

### Pricing Kernelを用いた物価連動債の評価

YONEYAMA, Yusuke / 米山, 裕介

---

(発行年 / Year)

2010-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2010-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2009 年度修士論文

# Pricing Kernel を用いた物価連動債の評価



法政大学工学研究科  
システム工学専攻

08R6204 米山 裕介

指導教員 浦谷 規 教授

THE 2009 MASTER'S THESIS

# INFLATION LINKED BOND WITH PRICING KERNEL



DEPARTMENT OF SYSTEM ENGINEERING  
GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING  
HOSEI UNIVERSITY

08R6204 YUSUKE YONEYAMA

SUPERVISOR PROF. TADASHI URATANI

## 概 要

本論文では, pricing kernel を用いて物価連動債価格の評価をおこなう. pricing kernel のモデルは Hughston and Macrina [2008] によるものに, 金利の扱いに関する仮定を加えたものを用いる. このモデルを用いることにより, 将来の流動性効用と物価指数の期待値を算出することができる. それらと物価連動債の利回りを比較することによって, 物価連動債の価格がどのような要因により変化をするのかを示す. また, pricing kernel より低金利環境下での割引率についても算出する.

## Abstract

In the thesis, we apply pricing method for valuation of inflation linked bond price. The pricing kernel method is proposed by Hughston and Macrina [2008], which we extend for analysis of nominal and real interest rate. We succeeded calculate expectations of liquidity benefit and price index in the future. By comparison these expectations of bond prices, we study what are factors of bond prices. Finally we calculate discount rate from pricing kernel under the low interest economy.

# 目次

1	はじめに	1
2	物価連動債	3
2.1	物価連動債と物価	3
2.2	名目価値と実質価値	5
2.3	名目金利と実質金利	6
2.4	ブレーク・イーブン・レート	8
3	pricing kernel	9
3.1	離散時間における pricing kernel	9
3.2	実現金利	11
3.3	名目金利	12
3.4	ドゥープ分解	13
4	pricing kernel のモデル化	15
4.1	マクロ経済	15
4.2	Sidrauski モデル	15
4.3	対数型効用関数	16
4.4	ベキ型効用関数	18
5	pricing kernel を用いた債券の評価	22
5.1	物価連動債の評価	22
5.2	固定利付債の評価	24
5.3	pricing kernel	25
6	まとめ	28
A	付録	29
A.1	式 (3.10) の導出	29
A.2	単調収束定理	30
	参考文献	34
	謝辞	35

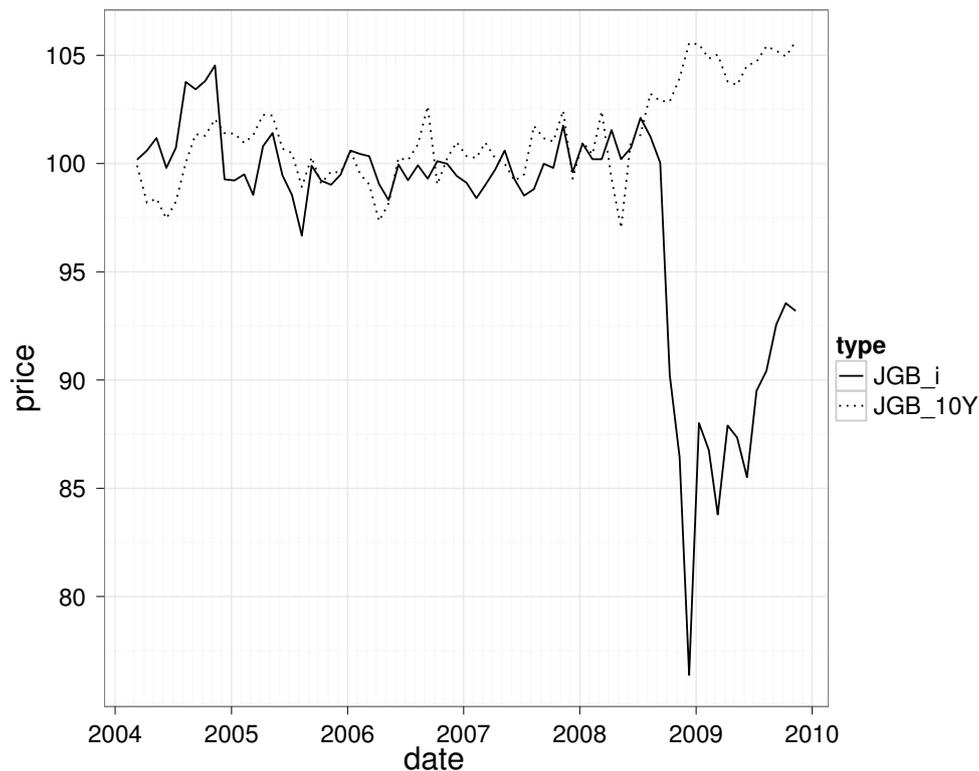


図1 物価連動債と十年物国債の価格推移

## 1 はじめに

図1は物価連動債と、それと同様の年限をもつ十年物国債の価格の推移である。この物価連動債の価格は、各々の時点において最も近くに発行された債権の価格である。つまり、その満期までの期間は発行されている同種の債権の中で最も十年に近いものである\*1。物価連動債の価格は2008年7月から2008年12月\*2に24%下落している。同時期の十年物国債—固定利付債—と比較すれば、その違いは明らかである。物価連動債の元本は、物価指数に連動して変動する。図2には同期間の物価指数の推移を示した。2008年後半には物価指数は上昇しているため元本の価格は、価格の下落とは反対にむしろ増加していたことがわかる。

本論文では、このように変動している物価連動債価格についての評価を pricing kernel を用いておこなう。pricing kernel とは、確率的割引ファクターなどともいわれるように、将来のペイオフを現在価値に割引くために用いられる因子である。ブラック・ショールズモデルに代表されるように、将来のペイオフを現在価値に割引くための割引率には金利が用いられてきた。スポットレートモデル—バシチェック・モデルや CIR モデル—で債券価格を表す場合でも、金利を割引率として用いるという点においては同じである。しかし、物価変動の影響を明示的にうける商品、例えば物価連動債、の評価をおこなう場合には、将来のペイオフを割引くために金利を用いずに、pricing kernel として別に割引ファクターを導入する利点が大きくある。

Hughston and Macrina [2008] は、pricing kernel を用いて価格過程と配当過程、それらから成る資産価格過程の関係を示している。また、pricing kernel を Sidrauski [1967] を基に貨幣の流動性よりもたらされる効用

\*1 このようなものを債券市場では指標ものとして扱う。

\*2 以後、この期間のことを2008年の価格下落期という。

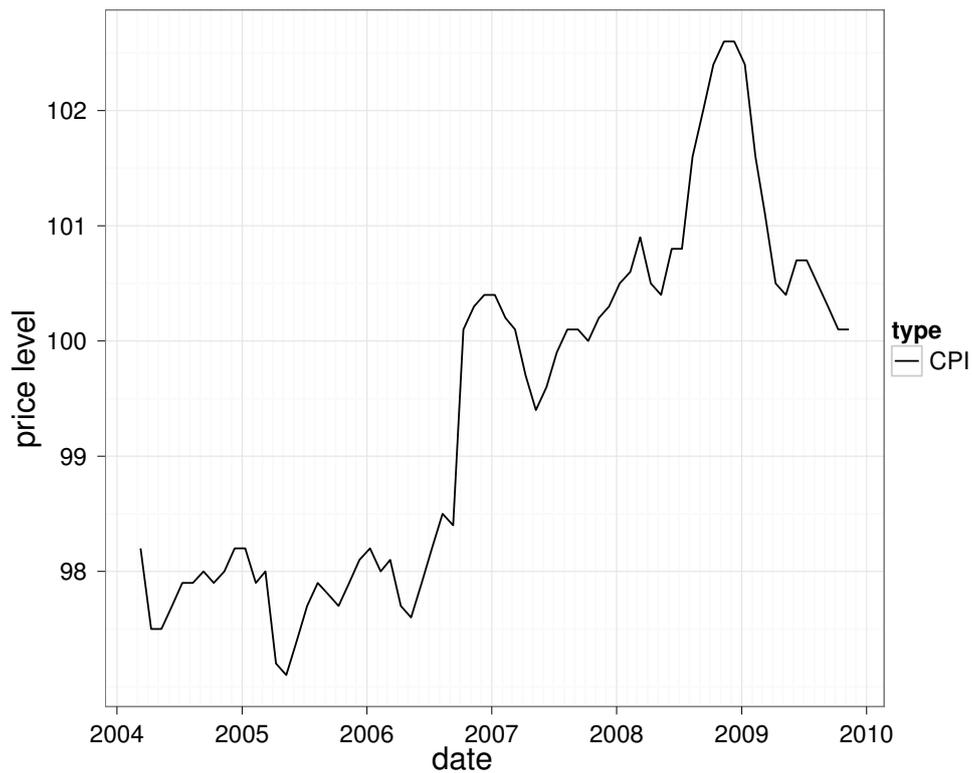


図2 物価指数の推移

などから決定するモデルを提案している. しかしながら, Hughston and Macrina [2008] ではそのモデルを実際の市場データに適用する方法は示されていない. さらに, そのモデルを構築するための仮定は数学的には必要十分なものだが, 具体的な商品の評価に適用するには十分なものとはいえない. 本論文では, この Hughston and Macrina [2008] で提案されている pricing kernel のモデルに金利の扱いに関する仮定を追加する. その上で, 価格・配当・資産価格過程の関係式を pricing kernel を用いて導出する. さらに, pricing kernel を用いて物価連動債の価格変動の評価をおこなっていく.

## 2 物価連動債

物価連動債と実質・名目金利、物価指数などとの関係について本章では扱っていく。

### 2.1 物価連動債と物価

本論文では、一般にカナダ式と呼ばれる物価連動債について扱う。また、詳細な商品設計に関しては、日本の物価連動型国債に基づくものとする。

カナダ式の物価連動債は日本のみならず、英国や米国でも採用されており、最も一般的な物価連動債の仕組みである。日本では、2004年3月より発行が開始された。その特徴は、債権の元本が物価に連動して変動することである。CPIつまり日本であれば全国消費者物価指数（生鮮食品を除く総合指数）に連動して元本が一定期間のラグを持ちながら変動するのである。ただし、CPIの発表は月次であるため、その間の期間は日数に応じて前後の月のCPI値と線形補間され、日々更新される\*3。

このような仕組みをもつ物価連動債と固定利付債との違いは、物価変動がおこった場合に顕著に現れる。例として以下では、一期間モデルにおいて、物価は変化しないと期待されていた市場で、実際には物価が上昇した場合を考える。つまり、時点  $t_i$  における物価指数  $p_i$  と時点  $t_j$  での物価指数  $p_j$  ただし  $i < j$  を考えれば、以下のような関係である：

$$p_i = \mathbb{E}[p_j | \mathcal{F}_i] \\ p_i < p_j.$$

これより物価連動債の時点  $t_i$  における元本  $M_i$  と時点  $t_j$  での元本  $M_j$  は、

$$M_j = \frac{p_j}{p_i} M_i$$

という関係を満たす。さらにこの物価連動債のクーポンレートを  $\hat{R}$  とすれば、時点  $t_j$  で受取るクーポンは、

$$M_j \hat{R} = \frac{p_j}{p_i} M_i \hat{R}$$

となる。このことより  $t_i$  時点での  $t_j$  における物価連動債の価格の期待値  $\mathbb{E}[S_j | \mathcal{F}_i]$  は、

$$\mathbb{E}[S_j | \mathcal{F}_i] = (1 + \hat{R}) \frac{\mathbb{E}[p_j | \mathcal{F}_i]}{p_i} M_i \quad (2.1)$$

$p_i = \mathbb{E}[p_j | \mathcal{F}_i]$  より、

$$\mathbb{E}[S_j | \mathcal{F}_i] = (1 + \hat{R}) M_i \quad (2.2)$$

である。しかし、実際には物価上昇がおこったので、 $t_j$  における物価連動債の価格は次のようになる：

$$S_j = (1 + \hat{R}) \frac{p_j}{p_i} M_i. \quad (2.3)$$

一方、同じ市場における時点  $t_i$  に発行され時点  $t_j$  に満期となる固定利付債について考える。前述の物価連動債と同様に固定利付債の発行時の元本を  $M_i$  とし、そのクーポンレートを  $R$  とする。このとき  $t_i$  での  $t_j$  における固定利付債の価格の期待値  $\mathbb{E}[B_j | \mathcal{F}_i]$  は、

$$\mathbb{E}[B_j | \mathcal{F}_i] = (1 + R) M_i \quad (2.4)$$

\*3 財務省 [2004]: 物価連動債国債の取扱に関する省令と商品設計に基づく

である。また、無裁定条件より、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_j|\mathcal{F}_i] &= \mathbb{E}[B_j|\mathcal{F}_i] \\ (1 + \hat{R}) \frac{\mathbb{E}[p_j|\mathcal{F}_i]}{p_i} M_i &= (1 + R) M_i \end{aligned}$$

