1}{2}X^2(\varepsilon_{ox})_z - \frac{1}{6}X^3(\varepsilon_{ox})_{xz} \quad (15)$$

一方、平面保持の法則からはりの水平方向の変位は次のように表される。

$$U = -Z \frac{\partial W}{\partial X}$$

$$= Z\theta_o + XZ(\varepsilon_{ox})_z + X^2Z/2(\varepsilon_{ox})_{xz} \quad (16)$$

したがって、梁要素の変位場は以下ようになる。

$$\mathbf{U}_M = \mathbf{Z} \mathbf{N}_M^{(e)} \mathbf{U}_M^{(e)} \quad (17)$$

$$\mathbf{U}_M = [U, W]^t$$

$$\mathbf{U}_M^{(e)} = [W_o \quad \theta_o \quad (\varepsilon_{ox})_z \quad (\varepsilon_{ox})_{xz}]^t$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_M^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & Z & XZ & X^2Z/2 \\ 1 & -X & -X^2/2 & -X^3/6 \end{bmatrix}$$

#### (2) はり要素の曲げ剛性行列

曲げに伴うひずみは、式(16)を  $X$  で微分することにより以下のように求められる。

$$\varepsilon_x = \mathbf{Z} \mathbf{B}_M^{(e)} \mathbf{U}_M^{(e)} \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_M^{(e)} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad X]$$

一方、はり部材の応力-ひずみ関係は、式(12)に示したフックの法則にしたがうものとする。このとき、式(7)の仮想仕事式における第1項は、式(18)を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{(e)}} [L\delta u]^t \sigma dV \\ &= \int_{\Omega^{(e)}} \delta \varepsilon_x^{(e)} E \varepsilon_x^{(e)} dV \\ &= (\delta U_M^{(e)})^t \int_{-L/2}^{L/2} {}^t B_M^{(e)} \left( \int_A Z^2 E dA \right) B_M^{(e)} dx U_M^{(e)} \\ &= (\delta U_M^{(e)})^t D_M^{(e)} U_M^{(e)} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $D_M^{(e)}$  が曲げ剛性行列で、 $E$  を弾性係数、 $I$  を断面二次モーメントとし、以下のように表される。

$$\begin{aligned} D_M^{(e)} &= EI \int_{-L/2}^{L/2} {}^t B_M^{(e)} B_M^{(e)} dx \\ &= EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & L^2/2 \\ 0 & 0 & L^2/2 & L^3/3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、 $I = \int_A Z^2 dA$

### 5. 一般的な線材要素

#### (1) 部材剛性行列

Bernoulli-Euler の仮定 (平面保持の法則) に基づく線材の変形は、軸方向変形と曲げ変形の和で表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 - Z \frac{\partial W_0}{\partial X} \\ W &= W_0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

したがって、式(21)で表される線材要素の変位場は、式(10)(17)より以下のように表される。

$$\begin{aligned} U &= N^{(e)} U^{(e)} \quad (22) \\ U &= [U, W]^t \\ U^{(e)} &= [U_0, W_0, \Theta_0, \varepsilon_{ox}, (\varepsilon_{ox})_z, (\varepsilon_{ox})_{xz}]^t \\ N^{(e)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & Z & X & XZ & X^2 Z/2 \\ 0 & 1 & -X & 0 & -X^2/2 & -X^3/6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上より、軸変形と曲げ変形を考慮した線材要素の剛性行列は、式(13)(19)より以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{(e)}} [L\delta u]^t \sigma dV \\ &= (\delta U_N^{(e)})^t D_N^{(e)} U_N^{(e)} + (\delta U_M^{(e)})^t D_M^{(e)} U_M^{(e)} \\ &= (\delta U^{(e)})^t D^{(e)} U^{(e)} \end{aligned} \quad (23)$$

$$D^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EAL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EIL & EIL^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EIL^2/2 & EIL^3/3 \end{bmatrix}$$

なお、式(7)における第二項 (物体力) と第三項 (表面力) に関しても同様に、以下のようにして離散化される。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f dV &= \int_{\Omega^{(e)}} (\delta U_N^{(e)})^t (N_N^{(e)})^t f dV \\ &+ \int_{\Omega^{(e)}} (\delta U_M^{(e)})^t (N_M^{(e)})^t (Z^{(e)})^t f dV \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^{(e)}} \delta u^t t dS &= \int_{\Gamma^{(e)}} (\delta U_N^{(e)})^t (N_N^{(e)})^t t dS \\ &+ \int_{\Gamma^{(e)}} (\delta U_M^{(e)})^t (N_M^{(e)})^t (Z^{(e)})^t t dS \end{aligned} \quad (25)$$

