社債ポートフォリオの評価モデル

Uemura, Yohei / 上村, 洋平

(発行年 / Year)
2010-03-24
(学位授与年月日 / Date of Granted)
2010-03-24
(学位名 / Degree Name)
修士(工学)
(学位授与機関 / Degree Grantor)
法政大学 (Hosei University)

2009 年度修士論文

社債ポートフォリオの評価モデル

法政大学工学研究科
システム工学専攻

うえむら ようへい
08R6202 上村 洋平

指導教員 浦谷 規 教授

The 2009 Master's Thesis

Evaluation of Bond Portfolio with Loss Transition Rates

Department of System Engineering
Graduate School of Engineering
Hosei University

08R6202 Yohei UEMURA

Supervisor Prof. Tadashi URATANI

概　要

本論文の目的は, 社債ポートフォリオの累積損失を評価し, STCDO の価格評価をする事である. STCDO の価格評価をする上で最大の問題は, 既存のモデルでは, 同じパラメータを用いても同時にプライシングを行う事が出来ず, その上トランシェと呼ばれるリスク区分のパラメータも異なっている事である. 確率推移率を用いた top-down アプローチを採用し, クレジットデリバティブに対する先渡し金利の HJM モデルを研究した. 社債ポートフォリオの累積損失の確率分布を求める事でこれら問題を解決し, 価格評価を行う.

Abstract

In this thesis, we evaluate the cumulative losses of bond portfolio and STCDO(Single-Tranche CDO). Existing Gaussian copula model doesn't allow us to derive simultaneously pricing of STCDO.We study the top-down approach with the transition probability rates and HJM approach in interest-rate models where a full forward-looking term structure of interest-rates.We derive probability distribution of cumulative losses of bond portfolio,which allow us the simultaneous pricing and we evaluate the value of STCDO by computer implementation of this approach

目次

1 はじめに

1.1 研究背景

近年クレジットデリバティブは標準化され, iTraxx,CDX と言った指標も存在する重要な市場になっている. 取引されているのは CDS, CDO, エキゾチッククレジットデリバティブであり, エキゾチッククレジットデリバティブとは具体的に STCDO, CDO の CDO 等である.

STCDO のプライシングに関する一般的な事実として既存のモデルでは, 存在する様々な問題をカバーしきれず, 非常に頻繁に計算し直す必要がある. 特にガウスコピュラモデルでは, 同じパラメータを用いた STCDO のプライシングを同時に行う事が出来ない. その上価格動向より, 各トランシェのパラメータも異なっている事が判明した. これにより, より一般的な価格動向を示す確率モデルの必要性が強まった.

1.2 研究目的

本論文では社債ポートフォリオの累積損失に注目する top-down アプローチを用いる事で, ポートフォリオの累積損失過程の確率分布を求め, STCDO の価格動向を検討する. 具体的にここでの top-down アプローチとは, 損失過程に関する全ての損失確率のモデル化であり, 全ての将来時刻, 損失レベルに対する損失確率のモデル化である.

1.3 論文の構成

本論文を次のように構成する。

第 2 章では損失過程を定義し, その損失確率がマルコフ連鎖の推移確率と等しくなる事を示す. ここでの推移確率は推移率を用いて表現される.

第 3 章では, 第 2 章で導入した推移率を確率過程としプロセスを導入する事で, 全ての将来時刻, 損失レベルに対する推移確率を求める.

第 4 章では, 第 3 章で求めた推移確率を用いてクレジットデリバティブのプライシングを行う.

2　マルコフ連鎖を用いての損失分布

以後全ての確率過程は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上における適合過程であるとし、時間間隔を $0 \leq t \leq T$, $i = \{0, 1, 2, ...I\}$ とする.

2.1　損失過程と損失分布

2.1.1　損失過程

定義 2.1.1：損失過程の定義

1. τ_i ：社債 i を発行する企業の倒産時刻
2. $\mathbb{I}_{\{\tau_i \leq t\}}$ ：時刻 t の倒産インディケーター過程
3. 時刻 t における損失過程は下記のように定義出来る.

$$L(t) = \sum_{i=1}^{I} \mathbb{I}_{\{\tau_i \leq t\}} \tag{2.1}$$

損失過程は社債ポートフォリオにおける倒産数を表している.

2.1.2　損失分布

時刻 t までの情報を得ている条件のもと、時刻 T において損失過程が n となる確率は

$$p_n(t, T) = Pr[L(T) = n \setminus \mathcal{F}_t] \tag{2.2}$$

と表記でき、損失確率は $[0, T]$ において右連続かつ微分可能である. 又 n は $\{0, 1, ...I\}$ の値をとる為、全ての場合をベクトルで表記した損失分布は

$$p(t, T) = (p_0(t, T), ..., p_I(t, T)) \tag{2.3}$$

書ける. 下記にこの損失分布の性質を示す.

定理 2.1.2：損失分布の性質

1. $p_n(t, T)$ は、時刻 T までほぼ全てにおいて右微分可.
2. $T > T_0$ に対し、もし $p_n(t, T_0) > 0$ なら $p_n(t, T_0) > 0$.
3. $p_n(t, T_0) \geq 0$ で $\sum_{m=0}^{I} p_m(t, T) = 1$,　非減少なら $\sum_{m=0}^{n} p_m(t, T) = Pr[L(T) = n \setminus \mathcal{F}_t]$.
4. $m < L(t)$ なら、 $p_m(t, T) = 0$.
5. $p_n(t, t) = \mathbb{I}_{\{L(t)=n\}}$.

2.2 マルコフ連鎖と推移確率

定義 2.2.1：マルコフ連鎖とその推移確率

1. $\tilde{L}(t)$ ： マルコフ連鎖
2. $\tilde{L}(t)$ の推移確率を下記の様に表記する. ただし $0 \leq n \leq m \leq I$ とする.

$$P_{nm}(t,T) = Pr\left[\tilde{L}(T) = m \middle| \tilde{L}(t) = n\right] \tag{2.4}$$

次に推移確率を求める為に、コルモゴロフ前進方程式を用いる. コルモゴロフ前進方程式とは

$$\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t,T) = \sum_{k=n}^{m} P_{nk}(t,T)\, a_{km}(t,T) \tag{2.5}$$

の事である. ここで $a_{nm}(t,T)$ とは、与えられる生成行列 $A(t,T)$ の要素のであり推移率と呼ばれる. 生成行列 $A(t,T)$ とは各行和がゼロになる上三角行列の事であり、推移確率行列を単位行列と生成行列の和に分解する事で求まる行列である. 下記に簡単な例として 3×3 行列を挙げ、生成行列と推移率の説明を述べる.

定義 2.2.2：生成行列と推移率

3×3 行列が下記の様に存在し、$a_{nm}(t,T) \geq 0$ を満たす. ただし $0 \leq n \leq m \leq 3$ であり、簡略化の為、時間表記を省略する.

$$A(t,T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

1. 推移率は下記の性質を満たす. ただし、生成行列の最下行要素は 0 である.

$$a_n \equiv \sum_{k=n+1,k\neq n}^{3} a_{nk} = -a_{nn} \quad , \quad a_{33} = 0$$

式 (2.5) より、下記の推移確率を求める.

定理 2.2.3： 推移確率 $P_{nm}(t,T)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t,T) &= \sum_{k=n}^{m} P_{nk}(t,T)\, a_{km}(t,T) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t,T)\, a_{km}(t,T) - P_{nk}(t,T)\, a_m(t,T) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\Leftrightarrow \qquad P_{nm}(t,T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ \exp\left[-\int_t^T a_n(t,s)\, ds\right] & (n = m) \\ \displaystyle\sum_{k=n}^{m-1} \int_t^T P_{nk}(t,s)\, a_{km}(t,s)\, e^{-\int_s^T a_n(t,u)du} ds & (n < m) \end{cases} \tag{2.7}$$

証明　式 (2.5) より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t,T) &= \sum_{k=n}^{m} P_{nk}(t,T)\, a_{km}(t,T) \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t,T)\, a_{km}(t,T) + P_{nm}(t,T)\, a_{mm}(t,T) \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t,T)\, a_{km}(t,T) - P_{nm}(t,T)\, a_m(t,T)
\end{aligned}
$$

式 (2.6) を得る. 次に 1. $m<n$　2. $m=n$　3. $m>n$ の 3 つの場合に分けて考える.