であり、 $p_i = \mathbb{E}[p_j|\mathcal{F}_i]$  であることから、 $R = \hat{R}$  となる。よって、

$$\mathbb{E}[B_j|\mathcal{F}_i] = (1 + \hat{R}) M_i. \quad (2.5)$$

さらに、固定利付債の受取り金利は既に時点  $t_i$  で決定されているので、

$$B_j = (1 + \hat{R}) M_i \quad (2.6)$$

である。つまり、物価が変動しないと期待されている市場においては、物価連動債のクーポンレートと固定利付債のクーポンレートは一致する。また、固定利付債は実際の物価変動によらず一定のペイオフを持つ。

次に基準財を導入する。

### 定義 1.

基準財とは、その一単位の価格が物価指数  $p$  と常に一定となる財である。

すなわち時点  $t_i$  における基準財の価格は  $p_i$  であり、この基準財との相対価格が実質的な価値を表すのである。このことについては、節 2.2 にて改めて述べる。

式 (2.2), 式 (2.3), 式 (2.5), 式 (2.6) 各々の相対価格は、

$$\frac{\mathbb{E}[S_j|\mathcal{F}_i]}{p_i} = \frac{(1 + \hat{R}) M_i}{p_i} \quad (2.7)$$

$$\frac{S_j}{p_j} = \frac{(1 + \hat{R}) M_i}{p_i} \quad (2.8)$$

$$\frac{\mathbb{E}[B_j|\mathcal{F}_i]}{p_i} = \frac{(1 + \hat{R}) M_i}{p_i} \quad (2.9)$$

$$\frac{B_j}{p_j} = \frac{(1 + \hat{R}) M_i}{p_j} \quad (2.10)$$

となる。式 (2.7) と式 (2.8) より、

$$\frac{S_j}{p_j} = \frac{\mathbb{E}[S_j|\mathcal{F}_i]}{p_i}$$

となり、物価の変化に対しても物価連動債の相対価格、つまり実質的な価値は変化していない。一方で物価が上昇したとき、つまり  $p_i < p_j$  のとき式 (2.9) と式 (2.10) より、

$$\frac{B_j}{p_j} < \frac{\mathbb{E}[B_j|\mathcal{F}_i]}{p_i}$$

となり、物価上昇は固定利付債の実質的な価値を減じている。

このように、物価連動債は物価変動に際し実質的な価値を変化させないが、固定利付債は物価変動により実質的な価値が変化する。つまり、物価連動債は固定利付債とは異なり、物価変動リスクをヘッジできるという特性をもつのである。

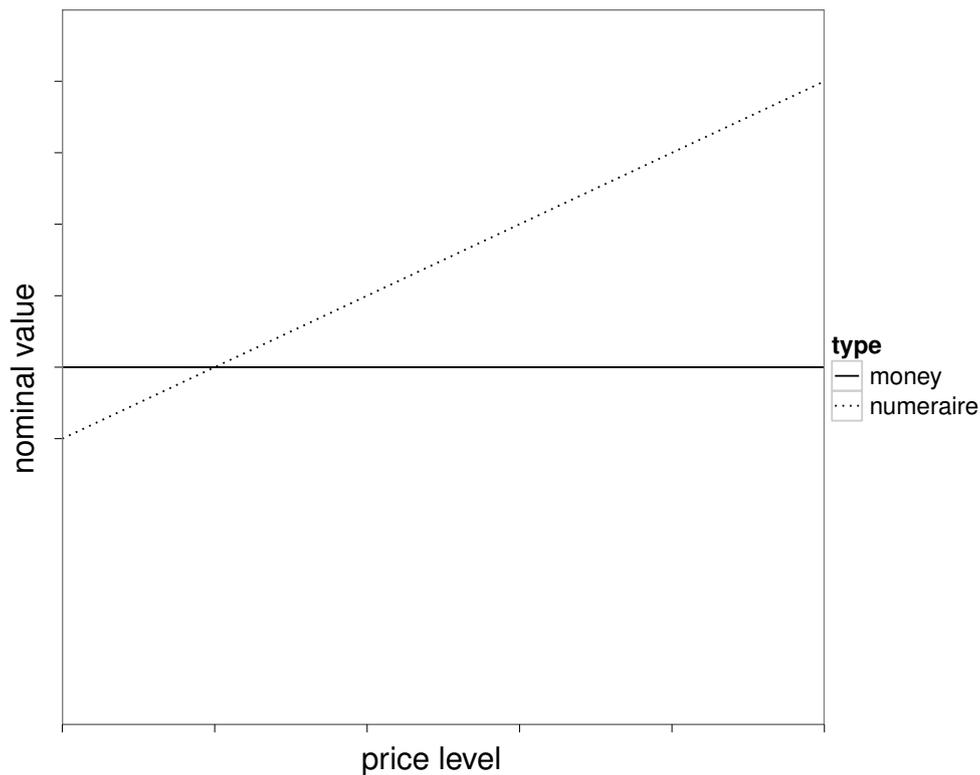


図3 物価と名目価値

## 2.2 名目価値と実質価値

本論文では”名目”と”実質”<sup>\*4</sup>という経済上の二つの概念を用いる。本節では、名目価値と実質価値を定義することによりその違いを明らかにする。

はじめに、名目価値について定義する。

### 定義 2.

名目価値とは、ある資産についての額面上の価値のことである。

例えば貨幣はその名目価値が一定である。価格は名目価値の尺度である。つまり、常に一定の価格をもつ貨幣の名目価値は一定なのである。このことから、貨幣は名目価値の基準となる財であるといえる。一方で、基準財や貴金属などのコモディティは物価が変動すればその価格も変化する。すなわち、名目価値が変化するのである。

つぎに、実質価値について定義する。

### 定義 3.

実質価値とは、資産の物価変動によらない本源的な価値である。

<sup>\*4</sup> nominal と real

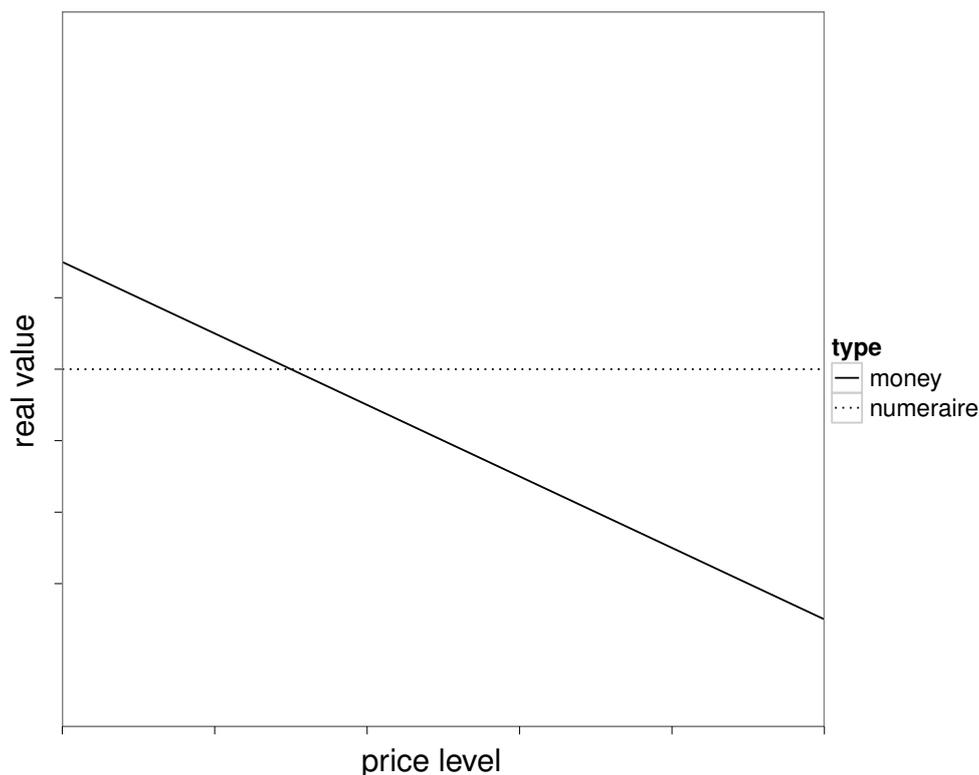


図4 物価と実質価値

例えば基準財はその実質価値が一定である。基準財は、物価の変動に際し、その変動分と同じだけその額面価格を変化させる。つまり、その実質価値が一定なのである。例えば、物価が上昇した場合には、貨幣の実質価値は減じるが、基準財の実質価値は変化しない。

本論文で、“実質”といった場合には、物価に依らない価値の変化を指し、“名目”といった場合には、物価変動をも含んだ価格の変化をさすものとする。

### 2.3 名目金利と実質金利

固定利付債の対数リターンを考える。式(2.4)より固定利付債の時点  $t_i$  から時点  $t_j$  までの対数リターン  $r$  は、

$$r = \ln \frac{(1 + R) M_i}{M_j} \tag{2.11}$$

$$= \ln(1 + R) \tag{2.12}$$

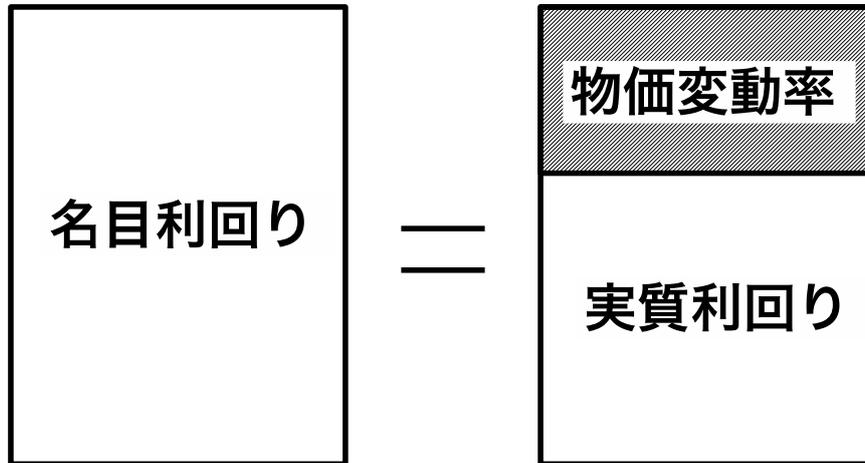


図5 名目利回り, 実質利回りと期待物価変動率の関係

である。次に、物価連動債の対数リターンを考える。式 (2.1) より物価連動債の時点  $t_i$  から時点  $t_j$  までの対数リターンは、

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{(1 + \hat{R}) \mathbb{E}[M_j | \mathcal{F}_i]}{M_i} &= \ln \frac{(1 + \hat{R}) \frac{\mathbb{E}[p_j | \mathcal{F}_i]}{p_i} M_i}{M_i} \\
 &= \ln \left( (1 + \hat{R}) \frac{\mathbb{E}[p_j | \mathcal{F}_i]}{p_i} \right) \\
 &= \ln(1 + \hat{R}) + \ln \frac{\mathbb{E}[p_j | \mathcal{F}_i]}{p_i}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる。よって式 (2.13) より、以下の命題を導くことができる。

**命題 1.**

物価連動債の物価変動による元本の変化も含めた名目利回りの期待値は、実質利回りと物価変動率の期待値を合わせたもので構成される。

この命題 1 より、物価連動債のクーポンレートは実質利回りだけに影響する。つまり、クーポンレート  $\hat{R}$  は実質金利から成ることがわかる。同様に節 2.1 で示したように、物価変動によってその実質的な価値が変化する固定利付債の対数リターンは、名目的であるといえる。よって、固定利付債のクーポンレート  $R$  は名目金利から成ることがわかる。

このクーポンレートが名目金利から構成されるのか、実質金利から構成されるのかという違いが、物価連動債を特徴づけている。つまり、固定利付債が起債時に満期時までの期待物価変動率に応じて得られるクーポンが固定されてしまうのに対し、物価連動債は物価変動に応じてそのクーポンを変化させるのである。すなわち、節 2.1 で示したように、この違いが物価連動債が物価上昇のリスクをヘッジできる理由である。

## 2.4 ブレーク・イーブン・レート

式 (2.12) で示した固定利付債の対数リターンと式 (2.13) で示した物価連動債の対数リターンの期待値が等しくなるような物価変動率をブレーク・イーブン・レートという。式 (2.13) における、実質利回りを  $\hat{r}$  とすると、以下のようになる：

$$\ln \frac{(1 + \hat{R}) \mathbb{E}[M_j | \mathcal{F}_i]}{M_i} = \hat{r} + \ln \frac{\mathbb{E}[p_j | \mathcal{F}_i]}{p_i}.$$

ブレーク・イーブン・レートとはこの物価連動債の対数リターンと固定利付債の対数リターン  $r$  とが等しいと仮定されるときに物価変動率のことをいう。つまり、ブレーク・イーブン・レートを  $\bar{p}$  とすれば

$$r = \hat{r} + \bar{p}$$

である。すなわちブレーク・イーブン・レート  $\bar{p}$  は、

$$\bar{p} = \hat{r} - r$$

である。

このブレーク・イーブン・レートは一般に市場の期待物価変動率を表しているとされている\*5。固定利付債のクーポンレートは、実質金利に加え、市場の期待物価変動率やリスクプレミアムなどから決定される。また、物価連動債のクーポンレートは、実質金利とリスクプレミアムから決定される。実際には、リスクプレミアムの測定が容易ではないことから、このブレーク・イーブン・レートが市場の期待物価変動率であるとみなされるのである。