#### (2) 座標変換

いま、Fig.3に示す長さ $L$ の線要素について考える。このとき、式(22)の変位場におけるパラメータを部材の中央に設定し、部材端部における変位およびたわみ角を求めると以下ようになる。

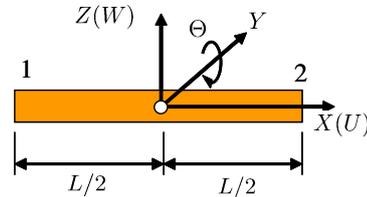


Fig.3 Linear Element and Local Coordinate System

$$\Theta^{(e_i)} = N_B^{(e_i)} U^{(e)} \quad (26)$$

ここで、端点1の成分は以下のとおりである。

$$\Theta^{(e_1)} = [U^{(e_1)} \quad W^{(e_1)} \quad \Theta^{(e_1)}]^t$$

$$\mathbf{N}_B^{(e_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -L/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L/2 & 0 & -(L/2)^2/2 & (L/2)^3/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -(L/2) & (L/2)^2/2 \end{bmatrix}$$

また、端点 2 の場合、以下ようになる。

$$\Theta^{(e_2)} = [U^{(e_2)} \quad W^{(e_2)} \quad \Theta^{(e_2)}]^t$$

$$\mathbf{N}_B^{(e_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L/2 & 0 & -(L/2)^2/2 & -(L/2)^3/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (L/2) & (L/2)^2/2 \end{bmatrix}$$

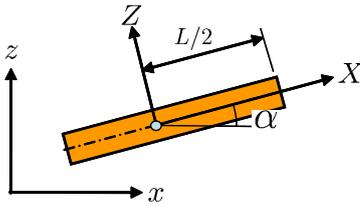


Fig.4 Global and Local Coordinate System

これまでの議論は、Fig.3 に示すような部材座標系 ( $X-Z$ ) 基づくものである。一般的な骨組構造では、部材は様々な方向に配置されるため、Fig.4 に示すような統一された全体座標系 ( $x-z$ ) に変換する必要がある。これは、局所座標系の端点の変位とたわみ角を  $\Theta^{(e_i)}$  とし、全体座標系の端点の変位とたわみ角を  $\theta^{(e_i)}$  とすると、以下ようになる。

$$\theta^{(e_i)} = \mathbf{R}^{(e)} \Theta^{(e_i)} \quad (27)$$

$$\theta^{(e_i)} = [u^{(e_i)} \quad w^{(e_i)} \quad \theta^{(e_i)}]^t$$

ここで、 $u^{(e_i)}$ 、 $w^{(e_i)}$  は、要素  $e$  における端点  $i$  の中立軸に関する水平および垂直方向の変位であり、 $\theta^{(e_i)}$  はたわみ角である。また、 $\mathbf{R}^{(e)}$  は座標変換行列で、Fig.4 の部材傾斜角度を  $\alpha$  とするとき、以下のとおりである。

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なお、 $\theta^{(e_i)}$  は、式(26)(27)より以下の関係にある。

$$\theta^{(e_i)} = \mathbf{R}^{(e)} \mathbf{N}_B^{(e_i)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (28)$$

### (3) 付帯条件の処理

式(6)で表される付帯条件について考えてみる。Fig.5 は隣接する線材要素の関係を示した図である。

図中、 $\tilde{z}$  は、隣接する 2 要素間に設けた任意座標軸である。線材の場合、中立軸における  $x$  方向、および  $z$  方向の変位  $u^{(e_i)}$ 、 $w^{(e_i)}$  とたわみ角  $\theta^{(e_i)}$  が等しいとき、式(6)の付帯条件を満たしたことになる。

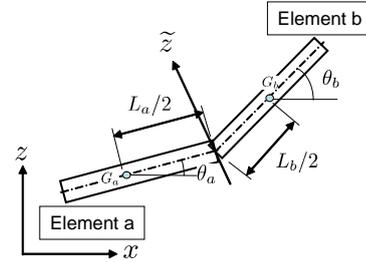


Fig.5 Two Adjoining Linear Elements

すなわち、式(6)の付帯条件は、以下のように考えることができる。

$$\theta^{(a_2)} = \theta^{(b_1)} \quad (28)$$

いま、たわみ角の連続性を、下記のように、Fig.5 に示した 2 要素の接触面に設けた座標軸  $\tilde{z}$  に垂直な成分の連続性で表現することもできる。

$$\tilde{z}\theta^{(a_2)} = \tilde{z}\theta^{(b_1)} \quad (29)$$

これを用いることで、付帯条件式(28)は、以下のように整理して表すことができる。

$$\tilde{\mathbf{Z}}\theta^{(a_2)} = \tilde{\mathbf{Z}}\theta^{(b_1)} \quad (30)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{z} \end{bmatrix}$$