1. $m<n$

$$
\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t,T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_{nm}(t,T) = 0
$$

2. $m=n$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t,T) &= -P_{nm}(t,T) \sum_{l=m+1}^{I} a_{ml}(t,T) \\
&= -P_{nm}(t,T)\, a_m(t,T) \\
\Leftrightarrow \qquad \frac{dP_{nm}(t,T)}{P_{nm}(t,T)} &= -a_m(t,T)\, dT \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

式 (2.8) を T で積分する. 積分区間を $[t,T]$ すると

$$
\begin{aligned}
\int_t^T \frac{1}{P_{nm}(t,s)} dP_{nm}(t,s) &= -\int_t^T a_m(t,s)\, ds \\
\Leftrightarrow \quad \log P_{nm}(t,T) - \log P_{nm}(t,t) &= -\int_t^T a_m(t,s)\, ds \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

式 (2.9) に $P_{nm}(t,t) = \mathbb{I}_{\{n=m\}} = 1$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
\log P_{nm}(t,T) &= -\int_t^T a_m(t,s)\, ds \\
\Leftrightarrow \quad P_{nm}(t,T) &= \exp\bigl[-\int_t^T a_n(t,s)\, ds\bigr]
\end{aligned}
$$

3. $m>n$

式 (2.6) より

$$
\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t,T) = \sum_{k=n}^{m-1} P_{nk}(t,T)\, a_{km}(t,T) - P_{nm}(t,T)\, a_m(t,T)
$$

右辺第 2 項を左辺に移行すると

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial T}P_{nm}\left(t,T\right)+P_{nm}\left(t,T\right)a_m\left(t,T\right)=\sum_{k=n}^{m-1}P_{nk}\left(t,T\right)a_{km}\left(t,T\right) \tag{2.10}$$

式 (2.10) の両辺に $e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}$ をかけると

$$\begin{aligned}&e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}\frac{\partial}{\partial T}P_{nm}\left(t,T\right)+e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}P_{nm}\left(t,T\right)a_m\left(t,T\right)\\=&e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}\sum_{k=n}^{m-1}P_{nk}\left(t,T\right)a_{km}\left(t,T\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad &\frac{\partial}{\partial T}e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}P_{nm}\left(t,T\right)=\sum_{k=n}^{m-1}P_{nk}\left(t,T\right)a_{km}\left(t,T\right)e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}\\ \Leftrightarrow \quad &de^{-\int_s^T a_m(t,u)du}P_{nm}\left(t,T\right)=\sum_{k=n}^{m-1}P_{nk}\left(t,T\right)a_{km}\left(t,T\right)e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}dT \qquad (2.11)\end{aligned}$$

式 (2.11) を T で積分する. 積分区間を $\left[t,T\right]$ とすると

$$\int_t^T de^{-\int_s^T a_m(t,u)du}P_{nm}\left(t,s\right) \quad =\int_t^T\sum_{k=n}^{m-1}P_{nk}\left(t,s\right)a_{km}\left(t,s\right)e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}ds$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad &e^{-\int_T^T a_m(t,u)du}P_{nm}\left(t,T\right)-e^{-\int_t^T a_m(t,u)du}P_{nm}\left(t,t\right)=\int_t^T\sum_{k=n}^{m-1}P_{nk}\left(t,s\right)a_{km}\left(t,s\right)e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}ds\\ \Leftrightarrow \quad &P_{nm}\left(t,T\right)=\sum_{k=n}^{m-1}\int_t^T P_{nk}\left(t,s\right)a_{km}\left(t,s\right)e^{-\int_s^T a_n(t,u)du}ds\end{aligned}$$

□

2.3 推移確率を用いての損失分布

ここまで損失過程とその損失分布、マルコフ連鎖とその推移確率を見てきた. これらは、いかなる損失過程の、いかなる損失分布も推移確率で表現出来る. それは損失過程がマルコフ連鎖ではない時にも言える. この節ではその様なマルコフ連鎖が存在する事を示す.

定理 2.3.1 : 推移確率を用いての損失分布

$L\left(t\right)$: 損失過程
$p_n\left(t,T\right)$: 損失分布
$\tilde{L}\left(t\right)$: マルコフ連鎖
$P_{nm}\left(t,T\right)$: 推移確率
の時、下記式を満たすマルコフ連鎖 $\tilde{L}\left(t\right)$ が存在する.

$$p_n\left(t,T\right)=P_{L(t)n}\left(t,T\right) \qquad \forall\ \ 0\le n\le I\ ,\ 0\le t\le T$$

3　One-Step 推移

前節より、推移率 $a_{nm}(t,T)$, $0 \le n,m \le I$, $t \le T$ が与えらる事で損失分布を求めた. 今節では推移率 $a_{nm}(t,T)$ を $\mathcal{F}_t$-可測な確率過程且つ One-Step 推移として考える.One-Step 推移の場合、生成行列、推移確率、コルモゴロフ前進方程式は下記の通りになる.

定義 3.1 : One-Step 推移における生成行列、推移確率、コルモゴロフ前進方程式

1. 3×3 行列を例にとると、生成行列 $A(t,T;\omega)$ は

$$A(t,T;\omega) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

   ただし $n = 1,2$ に対し $a_n(t,T) \equiv -a_{n,n}(t,T) = a_{n,n+1}(t,T)$, $a_{3,3}(t,T) = 0$ である.

2. コルモゴロフ前進方程式は

$$\frac{\partial}{\partial T} P_{nm}(t,T) = -a_m(t,T) P_{n,m}(t,T) + a_{m-1}(t,T) P_{n,m-1}(t,T) \tag{3.2}$$

3. 推移確率 $P_{nm}(t,T)$ は

$$P_{nm}(t,T) = \begin{cases} 0 & (n > m) \\ \exp\left[-\int_t^T a_n(t,s)\,ds\right] & (n = m) \\ \int_t^T P_{n,m-1}(t,s)\, a_{m-1}(t,s)\, e^{-\int_s^T a_m(t,u)du} ds & (n < m) \end{cases} \tag{3.3}$$

3.1　確率推移率

定理 3.2 : 定理 2.3.1 の必要十分条件

推移率 $a_{nm}(t,T)$ が定義 3.1 を満たし、$L(t)$ は定義 2.1.1 , 定理 2.1.2 を満たす損失過程である.
この時、以下は同等の意味を持つ.

1. $p_n(t,T) = P_{L(t),n}(t,T)$
2. $P_{L(t),n}(t,T)$ はマルチンゲール
3. (a) $a_n(t,T) P_{L(t),n}(t,T)$ はマルチンゲール
   (b) $\lambda_L(t) \equiv a_L(t,t)$:$\lambda_L(t)$ は損失過程 $L(t)$ の強度

証明 • 1. ⇒ 2.

時間間隔 $s \leq t$ に対し、$P_{L(t),n}(t,T)$ に条件付期待値をとると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[P_{L(t),n}(t,T)\,\middle|\mathcal{F}_s\right] =&\mathbb{E}\left[p_n(t,T)\,\middle|\mathcal{F}_s\right]\\ =&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{L_(t)=n\}}\middle|\mathcal{F}_t\right]\middle|\mathcal{F}_s\right]\\ =&\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{L_(t)=n\}}\middle|\mathcal{F}_s\right]\\ =&p_n(s,T)\\ =&P_{L(s),n}(s,T)\end{aligned}$$

よって、$p_n(t,T) = P_{L(t),n}(t,T)$ であれば、$P_{L(t),n}(t,T)$ はマルチンゲールである.