図 6 は日本の 10 年物国債と物価連動国債の複利利回りの推移とブレーク・イーブン・レートである。十年物国債は名目金利を、物価連動債は実質金利を表す指標とみなすことができる。また、図 10 は同じ期間の市場の環境をみるための消費者物価指数とマネーストックの推移である。

---

\*5 陽介 [2004] などが詳しい

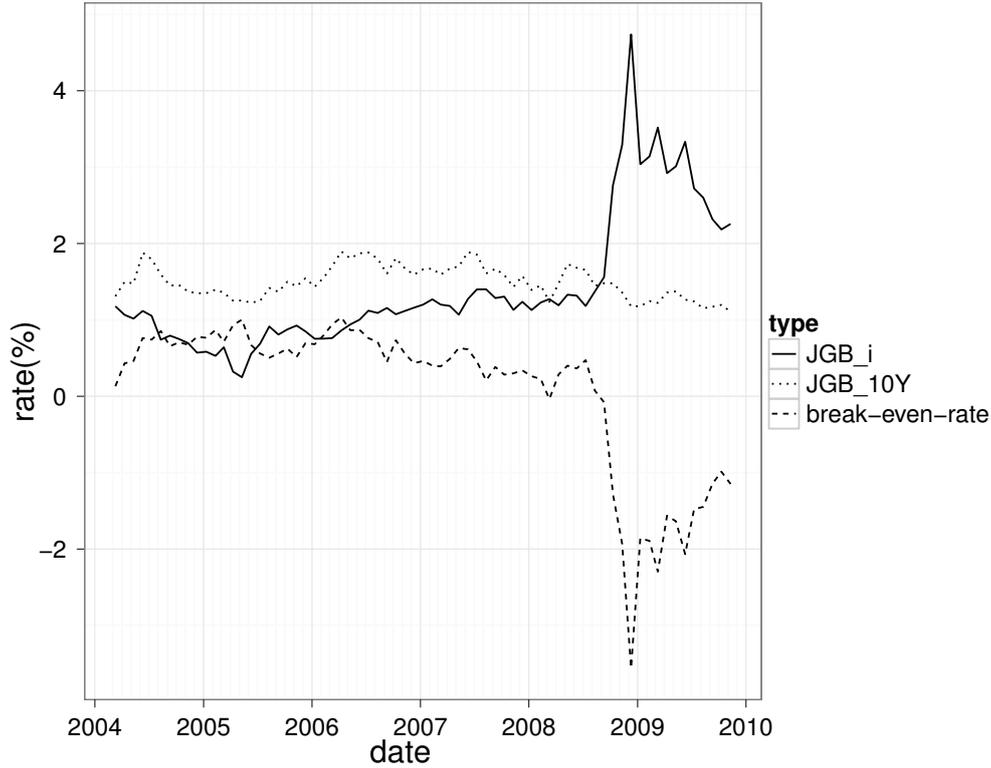


図6 10年物国債, 物価連動型国債, ブレーク・イーブン・レートの推移

### 3 pricing kernel

本章では, pricing kernel を用いた価格付けや金利の表現, pricing kernel の諸性質について示していく.

#### 3.1 離散時間における pricing kernel

離散時間は数列  $\{t_i\}_{i=0,1,2,\dots}$  で表されている, ただし  $t_0$  は現在時点を表し, すべての  $i \in \mathbb{N}_0$  において  $t_{i+1} > t_i$  である. 本研究では, Hughston and Macrina [2008] をもとに pricing kernel を構築していく. 各資産は価格過程  $\{S_{t_i}\}_{i \geq 0}$  と配当過程  $\{D_{t_i}\}_{i \geq 0}$  を用いて表される. 配当過程  $D_{t_i}$  は時点  $t_i$  において資産から保有者が得られる配当やキャッシュフローを表している. また, 価格過程  $S_{t_i}$  は, 資産の時点  $t_i$  での配当を除いた価値を表している. つまり  $S_{t_i}$  は資産の保有者が, その資産を売却する場合に得ることのできる価格を表している.

本論文では, 記号の簡略化のために  $S_i = S_{t_i}$ ,  $D_i = D_{t_i}$  と表記する. また, 市場の変動はフィルトレーション  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \geq 0}$  をもつ確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上でおこるものとする.

このような市場で無裁定条件をみたすような, 価格過程を構築するために, 狭義の正の pricing kernel  $\{\pi_i\}_{i \geq 0}$  が以下の公理をみたすものと仮定する.

#### 公理 A.

価格過程  $\{S_i\}_{i \geq 0}$  と配当過程  $\{D_i\}_{i \geq 0}$  から成る過程  $\{M_i\}_{i \geq 0}$  はマルチンゲールである.  $\{M_i\}_{i \geq 0}$  は以下の

式で定義される:

$$M_i = \pi_i S_i + \sum_{n=0}^i \pi_n D_n.$$

すなわち, すべての  $i \in \mathbb{N}_0$  において  $\mathbb{E}[|M_i|] < \infty$  であり, すべての  $i \leq j$  において  $\mathbb{E}[M_j | \mathcal{F}_i] = M_i$  である. ただし, 価格過程  $\{S_i\}$  は配当後の価格である.

**公理 B.**

$\{\bar{B}_i\}_{i \geq 0}$  を価格過程に持つ, 狭義の正の収益をもたらす無配当資産が存在する. すなわち, すべての  $i \in \mathbb{N}_0$  において  $\bar{B}_{i+1} > \bar{B}_i$  である. また, 価格過程  $\{\bar{B}_i\}$  は, すべての  $b \in \mathbb{R}$  において  $\bar{B}_i > b$  となる  $t_i$  が存在するという意味において, 非有界であると仮定する.

この公理 B のもとで与えられる  $\{\bar{B}_i\}$  は無配当資産であることから, 公理 A より  $\{\pi_i \bar{B}_i\}$  はマルチンゲールである. また,  $\bar{B}_{i+1} > \bar{B}_i$  であることから,

$$\mathbb{E}[\pi_{i+1} | \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}\left[\frac{\pi_{i+1} \bar{B}_{i+1}}{\bar{B}_i} \middle| \mathcal{F}_i\right] < \mathbb{E}\left[\frac{\pi_i \bar{B}_i}{\bar{B}_i} \middle| \mathcal{F}_i\right] = \frac{\mathbb{E}[\pi_i \bar{B}_i | \mathcal{F}_i]}{\bar{B}_i}.$$

さらに  $\{\pi_i \bar{B}_i\}$  はマルチンゲールであることから,  $i < j$  のとき

$$\mathbb{E}[\pi_j | \mathcal{F}_i] < \pi_i$$

であり,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_i] = 0 \tag{3.1}$$

である. よって, pricing kernel は優マルチンゲールであるといえる.

公理 A より,

$$\begin{aligned} M_i &= \pi_i S_i + \sum_{n=0}^i \pi_n D_n \\ &= \mathbb{E}\left[\pi_j S_j + \sum_{n=0}^j \pi_n D_n \middle| \mathcal{F}_i\right] \quad (i \geq j) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_j S_j | \mathcal{F}_i] + \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^j \pi_n D_n \middle| \mathcal{F}_i\right], \end{aligned}$$

単調収束定理\*6より

$$\begin{aligned} M_i &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_j S_j | \mathcal{F}_i] + \mathbb{E}\left[\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j \pi_n D_n \middle| \mathcal{F}_i\right] \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_j S_j | \mathcal{F}_i] + \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n D_n \middle| \mathcal{F}_i\right], \end{aligned}$$

---

\*6 単調収束定理の証明は付録 A.2 を参照せよ

$M_i = \pi_i S_i + \sum_{n=0}^i \pi_n D_n$  であるので,

$$\begin{aligned}\pi_i S_i + \sum_{n=0}^i \pi_n D_n &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_j S_j | \mathcal{F}_i] + \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n D_n | \mathcal{F}_i\right] \\ \pi_i S_i &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_j S_j | \mathcal{F}_i] + \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n D_n | \mathcal{F}_i\right].\end{aligned}$$

よって、以下の命題を導くことができる。

### 命題 2.

任意の資産が価格過程  $\{S_i\}_{i \geq 0}$  と配当過程  $\{D_i\}_{i \geq 0}$  で表されるとき、その価格過程は以下の式で与えられる:

$$S_i = \frac{\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_j S_j | \mathcal{F}_i]}{\pi_i} + \frac{1}{\pi_i} \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n D_n | \mathcal{F}_i\right].$$

## 3.2 実現金利

公理 B によって定義される無配当資産過程  $\{\bar{B}_i\}$  の収益率  $\{\bar{r}_i\}$  は以下の式で与えられる:

$$\bar{r}_i = \frac{\bar{B}_i - \bar{B}_{i-1}}{\bar{B}_{i-1}}. \quad (3.2)$$

この  $\{\bar{r}_i\}$  は時点  $t_{i-1}$  におこなった投資の、時点  $t_i$  における収益率である。つまり、時点  $t_i$  になってはじめてわかるものであるので、 $\{\bar{B}_i\}$  は  $\{\mathcal{F}_i\}$  適合であるという仮定のみがおかれている。また、公理 A より、すべての資産のキャッシュフローは配当として扱われるので、無配当資産過程  $\{\bar{B}_i\}$  の場合、 $D_i = \bar{r}_i$  となる。このことより、無配当資産過程  $\{\bar{B}_i\}$  は公理 A の枠組みのもとで以下のように考えることができる。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j \pi_n \bar{r}_n | \mathcal{F}_i\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j \pi_n \frac{\bar{B}_n - \bar{B}_{n-1}}{\bar{B}_{n-1}} \middle| \mathcal{F}_i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j \left(\frac{\pi_n \bar{B}_n}{\bar{B}_n} \frac{\bar{B}_n - \bar{B}_{n-1}}{\bar{B}_{n-1}}\right) \middle| \mathcal{F}_i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j \left(\frac{\pi_n \bar{B}_n}{\bar{B}_{n-1}} - \frac{\pi_n \bar{B}_n}{\bar{B}_n}\right) \middle| \mathcal{F}_i\right],\end{aligned}$$

ここで  $\{\pi_i \bar{B}_i\}$  がマルチンゲールであることから、タワールールを用いると、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j \pi_n \bar{r}_n | \mathcal{F}_i\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j \left(\frac{\mathbb{E}[\pi_n \bar{B}_n | \mathcal{F}_{n-1}]}{\bar{B}_{n-1}} - \frac{\pi_n \bar{B}_n}{\bar{B}_n}\right) \middle| \mathcal{F}_i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j \left(\frac{\pi_{n-1} \bar{B}_{n-1}}{\bar{B}_{n-1}} - \frac{\pi_n \bar{B}_n}{\bar{B}_n}\right) \middle| \mathcal{F}_i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j (\pi_{n-1} - \pi_n) \middle| \mathcal{F}_i\right] \\ &= \mathbb{E}[\pi_i - \pi_j | \mathcal{F}_i] \\ &= \pi_i - \mathbb{E}[\pi_j | \mathcal{F}_i].\end{aligned}$$

よって,

$$1 = \frac{\mathbb{E}[\pi_j \cdot 1 | \mathcal{F}_i]}{\pi_i} + \frac{1}{\pi_i} \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j \pi_n \bar{r}_n | \mathcal{F}_i\right] \quad (3.3)$$

命題 2 と式 (3.3) を比較することで, 以下の命題を導くことができる.

**命題 3.**

常にその名目的な価格が  $S_i = 1$  となり, キャッシュフローが  $\{\bar{r}_i\}_{i \geq 1}$  で与えられる資産が存在する.

つぎに, 命題 3 によって与えられる資産を考えることによって, 実現金利  $r_i$  を用いて式 (3.1) より

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_i] = 0,$$

タワールールを用いて,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_i] = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\pi_j | \mathcal{F}_i]],$$

単調収束定理より,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\pi_j | \mathcal{F}_i]] = \mathbb{E}\left[\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_j | \mathcal{F}_i]\right],$$

よって,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\pi_j | \mathcal{F}_i] = 0.$$

これを式 (3.3) に用いることで, 以下の命題を導くことができる.

