選好空間への位相 : Fell位相の妥当性

奥山, 利幸 / OKUYAMA, Toshiyuki

(出版者 / Publisher)
法政大学経済学部学会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
The Hosei University Economic Review / 経済志林
(巻 / Volume)
77
(号 / Number)
4
(開始ページ / Start Page)
385
(終了ページ / End Page)
411
(発行年 / Year)
2010-03-15
(URL)
https://doi.org/10.15002/00007002

選好空間への位相
――Fell位相の妥当性――

奥　山　利　幸*

1　はじめに

純粋交換経済を想像しよう。消費者の選好が変化すれば，パレート効率な資源配分，特にワルラス均衡も変化するであろう。しかしながら，選好の変化が余り大きくなければ，ワルラス均衡の変化も又，大きくないはずである。このように，選好とワルラス均衡の間に連続性が認められれば，Debreu（1972, p.605）が指摘するように，理論の説明力は増す。例えば，似通った選好に変化したにもかかわらず，ワルラス均衡が大きく変化するのであれば，経済に対する観察が僅かでも誤れば，予測は大きく外れることになる。このような場合，様々な経済政策において，そもそも目標の意味を失ってしまう。

しかしながら，似通った選好とは，そもそも，どのように定義されるのであろうか。例えば，線形効用関数で表現される選好（線形選好）は，コブダグラス型効用関数で表現される選好（コブダグラス選好）と，どの程度，異なるといえるのであろうか。CES型効用関数は，代替の弾力性によって線形選好，コブダグラス選好，レオンチェフ選好（レオンチェフ型効

*）森廣正先生の退職を記念し，本稿を捧げるものである。

用関数で表現される選好）に変化するが，そういった変化は似通った選好の変化といえるのであろうか。選好の変化とワルラス均衡の変化の間に連続性を定義するには，そもそも，選好の類似性,「近さ」を定義する必要がある。

「近さ」のモデル化には,「位相（トポロジー）」と呼ばれる数学の概念がある。位相自体は，ある集合があったときに，その集合に属す要素間の近さを与える構造になる[1)]。位相空間は，距離空間を一般化した概念と見ることができる[2)]。例えば, 実数平面を考えよう。平面上の2点をとったとき, それら2点の間の距離が短い程，それらの 2点は「近い」といえよう。中心

1）残念ながら，ミクロ経済学の大学院向け上級書でも，本稿が扱う数学を説明している教科書は見当たらない。そこで，そういった教科書でも触れられていない数学の概念については，読者への便宜を考え，脚注にて紹介することにする。

集合Xがあったとき，集合Xの部分集合の集合$\mathscr{T}$(部分集合の集合を**集合族**，あるいは単に**族**（family, class）という）が次の条件を満たすとき，集合族$\mathscr{T}$をXへの**位相**（topology）といい，組$(X, \mathscr{T})$を**位相空間**（topological space）と呼ぶ。

（T1）任意の部分族$\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$に対し，$\cup_{U \in \mathscr{S}} U \in \mathscr{T}$が成り立つ。

（T2）任意の有限部分族 $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$に対し，$\cap_{U \in \mathscr{S}} U \in \mathscr{T}$が成り立つ。

但し，部分族$\mathscr{S}$が空集合の場合 $(\mathscr{S} = \varnothing)$, $\cup_{U \in \varnothing} U = \varnothing$，$\cap_{U \in \varnothing} U = X$ である。位相$\mathscr{T}$の要素 $U \in \mathscr{T}$ を Xの**開集合**（open set），補集合が開集合となるXの部分集合を**閉集合**（closed set）という。定義によって，空集合と全体集合Xは閉かつ開である。位相空間といった場合，位相が与えられた集合を指し，組$(X, \mathscr{T})$で表す。最も粗い（弱い）位相は**密着位相**（indiscrete topology）$T = \{\varnothing, X\}$であり，この場合，すべての要素$x, y \in X$が同じ近さにあることを意味する。これに対し，最も細かい（強い）位相がXのすべての部分集合からなる**離散位相**（discrete topology）であり，この場合，すべての要素$x \in X$に対し単集合（singleton）$\{x\}$も又，開集合になる。集合の要素間の近さは，それらの要素をもつ開集合が表し，それを規程するのが位相になる。位相数学については，例えば，Kelley（1955），Bourbaki（1989a,b）を参照。MITの大学院数学専攻の教科書である Munkres（2000）は，例が多く，理解しやすい。