- 2. ⇒ 1.

$$\begin{aligned}P_{L(t),n}(t,T) =&\mathbb{E}\left[P_{L(T),n}(T,T)\,\middle|\mathcal{F}_t\right]\\ =&\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{L_(T)=n\}}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\ =&p_n(t,T)\end{aligned}$$

よって、$P_{L(t),n}(t,T)$ がマルチンゲールであれば、$p_n(t,T) = P_{L(t),n}(t,T)$ である.

- 2. ⇒ 3.(a)

$P_{L(t),n}(t,T)$ がマルチンゲールより,$h > 0$ に対して

$$\frac{1}{h}\left(P_{L(t),n}(t,T+h) - P_{L(t),n}(t,T)\right) \tag{3.4}$$

式 (3.4) がマルチンゲールとなる. 平均値の定理より

$$\frac{1}{h}\left(P_{L(t),n}(t,T+h) - P_{L(t),n}(t,T)\right) = \frac{\partial}{\partial T}P_{L(t),n}(t,T) \tag{3.5}$$

式 (3.5) より、$\frac{\partial}{\partial T}P_{L(t),n}(t,T)$ もマルチンゲールである. 式 (3.2) より

$$\frac{\partial}{\partial T}P_{nm}(t,T) = -a_m(t,T)\,P_{n,m}(t,T) + a_{m-1}(t,T)\,P_{n,m-1}(t,T)$$

ここで $n=k$ と置き、$L(t) \leq k \leq I$ とすると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t),k}(t,T) = -a_k(t,T) P_{L(t),k}(t,T) + a_{k-1}(t,T) P_{L(t),k-1}(t,T) \\ \Leftrightarrow \quad & -a_k(t,T) P_{L(t),k}(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t),k}(t,T) - a_{k-1}(t,T) P_{L(t),k-1}(t,T) : \end{aligned} \tag{3.6}$$

式 (3.6) 右辺第二項の $-a_{k-1}(t,T) P_{L(t),k-1}(t,T)$ は

$$\begin{aligned} -a_{k-1}(t,T) P_{L(t),k-1}(t,T) &= \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t),k-1}(t,T) - a_{k-2}(t,T) P_{L(t),k-2}(t,T) \\ &= \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t),k-1}(t,T) + \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t),k-2}(t,T) - a_{k-3}(t,T) P_{L(t),k-3}(t,T) \\ &\vdots \\ &= -\sum_{l=L(t)}^{k-1} \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t),l}(t,T) \end{aligned} \tag{3.7}$$

となり、式 (3.6) に式 (3.7) を代入すると、

$$-a_k(t,T) P_{L(t),k}(t,T) = -\sum_{l=L(t)}^{k} \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t),l}(t,T) \tag{3.8}$$

式 (3.8) の右辺はコルモゴロフ前進方程式よりマルチンゲールである. よって、$a_n(t,T) P_{L(t),n}(t,T)$ はマルチンゲールである.

- 2. $\Rightarrow$ 3.(b)
  $L(t) < I$、$\{\varepsilon_k\}_{k \geq 0}$ を 0 まで減少する数列とし、下記に $Z_k(t)$ を定義する.

$$Z_k(t) = \frac{1}{\varepsilon_k} \mathbb{E}\left[L(t+\varepsilon_k) - L(t) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

ここでは $\lim_{k\to\infty} Z_k(t) = a_{L(t)}(t,t)$ を示し、$a_{L(t)}(t,t)$ を $L(t)$ の強度 $\lambda_L(t)$ と定義する.

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= \frac{1}{\varepsilon_k} \left(\mathbb{E}\left[L(t+\varepsilon_k) \middle| \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}\left[L(t) \middle| \mathcal{F}_t \right] \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_k} \left(\sum_{n=1}^{I} n p_n(t, t+\varepsilon_k) - \sum_{n=1}^{I} L(t) p_n(t, t+\varepsilon_k) \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_k} \sum_{n=1}^{I} (n - L(t)) p_n(t, t+\varepsilon_k) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_k} \sum_{n=L(t)+1}^{I} (n - L(t)) P_{L(t),n}(t, t+\varepsilon_k) \end{aligned} \tag{3.9}$$

式 (3.9) の $P_{L(t),n}(t, t+\varepsilon_k)$ を、t の周りでテイラー展開すると

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= \sum_{n=L(t)+1}^{I} (n - L(t)) \frac{1}{\varepsilon_k} \{P_{L(t),n}(t,t) + \varepsilon_k \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t),n}(t,t) + o(\varepsilon_k)\} \\ &= \sum_{n=L(t)+1}^{I} (n - L(t)) \{\frac{1}{\varepsilon_k} P_{L(t),n}(t,t) + \frac{\partial}{\partial T} P_{L(t),n}(t,t) + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k}\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

式 (3.10) に式 (3.2) を代入すると

$$Z_k(t) = \sum_{n=L(t)+1}^{I} (n - L(t)) \{-a_n(t,t) P_{L(t),n}(t,t) + a_{n-1}(t,t) P_{L(t),n-1}(t,t)\} + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k} \tag{3.11}$$

式 (3.11) を展開すると

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= -a_{L(t)+1}(t,t) P_{L(t),L(t)+1}(t,t) + a_{L(t)}(t,t) P_{L(t),L(t)}(t,t) \\ &= 2\left(-a_{L(t)+2}(t,t) P_{L(t),L(t)+2}(t,t) + a_{L(t)+1}(t,t) P_{L(t),L(t)+1}(t,t)\right) \\ &\qquad \vdots \\ &= (I - L(t))\left(-a_I(t,t) P_{L(t),I}(t,t) + a_{I-1}(t,t) P_{L(t),I-1}(t,t)\right) + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k} \end{aligned}$$

上記式を整理すると

$$\begin{aligned} Z_k(t) = {} & a_{L(t)}(t,t) P_{L(t),L(t)}(t,t) + a_{L(t)+1}(t,t) P_{L(t),L(t)+1}(t,t) + \cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots + a_{I-1}(t,t) P_{L(t),I-1}(t,t) - (I - L(t)) a_I(t,t) P_{L(t),I}(t,t) + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k} \end{aligned} \tag{3.12}$$

式 (3.12) に $P_{L(t),L(t)+1}(t,t) = 0$, $\cdots$, $P_{L(t),I} = 0$ を代入し、極限 $\varepsilon_k \to 0$ をとると

$$Z_k(t) = a_{L(t)}(t,t) P_{L(t),L(t)}(t,t) + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k} \to a_{L(t)}(t,t) \tag{3.13}$$

式 (3.13) より、$L(t)$ の強度 $\lambda_k(t) = a_{L(t)}(t,t)$ を定義する.

- 3. $\Rightarrow$ 1.

$$p_n(t,T) = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{L_(T)=n\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \tag{3.14}$$

式 (3.14) のインディケーター関数を下記に示すと、

$$\mathbb{I}_{\{L_(T)=n\}} = \mathbb{I}_{\{L_(t)=n\}} + \int_t^T \mathbb{I}_{\{L_(s-)=n-1\}} dL(s) - \int_t^T \mathbb{I}_{\{L_(s-)=n\}} dL(s) \tag{3.15}$$

ただし式 (3.15) の右辺の積分は、第三項を例にし

$$\int_t^T \mathbb{I}_{\{L_(s-)=n\}} dL(s) = \begin{cases} \int_t^T \delta_{n+1}(L(s)) ds = 1 & (L_(s-) = n) \\ 0 & (L_(s-) \neq n) \end{cases} \tag{3.16}$$

式 (3.16) のデルタ関数 $\delta_{n+1}(x)$ は

$$\delta_{n+1}(x) = \begin{cases} \infty & (x = n+1) \\ 0 & (x \neq n+1) \end{cases}$$

式 (3.15) に条件付期待値をとると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}}\big|\mathcal{F}_t\big] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\{L(t)=n\}} + \int_t^T \mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} dL(s) - \int_t^T \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}} dL(s)\,\big|\mathcal{F}_t\big] \\ &= \mathbb{I}_{\{L(T)=n\}} + \mathbb{E}\big[\lim_{\Delta t \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \left(\mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}}\right) \frac{1}{\varepsilon_k} \left(L(t_k+\varepsilon_k) - L(t_k)\right) \varepsilon_k \big|\mathcal{F}_t\big] \end{aligned} \tag{3.17}$$