**命題 4.**

無配当資産過程  $\{\bar{B}_i\}$  が公理 A と公理 B を満たし, その収益率が  $\{\bar{r}_i\}$  に従うとする. このとき pricing kernel は以下の式で表すことができる:

$$\pi_i = \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n \bar{r}_n | \mathcal{F}_i\right].$$

### 3.3 名目金利

時点  $t_{i-1}$  に決定される  $t_i$  までに適用される名目金利  $r_i$  は, 満期が  $t_i$  の割引債の時点  $t_{i-1}$  における価格  $P_{i,i+1}$  を用いて以下の式で定義される:

$$P_{i-1,i} = \frac{1}{1 + r_i}. \quad (3.4)$$

公理 A のもとでは, 割引債は満期  $t_i$  にその価格が  $P_{t_i,t_i} = 0$  となり, 配当が  $D_i = 1$  となる商品である. つまり命題 2 にこのことを適用すれば, 割引債価格は pricing kernel を用いて以下のように表すことができる:

$$P_{i-1,i} = \frac{1}{\pi_{i-1}} \mathbb{E}[\pi_i | \mathcal{F}_{i-1}]. \quad (3.5)$$

### 3.4 ドゥーブ分解

つぎに、離散優マルチンゲールにドゥーブ分解を用いる。もし  $x_i$  が確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上で優マルチンゲールであるならば、すべての  $i \geq 0$  において  $x_i = y_i - a_i$  を満たすマルチンゲール  $y_i$  と可予測な増加過程  $a_i$  が存在する。ここでの可予測とは、 $a_i$  が  $\mathcal{F}_{i-1}$  可測であるという意味である。また、 $a_i$  は  $a_0 = 0$  と  $i \geq 1$  において  $a_i = a_{i-1} + x_{i-1} - \mathbb{E}[x_i | \mathcal{F}_{i-1}]$  を満たしている。

このとき、pricing kernel は以下のように分解される。

$$\pi_i = Y_i - A_i,$$

ここで  $A_0 = 0$  であり  $i \geq 1$  において

$$A_i = \sum_{n=0}^{i-1} (\pi_n - \mathbb{E}[\pi_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \quad (3.6)$$

である。また、 $Y_0 = \pi_0$  であり  $i \geq 1$  において

$$Y_i = \sum_{n=0}^{i-1} (\pi_{n+1} - \mathbb{E}[\pi_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \pi_0)$$

である。また、極限  $a_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$  が存在し、pricing kernel の場合には式 (3.1) の関係をもつことから以下を導くことができる。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_\infty | \mathcal{F}_i] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (\pi_n - \mathbb{E}[\pi_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \mid \mathcal{F}_i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\pi_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (\pi_{n+1} - \mathbb{E}[\pi_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \mid \mathcal{F}_i\right] \\ &= \mathbb{E}[Y_\infty | \mathcal{F}_i], \end{aligned}$$

さらに  $Y_i$  がマルチンゲールであることから

$$\mathbb{E}[Y_\infty | \mathcal{F}_i] = Y_i$$

となり、pricing kernel は

$$\pi_i = \mathbb{E}[A_\infty | \mathcal{F}_i] - A_i \quad (3.7)$$

となる。

式 (3.6) と式 (3.5) より

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{n=0}^{i-1} \pi_n (1 - P_{n,n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{i-1} \pi_n \left(1 - \frac{1}{1 + r_{n+1}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{i-1} \pi_n \left(\frac{1 + r_{n+1} - 1}{1 + r_{n+1}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{i-1} \pi_n r_{n+1} \left(\frac{1}{1 + r_{n+1}}\right) \end{aligned}$$

である。つまり,

$$A_i = \sum_{n=0}^{i-1} \pi_n r_{n+1} P_{n,n+1} \quad (3.8)$$

となる。式 (3.7) と式 (3.8) より

$$\begin{aligned} \pi_i &= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n r_{n+1} P_{n,n+1} \middle| \mathcal{F}_i \right] - \sum_{n=0}^{i-1} \pi_n r_{n+1} P_{n,n+1} \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=i}^{\infty} \pi_n r_{n+1} P_{n,n+1} \middle| \mathcal{F}_i \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。この式 (3.9) と式 (3.4), 式 (3.2) より以下の命題が導かれる\*7。

**命題 5.**

名目金利  $r_i$  は,  $\mathcal{F}_{i-1}$  可測であり, 実現金利  $\bar{r}_i$  は,  $\mathcal{F}_i$  可測である。また, 名目金利  $r_i$  と実現金利  $\bar{r}_i$  は以下の関係式を満たす:

$$\mathbb{E}[\pi_i \bar{r}_i | \mathcal{F}_{i-1}] = \pi_{i-1} r_i P_{i-1,i}. \quad (3.10)$$

---

\*7 付録 A.1 を参照せよ

## 4 pricing kernel のモデル化

pricing kernel は物価・金利などのマクロ経済的な要因によって決定される。そこで、本章では pricing kernel をモデル化するためのパラメーターとして使用する要因 — マネーストック、総消費、物価 — を定義していく。

### 4.1 マクロ経済

離散時間であたえられる  $\{c_i\}_{i \geq 1}$  は、実質消費過程である。  $c_i$  は時点  $t_i$  での経済全体の消費水準を表している。  $\{m_i\}_{i \geq 1}$  は、名目のマネーストック過程を表しており、また  $\{p_i\}_{i \geq 1}$  は消費者物価指数を表している。これらの関係は、経済全体を代表するような投資家の最適化問題として考えることができる。

時点  $t_i$  において代表投資家はマネーストックから効用を得ると仮定する。すなわち、  $\lambda_i$  を用いて名目効用  $\lambda_i m_i$  を得ていると仮定する。この  $\lambda$  はマネーストックに対するコンベニエンス・イールドである。つまり、マネーストックがもつ流動性より得られる名目流動性効用である。また、この名目流動性効用に対し実質流動性効用も定義する。実質流動性効用  $l_i$  は物価指数  $p_i$  を用いて以下のように定義される：

$$l_i = \frac{\lambda_i m_i}{p_i}. \quad (4.1)$$

以下では流動性効用とは、実質の流動性効用をさすものとする。

投資が1期間の効用のみを考え最適化されるという仮定は、解析上は利点が多いが、現実的には問題もある。投資家が最適化したいと願っているのは、投資による利益そのものではなく利益によっておこなうことができる消費である。すなわち投資家の効用を考えた場合には、利益の中からどれだけ消費することができるのかということが問題となる。すなわち最適化すべきは、実質流動性効用  $l_i$  だけではなく実質消費  $c_i$  も含めた関数より期待される効用である。

### 4.2 Sidrauski モデル

投資家の期待効用が流動性効用  $l_i$  と実質消費  $c_i$  によって決定されると仮定する。この仮定は、Sidrauski [1967] と一致する。よって本論文では、この Sidrauski [1967] のフレームワークに基づいて pricing kernel の決定をおこなっていく。

効用関数  $U(x, y)$  は以下の性質をもつ。

$$\begin{aligned} U &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ U_x &> 0 \\ U_y &> 0 \\ U_{xx} &> 0 \\ U_{yy} &> 0 \\ U_{xx}U_{yy} &> (U_{xy})^2. \end{aligned}$$

このとき投資家は、累積効用  $J$  を最大化する。累積効用  $J$  は次の式で与えられる：

$$J = \mathbb{E} \left[ \sum_{n=0}^N \exp(-\gamma t_n) U(c_n, l_n) \right] \quad (4.2)$$

ただし  $\gamma$  は効用の累積和を考える上で、時間差を考慮するための割引率である。ここでは簡単のために、定数を仮定する。また、投資家に対する最大化問題を解く上での予算制約をおく。予算制約  $W$  は以下の式で与えら

れる:

$$W = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^N \pi_n (p_n c_n + \lambda_n m_n)\right].$$

この予算制約  $W$  は名目消費と名目利益を合わせたものを、各時点に応じた pricing kernel を乗じたものである。効用が実質消費  $c_n$  と流動性効用  $l_n$  によって決定されることから、式 (4.1) を用いれば予算制約  $W$  は、

$$W = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^N \pi_n p_n (c_n + l_n)\right] \quad (4.3)$$

となる。

次に、ラグランジュ定数  $\mu$  を導入する。このラグランジュ定数  $\mu$  を用いて、式 (4.2) と式 (4.3) よりラグランジュ関数  $L(c_n, l_n, \mu)$  を以下のように定義する。

$$L(c_n, l_n, \mu) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^N (\exp(-\gamma t_n) U(c_n, l_n) - \mu (W - \pi_n p_n (c_n + l_n)))\right], \quad (4.4)$$

これより、

$$\frac{\partial L}{\partial x} = U_x(c_n, l_n) - \mu \exp(\gamma t_n) \pi_n p_n \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = U_y(c_n, l_n) - \mu \exp(\gamma t_n) \pi_n p_n \quad (4.6)$$

である。さらに、ラグランジュ関数  $L$  の各変数についての偏微分を 0 とするれば、以下の関係式を導くことができる:

$$U_x(c_n, l_n) = U_y(c_n, l_n). \quad (4.7)$$

これらの関係式は、期待効用の関数型に関わらず求まる。したがって、pricing kernel の具体的なモデルは効用関数にどのような関数形を適用するのかによって異なるものとなる。次節以降では、対数型とべき型の二種類の関数形について示していく。

### 4.3 対数型効用関数

本節では投資家の期待効用は対数型効用関数に従うものとする。そして、その仮定のもとでの pricing kernel のモデルを示す。まず対数型効用関数を以下のように定義する:

$$U(x, y) = A \ln(x) + B \ln(y).$$

ここで、 $A$  と  $B$  とともに非負の定数であるとする。式 (4.7) より、

$$\frac{A}{c_n} = \frac{B}{l_n}$$

である。

また、

$$c_n = l_n \frac{A}{B} \quad (4.8)$$

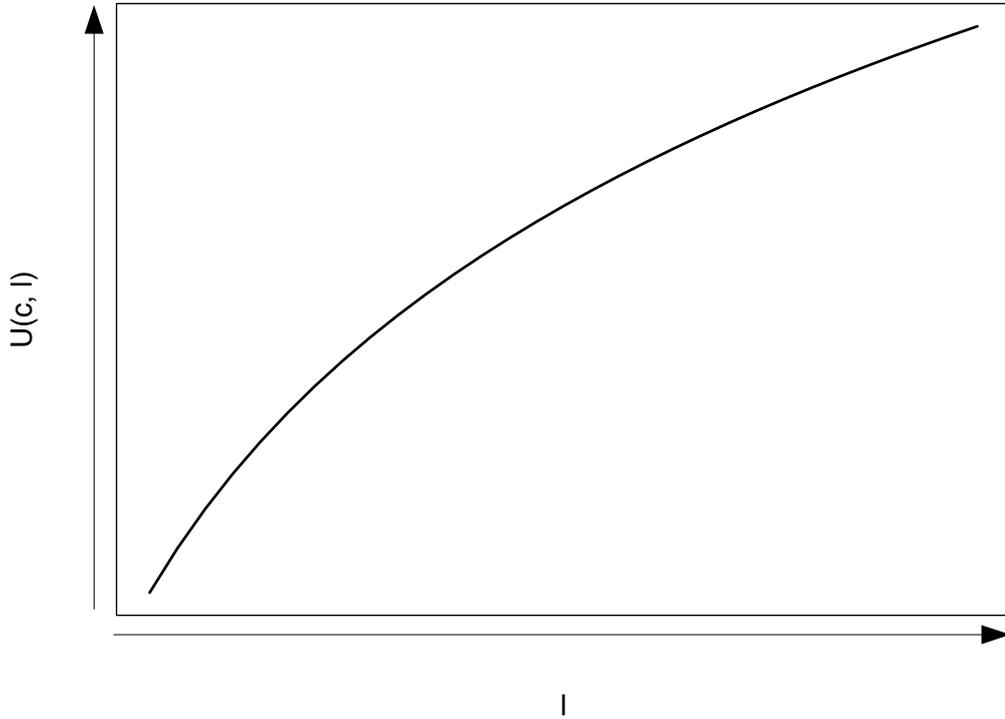


図7 対数型効用関数

であることから、利益の中の  $\frac{A}{B}$  が消費になることが分かる。つまり、この対数型効用関数の場合には、パラメーター  $A$  と  $B$  によって利益と消費の比率が常に一定となる。

対数型効用関数の場合、その関数形は図7のようになる。パラメーター  $A$  と  $B$  は式(4.8)で示したように、消費の水準を決定する。しかし、限界効用には影響を与えない。

式(4.1)と式(4.8)より、

$$c_n p_n = \frac{A}{B} \lambda_n m_n.$$

この式より次の二つのことがわかる。一つは、マネーストック  $m_n$  の増加が物価指数  $p_n$  を上昇させることである。これは古典派経済学の貨幣中立説と呼ばれる命題と一致している。また、図2で示した、実際の市場データとも矛盾していない。この貨幣中立説とは、マネーストックの変化が本論文でいうところの”実質”の経済に影響を与えないということである。つまり、通貨そのものの価値を明示的に扱う必要はなく、専ら”実質”の変数の関係のみを扱えば良いということである。ここで pricing kernel を導出する。まず、式(4.6)より

$$\frac{B}{l_n} = \mu \exp(-\gamma t_n) \pi_n p_n$$

である。さらに式(4.1)を用いれば、

$$\pi_n = \frac{B \exp(-\gamma t_n)}{\mu \lambda_n m_n} \quad (4.9)$$

となる。さらに pricing kernel はその定義より時点  $t_0$  においては、 $\pi_0 = 1$  である。よって式(4.9)より、

$$\begin{aligned} B \exp(-\gamma t_0) &= \mu \lambda_0 m_0 \\ \frac{B}{\mu} &= \lambda_0 m_0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる。式 (4.9) と式 (4.10) より、対数型効用関数の場合の pricing kernel は以下の式で表される:

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 m_0}{\lambda_n m_n} \exp(-\gamma t_n). \quad (4.11)$$

これより、対数型効用関数の場合には pricing kernel は、コンビニエンス・イールド  $\lambda_i$  とマネーストック  $m_i$  より求められることがわかる。つまり効用関数のパラメーター  $A$  と  $B$  に依らず pricing kernel の値が決定されるのである。よって、以下の命題を導くことができる。