2）一般に，集合Xがあったとき，次の性質を満たす$X \times X$上の非負実数値関数dをX上の**距離**（metric）という。

（M1）$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

（M2）$d(x, y) = d(x, y)$;

（M3）$d(x, y) + d(y, z) \geqq d(x, z)$（三角不等式）。

εを正の実数としたとき，$d(x, y) < \varepsilon$なるyの全体

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

を中心x，半径εの**開球**（open sphere，open ball）という。**距離空間**（metric space）とは，開球の和集合を開集合とする位相空間を指す。

x，半径εの開円盤$B_\varepsilon(x)=\{y||y-x|<\varepsilon\}$は，点$x$から半径$\varepsilon$内の点の集合であるから，距離によって平面上に「近さ」の概念を導入するのであれば，開円盤からなる集合族が位相の基底になる[3)]。

経済学における選好は，消費集合上の二項関係になる[4)]。二項関係は，消費集合Xがあったとき，直積$X \times X$の部分集合になる。したがって，選好の集合に対する位相とは，集合間に「近さ」の概念を定義する構造を意味する。集合間の距離を導入して，選好の集合を距離空間として捉えようとした初期の研究成果にDebreu（1969）がある。この接近は，位相空間が距離空間の一般化であるという考え方からすれば数学的にはとても自然であるが，経済学的意味付けを与えるのが難しい。そこで，経済学的に「自然な」位相として導入されたのが経済学の文献でしばしば「閉収束位相（topology of closed convergence）」と呼ばれているFell位相（後述）であ

3) 一般に，集合Xのある集合族が，その集合族の要素の和集合からなる集合族が位相になるとき，その位相の**基底**（base，basis）であるという。例えば，距離空間は，開球からなる集合族を基底にもつ位相空間である（開球の和集合が開集合）。実数平面ならば，例えば，星形の内部も開集合（開円盤の和集合）になる。

但し，任意の集合族が位相の基底になるわけではない。例えば，次の集合Xの集合族$\mathscr{S}$は，位相の基底ではない。

$$X=\{\text{父親, 母親, 長男, 長女}\},\ \mathscr{S}=\{\{\text{父親, 母親, 長男}\}, \{\text{父親, 母親, 長女}\}\}. \quad (1.1)$$

それでも，Xの集合族$\mathscr{S}$が任意に与えられたとき，$\mathscr{S}$の有限部分族の要素の共通部分からなる集合族$\mathscr{B}$はXへの位相の基底になる（Kelley, 1955, Theorem 12, p. 47）。上の（1.1）の例の場合，各子供とその親で区分した集合族$\mathscr{S}$から，有限部分族の共通部分からなる集合族を作れば，集合族

$$\mathscr{B}=\{\{\text{父親, 母親, 長男}\}, \{\text{父親, 母親, 長女}\}, \{\text{父親, 母親}\}\}$$

を得て，$\mathscr{B}$は位相$\mathscr{T}=\mathscr{B}\cup\{\varnothing, X\}$の基底になる。このため，集合族$\mathscr{S}$は位相の**部分基底**（準基，部分基，subbase，subbasis）と呼ばれる。概していえば，いかなる集合族もある位相の部分基底になり，そこから基底を作成でき，基底から位相を作れるわけである。

4) 集合XとYがあったとき，$x\in X$と$y\in Y$の組(x, y)の全体を集合XとYの**直積**と呼び，$X\times Y$で表す。ある集合X上の**二項関係**（binary relation）$\succcurlyeq$とは，直積$X\times X$の部分集合$\succcurlyeq\subset X\times X$のことであり，$(x, y)\in\succcurlyeq$のとき$x\succcurlyeq y$で示す。$y\preccurlyeq x$は，$x\succcurlyeq y$と同義であり$\succcurlyeq$の**逆関係**（inverse relation）と呼ばれ，$\succcurlyeq^{-1}$で表す。例えば，実数の全体$\mathbb{R}$上の大小関係$<$は，$\mathbb{R}$上の二項関係であり，$<\equiv\{(x, y)\in\mathbb{R}^2|x<y\}$と表すことができる。ここで，$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$は中学校で習った「$xy$平面」，すなわち，実数平面のことであり，2次元ユークリッド空間と呼ばれる。