式 (3.17) 右辺第二項は、条件付期待値のタワールールを用いて

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[\left(\mathbb{I}_{\{L(t_k-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(t_k-)=n\}}\right) \frac{1}{\varepsilon_k} \left(L(t_k+\varepsilon_k) - L(t_k)\right) \varepsilon_k \big|\mathcal{F}_{t_k}\big]\big|\mathcal{F}_t\big] \\ =& \lim_{\Delta t \to \infty} \mathbb{E}\big[\sum_{k=1}^{m} \left(\mathbb{I}_{\{L(t_k-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(t_k-)=n\}}\right) \mathbb{E}\big[\frac{1}{\varepsilon_k} \left(L(t_k+\varepsilon_k) - L(t_k)\right) \big|\mathcal{F}_{t_k}\big] \varepsilon_k \big|\mathcal{F}_t\big] \\ =& \mathbb{E}\big[\int_t^T \left(\mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}}\right) \lambda_L(s)\, ds \big|\mathcal{F}_t\big] \end{aligned}$$

よって式 (3.17) は

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}}\big|\mathcal{F}_t\big] = \mathbb{I}_{\{L(T)=n\}} + \mathbb{E}\big[\int_t^T \left(\mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} - \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}}\right) \lambda_L(s)\, ds \big|\mathcal{F}_t\big] \tag{3.18}$$

更に式 (3.18) を展開すると、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}}\big|\mathcal{F}_t\big] &= \mathbb{I}_{\{L(T)=n\}} + \mathbb{E}\big[\int_t^T \mathbb{I}_{\{L(s-)=n-1\}} a_{n-1}(s,s)\, ds - \mathbb{I}_{\{L(s-)=n\}} a_n(s,s)\, ds \big|\mathcal{F}_t\big] \\ &= P_{L(t),n}(t,t) + \int_t^T \mathbb{E}\big[P_{L(s),n-1}(s,s)\, a_{n-1}(s,s) - P_{L(s),n}(s,s)\, a_n(s,s)\,\big|\mathcal{F}_t\big] ds \end{aligned}$$

3.(a) より $a_n(t,T)\, P_{L(t),n}(t,T)$ はマルチンゲールなので

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}}\big|\mathcal{F}_t\big] = P_{L(t),n}(t,t) + \int_t^T P_{L(s),n-1}(s,s)\, a_{n-1}(s,s) - P_{L(s),n}(s,s)\, a_n(s,s)\, ds$$

式 (3.2) より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\{L(T)=n\}}\big|\mathcal{F}_t\big] &= P_{L(t),n}(t,t) + \int_t^T \frac{\partial}{\partial s} P_{L(t),n}(t,s)\, ds \\ &= P_{L(t),n}(t,t) + P_{L(t),n}(t,T) - P_{L(t),n}(t,t) \\ &= P_{L(t),n}(t,T) \end{aligned}$$

□

3.2 確率推移率へのプロセスの導入

この節では、$a_n(t,T)$ に下記のモデルを導入する.

$$da_n(t,T) = \mu_n(t,T)\,dt + \sigma_n(t,T)\,dW \tag{3.19}$$

ただし W は d 次元ブラウン運動、$\mu_n(t,T)$,$\sigma_n(t,T)$ は可予測な確率過程とする. この時推移確率 $P_{nm}(t,T)$ は

$$dP_{nm}(t,T) = \upsilon_{nm}(t,T)\,dt + \nu_{nm}(t,T)\,dW \tag{3.20}$$

又は

$$dP_{L(t),m}(t,T) = \upsilon_m(t,T)\,dt + \nu_m(t,T)\,dW + \phi_m(t,T)\,dL(t) \tag{3.21}$$

となる. ただし $\upsilon_m(t,T) = \upsilon_{L(t-),m}(t,T), \nu_m(t,T) = \nu_{L(t-),m}(t,T)$ である. 式 (3.20), 式 (3.21) のパラメーターは下記で与えられる.

3.2.1 推移確率過程の係数

定理 3.2.1 : 推移確率過程の係数

$$\phi_m(t,T) = \begin{cases} 0 & (m < L(t)) \\ -P_{L(t-),m}(t,T) & (m = L(t)) \\ P_{L(t-)+1,m}(t,T) - P_{L(t-),m}(t,T) & (m > L(t)) \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\upsilon_{nm}(t,T) = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ a_n(t,t) - \int_t^T \mu_n(t,s)\,ds + \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma_n(t,s)\,ds\right)^2 & (m = n) \\ -a_m(t,t)\,P_{mm}(t,T)\,\mathbb{I}_{\{m=n+1\}} + \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t,u)du} & \\ \left[-P_{nm}(t,s)\,\mu_m(t,s) + \mu^{Pa}_{n,m-1}(t,s) - \sigma_m(t,s)\,\nu_{nm}(t,s)\right] ds & (m > n) \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\nu_{nm}(t,T) = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ P_{nm}(t,T)\left\{-\int_t^T \sigma_n(t,s)\,ds\right\} & (m = n) \\ \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}\left[\sigma^{Pa}_{n,m-1}(t,s) - P_{nm}(t,s)\,\sigma_m(t,s)\right] ds & (m > n) \end{cases} \tag{3.24}$$

ただし、$\mu^{Pa}_{n,m-1}(t,s)$ と $\sigma^{Pa}_{n,m-1}(t,s)$ は $P_{n,m-1}(t,T)\,a_{m-1}(t,t)$ のドリフト、ディフージョン係数であり、$m > n$ に対し

$$\mu^{Pa}_{n,m-1}(t,T) = a_{m-1}(t,T)\,\upsilon_{n,m-1}(t,T) + P_{n,m-1}(t,T)\,\mu_{m-1}(t,T) + \sigma_{m-1}(t,T) + \nu_{n,m-1}(t,T) \tag{3.25}$$

$$\sigma^{Pa}_{n,m-1}(t,s) = P_{n,m-1}(t,T)\,\sigma_{m-1}(t,s) + a_{m-1}(t,s)\,\upsilon_{n,m-1}(t,T) \tag{3.26}$$

証明 $0 \le n \le m \le I$, $0 \le t \le T \le T$ とし簡略化の為

$$M(t,T) = P_{n,m-1}(t,T)\,a_{m-1}(t,T) \tag{3.27}$$

$$X(t,s,T) = e^{-\int_s^T a_m(t,u)du} \tag{3.28}$$

とする. よって推移確率 $P_{nm}(t,T)$ は式 (3.3) より

$$P_{nm}(t,T) = \begin{cases} 0 & n > m \\ X(t,t,T) & n = m \\ \int_t^T M(t,s)\, X(t,s,T)\, ds & n < m \end{cases} \tag{3.29}$$

$M(t,T)$ を微分すると,

$$dM(t,T) = P_{n,m-1}(t,T)\, da_{m-1}(t,T) + a_{m-1}(t,T)\, dP_{n,m-1}(t,T) + dP_{n,m-1}(t,T)\, da_{m-1}(t,T) \tag{3.30}$$

式 (3.30) に、下記の式 (3.31) 、式 (3.32) を代入すると

$$dP_{n,m-1}(t,T) = \upsilon_{n,m-1}(t,T)\, dt + \nu_{n,m-1}(t,T)\, dW \tag{3.31}$$

$$da_{m-1}(t,T) = \mu_{m-1}(t,T)\, dt + \sigma_{m-1}(t,T)\, dW \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} dM(t,T) &= P_{n,m-1}(t,T)\{\mu_{m-1}(t,T)\, dt + \sigma_{m-1}(t,T)\, dW\} \\ &\quad + a_{m-1}(t,T)\{\upsilon_{n,m-1}(t,T)\, dt + \nu_{n,m-1}(t,T)\, dW\} \\ &\quad + \{\upsilon_{n,m-1}(t,T)\, dt + \nu_{n,m-1}(t,T)\, dW\}\{\mu_{m-1}(t,T)\, dt + \sigma_{m-1}(t,T)\, dW\} \\ &= \{\upsilon_{n,m-1}(t,T)\, a_{m-1}(t,T) + P_{n,m-1}(t,T)\, \mu_{m-1}(t,T) + \nu_{n,m-1}(t,T)\, \sigma_{n,m-1}(t,T)\} dt \\ &\quad + \{\nu_{n,m-1}(t,T)\, a_{m-1}(t,T) + P_{n,m-1}(t,T)\, \sigma_{m-1}(t,T)\} dW \end{aligned} \tag{3.33}$$