**命題 6.**

確率変数として与えられる時点  $t_j$  に発生する名目的なペイオフ  $H_j$  を考える。このペイオフ  $H_j$  は pricing kernel を用いれば以下のようなになる、

$$H_0 = \mathbb{E}[\pi_j H_j].$$

よって  $H_0$  は以下の関係式を満たす:

$$H_0 = \lambda_0 m_0 \exp(-\gamma t_j) \mathbb{E} \left[ \frac{H_j}{\lambda_j m_j} \right].$$

命題 6 より、pricing kernel がマネーストックよりもたらされる名目的な流動性効用 — 物価変動も含む流動性効用 — と実質的な割引率から成ることが示された。

#### 4.4 ベキ型効用関数

本節では投資家の期待効用はベキ型効用関数に従うものとする。その上での pricing kernel を節 4.3 と同様に示していく。まず、ベキ型効用関数を

$$U(x, y) = \frac{A}{\alpha} x^\alpha + \frac{B}{\beta} y^\beta$$

$$(\alpha, \beta) \in (-\infty, 1) \text{ without } \{0\}$$

と定義する。式 (4.7) より、

$$A c_n^{\alpha-1} = B l_n^{\beta-1}$$

である。

さらに、

$$c_n^{\alpha-1} = \frac{B}{A} \left( \frac{\lambda_n m_n}{p_n} \right)^{\beta-1}$$

$$c_n = \left( \frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left( \frac{\lambda_n m_n}{p_n} \right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}}.$$

両辺  $\frac{1-\alpha}{1-\beta}$  乗して

$$c_n^{\frac{1-\alpha}{1-\beta}} = \left( \frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{\lambda_n m_n}{p_n}.$$

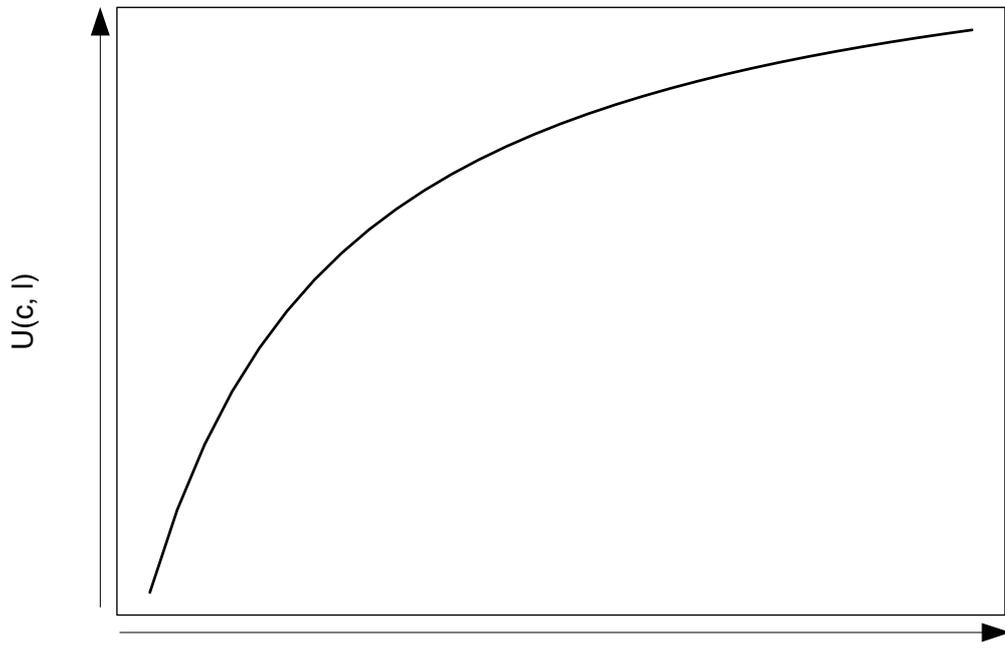


図8 ベキ型効用関数:  $\alpha = -1, \beta = -1$

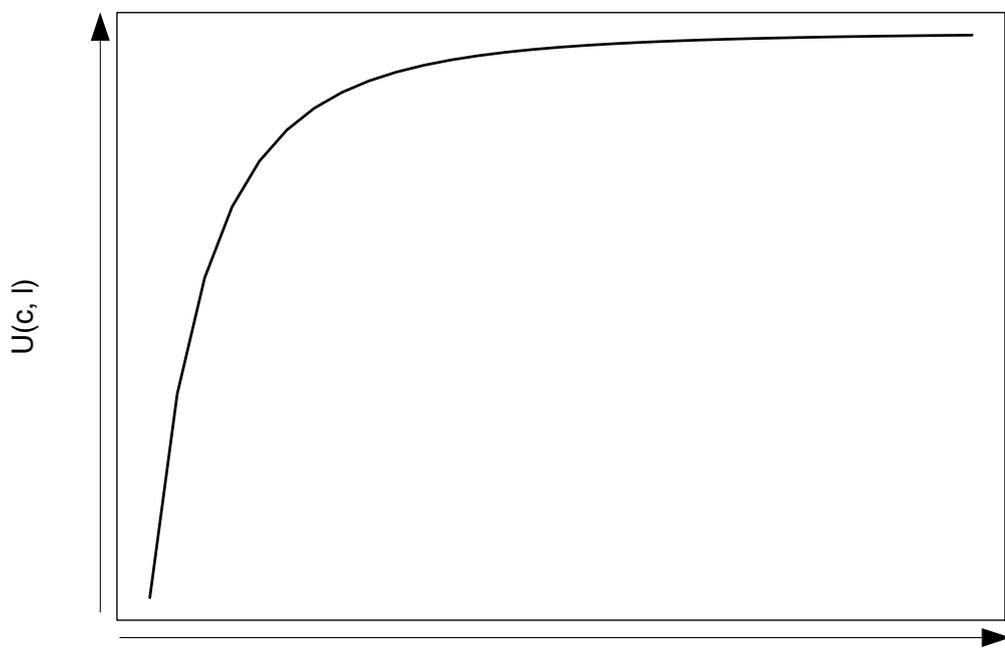


図9 ベキ型効用関数:  $\alpha = -1, \beta = -5$

よって,

$$p_n = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{\lambda_n m_n}{c_n^{\frac{1-\alpha}{1-\beta}}} \quad (4.12)$$

となる. このことからベキ型効用関数の場合において, 物価指数  $p_n$  と実質消費  $c_n$  は逆数の関係にある. すなわち, 物価が上昇すると, 実質消費は減少するのである. これは, 物価が上昇すると資産の実質価値は減少する. つまり, 資産からおこなわれる実質消費も減少するのである. また, 図 8 と図 9 のように, パラメーター  $p$  と  $q$  によってベキ型効用関数の限界効用は変化する.

式 (4.6) より

$$\begin{aligned} Bl_n^{\beta-1} &= \mu \exp(\gamma t_n) \pi_n p_n \\ B \left(\frac{\lambda_n m_n}{p_n}\right)^{\beta-1} &= \mu \exp(\gamma t_n) \pi_n p_n \\ \pi_n &= \frac{\exp(-\gamma t_n) B (\lambda_n m_n)^{\beta-1}}{\mu p_n^\beta} \end{aligned}$$

よって,

$$\pi_n = \frac{B}{\mu} \exp(-\gamma t_n) \frac{p_n^{-\beta}}{(\lambda_n m_n)^{1-\beta}} \quad (4.13)$$

となる. さらに,  $\pi_0 = 1$  であることを用いれば式 (4.13) より,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{B}{\mu} \frac{p_0^{-\beta}}{(\lambda_0 m_0)^{1-\beta}} \\ \frac{B}{\mu} &= \frac{(\lambda_0 m_0)^{1-\beta}}{p_0^{-\beta}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる. 式 (4.13) と式 (4.14) より, ベキ型効用関数を用いた場合の pricing kernel は以下の式で表すことができる:

$$\pi_n = \frac{(\lambda_0 m_0)^{1-\beta}}{p_0^{-\beta}} \exp(-\gamma t_n) \frac{p_n^{-\beta}}{(\lambda_n m_n)^{1-\beta}}. \quad (4.15)$$

これより, ベキ型効用関数の場合 pricing kernel は, コンビニエンス・イールド  $\lambda_i$  とマネーストック  $m_i$  に加え, 実質消費  $p_i$  と効用関数のパラメーターより決定されることがわかる. よって, 以下の命題を導くことができる.

#### 命題 7.

確率変数として与えられる時点  $t_j$  に発生する名目的なペイオフ  $H_j$  を考える. このペイオフ  $H_j$  は pricing kernel を用いれば以下のようになる,

$$H_0 = \mathbb{E}[\pi_j H_j].$$

よって  $H_0$  は次の関係式を満たす:

$$H_0 = \frac{(\lambda_0 m_0)^{1-\beta}}{p_0^{-\beta}} \exp(-\gamma t_n) \mathbb{E}\left[\frac{p_n^{-\beta}}{(\lambda_n m_n)^{1-\beta}} H_j\right].$$

命題 7 より, 効用関数のパラメーター  $\beta$  によって, 物価変動と流動性効用の重み付けがことなってくることが分かる. このような期待効用の関数の決定は, マクロ経済学の範疇であり, 本論文の主とするところではない.  $\beta = 0$  を仮定すれば, ベキ型効用関数と対数型効用関数の場合の結果が一致する. したがって, 次章以降では対数型効用関数を用いるものとする.

## 5 pricing kernel を用いた債券の評価

本章では、4章で示した、pricing kernel のモデルを用いて物価連動債・固定利付債の評価をおこなう。

### 5.1 物価連動債の評価

満期を  $t_N$  とすれば、命題 2 より時点  $t_0$  での資産価格  $S_0$  は以下の式で表される：

$$S_0 = \mathbb{E}[\pi_N S_N] + \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N \pi_n D_n\right]. \quad (5.1)$$

公理 3.1 より  $S_i$  は時点  $t_i$  における配当後の資産価格を表していた。これより物価連動債の場合、その元本過程が  $\{M_i\}_{i \geq 0}$ 、クーポンレートが  $\hat{R}$  であったことを思い出せば、満期  $t_N$  においては  $S_N = M_N$  となる。さらに式 (2.1) を用いれば、

$$\begin{aligned} S_0 &= \mathbb{E}\left[\pi_N \frac{p_N}{p_0} M_0\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N \pi_N \frac{p_N}{p_0} M_0 \hat{R}\right] \\ &= \frac{M_0}{p_0} \left( \mathbb{E}[\pi_N p_N] + \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N \pi_N p_N\right] \hat{R} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

である。

式 (4.11) より、

$$\mathbb{E}[\pi_n] = \lambda_0 m_0 \exp(-\gamma t_n) \mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda_n m_n}\right]. \quad (5.3)$$

であるが、マネーストック  $m_N$  の期待値を扱うのは困難である。なぜならば、マネーストックは中央銀行がおこなう金融政策によって決定されるものだからである。よってここでは式 (4.1) より、 $l_n p_n = \lambda_n m_n$  の関係式を用いる。この関係式を用いれば、式 (5.2) と式 (5.3) より、

$$\begin{aligned} S_0 &= M_0 \lambda_0 m_0 \left( \exp(-\gamma t_N) \mathbb{E}\left[\frac{p_N}{\lambda_N m_N}\right] + \sum_{n=1}^N \exp(-\gamma t_n) \mathbb{E}\left[\frac{p_n}{\lambda_n m_n}\right] \hat{R} \right) \\ &= M_0 \lambda_0 m_0 \left( \exp(-\gamma t_N) \mathbb{E}\left[\frac{p_N}{l_N p_N}\right] + \sum_{n=1}^N \exp(-\gamma t_n) \mathbb{E}\left[\frac{p_n}{l_n p_n}\right] \hat{R} \right). \end{aligned}$$

よって、

$$S_0 = M_0 \lambda_0 m_0 \left( \exp(-\gamma t_N) \mathbb{E}\left[\frac{1}{l_N}\right] + \sum_{n=1}^N \exp(-\gamma t_n) \mathbb{E}\left[\frac{1}{l_n}\right] \hat{R} \right) \quad (5.4)$$

となり、流動性効用の過程  $\{l_i\}_{i \geq 1}$  のみが確率変数となる。つまり、物価連動債の市場価格よりブートストラップ法<sup>\*8</sup>を用いて、年限の異なる複数の債券価格より流動性効用の過程  $\{l_i\}_{i \geq 1}$  の市場の期待値を計算することができる。2007年1月であれば、その時点で最も満期までの期間が短いのは2004年3月に発行された第一回物価連動債でその満期までの期間は7年2ヶ月であり、逆に最も満期までの期間が長いのは、第十回物価連動債でその満期までの期間は9年11ヶ月である。つまり、2007年1月時点からみて7年2ヶ月後から9年