る。選好の「類似性」としての閉収束位相に対する初期の研究は，Kannai (1970), Grodal (1974), Hildenbrand (1974)などがある。例えば，Kannai (1970) は，選好の連続性と単調性を満たす選好の全体であれば，距離化可能であることを示している[5)]。距離化可能な位相であれば，距離によって「近さ」を表現できるという利点があることになる。また，Grodal (1974) は，非反射性，推移性，連続性を満たす二項関係の全体に閉収束位相を導入すれば，そのような二項関係の全体はコンパクト空間になることを示している[6)]。

ところが，Kannaiが示した位相，あるいは，閉収束位相の下では，完備性，反射性，推移性，連続性を満たす選好順序の全体が閉集合にはならないことを Grodal（1974, Prop. 6, p. 289, 特に, Remark 4, p. 291）が示している。これは，単調性を追加要求しても同じである。 Back (1987)は，完備性，反射性，推移性，連続性，単調性を満たす選好順序の収束点列をとってきたときに，その極限が推移性を満たさないとする例を示している（詳細は後述)。Backの例がそのような例であるか否かは後に確認することにするが，Backの例は，完備性，反射性，推移性，連続性を満たす二項関係

5）ある位相が，開球の全体を基底にもつ位相に一致するような距離が存在するとき，その位相は**距離化可能**（metrizable）であるという。例えば，実数の全体（１次元ユークリッド空間）$\mathbb{R}$への通常位相（usual topology）の部分基底は，半開区間$(-\infty, a)$, (a, ∞)の全体になる。この結果，それらの半開区間のみならず，開区間(a, b)やそれらの和集合が開集合になる。この位相は，距離$d(x, y)=|x-y|$から作成される開球$B_\varepsilon(x)$である開区間$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$の全体を基底にした位相に一致する。すなわち，$\mathbb{R}$への通常位相は，距離化可能である。ちなみに，密着位相や離散位相（脚注１）も距離化可能である。

6）位相空間$(X, \mathscr{T})$の部分集合$A \subset X$が**コンパクト**（compact）であるとは，Aの任意の開被覆が有限開被覆をもつときをいう。Aの**被覆**（cover, covering）とは，Xの集合族で，その集合族の要素の和集合がAを包含するときをいう。被覆の各要素がXの開集合であれば，**開被覆**（open cover, open covering）と呼ばれる。位相がどうであれ，定義によって，単集合$\{x\}$はすべての$x \in X$に対しコンパクトである。この結果，有限集合は，すべて，コンパクトになる。密着位相の場合，単集合は閉集合でも開集合でもない。また，離散位相の場合，単集合は閉かつ開である。この結果，コンパクト性と閉性，開性は，独立した概念であることが理解できる。しかし，一般に，ハウスドルフ空間（後出）のコンパクト部分集合は閉集合であり（Kelley, 1955, Theorem 7, pp. 140－141），コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである（Kelley, 1955, p. 140)。特に，この性質が，本稿の論題に大きく関係することを付け加えておきたい。

の全体が閉収束位相において閉集合にならないことの原因が，推移性の連続的変化を閉収束位相では保証できないことを暗示していると捉えることもできる。仮にそうであれば，選好間の「近さ」のモデルとして，Kannai（1970）やHildenbrand（1974）が経済的に「自然」であるとして導入した「閉収束位相」が，そもそも妥当であったのか，という疑問を抱かせる。というのは，選好順序の推移性は，主体の個人的価値形成に対する無矛盾の仮定であり，もし主体の選好が推移性を満たしながら徐々に変化しても，最終的に推移性を満たさないとすれば，主体の個人的価値形成に矛盾が伴うことを容認していることになってしまうからである。