次に $X(t,s,T)$ を微分すると伊藤の公式より、

$$\begin{aligned} dX(t,s,T) =& X_t\left(-\int_s^T a_m(t,u)\, du\right) + \frac{1}{2}X_t\left(-\int_s^T a_m(t,u)\, du\right)^2 \\ =& X_t\left(-\int_s^T da_m(t,u)\, du\right) + \frac{1}{2}X_t\left(-\int_s^T da_m(t,u)\, du\right)^2 \\ =& X_t\left(-\int_s^T \{\mu_m(t,u) + \sigma(t,u)\, dW_t\} du\right) + \frac{X_t}{2}\left(-\int_s^T \{\mu_m(t,u) + \sigma(t,u)\, dW_t\} du\right)^2 \\ =& X_t\left(-\int_s^T \mu_m(t,u)\, du dt - \int_s^T \sigma_m(t,u)\, du dW_t\right) \\ &+ \frac{X_t}{2}\left(-\int_s^T \mu_m(t,u)\, du dt - \int_s^T \sigma_m(t,u)\, du dW_t\right)^2 \\ =& X_t\left(-\int_s^T \mu_m(t,u)\, du + \frac{1}{2}\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\, du\right)^2\right) dt - X_t\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\, du\right) dW \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dX(t,s,T)}{X(t,s,T)} = \left(-\int_s^T \mu_m(t,u)\, du + \frac{1}{2}\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\, du\right)^2\right) dt - \left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\, du\right) dW \tag{3.34}$$

● $m=n$ の時 $P_{nn}(t,T)=X(t,t,T)$ より，式 (3.34) 同様に微分すると

$$
\begin{aligned}
dP_{nn}(t,T) =& d\left(-\int_t^T a_n(t,u)\,du\right)+\frac{P_{nn}(t,T)}{2}\left(-\int_t^T a_n(t,u)\,du\right)^2\\
=& P_{nn}(t,T)\left(-\int_t^T a_n(t,u)\,du+a_n(t,t)\,dt\right)+\frac{P_{nn}(t,T)}{2}d\left(-\int_t^T a_n(t,u)\,du+a_n(t,t)\,dt\right)^2\\
=& P_{nn}(t,T)\left(-\int_t^T \{\mu_n(t,u)+\sigma_n(t,u)\,dW_t\}du+a_n(t,t)\,dt\right)\\
&+\frac{P_{nn}(t,T)}{2}d\left(-\int_t^T \{\mu_n(t,u)+\sigma_n(t,u)\,dW_t\}du+a_n(t,t)\,dt\right)^2\\
=& P_{nn}(t,T)\left(a_n(t,t)-\int_t^T \mu_n(t,u)\,du+\frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma_n(t,u)\,du\right)^2\right)dt\\
&-P_{nn}(t,T)\left(\int_t^T \sigma_n(t,u)\,du\right)dW\\
\Leftrightarrow \quad \frac{dP_{nn}(t,T)}{P_{nn}(t,T)} =& \left(-\int_s^T \mu_m(t,u)\,du+\frac{1}{2}\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\,du\right)^2\right)dt-\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\,du\right)dW
\end{aligned}
$$

● $m>n$ の時、式 (3.29) より

$$
P_{nm}(t,T)=\int_t^T M(t,s)\,X(t,s,T)\,ds \tag{3.35}
$$

$P_{nm}(t,T)$ を微分すると

$$
dP_{nm}(t,T)=-M(t,s)\,X(t,s,T)\,dt+\int_t^T d\left(M(t,s)\,X(t,s,T)\right)ds \tag{3.36}
$$

式 (3.36) の右辺第二項は

$$
\begin{aligned}
\int_t^T d\left(M(t,s)\,X(t,s,T)\right)ds = & \int_t^T (M(t,s)\,dX(t,s,T)\,ds && (3.37)\\
&+\int_t^T X(t,s,T)\,dM(t,s)\,ds && (3.38)\\
&+\int_t^T dM(t,s)\,dX(t,s,T)\,ds && (3.39)
\end{aligned}
$$

- 式 (3.37)

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T (M(t,s)\,dX(t,s,T)\,ds\\
=& M(t,s)\,X(t,s,T)\left(\left(-\int_s^T \mu_m(t,u)\,du+\frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma_m(t,u)\right)\right)dt-\left(\int_t^T \sigma_m(t,u)\,du\right)dW\right)
\end{aligned}
$$

- 式 (3.38)

$$
\int_t^T X(t,s,T)\,dM(t,s)\,ds=\int_t^T X(t,s,T)\left(\mu_M(t,s)\,dt+\sigma_M(t,s)\,dW\right)ds
$$

- 式 (3.39)

$$\begin{aligned}\int_t^T dM(t,s)\,dX(t,s,T)\,ds &= \int_t^T \sigma_M(t,s)\,dW\left(-\int_s^T \sigma_m(t,u)\,du\right)X(t,s,T)\,dW ds\\ &= \int_t^T X(t,s,T)\,\sigma_M(t,s)\left(-\int_s^T \sigma_m(t,u)\,du\right)dsdW\end{aligned}$$

よって式 (3.36) は

$$\begin{aligned}dP_{nm}(t,T) =& -M(t,s)\,X(t,s,T)\,dt && (3.40)\\ &+\int_t^T M(t,s)\,X(t,s,T)\left(-\int_s^T \mu_m(t,u)\,du+\frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma_m(t,u)\right)^2\right)ds && (3.41)\\ &+\int_t^T X(t,s,T)\,\mu_M(t,s)\,ds && (3.42)\\ &-\int_t^T X(t,s,T)\,\sigma_M(t,s)\left(\int_t^T \sigma_m(t,u)\,du\right)dsdt && (3.43)\\ &+\left(\int_t^T X(t,s,T)\,\sigma_M(t,s)-M(t,s)\,X(t,s,T)\left(\int_t^T \sigma_m(t,u)\,du\right)\right)dW && (3.44)\end{aligned}$$

下記の性質と事実を用いて、上記式の各項に注目する.

1. $\int_t^T \int_s^T f(s,u)\,duds = \int_t^T \int_t^u f(s,u)\,dsdu$
2. $X(t,s,T) = X(t,s,u)\,X(t,u,T)$

- 式 (3.40)

    1. $n < m-1 \Leftrightarrow n+1 < m$ の時、$M(t,t) = 0$ より,$-M(t,t)\,X(t,t,T) = 0$

    2. $n = m-1 \Leftrightarrow n+1 = m$ の時、

    $$\begin{aligned}M(t,t) &= P_{n,m-1}(t,t)\,a_{m-1}(t,t)\\ X(t,t,T) &= e^{-\int_t T a_m(t,u)du}\end{aligned}$$

    よって

    $$-M(t,t)\,X(t,t,T) = -a_{m-1}(t,t)\,e^{-\int_t T a_m(t,u)du} \quad (3.45)$$

- 式 (3.41)

    1. $\mu_m(t,u)$ の項

    $$\begin{aligned}-\int_t^T \int_s^T M(t,s)\,X(t,s,T)\,\mu_m(t,u)\,duds &= -\int_t^T \int_t^u M(t,s)\,X(t,s,T)\,\mu_m(t,u)\,dsdu\\ &= -\int_t^T \int_t^u M(t,s)\,X(t,s,T)\,ds\mu_m(t,u)\,du\end{aligned}$$