<sup>\*8</sup> 債券価格からイールドカーブを算出するのに用いられている。

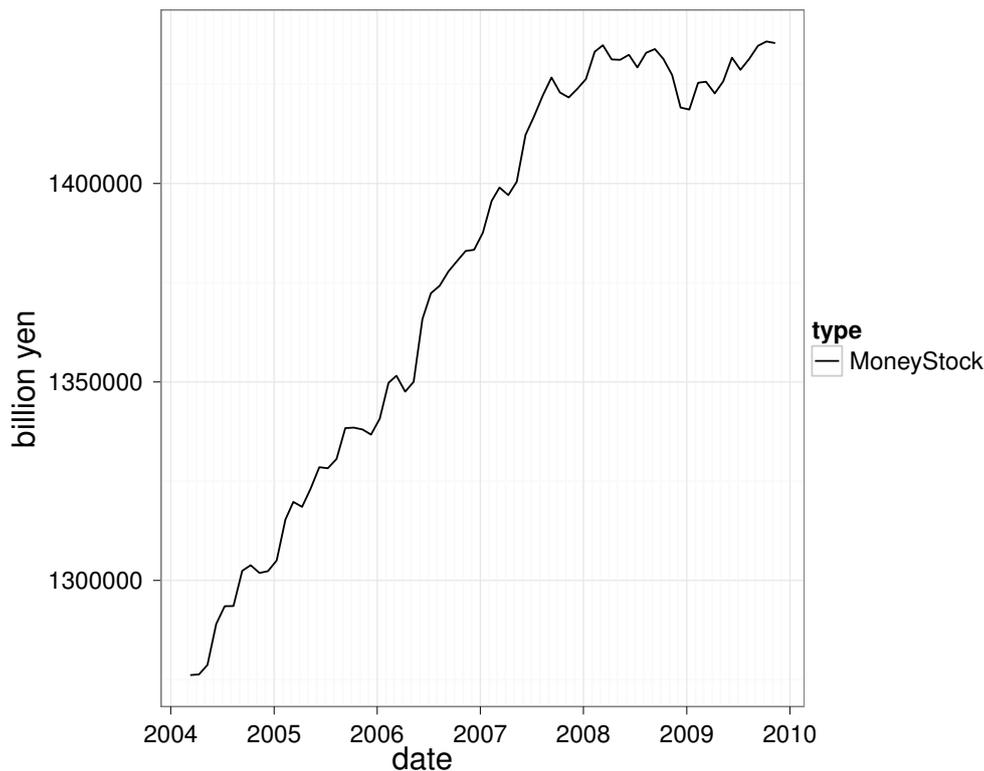


図10 マネーストック (M3+ 広義流動性資産) の推移

11ヶ月後までの流動性効用を計算することができるのである。また、時点  $\{t_n\}_{n=0,1,2,\dots,N}$  はそれぞれの債券の利払日に対応している。

実際の数値計算においては、さらにいくつかの仮定をおいた。まず実質の割引率  $\gamma$  である。これは、効用の得られる時点の違いを実質的に割引くための要素であるから、物価変動などの影響を受けにくい値を選ぶのが好ましい。そこで、 $\gamma$  には無担保コール翌日物金利を用いた。これは、最も短い期間に適用される金利の一つで、いわゆる政策金利である。適用される期間が短いため期間構造や物価変動の影響を受けにくく、時間に対する割引率として適当であると考えた。次に、マネーストックのコンビニエンス・イールド  $\lambda$  である。この  $\lambda$  は名目的なものであり、さらにマネーストック —M3 + 広義流動性<sup>\*9</sup>— には債券も含まれるということを考慮し、短期国債の指標単利利回りを用いた。

このようにして計算される実質流動性効用  $l_n$  について、その期待変動率を考える。なぜならば、式 (5.4) より直接計算されるのは流動性効用の逆数の期待値  $\mathbb{E}\left[\frac{1}{l_n}\right]$  だからである。この逆数の期待値のイールドカーブを考えても有効な分析はできない。したがってここでは、以下のように期待流動性効用の変動率  $\hat{l}_n$  を用いる：

$$\hat{l}_n = \frac{-\log\left(\mathbb{E}\left[\frac{l_0}{l_n}\right]\right)}{t_n - t_0}.$$

ここでの期待変動率とは、その時点から一年毎にどのような割合ずつ変動がおけると期待されているのかを表している。つまり、流動性効用の期待変動率の指標もの —各々の時点で最も満期までの期間が長い値、今回の

\*9 現金通貨と預金通貨、金銭信託、さらに投資信託や債券、CP がこれに該当する。

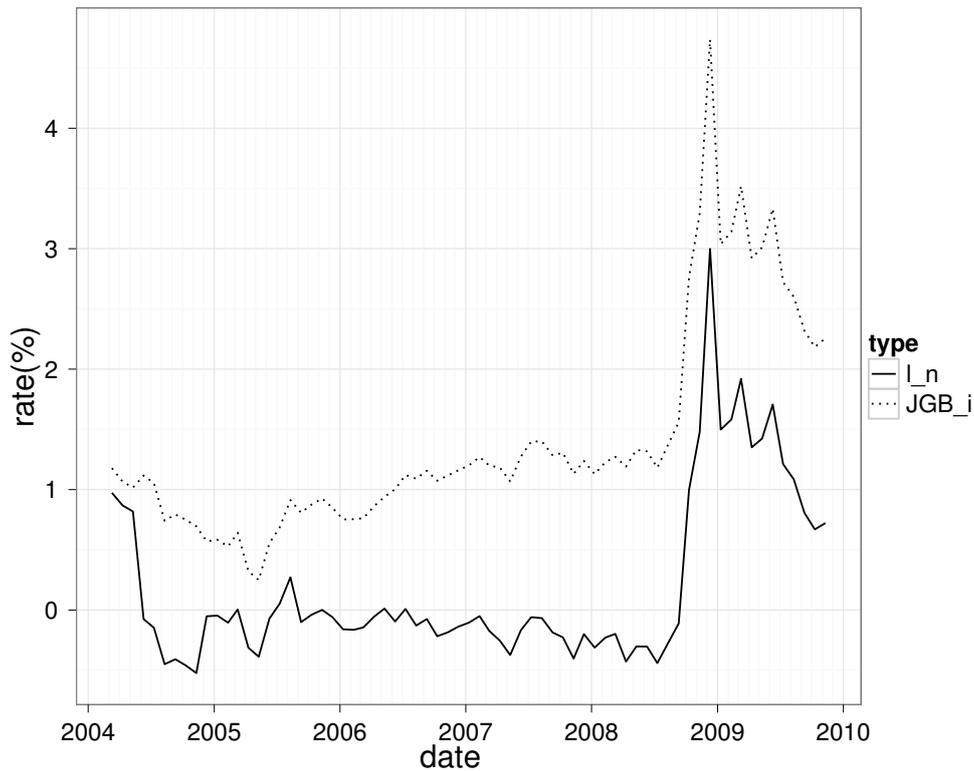


図 11 流動性効用変動率の推移

場合はおおよそ 10 年である— を考えれば今後 10 年間で年率換算でどの程度の流動性効用の変動がおこると期待されているかを表している。このような流動性効用の期待変動率と物価連動債の利回りの推移を示したのが図 11 である。

2008 年の物価連動債の価格下落期 —利回りが 3.3 % 上昇— において、流動性効用の期待変動率は 3.2 % 上昇している。すなわち物価連動債の利回りの上昇を、流動性効用の増加という形でとらえることができるのである。これより流動性効用の増加、つまり将来の不確実性が増加したことで、流動性のより高い資産の価値が高まる。それにより物価連動債の価格が低下しているということがわかる。

## 5.2 固定利付債の評価

固定利付債の場合、その元本が  $M_0$  であり、クーポンレートが  $R$  であるので、満期  $t_N$  において  $S_N = M_0$  である。よって、式 (5.1) に式 (2.4) を適用すれば、

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \mathbb{E}[\pi_N M_0] + \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N \pi_n M_0 R\right] \\
 &= M_0 \left( \mathbb{E}[\pi_N] + \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N \pi_n\right] R \right) \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

である。式 (5.5) と式 (5.3) より、物価連動債の場合と同様に計算すれば、

$$S_0 = M_0 \lambda_0 m_0 \left( \exp(-\gamma t_N) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{l_N p_N} \right] + \sum_{n=1}^N \exp(-\gamma t_n) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{l_n p_n} \right] R \right)$$

となる。ここで、実質流動性効用  $l_n$  は実質ベースの値であるから、物価変動の影響を受けない。これより、 $l_n$  と  $p_n$  は独立であると仮定すれば、

$$S_0 = M_0 \lambda_0 m_0 \left( \exp(-\gamma t_N) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{l_N} \right] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{p_N} \right] + \sum_{n=1}^N \exp(-\gamma t_n) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{l_n} \right] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{p_n} \right] R \right) \quad (5.6)$$

である。流動性効用の過程  $\{l_i\}_{i \geq 1}$  と物価指数の過程  $\{p_i\}_{i \geq 1}$  が確率変数となるが、先に示した通り、物価連動債価格からは流動性効用の過程の期待値を求めることができる。これを用いることで、式 (5.6) からは物価指数過程を求めることができる。物価連動債と同じように、固定利付債の市場価格よりブートストラップ法を用いて、物価連動債と同じ年限をもつ固定利付債の価格より物価指数過程  $\{p_i\}_{i \geq 1}$  の市場の期待値を計算することができる。今回用いる固定利付債は長期国債であるが、長期国債は物価連動債に比べ、その発行頻度も多い。そこでデータの偏りをふせぐために物価連動債と同じ年限をもつ長期国債のデータを用いた。ここでの同じ年限とは、発行・償還月や利払い間隔も含めて同じ間隔という意味である\*<sup>10</sup>。

5.2 と同様に期待物価指数に対しても、期待物価指数変動率を考える。この期待物価変動率  $\hat{p}_n$  は固定利付債より計算された物価指数の期待値の過程  $\{p_i\}_{i \geq 1}$  を用いれば以下のように計算できる：

$$\hat{p}_n = \frac{-\log \left( \mathbb{E} \left[ \frac{p_0}{p_n} \right] \right)}{t_n - t_0}.$$

これにより求めた期待物価変動率とブレイク・イーブン・レートの推移を示したのが図 12 である。いずれも、債券の償還までの期間 —今回は十年間— に年率にして何%づつの物価変動がおくと期待されているかを示している。

### 5.3 pricing kernel

関係式  $l_n p_n = \lambda_n m_n$  を式 (5.3) に用いれば、

$$\mathbb{E}[\pi_n] = \lambda_0 m_0 \exp(-\gamma t_n) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{l_n} \right] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{p_n} \right] \quad (5.7)$$

である。これに物価連動債より計算される流動性効用  $l_n$  と固定利付債より計算される期待物価  $p_n$  を用いることで、pricing kernel が計算される。その計算結果が図 13 である。

この物価連動債価格と固定利付債価格により計算された pricing kernel の例えば 10 年後のペイオフを割引く pricing kernel を比較することより、以下のことがわかる。まず、期待物価指数が高いほどその pricing kernel によってペイオフは大きく割引かれる。なぜならば、将来の期待される物価が高ければその分実質の価値は下がる。よって、その実質価値が低下する分だけ pricing kernel によって将来のペイオフが割引かれるのである。さらに、期待物価指数・期待流動性効用と同様に pricing kernel に対しても期待変動率  $\hat{\pi}_n$  を考える。ただし、 $\pi_0 = 1$  である。

$$\hat{\pi}_n = \frac{\log \left( \mathbb{E}[\pi_n] \right)}{t_n - t_0}.$$

\*<sup>10</sup> 具体的には、全 16 回の物価連動債の発行に対応し、第 258 回、第 260 回、第 265 回、第 270 回、第 272 回、第 274 回、第 277 回、第 280 回、第 282 回、第 284 回、第 285 回、第 286 回、第 288 回、第 289 回、第 290 回、第 293 回長期国債のデータを用いた。

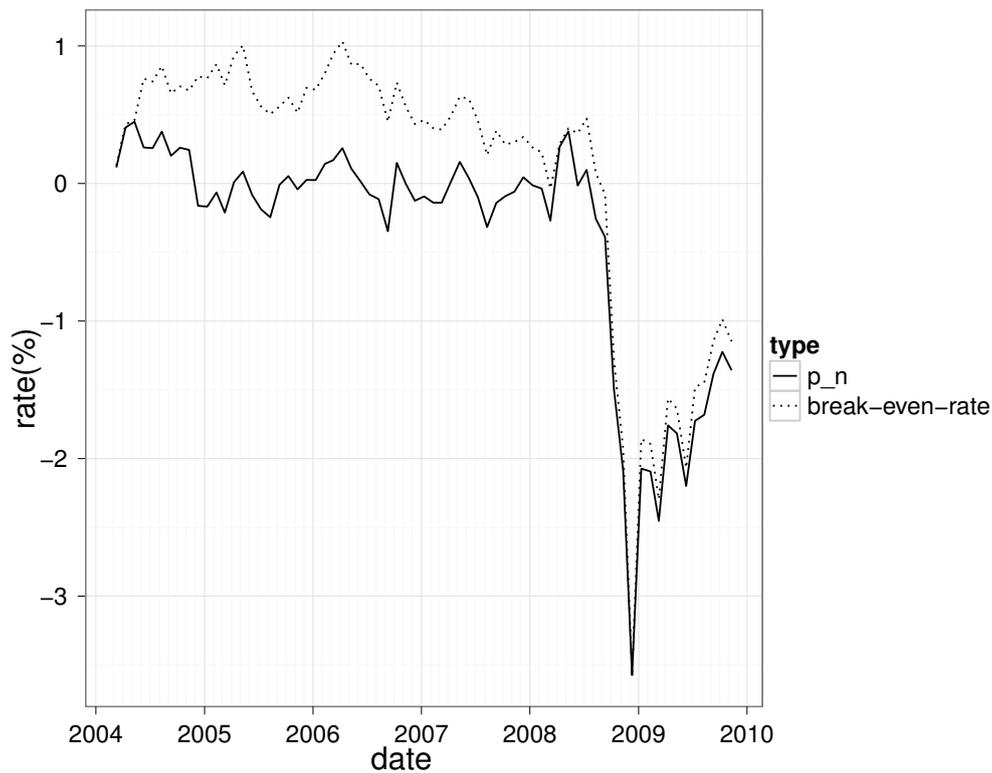


図 12 期待物価変動率の推移

このように計算される pricing kernel の期待変動率は、まさに pricing kernel を用いて将来のペイオフを割引くときの割引率を表している。この pricing kernel より計算される 10 年後の割引率を示したのが図 14 である。