選好間の「近さ」のモデルとしての「閉収束位相」の妥当性を探るには，「閉収束位相」の導入の起源になった経済的に「自然」な条件の再考が必要なことを意味している。Kannai（1970）が示したその「自然」な条件については後述するが，その条件については，次のような疑問が湧いて来る。すなわち，その「自然」な条件は，そもそも，Grodal（1974）やHildenbrand（1974）が考察対象とした選好順序の全体─非反射性，推移性，連続性を満たす二項関係の全体─を分析対象にしたときの条件ではなかろうかという疑問である。この疑問をもう少し詳しく述べれば，その経済的に「自然」な条件のみでは，経済学でしばしば想定されている選好順序の全体 ─完備性，反射性，推移性，連続性を満たす二項関係の全体─に適用するには不十分なのではなかろうか，といった疑問である。当然，この疑問は，先ず，不十分であることの根拠を示す必要があるが，もし不十分であることが示すことができれば，次なる疑問として，どういった条件が不足しているのかが問題となるであろう。

本稿の目的は，Kannai（1970）が示したその「自然」な条件が，非反射性，推移性，連続性を満たす二項関係の全体を想定したものであり，経済学でしばしば想定されている選好順序の全体 —完備性，反射性，推移性，連続性を満たす二項関係の全体─に適用するには十分であるか否かをGrodal（1974）とは別の視点から検証することにある。その視点とは，経

済学でしばしば想定されている選好順序の全体に「閉収束位相」を適用したときに，どこまで主体の個人的価値形成の無矛盾性と整合的なのか，というものである。本稿では，その可能性を追求することで，選好間の「近さ」のモデルとしての「閉収束位相」の限界を明らかにするといった冒険を試みようというわけである。

この試みのために，先ず，次節では，選好順序が持ち得る性質を整理し，本稿が問題としてる 2 種類の選好順序の集合（以後，「選好空間」と呼称）を提示する。そこでは，それら 2 つの選好空間の関係についても整理したい。その後， 3 節において，Kannai（1970）が導入した「経済的に自然な条件」（以後，「Kannai条件」と呼称しよう）を示し，Kannaiが同定化した位相（以後，「Kannai位相」と呼称することにする）を示す。Backの反例については，3 節の終わりで取り扱う。 Backの例を見た後に，4 節において経済学がしばしば想定する選好空間に応じてKannai条件を書き直し，その上で，Kannai条件を満たす最小位相を探索する。 5 節では，「閉収束位相」がそのような最小位相であることを確認し，経済学がしばしば想定する選好空間が閉集合になるか否かを確認する。そこでは，「閉収束位相」は，完備性，反射性，連続性についての連続的変化を保証できることを示すであろう[7)]。最後に， 6 節で結ぶ。

2　選好の性質と選好空間

本節では，Grodal（1974）やHildenbrand（1974），Kannai（1970）が分析対象とした選好空間と，経済学でしばしば想定されている選好空間を導入し，それら 2 つの選好空間の関係を整理する[8)]。

商品数を正の整数 $\ell(\ell > 1)$，消費集合 X を ℓ 次元ユークリッド空間の非

7）本稿が示す命題については「定理」と呼ばず，しかも，必ず証明を付すことにする。本稿での「定理」は，すべて，既に他の文献で証明されたもののみとする。付言すると，本稿投稿後にFell位相の下で推移性の閉性の証明を得ることができている。このような進展を含めた研究成果については，別の機会にて発表する予定である。

負象限 $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$ としよう。消費計画 $x,\ y \in X$ に対し，「y が x より好まれる」ことを消費集合 X 上の二項関係 $\succ$ で示し，$y \succ x$ で表すことにする。以下では，$x \prec y$ は，$y \succ x$ と同義であること，そして，二項関係 $\succ$ を「強選好順序」，あるいは「強選好関係」と呼ぶことにする。強選好順序 $\prec$ は，次の性質を満たすと想定する。

非反射性（irreflexivity） 任意の $x \in X$ に対し，$(x,\ x) \notin \prec$，すなわち，$\neg[x \prec x]$ が成り立つ。

推移性（transitivity） 任意の $x,\ y,\ z \in X$ に対し，$x \prec y$ かつ $y \prec z$ ならば，$x \prec z$ が成り立つ。

連続性（continuity） 任意の $x \in X$ に対し，強上位集合 $\{y \in X | x \prec y\}$ と強下位集合 $\{y \in X | y \prec x\}$ は X において開集合である。

非反射性，推移性，連続性を満たす強選好順序の補集合の全体を $\mathscr{P}^S$ で表す。

$\mathscr{P}^S$ ：非反射性, 推移性, 連続性を満たす X 上の二項関係 $\prec$ の補集合 $\prec^c$ の全体.