$X(t,s,T) = X(t,s,u)\,X(t,u,T)$ より

$$-\int_t^T \int_s^T M(t,s)\,X(t,s,T)\,\mu_m(t,u)\,duds = -\int_t^T \int_t^u M(t,s)\,X(t,s,u)\,dsX(t,s,T)\,\mu_m(t,u)\,du \tag{3.46}$$

2. $\sigma_m(t,u)$ の項

$$\begin{aligned}\int_s^T \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\,du\right)^2\right)dy &= \frac{1}{2}\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\,du\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\int_s^s \sigma_m(t,u)\,du\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\,du\right)^2\end{aligned} \tag{3.47}$$

式 (3.47) より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\,du\right)^2 &= \int_s^T \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\,du\right)^2\right)dy \\ &= \int_s^T \sigma_m(t,u)\left(\int_u^T \sigma_m(t,y)\,dy\right)du\end{aligned} \tag{3.48}$$

式 (3.48) を用いると

$$\begin{aligned}&\int_t^T M(t,s)\,X(t,s,T)\,\frac{1}{2}\left(\int_s^T \sigma_m(t,u)\,du\right)^2 ds \\ &= \int_t^T \int_s^T M(t,s)\,X(t,s,T)\,\sigma_m(t,u)\left(\int_u^T \sigma_m(t,y)\,dy\right)duds\end{aligned}$$

$X(t,s,T) = X(t,s,u)\,X(t,u,T)$、式 (3.29) より

$$\begin{aligned}&= \int_t^T P_{nm}(t,u)\,X(t,u,T)\,\sigma_m(t,u)\left(\int_u^T \sigma_m(t,y)\,dy\right)du \\ &= \int_t^T \int_t^y P_{nm}(t,u)\,X(t,u,T)\,\sigma_m(t,u)\,\sigma_m(t,y)\,dudy \\ &= \int_t^T \sigma_m(t,y)\,X(t,y,T)\left(\int_t^y P_{nm}(t,u)\,X(t,u,T)\,\sigma_m(t,u)\,du\right)dy\end{aligned} \tag{3.49}$$

- 式 (3.44)
  第二項は式 (3.41) の $\mu_m(t,u)$ 項同様に

$$\int_t^T \int_s^T M(t,s)\,X(t,s,T)\,\sigma_m(t,u)\,duds = \int_t^T P_{nm}(t,u)\,X(t,u,T)\,\sigma_m(t,u)\,du \tag{3.50}$$

- 式 (3.43)

$$\begin{aligned}\int_t^T \int_s^T X(t,s,T)\,\sigma_M(t,s)\,\sigma_m(t,u)\,duds &= \int_t^T \int_t^u X(t,s,T)\,\sigma_M(t,s)\,\sigma_m(t,u)\,dsdu \\ &= \int_t^T X(t,u,T)\,\sigma_m(t,u)\left(\int_t^u X(t,s,u)\,\sigma_M(t,s)\,ds\right)du\end{aligned} \tag{3.51}$$

上記の式 (3.45), 式 (3.46), 式 (3.49), 式 (3.50), 式 (3.51) より

$$
\begin{aligned}
dP_{nm}(t,T) = &- a_{m-1}(t,t)\, P_{m,m}(t,T)\, \mathbb{I}_{\{m=n+1\}} dt \\
&- \int_t^T X(t,u,T)\, P_{nm}(t,u)\, \mu_m(t,u)\, dudt \\
&+ \int_t^T X(t,u,T)\, \sigma_m(t,u) \left(\int_t^u X(t,s,u)\, P_{nm}(t,s)\, \sigma_m(t,s)\, ds \right) dudt \\
&+ \int_t^T X(t,u,T)\, \mu_M(t,u)\, dudt \\
&- \int_t^T X(t,u,T)\, \sigma_m(t,u) \left(\int_t^u X(t,s,u)\, \sigma_M(t,s)\, ds \right) dudt \\
&+ \left(\int_t^T X(t,s,T) \left[\sigma_M(t,s) - P_{nm}(t,s)\, \sigma_m(t,s) \right] ds \right) dW
\end{aligned}
$$

上記式を更にまとめると

$$
\begin{aligned}
dP_{nm}(t,T) = &- a_{m-1}(t,t)\, P_{m,m}(t,T)\, \mathbb{I}_{\{m=n+1\}} dt \\
&+ \left(\int_t^T X(t,u,T) \left[-P_{nm}(t,u)\, \mu_m(t,u) + \mu_M(t,u) - \sigma_m(t,u)\, \nu_{nm}(t,u) \right] \right) dt \\
&+ \nu_{nm}(t,T)\, dW
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\nu_{nm}(t,T) = \int_t^T X(t,s,T) \left[\sigma_M(t,s) - P_{nm}(t,s)\, \sigma_m(t,s) \right] ds
$$

□

3.2.2 推移確率過程のドリフト制約

定理 3.2.2 : 推移確率過程のドリフト制約

上記 1. 2. の必要十分条件は、下記 3. 4. である.

1. $a_n(t,T)$ が $da_n(t,T)=\mu_n dt+\sigma_n dW$ のプロセスに従う
2. $p_n(t,T)=P_{L(t),n}(t,T)$ が成立する

$\Uparrow \qquad \Downarrow$

3. $0\leq T\leq T^*$,$0\leq m\leq I$ に対し

$$P_{L(t),m}(t,T)\,\mu_m(t,T)=-\sigma_m(t,T)\,\nu_{L(t),m}(t,T) \tag{3.52}$$

4. $L(t)$ の強度は以下の様に与えられる.

$$\lambda_L(t)=a_{L(t)}(t,t) \tag{3.53}$$

証明 $P_{L(t),m}(t,T)$ を微分すると、式 (3.20) より

$$dP_{L(t),m}(t,T)=\upsilon_{L(t-),m}(t,T)\,dt+\nu_{L(t-),m}(t,T)\,dW+\phi_m(t,T)\,dL(t)$$

式 (3.17), 式 (3.18) より、$dL(t)=\lambda_L(t)\,dt$ なので

$$dP_{L(t),m}(t,T)=\big(\upsilon_{L(t),m}(t,T)+\phi_m(t,T)\,\lambda_L(t)\big)\,dt+\nu_{L(t),m}(t,T)\,dW \tag{3.54}$$

- 必要条件

  $p_n(t,T)=P_{L(t),n}(t,T)$ が成立すると仮定する.

  1. 定理 3.2 より式 (3.53) が成立する.
  2. 定理 3.2 より $P_{L(t),m}(t,T)$,$a_m(t,T)\,P_{L(t),m}(t,T)$ はマルチンゲールである.

     よって式 (3.54) のドリフト係数は、

$$\upsilon_{L(t),m}(t,T)+\phi_m(t,T)\,\lambda_L(t)=0 \tag{3.55}$$

これより

$$dP_{L(t),m}(t,T)=\nu_{L(t),m}(t,T)\,dW \tag{3.56}$$

$a_m(t,T)\,P_{L(t),m}(t,T)$ を微分すると、式 (3.19), 式 (3.56) より

$$\begin{aligned}
d\big(a_m(t,T)\,P_{L(t),m}(t,T)\big) =& a_m(t,T)\,dP_{L(t),m}(t,T)+P_{L(t),m}(t,T)\,da_m(t,T)+da_m(t,T)\,dP_{L(t),m}(t,T)\\
=& a_m(t,T)\,\nu_m(t,T)\,dW+P_{L(t),m}(t,T)\,(\mu_m(t,T)\,dt+\sigma_m(t,T)\,dW)\\
&+(\mu_m(t,T)\,dt+\sigma_m(t,T)\,dW)\,\nu_m(t,T)\,dW\\
=& \big(P_{L(t),m}(t,T)\,\mu_m(t,T)+\sigma_m(t,T)\,\nu_m(t,T)\big)\,dt\\
&+\big(a_m(t,T)\,\nu_m(t,T)+P_{L(t),m}(t,T)\,\sigma_m(t,T)\big)\,dW
\end{aligned}$$

マルチンゲールより、$d\big(a_m(t,T)\,P_{L(t),m}(t,T)\big)$ に期待値をとると、

$$\mathbb{E}\big[d\big(a_m(t,T)\,P_{L(t),m}(t,T)\big)\,\big|\mathcal{F}_t\big]=\big(P_{L(t),m}(t,T)\,\mu_m(t,T)+\sigma_m(t,T)\,\nu_m(t,T)\big)\,dt=0$$

となり、式 (3.52)

$$\begin{aligned} & P_{L(t),m}(t,T)\,\mu_m(t,T) + \sigma_m(t,T)\,\nu_m(t,T) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & P_{L(t),m}(t,T)\,\mu_m(t,T) = -\sigma_m(t,T)\,\nu_m(t,T) \end{aligned}$$

が成立する.