このとき、2 要素間の相対変位  $\delta_{\langle ab \rangle}$  は以下のように表される。

$$\delta_{\langle ab \rangle} = \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \quad (31)$$

$$\mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{U}^{(a)}, \mathbf{U}^{(b)}]^t$$

$$\mathbf{B}_{\langle ab \rangle} = [-\mathbf{R}^{(a)} \mathbf{N}_B^{(a_2)}, \mathbf{R}^{(b)} \mathbf{N}_B^{(b_1)}]$$

ところで、式(7)のハイブリッド型仮想仕事式における  $\lambda$  は、 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$  上の表面力を意味している。HPM では、これを相対変位とペナルティ関数の積で表している<sup>1)</sup>。線材要素委に関しても、これまでの HPM と同様、式(30)(31)を考慮して以下のように仮定する。

$$\lambda_{\langle ab \rangle} = \mathbf{k} \cdot \delta_{\langle ab \rangle} \quad (32)$$

$$\lambda_{\langle ab \rangle} = [\lambda_{x\langle ab \rangle}, \lambda_{z\langle ab \rangle}, \lambda_{\tilde{z}\langle ab \rangle}]^t$$

$$\delta_{\langle ab \rangle} = [\delta_{x\langle ab \rangle}, \delta_{z\langle ab \rangle}, \delta_{\tilde{z}\langle ab \rangle}]$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_z & 0 \\ 0 & 0 & p_{\tilde{z}} \end{bmatrix}$$

ここで,  $p_x = p_z = p_{\tilde{z}} = p$  はペナルティ関数である. いま, 式(31)を用いると, 式(32)は以下のように表される.

$$\lambda_{\langle ab \rangle} = \mathbf{k} \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \quad (33)$$

以上から, ハイブリッド型仮想仕事式(7)の付帯条件に関する項は以下ようになる.

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \lambda_{\langle ab \rangle} \cdot (-\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} + \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) dS \\ &= -\delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \delta_{\langle ab \rangle}^t \cdot \mathbf{k} \cdot \delta_{\langle ab \rangle} dS \\ &= -\delta \mathbf{U}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{B}_{\langle ab \rangle}^t \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} (\tilde{\mathbf{Z}}^t \mathbf{k} \tilde{\mathbf{Z}}) dS \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \\ &= -\delta \mathbf{U}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{B}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{k}_{\langle ab \rangle} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \quad (34) \end{aligned}$$

ここで,

$$\mathbf{k}_{\langle ab \rangle} = \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} (\tilde{\mathbf{Z}}^t \mathbf{k} \tilde{\mathbf{Z}}) dS = \begin{bmatrix} p\tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & p\tilde{A} & 0 \\ 0 & 0 & p\tilde{I} \end{bmatrix} \quad (35)$$

であり,  $\tilde{A}$  および  $\tilde{I}$  は, それぞれ, 局所座標系  $\tilde{z}$  に沿った断面積と断面二次モーメントである.

いま, 部分領域に関する自由度  $\mathbf{U}^{(e)}$  と全自由度  $\mathbf{U}$  を関連づける行列を  $\mathcal{A}^{(e)}$  とし,  $\mathbf{U}_{\langle ab \rangle}$  と全自由度を関連づける行列を  $\mathcal{M}_{\langle ab \rangle}$  とし, これまでの関係をハイブリッド型仮想仕事式(7)に代入すると, 最終的に, 以下の離散化方程式が得られる.

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (36)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle}$$

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)}$$

ここで, それぞれの係数は,

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \mathbf{D}^{(e)} \mathcal{A}^{(e)}$$

$$\mathbf{K}_{\langle s \rangle} = \mathcal{M}_{\langle s \rangle}^t \mathbf{B}_{\langle s \rangle}^t \mathbf{k}_{\langle s \rangle} \mathbf{B}_{\langle s \rangle} \mathcal{M}_{\langle s \rangle}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t & \left\{ \int_{\Omega^{(e)}} ((N_N^{(e)})^t + (N_M^{(e)})^t (\mathbf{Z}^{(e)})^t) f dV \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma^{(e)}} ((N_N^{(e)})^t + (N_M^{(e)})^t (\mathbf{Z}^{(e)})^t) t dV \right\} \end{aligned}$$

であり, 全体係数行列は, 要素内剛性と付帯条件の関係を重ね合わせた結果となっている.

## 6. 計算例

本論文で展開した考え方を簡単な計算例によって検証する.

### (1) 片持ち梁

はじめに, Fig.6 に示すように, 90 度に折れ曲がった片持ち梁の解析を行う. 図中に寸法と材料定数を示す. 単位が記載されていないが, この例は精度を確認のための問題であり, 単位系は適切に設定されているものとする. 断面形状は, 高さが 2, 奥行きが 1 の矩形断面とする. 荷重は B 点に集中荷重  $P=20$  が作用している.