消費計画 $x,\ y \in X$ に対し，$x \prec^c y$ であれば,「x は y よりも好まれない」という意味になる。

強選好順序 $\prec$ とは異なる二項関係として,「弱選好順序」あるいは「弱選好関係」がある。消費計画 $x,\ y \in X$ があったとき,「x が y と同程度好まれる」，または「x は，y と無差別，あるいは y よりも好まれる」とき，$x \succcurlyeq y$ で表す。弱選好順序 $\succcurlyeq$ については，次の性質を満たすと想定する。

完備性（completeness） 任意の $x,\ y \in X$ に対し，$x \succcurlyeq y$ または $y \succcurlyeq x$ が成り立つ。

反射性（reflexivity） 任意の $x \in X$ に対し，$x \succcurlyeq x$ が成り立つ。

推移性（transitivity） 任意の $x,\ y,\ z \in X$ に対し，$x \succcurlyeq y$ かつ $y \succcurlyeq z$ ならば，$x \succcurlyeq z$ が成り立つ。

8）以下の議論は，学部中級以上のミクロ経済学の教科書（例えば，奥山，2009，§3.2）の理解を前提とする。

連続性（continuity） 任意の $x \in X$ に対し，上位集合 $\{y \in X | y \succcurlyeq x\}$ と下位集合 $\{y \in X | x \succcurlyeq y\}$ は X において閉集合である。

完備性，反射性，推移性，連続性を満たす弱選好順序の全体を $\mathscr{P}^W$ で表す。

$\mathscr{P}^W$：完備性，反射性，推移性，連続性を満たす X 上の二項関係 $\succcurlyeq$ の全体.

Grodal（1974）やHildenbrand（1974），Kannai（1970）が分析対象とした選好空間は $\mathscr{P}^S$ であるのに対し，しばしば経済分析で想定される選好空間は $\mathscr{P}^W$ である。本節では，これら 2 つの選好空間 $\mathscr{P}^S$ と $\mathscr{P}^W$ の関係を見る。

レンマ2.1. 各弱選好順序 $\succcurlyeq \in \mathscr{P}^W$ に対し，それに対応した強選好順序を次のように定義する。

$$\prec := \succcurlyeq^c.$$

このとき，次は同値である。

（1）弱選好順序 $\succcurlyeq$ は，連続性を満たす。

（2）強選好順序 $\prec$ は，連続性を満たす。

（3）強選好順序 $\prec$ は，開集合である。

（4）弱選好順序 $\succcurlyeq$ は，閉集合である。

証明. $\prec$ は $\succcurlyeq$ の補集合なので，（1）⇔（2），および，（3）⇔（4）が成り立つ。したがって，（2）⇔（3）を示せば良い。

（2）⇒（3）. $x \prec y$ とする。$\succcurlyeq$ の反射性より，$x \neq y$ である。X はハウスドルフ空間なので[9]，$U \cap V = \emptyset$ なる x の開近傍 U と y の開近傍 V が存在する[10]。（2）より，十分小さな実数 $\varepsilon > 0$ に対し，$B_\varepsilon(x) \subset U$，$B_\varepsilon(y) \subset V$，かつ，任意の $(s, t) \in B_\varepsilon(x) \times B_\varepsilon(y)$ に対して $s \prec t$ なる開球 $B_\varepsilon(x)$ と $B_\varepsilon(y)$ が存在する。積位相は，$B_\varepsilon(x) \times X$ や $X \times B_\varepsilon(y)$ の全

9）位相空間 $(X, \mathscr{T})$ が**ハウスドルフ空間**（Hausdorff space）であるとは，任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し，互いに素になる x と y の近傍が存在することをいう。ハウスドルフ空間では，収束点列の極限が一意になる。点列の概念を一般化した「ネット（net）」の概念を使うと，ネットが一意に収束することと空間がハウスドルフになることは同値になる（Kelley, 1955, Theorem3,p.67）。ハウスドルフ空間の部分空間はハウスドルフ空間である。ユークリッド空間は，ハウスドルフ空間である。