- 十分条件

$m > L(t)$、$0 \le m \le m'$ に対し $P_{L(t),m'}(t,T)$ がマルチンゲールである事を仮定する.
定理 3.1 より、$a_{m'}(t,T)\,P_{L(t),m'}(t,T)$ がマルチンゲールである.$m' = m-1$ とすると、$a_{m-1}(t,T)\,P_{L(t),m-1}(t,T)$ のドリフト係数は式 (3.25) より

$$\mu^{Pa}_{L(t),m-1}(t,T) = a_{m-1}(t,T)\,\upsilon_{L(t),m-1}(t,T) + P_{L(t),m-1}(t,T)\,\mu_{m-1}(t,T) + \sigma_{m-1}(t,T)\,\nu_{L(t),m-1}(t,T)$$

式 (3.52) より

$$\mu^{Pa}_{L(t),m-1}(t,T) = a_{m-1}(t,T)\,\upsilon_{L(t),m-1}(t,T)$$

式 (3.55) より

$$\mu^{Pa}_{L(t),m-1}(t,T) = -a_{m-1}(t,T)\,\phi_{m-1}(t,T)\,\lambda_L(t) \tag{3.57}$$

1. $m-1 = L(t)$ の時、$P_{L(t),m}(t,T)$ のドリフト項は定理 3.2.1 より

$$\upsilon_{L(t),m}(t,T) = -a_{L(t)}(t,t)\,P_{L(t)+1,m}(t,T) + \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}\mu^{Pa}_{L(t),m-1}(t,s)\,ds$$

式 (3.57) を代入すると

$$\upsilon_{L(t),m}(t,T) = -\,a_{L(t)}(t,t)\,P_{L(t)+1,m}(t,T) - \int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}\left(a_{m-1}(t,s)\,\phi_{m-1}(t,s)\,\lambda_L(t)\right)ds$$

式 (3.22) を $\phi_{m-1}(t,T)$ に代入すると

$$\upsilon_{L(t),m}(t,T) = -\,\lambda_L(t)\,P_{L(t)+1,m}(t,T) + \lambda_L(t)\int_t^T P_{L(t),m-1}(t,s)\,a_{m-1}(t,s)\,e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}ds$$

右辺第二項は式 (3.3) より、推移確率の定義なので

$$\begin{aligned} \upsilon_{L(t),m}(t,T) &= -\,\lambda_L(t)\,P_{L(t)+1,m}(t,T) - \lambda_L(t)\,P_{L(t),m}(t,T) \\ &= -\,\lambda_L(t)\left(P_{L(t)+1,m}(t,T) - P_{L(t),m}(t,T)\right) \\ &= -\,\lambda_L(t)\,\phi_m(t,T) \end{aligned} \tag{3.58}$$

2. $m-1 > L(t)$ の時、$P_{L(t),m}(t,T)$ のドリフト項は

$$\begin{aligned} \upsilon_{L(t),m}(t,T) &= -\int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}\mu^{Pa}_{L(t),m-1}(t,T) \\ &= -\int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}\left(a_{m-1}(t,s)\,\phi_{m-1}(t,s)\,\lambda_L(t)\right)ds \end{aligned}$$

式 (3.22) を代入すると

$$\begin{aligned}
\upsilon_{L(t),m}\left(t,T\right) =& -\lambda_L\left(t\right)\int_t^T e^{-\int_s^T a_m(t,u)du}\left(P_{L(t)+1,m-1}\left(t,s\right)-P_{L(t),m-1}\left(t,s\right)\right)ds \\
=& -\lambda_L\left(t\right)\left(P_{L(t)+1,m}\left(t,s\right)-P_{L(t),m}\left(t,s\right)\right) \\
=& -\lambda_L\left(t\right)\phi_m\left(t,T\right)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

式 (3.54) に、式 (3.58), 式 (3.59) を代入する

$$\begin{aligned}
dP_{L(t),m}\left(t,T\right) =& \left(\upsilon_{L(t),m}\left(t,T\right)+\phi_m\left(t,T\right)\lambda_L\left(t\right)\right)dt+\nu_{L(t),m}\left(t,T\right)dW \\
=& \nu_{L(t),m}\left(t,T\right)dW
\end{aligned}$$

よって $P_{L(t),m}\left(t,T\right)$ はマルチンゲールである.
定理 3.2.1 より $p_n\left(t,T\right)=P_{L(t),n}\left(t,T\right)$ が成立する.

□

4　クレジットデリバティブのプライシング

4.1　初期値の設定

最初に各初期値の設定を行う. 下記の通り $\Delta t = \frac{1}{12}$, 満期を $12\Delta t = 1$ とし, 時間を 12 分割する. 又時間の分割数と, ポートフォリオ企業数を同数に設定する.

- $\Delta t = \frac{1}{12}$
- 時間間隔:$[0, \Delta t], [\Delta t, 2\Delta t], \cdots, [11\Delta t, 12\Delta t]$
  満期:$12\Delta t = 1$
- ポートフォリオ企業数:$I = 12$
  1. $t = 0$
     $a_0(0, \Delta t) = 0, \cdots, a_0(0, 12\Delta t) = 0.5$
  2. $t \to t + \Delta t$
     $a_1(\Delta t, 2\Delta t) = 0, \cdots, a_1(\Delta t, 12\Delta t) = 0.5$
     $a_2(2\Delta t, 3\Delta t) = 0, \cdots, a_1(2\Delta t, 12\Delta t) = 0.5$
     $\vdots$
     $a_{11}(11\Delta t, 12\Delta t) = 0$

4.2　推移確率の計算

- $t = 0$ の時
  $L(0) = 0$ を設定する. その上で将来時刻を進めていった時の生存確率は
  $P_{00}(0, \Delta t) = e^{-[a_0(0,\Delta t)]\Delta t}$
  $P_{00}(0, 2\Delta t) = e^{-[a_0(0,\Delta t)+a_0(0,2\Delta t)]\Delta t}$
  $\vdots$
  $P_{00}(0, 12\Delta t) = e^{-\sum_{i=1}^{12} a_0(0, i\Delta t)\Delta t}$
  よって現在時刻 $t = 0$ を固定し満期 T を $\Delta t, 2\Delta t, \cdots, 12\Delta t$ と動かすと, 生存確率は指 数関数に従う.
- $t \to t + dt$ と現在時刻を進めていって時
  $a_n(t, T)$ の現在時刻を, オイラースキームを用いて進めていく.
  $a_n(t, T) \sim da_n(t, T) = \mu_n dt + \sigma_n dW$ だが, 式 (3.52) より $\mu_m(t, T)$ に下記の制約が加わる.

$$
\begin{aligned}
P_{L(t),m}(t, T)\,\mu_m(t, T) &= -\sigma_m(t, T)\,\nu_{L(t),m}(t, T) \\
\Leftrightarrow \mu_m(t, T) &= \frac{-\sigma_m(t, T)}{P_{L(t),m}(t, T)}\nu_{L(t),m}(t, T)
\end{aligned}
$$

$\nu_{L(t),m}(t, T)$ は推移確率過程の係数より

$$
\nu_{nm}(t, T) = P_{nm}(t, T)\{-\int_t^T \sigma_n(t, s)\,ds\}
$$

これを代入すると

$$\mu_m(t,T) = -\sigma_m(t,T)\{-\int_t^T \sigma_m(t,s)\,ds\}$$

離散化し σ を定数とすると

$$\mu_m(t,T) = \sigma^2(T-t-dt)\,dt$$

となる. これを用いると $a_m(t,T)$ のプロセスは

$$da_m(t,T) = \sigma dW$$

となり $a_m(t,T)$ はマルチンゲールである. これより

$$a_m(t\Delta t,T) = a_m(t,T) + \sigma dW$$

として計算する.