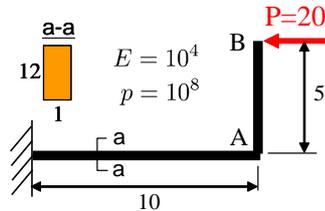


Fig.6 Cantilever Beam

以下に, はり理論による結果と本モデルによる変位解の結果を示す.

Table 1 Displacement of Cantilever Beam

	A 点		B 点	
	HPM	梁理論	HPM	梁理論
x 方向	0.0100001	0.01	0.885015	0.885
z 方向	0.750015	0.75	0.750015	0.75

Table 1 は変位解を比較した表である. はり理論による解と本手法による解はほぼ一致している. 5桁目あたりで解が異なるのは, ペナルティ関数の値によるもので, 十分な精度で解が得られている.

## (2) 門型ラーメン

次の例題として、Fig.7 に示す門型ラーメンに集中荷重が作用した場合の例を取り上げる。構造寸法や材料定数等は図に示すとおりである。断面形状は、高さが 2、奥行きが 1 の矩形断面とする。なお、先の例題同様、単位系は適切に設定されているものとする。

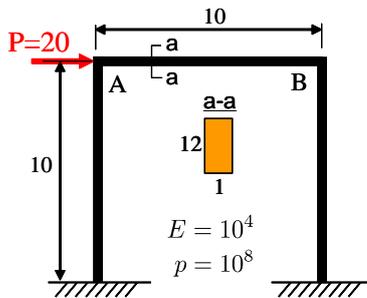


Fig.7 Framed Structure

Table 2 は、本手法と梁理論の変位を比較した表である。先ほどの解析例と同様、5 桁目あたりで誤差が生じているが、これも、ペナルティ関数の影響で、良好な精度で解が得られることが分かる。

Table 2 Displacement of Framed Structure

	A 点		B 点	
	HPM	梁理論	HPM	梁理論
x 方向	0.184686	0.184679	0.179736	0.179728
z 方向	0.0042373	0.0042373	0.0042373	0.0042373

## 7. まとめ

本論文では、骨組構造や Solid 要素あるいは平面要素と組み合わせて解析が可能な HPM における線材要素を開発した。解析解と同じ精度が得られるよう、軸方向変形に関しては 1 次式で、曲げ変形に関しては 3 次式で近似する変位場をもとに HPM の定式化を行った。

この変位場は、要素毎に独立に設定されており、変位の連続性をペナルティ関数によって導入する。線材要素の場合、中立軸における並行変位に加え、たわみ角の連続性を加えることで、これに対応する方法を示した。

最後に、簡単な計算例をとおして、手法の妥当性を検討したところ、ペナルティ関数による影響が含まれるものの、十分な精度で変位解が得られた。

本手法は、弾性解析ではなく、塑性解析を目的としており、今後、ペナルティ関数にヒンジの概念を

導入することで、離散化極限解析の手法を確立する必要がある。

## 参考文献

- [1] 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人, “ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析”, 日本計算工学会論文集, No.20010002, 2001
- [2] 大木裕久, 竹内則雄, “ハイブリッド型ペナルティ法による上下界解析”, 日本計算工学会論文集, No.20060020, 2006
- [3] Takeuchi, N., Tajiri, Y. and Hamasaki, H., "Development of modified RBSM for rock mechanics using principle of hybrid-type virtual work", *Analysis of Discontinuous Deformation : New Developments and Applications*, (G.Ma and Y.Zhou), pp.395-403, Research Publishing Service, 2009
- [4] Washizu, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, New York, 1968
- [5] Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L.D., "Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems", *SIAM journal on numerical analysis*, Vol.39, No.5: pp.1749-1779, 2002
- [6] Arnold, D.N., "An interior penalty finite element method with discontinuous elements", *SIAM J. on numerical analysis*, 19, No.4: pp.742-760, 1982
- [7] Kawai, T., "New element models in discrete structural analysis", *J. of the Society of Naval Architects of Japan*, No.114, pp.1867-193, 1977
- [8] 竹内則雄, “地盤力学における離散化極限解析”, 培風館, 1991
- [9] 竹内則雄, 上田眞稔, 上林厚志, 鬼頭宏明, 斉藤成彦, 富田充宏, 樋口晴紀, “鉄筋コンクリート構造の離散化極限解析法”, 丸善, 2005
- [10] Martin, H.C., "Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis", McGRAW-HILL, New York, 1966
- [11] 見原理一, 大木裕久, 竹内則雄, 草深守人, “高次変位場を用いたハイブリッド型ペナルティ法について”, 計算工学講演会論文集, Vol.10, No.2, pp.705-708, 2005