体を部分基底にもつので，（3）が成り立つ[11]。

(3)⇒(2)．$x \in X$ として，$y \prec x$ とする。(3) より，$(y,\ x) \in W$，かつ，任意の $(s,\ t) \in W$ に対し $s \prec t$ となる $X \times X$ の開集合 W が存在する。積位相の定義より，開球 $B_\varepsilon(x)$，$B_\varepsilon(y)$ が存在して，$B_\varepsilon(y) \times B_\varepsilon(x) \subset W$ が成り立つ。任意の $z \in B_\varepsilon(y)$ に対し $z \prec x$ であるから，(2) が成り立つ。$x \prec y$ の場合も同様。‖

ノート 2.2. レンマ 2.1（1）と（2）が同値であり，選好順序 $\succcurlyeq$ が推移性を満たせば，選好順序 $\succcurlyeq$ は完備性を満たすことを示すことができる。Schmeidler（1971）参照。付言すれば，「(2)⇔(3)」については，Schmeidler（1969, p. 584）が $\prec$ を $\succcurlyeq$ の補集合と定義しない場合の証明を与えている。

ファクト 2.3. 各弱選好順序 $\succcurlyeq \in \mathscr{P}^W$ に対し，それに対応した強選好順序を $\succcurlyeq$ の補集合と定義する。このとき，$\mathscr{P}^W \subsetneqq \mathscr{P}^S$ が成り立つ。

証明. $\succcurlyeq \in \mathscr{P}^W$，$\prec$ を $\succcurlyeq$ の補集合とする。完備性と反射性より，$\prec$ は非反射性を満たす。また，完備性より，次が成り立つ[12]。

$$x \prec y \Leftrightarrow y \succcurlyeq x \text{ かつ } \neg[x \succcurlyeq y]. \tag{2.1}$$

したがって，$\succcurlyeq$ の推移性より，$\prec$ は推移性を満たす。$\prec$ は $\succcurlyeq$ の補集合であ

10）位相空間 $(X,\ \mathscr{T})$ があったとき，$x \in X$，$V \subset X$ としたとき，$x \in U \subset V$ なる $U \in \mathscr{T}$ が存在すれば，V を x の**近傍**（neighborhood）という。近傍が開集合であれば**開近傍**（open neighborhood），閉集合であれば**閉近傍**（closed neighborhood），コンパクトであれば**コンパクト近傍**（compact neighborhood）と呼ばれる。近傍は，開集合でなければならないわけではないことに注意しよう。

11）集合 X と Y の直積 $X \times Y$ があったとき，写像 $(x,\ y) \mapsto x$ や $(x,\ y) \mapsto y$ を**射影**（projection）という。**積位相**（product topology）とは，X や Y が位相空間のときに，すべての射影が連続となる直積への最小位相になる。

例えば，2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ は，1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の直積 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ になる。したがって，$\mathbb{R}$ の開集合 U があったとき，$U \times \mathbb{R}$ や $\mathbb{R} \times U$ といった集合の集合族が $\mathbb{R}^2$ への積位相の部分基底になる。

しかしながら，平面であれば，ベクトル x と y があったとき，距離 $d(x,\ y) = \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}$ を利用して，中心 x，半径 ε の開球 $B_\varepsilon(x)$ を作成して，その集合族を基底にした位相を作成することができる。この距離位相と上の積位相は，同じなのであろうか。実は，同一であることを示すことができる。

るから，$\succcurlyeq$ の連続性より，$\prec$ は連続性を満たす。かくして，$\mathscr{P}^W \subset \mathscr{P}^S$ が成り立つ。$\mathscr{P}^W \neq \mathscr{P}^S$ については，Grodal（1974）が示した次の例より従う。‖

例2.4（Grodal, 1974）． 消費計画 X 上の二項関係 $\ll$ は[13]，非反射性，推移性を満たす。更に，$x \ll y$ であれば，$x \ll a \ll y$ なる消費計画 $a \in X$ が存在するので，集合

$$U = \{(s,\ t) \in X \times X \mid s \ll a,\ a \ll t\}$$

は $(x,\ y)$ の開近傍であり，しかも，

$$U \subset \{(x,\ y) \in X \times X \mid x \ll y\}.$$

すなわち，二項関係 $\ll$ は開集合であり，レンマ 2.1より，$\ll$ は連続性を満たす。かくして，$\ll \in \mathscr{P}^S$ が成り立つ。ところが，$\ell = 2$ のとき，$x = (1,\ 0)$，$y = (1,\ 1)$，$z = (2,\ 0.5)$ であれば，$x \ll^C y$，かつ，$y \ll^C z$ であるが，$x \ll z$ となって，$\ll^C$ は推移性を満たさない。すなわち，$\ll^C \notin P^W$ である。