金利を割引率として用いる場合は、負の割引率をとることは金利の性質上ありえない。しかし、図 14 で示したように、pricing kernel を用いれば将来の物価が下落すると期待されている場合などにおいて負の割引率をとることも可能である。例えば、2006 年 9 月には期待物価変動率は-0.3 %であったが、これに対し割引率は-0.16 %であった。これは、将来のペイオフを割引く際に pricing kernel で用いることの大きな利点となるものである。

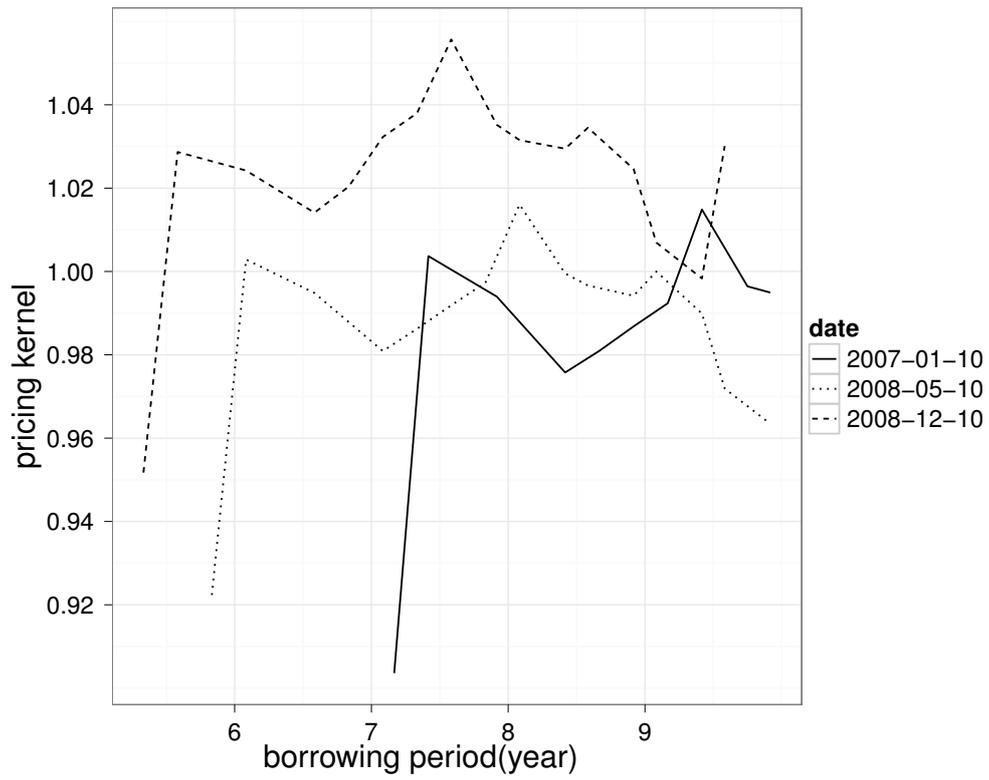


図 13 pricing kernel のイールド

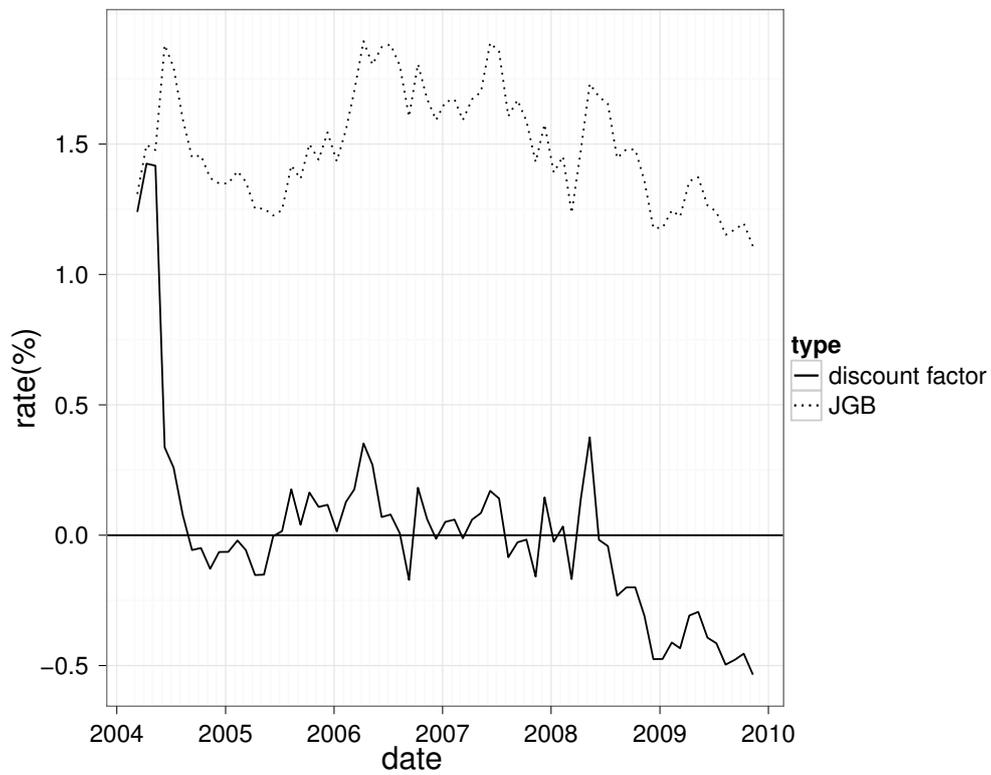


図 14 pricing kernel による割引率の推移

## 6 まとめ

本論文では、pricing kernel を用いて物価連動債・長期国債の評価をおこなった。それにより、物価連動債価格より将来の実質流動性効用の期待値の過程、長期国債より将来の物価指数の期待値の過程をそれぞれ算出することができた。これらの結果より、2008 年後半の物価連動債の価格下落は、将来の期待実質流動性効用が増加し、流動性のより高い資産の価値が高まったことによるものであるという結論に達した。また、同時期に物価連動債とは対照的に長期国債の価格は上昇しているが、これは、流動性効用の増加率以上に将来の物価指数の下落率の方が大きいと期待されているためである。

さらに pricing kernel そのものに注目すれば、金利を用いて将来のペイオフを割引く際の割引率となる長期国債の利回 —安全利子率— と pricing kernel より算出された割引率との大きな違いは、負の値をとるという点である。近年の我が国のような低金利環境下では、従来のスポットレートモデル —バシチェック・モデルや CIR モデル— では市場の期間構造を十分に説明出来ないことが指摘されてきた<sup>\*11</sup>。そこで、Black [1995] などによる負の金利を許容する潜在金利 —shadow rate— を用いるモデルや、スイッチング・モデルなどを用いた方法などが提案されてきた。本研究はスポットレートのモデル構築を目指したものではないが、低金利環境下での債券価格の評価をおこなうという点においては同じ動機によるものである。

本研究では、割引率が負になるような pricing kernel を算出し、債券価格の評価へと適用することができた。つまり、低金利環境下において、pricing kernel を用いることで債券価格の評価をおこなうことができたのである。また、これにより以下のことも結論として導かれる。将来の流動性資産の効用が高い場合、例えば低金利環境下で将来の物価下落が期待されている場合においては、物価連動債の価格は大きく下落する。つまりこのような環境では、物価連動債はその商品特性上 需要が大きく減ぜられ、物価連動債の発行そのものが困難になるのである。現に、わが国では 2008 年 12 月に予定されていた第 17 回物価連動債の発行が中止されて以降、新規の物価連動債の発行が現在までおこなわれていない。このような環境下で新たに物価連動債を発行するためには、一定の元本保証の条項を追加するなどの方法が考えられる。そのような条項をもつ物価連動債も含む物価連動性をもつ商品に対して、本論文で示してきたように、pricing kernel を用いてその評価をおこなうことは、有効な手段であるといえる。

---

\*11 茂章 [2007]

## A 付録

### A.1 式 (3.10) の導出

命題 4 と式 (3.9) より

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n \bar{r}_n \mid \mathcal{F}_i\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=i}^{\infty} \pi_n r_{n+1} P_{n,n+1} \mid \mathcal{F}_i\right].$$

pricing kernel  $\pi_i$  と名目金利  $r_{i+1}$  は  $\mathcal{F}_i$  可測であることから,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n \bar{r}_n \mid \mathcal{F}_i\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n r_{n+1} P_{n,n+1} \mid \mathcal{F}_i\right] + \pi_i r_{i+1} P_{i,i+1} \\ \pi_i r_{i+1} P_{i,i+1} &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n \bar{r}_n \mid \mathcal{F}_i\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n r_{n+1} P_{n,n+1} \mid \mathcal{F}_i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n \bar{r}_n - \sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n r_{n+1} P_{n,n+1} \mid \mathcal{F}_i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n (\bar{r}_n - r_{n+1} P_{n,n+1}) \mid \mathcal{F}_i\right]. \end{aligned} \tag{A.1}$$

ここで, 式 (3.5) と式 (3.4) より

$$\begin{aligned} \pi_n (\bar{r}_n - r_{n+1} P_{n,n+1}) &= \pi_n \left( \bar{r}_n - \left( \frac{1}{P_{n,n+1}} - 1 \right) P_{n,n+1} \right) \\ &= \pi_n (\bar{r}_n - 1 + P_{n,n+1}) \\ &= \pi_n \left( \bar{r}_n - 1 + \frac{\mathbb{E}[\pi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]}{\pi_n} \right) \\ &= \pi_n \bar{r}_n - (\pi_n - \mathbb{E}[\pi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]), \end{aligned} \tag{A.2}$$

である. 式 (3.3) より,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\mathbb{E}[\pi_j \cdot 1 \mid \mathcal{F}_i]}{\pi_i} + \frac{1}{\pi_i} \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j \pi_n \bar{r}_n \mid \mathcal{F}_i\right] \\ \pi_i &= \mathbb{E}[\pi_j \mid \mathcal{F}_i] + \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^j \pi_n \bar{r}_n \mid \mathcal{F}_i\right], \end{aligned}$$

$i = n, \quad j = n + 1$  のとき,

$$\begin{aligned} \pi_n &= \mathbb{E}[\pi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\pi_{n+1} \bar{r}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ \pi_n - \mathbb{E}[\pi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\pi_{n+1} \bar{r}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], \end{aligned}$$

であるから, この式を式 (A.2) に用いれば,

$$\pi_n (\bar{r}_n - r_{n+1} P_{n,n+1}) = \pi_n \bar{r}_n - \mathbb{E}[\pi_{n+1} \bar{r}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n],$$

を得ることができる. 式 (A.1) にこの式を適用すれば以下のようになる:

$$\pi_i r_{i+1} P_{i,i+1} = \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n \bar{r}_n - \mathbb{E}[\pi_{n+1} \bar{r}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \mid \mathcal{F}_i\right].$$

タワールールより,

$$\begin{aligned}\pi_i r_{i+1} P_{i,i+1} &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=i+1}^{\infty} \pi_n \bar{r}_n - \pi_{n+1} \bar{r}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(\pi_{i+1} \bar{r}_{i+1} - \pi_{i+2} \bar{r}_{i+2}) + (\pi_{i+2} \bar{r}_{i+2} - \pi_{i+3} \bar{r}_{i+3}) + \dots \middle| \mathcal{F}_i\right]\end{aligned}$$

よって式 (3.10),

$$\mathbb{E}[\pi_i \bar{r}_i | \mathcal{F}_{i-1}] = \pi_{i-1} r_i P_{i-1,i}$$

が導かれる.

## A.2 単調収束定理

まず, 以下の命題を示す.

### 命題 A

非負関数  $f : X \mapsto [0, \infty]$  が可測ならば, 非負単関数列  $\{f_m(x)\}$  が存在し, 各点  $x \in X$  で  $\{f_m(x)\}_{m \geq 1}$  は単調非減少かつ  $f(x)$  に収束する.

**証明** 各  $m \geq 1$  に対して

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m} \mathbb{I}_{\{(k-1)2^{-m} \leq f(x) < k2^{-m}\}} + m \mathbb{I}_{\{m \leq f(x)\}}$$

とおく. このとき,

$$f_{m+1}(x) - f_m(x) = \sum_{k=m2^m+1}^{(m+1)2^m} \frac{k-1}{2^m} \mathbb{I}_{\{(k-1)2^{-m} \leq f(x) < k2^{-m}\}} + m \mathbb{I}_{\{m \leq f(x)\}}$$

より, 明らかに  $f_{m+1}(x) - f_m(x) \geq 0$  であることから,

$$f_m(x) \leq f_{m+1}(x) \tag{A.3}$$

である.