- オイラースキームを用いて $a_m(t+\Delta t,T)$ を計算する. 損失過程とその推移確率は

$$L(t+\Delta t) = \begin{cases} L(t) & (w.p. \quad e^{-a_n(t,t)dt}) \\ L(t)+1 & (w.p. \quad 1-e^{-a_n(t,t)dt}) \end{cases}$$

- 時間間隔 $[0,\Delta t], [\Delta t, 2\Delta t], ...$ の推移確率行列を求め, 全ての時間の推移確率行列を計算する.

本稿では満期 $12\Delta t$ を固定し, 現在時刻を進めていって時の生存確率に注目する.Fig.1 はその時のグラフである.

満期 $T = 12\Delta t$ を固定し, 現在時刻を動かした時の生存確率である. 倒産数が $n = 0$ の場合を考える. グラフは異なる σ による比較をしているが, どれも右上がりになり最後は 1 になっている. これは $t = 0, 1$ 等最初の時刻は, 満期まで時間がありその分リスクも大きなものになっているからである. しかし時間が進むにつれ満期との残差が小さくなっていき, それに伴ないリスクも小さくなってゆく. それ故満期を固定し, 現在時刻を動かした場合の生存確率は右上がりになり最後は 1 になる.

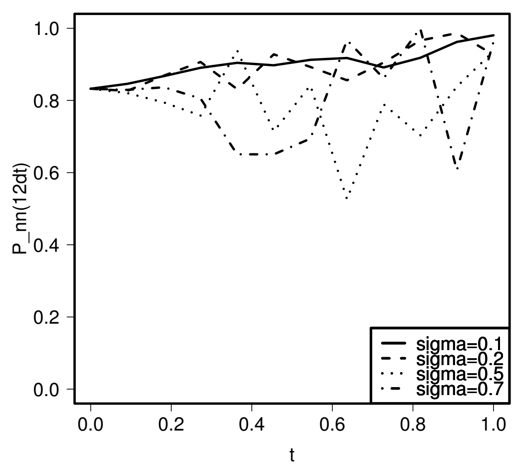

Fig.1　異なる σ の現在時刻と推移確率

4.3 STCDO

$t = T1$ の時, $a_n(T1, T)$ より $P_{L(T1),m}(t, T)$ を計算し STCDO のプライシングを行う.

STCDO は single-tranche CDO の略で, その名の通りトランシェが一つの CDO である. 対象となるポートフォリオは投資家自らが保有するポートフォリオで, 予め設定されている範囲内において, リスク範囲, 期間を投資家自ら決定する自己設計型の CDO である. 契約期間中であれば. 売手は投資家 (買手) の損失額を保証する. そのプライシング法は, 時間間隔 $[mdt, 12dt]$, 一社の損失額が 1,$r = 0.03$ が金利である場合

$$\sum_{k=m}^{I}(k-m)P_{mk}(ldt, 12dt)\, e^{-r(12-l)dt}$$

として計算する.Fig.2 はそのグラフである. 図 2 は満期を固定し, 現在時刻を動かした時の STCDO の価格を表したグラフである.

こちらも Fig.1 同様にポイントは現在時刻と満期との残差になる. グラフ全体を見ると右下がりになっている事が分かる. これは時間が満期に近づくにつれ,FIg.1 より, 生存確率が高くなり, それに伴い投資家が保有するリスクも小さなものになっていくからである. 最後は時間が満期を向かえたならばその価値は 0 になる.

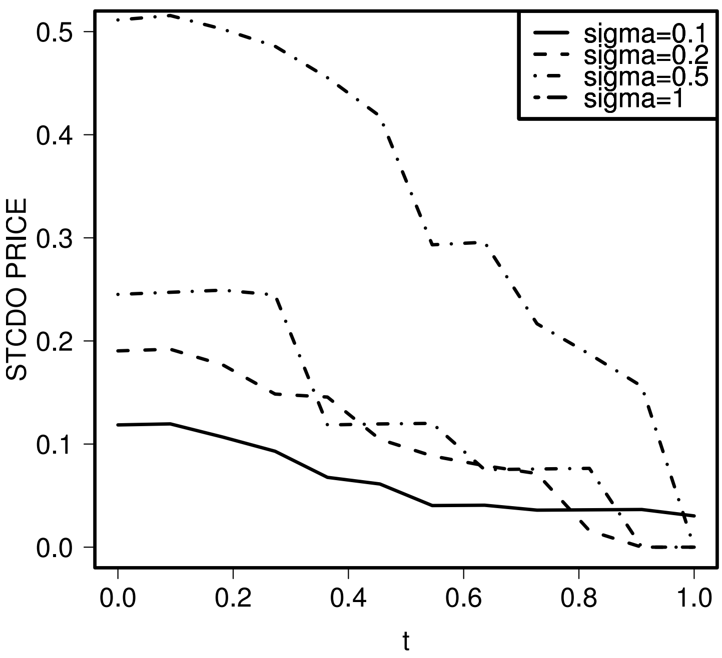

Fig.2　STCDO 価格と現在時刻

5 総括

まず確率推移率を導入し推移確率を求める事で, 社債ポートフォリオの生存確率が指数関数に従う事が分かり 又その際導入した推移率が強度になる事も分かった. 確率推移率は, 定理 3.2.2 の推移確率過程のドリフト制約を加える事でマルチンゲールになり, 二つのパラメーラにのみ依存する事が分かる.

この論理の下推移率の初期値が大きければより早く倒産する確率が高まり, 生存確率は確率推移率の関数である為, σ によりばらつきが見られた. しかし推移率がマルチンゲールである事がら, この様な推移率を用いて求めた価格は, 現在時刻, 満期間の時間間隔と σ に依存する事が分かる.

参考文献

[1] Philipp J. Schonbucher. (2006). Portfolio Losses And The Term Structure Of Loss Transition Rares: A New Methodology For The Pricing Of Portfolio Credit Derivatives, Department of Mathematics, ETH Zurich.

[2] Philipp J. Schonbucher. (2008). Time for a Time-Change: A new Approach to Multivariate Intensity Models of Credit Risk , Department of Mathematics, ETH Zurich.

[3] Philippe Ehlers.(2006). Dynamic Credit Portfolio Derivatives Pricing , Department of Mathematics, ETH Zurich.

[4] Paul Glasserman(2004). Monte Carlo Methods in Financial Engineerring , Springer

[5] Damir Filipvic Thorsten Schmidt(2009). Pricing and Hedging of CDOs: A Top Down Approach

[6] Soren Willemann(2004). An Evaluation of the Base Correlation Framework for Synthetic CDOs , Department of Accounting , Finance and Logistics , Aarhus School of Business , Denmark

[7] S.E. シュリーブ [著]. (2008). ファイナンスのための確率解析 II. シュプリンガージャパン.

[8] 浦谷　規 [著]. (2005). 無裁定理論とマルチンゲール. 朝倉書店.

[9] 関根　順 [著]. (2007). 数理ファイナンス. 培風館.

[10] 今野　紀雄 [著](2001). マルコフ連鎖から格子確率モデル. シュプリンガージャパン.

謝辞

本論文を制作するにあたり, 多くの方々に大変お世話になりました. 指導教官である浦谷規教授にこの場を借りて心から御礼申し上げます. 研究面で様々な助言を下さった安田和弘助教授にも大変感謝しております. また研究以外の面でもお世話になりました同研究室の先輩, 同輩, 後輩の諸氏にも感謝致します. 最後に, 学生生活を支え, 常に見守ってくれた両親及び家族に感謝致します.

2010 年 2 月
上村　洋平