消費計画 $x,\ y \in X$ があったとき，$x \prec^C y$ は「y は x よりも好まれない」と読むことができる。「y は x よりも好まれない」ことが,「x は y と同程度好まれる」，または「x は，y と無差別，あるいは y よりも好まれる」ことと同義であるように思えるが，非反射性，推移性，連続性のみでは，同義にはならないのである。

12）二項関係 $\prec$ の定義は，（2.1）によって行うのが通例である。しかしながら，この定義は，$\prec$ が二項関係 $\succcurlyeq$ の補集合であることと同値ではない。（2.1）を用いて $\prec$ を定義したときの不都合については，Grodal（1974）を参照のこと。

13）本稿では，ベクトル $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$ と $y = (y_1, \ldots, y_\ell)$ があったとき，すべての $h = 1, \ldots, \ell$ に対し $x_h < y_h$ のとき，$x \ll y$ と書き表すことにする。

3　Kannai条件とKannai位相

Kannai（1970）や Grodal（1974），Hildenbrand（1974）が分析対象にした選好空間$\mathscr{P}^S$に対し，経済的に「自然」な条件（Kannai条件）を要求して得られた最小位相が「閉収束位相」である。ここでは，先ず，Kannai条件を示し，Kannaiが提示した位相（Kannai位相）について特徴化を試みる。

Kannai（1970）が導入した経済的に「自然」な条件とは，次の通りである。

（KI）Kannai条件. 強選好順序の列$(<_n)$，消費計画の列(x_n)，(y_n)があったとき，$x_n \to x_0$，$y_n \to y_0$，$<_n \to <_0$であれば，組$(x_0, y_0, <_0^C)$の任意の近傍Vに対し，ある自然数Nが存在し，$n \geqq N$であれば$(x_n, y_n) \in <_n^C$が成り立つ。すなわち，集合

$$\Delta^S = \{(x, y <^C) \in X \times X \times \mathscr{P}^S | x < y\} \tag{3.1}$$

は，積位相において開集合である。

Kannai条件は，概していえば，消費計画y_0が強選好順序$<_0$において消費計画x_0よりも好まれるのであれば，nを十分大きくとれば，消費計画y_nは強選好順序$<_n$において消費計画x_nよりも好まれることを意味する。「好み」が連続的に変化する様子をモデル化したものである。

Kannaiの功績は，Kannai条件を満たす最小位相を同定化したことにある。特に，選好が次の弱単調性を満たすとき，その位相が距離化可能であることを示している。 Debreu（1969）がad hocに距離を導入したのに対し，Kannaiは上記の経済的に「自然」な条件を満たす位相が距離化可能であることを示したわけである。異なる選好の「近さ」を距離で表現できるという利点を持つことになる。

弱単調性（weak monotonicity）　任意の消費計画$x, y \in X$に対し，$x \ll y$ならば $x < y$が成り立つ。

ここで，弱単調性を満たす場合，選好順序は次の効用関数によって表現

可能である（大学院用のミクロ経済学の教科書，例えば，Varian（1992, p. 97）や Mas-Colell et al.（1995, 3.C）を参照）[14]。

$$u(x,\ \prec) = \max\{\alpha \in \mathbb{R}\,|\, x \prec^{c} \alpha e\} \tag{3.2}$$

ここで，（3.2）式内のベクトル e は，すべての座標が 1 のベクトル $e=(1,\ 1,\ 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{\ell}$ を表す。弱単調性を満たす消費計画 X 上の二項関係の全体を $\mathscr{P}^{mo}$ で表すことにしよう。

$\mathscr{P}^{mo}$ ：弱単調性を満たす消費計画 X 上の二項関係の全体.