$f(x) < m$  であれば,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m} \mathbb{I}_{\{(k-1)2^{-m} \leq f(x) < k2^{-m}\}} &\leq f(x) < \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k}{2^m} \mathbb{I}_{\{(k-1)2^{-m} \leq f(x) < k2^{-m}\}} \\ f_m(x) &\leq f(x) < \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k}{2^m} \mathbb{I}_{\{(k-1)2^{-m} \leq f(x) < k2^{-m}\}}\end{aligned}$$

となる. また,

$$\sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k}{2^m} \mathbb{I}_{\{(k-1)2^{-m} \leq f(x) < k2^{-m}\}} - f_m(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

であるから,  $f(x) < m$  のとき,

$$f_m(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^m \geq f(x) \tag{A.4}$$

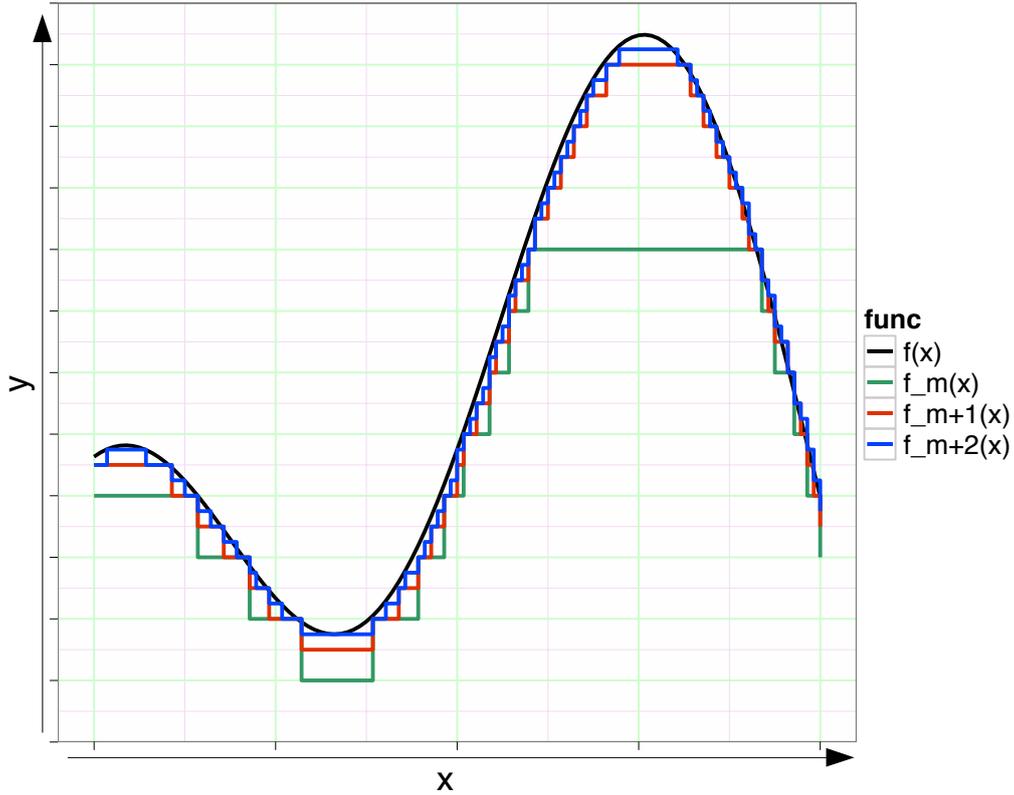


図 15 命題 A: 単関数による近似

である。これより,

$$f(x) - f_m(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m,$$

$m \rightarrow \infty$  をとると,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} f(x) - f_m(x) &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m \\ \lim_{m \rightarrow \infty} f(x) - f_m(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

となる。一方,  $m \leq f(x)$  のときは,

$$\begin{aligned} f_m(x) &= m \mathbb{I}_{\{m \leq f(x)\}} \\ &= m \end{aligned} \tag{A.5}$$

となる。つまり, 式 (A.4) と式 (A.5) より  $f_m$  は以下の関係式で与えられる:

$$\begin{cases} f_m(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^m \geq f(x), & f(x) < m \text{ のとき,} \\ f_m(x) = m, & f(x) \geq m \text{ のとき.} \end{cases} \tag{A.6}$$

式 (A.3) より, 各点  $x \in X$  で  $\{f_m(x)\}_{m \geq 1}$  は単調非減少であり, 式 (A.6) より  $f(x)$  に収束することが示された。よって, 非負関数  $f: X \mapsto [0, \infty]$  が可測ならば, 各点  $x \in X$  で単調非減少かつ  $f(x)$  に収束する非負単関数列  $\{f_m(x)\}$  が存在する。□

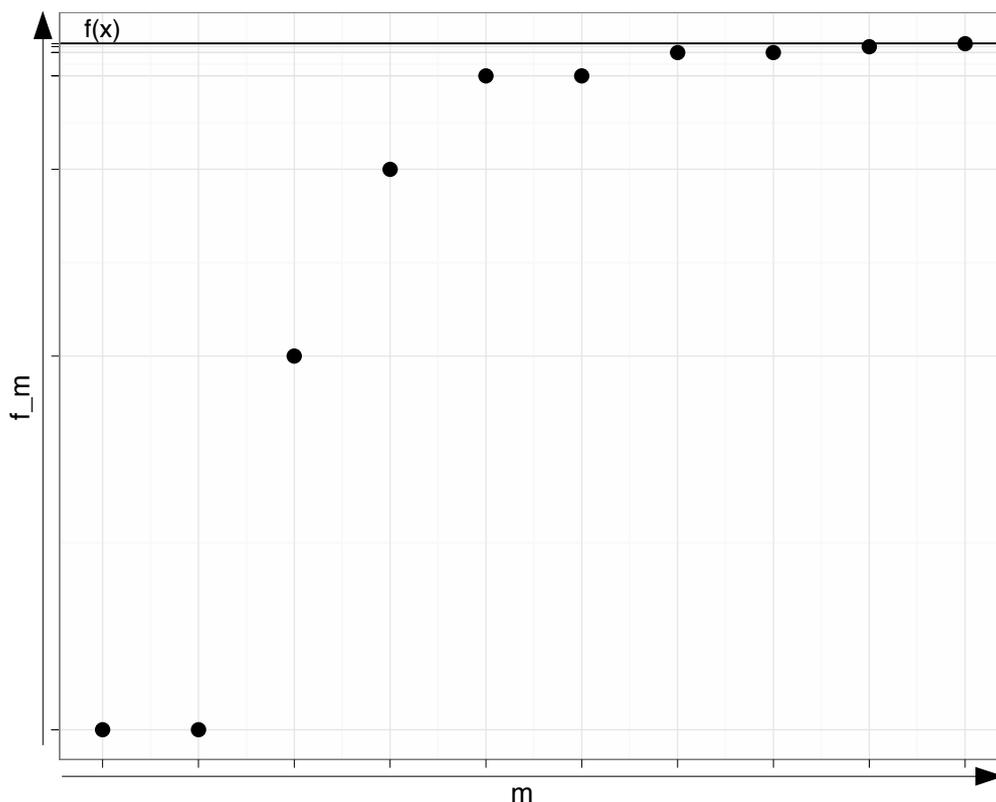


図 16 命題 A: 非負単関数列  $\{f_m(x)\}_{m \geq 1}$

命題 A で示したとおり, 可測な非負関数は単関数で近似することができる. したがって非負非減少の数列に対しても, 同様に単関数を用いて近似することが可能である. 単調収束定理の証明では, この命題を利用する.

**定理** 単調収束定理

$\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$  は非負非減少の数列とする. すなわち

$$0 \leq X_n \leq X_{n+1}.$$

このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n].$$

**証明** 各  $n \geq 1$  に対して非負非減少の数列  $X_n$  の各点に収束する非負非減少の数列  $\{X_{n,m}\}_{m=1,2,\dots}$  を考える. すなわち

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_{n,m} = X_n$$

である.  $X_n, X_{n,m}$  共に単調に増加する数列であることから, 明らかに

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{n,m}] = \mathbb{E}[X_n] \tag{A.7}$$

となる. ここで

$$Y_m = \max_{1 \leq n \leq m} X_{n,m}$$

とおく.

$$0 \leq Y_m \leq \max_{1 \leq n \leq m} X_{n,m+1} \leq \max_{1 \leq n \leq m+1} X_{n,m+1} = Y_{m+1}$$

であるから  $Y_m$  もまた非負非減少数列である. さらに

$$X_{n,m} \leq Y_m \leq \max_{1 \leq n \leq m} X_n = X_m \quad (1 \leq n \leq m) \quad (\text{A.8})$$

であることに注意して,  $m \rightarrow \infty$  をとると

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} X_{n,m} &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m \leq \lim_{m \rightarrow \infty} X_m \\ X_n &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m \leq \lim_{m \rightarrow \infty} X_m. \end{aligned}$$

よって,  $Y_m$  は  $\lim_{m \rightarrow \infty} X_m$  に各点で収束する非負非減少数列である. したがって, 式 (A.7) と同様に

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_m] = \mathbb{E}\left[\lim_{m \rightarrow \infty} X_m\right] \quad (\text{A.9})$$

である. さらに, 式 (A.8) より

$$\begin{aligned} Y_m &\leq X_m \\ \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} X_m \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_m] &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_m] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となる. つまり, 式 (A.9) と式 (A.10) より

$$\mathbb{E}\left[\lim_{m \rightarrow \infty} X_m\right] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_m]$$

となる. 一方,  $\lim_{m \rightarrow \infty} X_m \geq X_m$  であることから逆の不等式もまた成り立つ. よって単調収束定理が証明された.  $\square$

## 参考文献

- F. Black. Interest as options. *Journal of Finance*, (50), 1995.
- D. C. Brody, L. P. Hughston, and A. Macrina. Information-based asset pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 11(1):107, 2008.
- John Y. Campbell, Luis M. Viceira, and 野村証券金融経済研究所. **戦略的アセットアロケーション：長期投資のための資産配分の考え方**. 東洋経済新報社, 東京, 2005.2. ISBN 4492731784. 監訳: 木島正明; 原著 2000 年刊の翻訳; 文献: p. 239-254.
- L. P. Hughston and A. Macrina. Information, inflation, and interest. *Banach Center publications ; v. 83 Advances in mathematics of finance*, (83):117–138, 2008.
- LP Hughston. Inflation derivatives. *Unpublished Manuscript*, 1998.
- John Hull. **フィナンシャルエンジニアリング：デリバティブ取引とリスク管理の総体系**. 金融財政事情研究会, 東京, 2005. ISBN 4322106420.
- Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve, and 寿夫 渡辺. **ブラウン運動と確率積分**. シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 2001.11. ISBN 4431708529. 参考文献: p. [454]-464.
- Damien Lamberton. **ファイナンスへの確率解析**. 朝倉書店, 東京, 2000. ISBN 4254540051.
- A. Macrina. An information-based framework for asset pricing: X-factor theory and its applications. *King's College London PhD thesis*, 2006.
- Salih N. Neftci. **ファイナンスへの数学：金融デリバティブの基礎**. 朝倉書店, 東京, 2001. ISBN 4254290012.
- Albert Nikolaevich Shiriaev. *Probability*. Springer-Verlag, New York, c1984. ISBN 0387908986. Includes index;Bibliography: p. [561]-564.
- Steven E. Shreve and 長山 いづみ. **ファイナンスのための確率解析**. シュプリンガー・フェアラーク東京; シュプリンガー・ジャパン, 東京; 東京, 2006.7-. ISBN 4431710523 (1);9784431100263 (2). 参考文献あり.
- M. Sidrauski. Rational choice and patterns of growth in a monetary economy. *The American Economic Review*, 57(2):534–544, 1967.
- 浦谷 規. **無裁定理論とマルチンゲール**. 朝倉書店, 東京, 2005.10. ISBN 425429557X. 参考文献: p. [145]-146. 財務省. 物価連動国債の商品設計. <http://www.mof.go.jp/jouhou/kokusai/bukkarendou/inflationindexed.htm>, 2004.
- 藤原 茂章. 低金利環境下でのフィット向上を目指した最近のイールド・カーブ・モデル群, 2007.
- 竹田 陽介. 期待インフレ率の指標としての物価連動債, 2004.

## 謝辞

本論文の作成にあたり、長きに渡りご指導いただいた浦谷規教授に、深く感謝いたします。勉学についてはもちろんのこと、今後の人生においても指針となるお言葉をいただきました。また、素晴らしい研究環境を与えて下さったことにも感謝いたします。また、研究面で様々な助言を頂いた安田和弘助教授、感謝いたします。そして、多くの助力を頂いた先輩方にも感謝をいたします。さらにお互いに励まし合い、切磋琢磨しながら勉学とともに励んだ研究室の上村氏、後輩諸子にも感謝の意を表します。最後に、学生生活を支えてくれた家族に感謝いたします。

2010年2月

米山 裕介