このとき，Kannaiの功績をまとめると，次の定理になる（Kannai, 1970, Theorems 3.1 & 3.2）。

定理 3.1（Kannai）. Kannai条件を満たす $\mathscr{P}^{S}$ への最小位相が存在し，その部分基底は消費集合 X 上の開球 B と B' を変化させたときの集合 $\left\{\prec^{c} \in \mathscr{P}^{S} \,|\, \overline{B} \prec \overline{B'}\right\}$ の集合族である[15]。更に，$\mathscr{P}^{mo} \cap \mathscr{P}^{S}$ 上であれば，その位相は次の距離によって距離化可能である。

$$d(\prec',\ \prec) \equiv \sup_{x \in X} \frac{|u(x,\ \prec') - u(x,\ \prec)|}{1 + \|x\|^{2}}. \tag{3.3}$$

ここで，$\overline{B} \prec \overline{B'}$ とは，任意の $(x,\ y) \in \overline{B} \times \overline{B'}$ に対し $x \prec y$ となることを意味する。$\overline{B} \cap \overline{B'} \neq \emptyset$ であれば，集合 $\{\prec^{c} \in \mathscr{P}^{S} | \overline{B} \prec \overline{B'}\}$ は空集合になる。位相の基底は，部分基底の有限部分族の共通部分から構成されるので，開球 B や B' について半径を有理数，中心を有理数のベクトルとすれば，基底が可算になることが理解できる。すなわち，Kannaiが導入した位相は可分である[16]。

14） 弱単調性を満たす選好空間を分析対象にすれば，選好間に「近さ」を導入することは，効用関数（3.2）式の全体に対し「近さ（位相）」を導入することを意味する。この考え方に従えば，逆に，効用関数（3.2）式の全体に対し「近さ（位相）」を導入して，選好空間に位相を導入するといった方向の研究が考えられるわけである。この方向の研究については，別の機会に言及したい。

15） 上線は，その集合の閉包を表す。集合 S の**閉包**（closure）とは，S を包含するすべての閉集合の共通部分，すなわち，S を包含する最小の閉集合である。

経済的に「自然」な条件を満たす最小位相，Kannai位相では，選好順序の点列においてその極限が推移性を満たさないとする例を Back（1987）が示している。その例とは，次の通りである。

例3.2（Backの例）． $\ell = 2$ として，次の効用関数で表される弱選好順序を $\succcurlyeq_n$ とする。

$$v_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2 + 2^{-n}(x_1 + x_2)}{1 + 2^{-n} - x_1} & x_1 + x_2 < 1, \\ x_1 + x_2 & x_1 + x_2 \geqq 1. \end{cases}$$

各自然数 n に対し，弱選好順序 $\succcurlyeq_n$ を効用関数（3.2）式で表現すると以下のようになる。

$$u(x, \prec_n) = \begin{cases} \dfrac{x_2 + 2^{-n}(x_1 + x_2)}{1 + 2^{1-n} - x_1 + x_2} & x_1 + x_2 < 1, \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & x_1 + x_2 \geqq 1. \end{cases}$$

このようにして定義される弱選好順序の列 $(\succcurlyeq_n)$ に対し，BackはKannai位相における極限が次であるとしている。

$$u(x, \prec') = \begin{cases} \dfrac{x_2}{1 - x_1 + x_2} & x_1 + x_2 \leqq 1 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & x_1 + x_2 > 1. \end{cases}$$

もしそうであれば，確かに，弱選好順序の列 $(\succcurlyeq_n)$ の極限は推移性を満たさないといえる。しかしながら，実は，この関数は，消費計画 $x = (1, 0)$ に対し，一意の値を与えない，すなわち，関数ではない。というのは，直線

16）位相空間 $(X, \mathscr{T})$ が**可分**（separable）であるとは，可算で稠密な部分集合が存在することをいう。集合が**可算**（countable）であるとは，自然数の集合と 1 対 1 で対応する関数（**1 対 1 対応**という）が存在することをいう。（つまり，指を使って数え上げることができるという意味。）また，部分集合 $A \subset X$ が X において**稠密**（dense）であるとは，A の閉包が X に等しいことをいう。可算基底をもつ位相空間は可分である（Kelley, 1955, Theorem 14, p. 49）。距離空間であれば，逆も真である（Kelley, 1955, Theorem 11, p. 120）。付言すれば，可算基底をもつとき，**第２可算公理**（the second axiom of countability）を満たすという。付言すると，Debreuが導入した位相は可分ではなく，「閉収束位相」よりも強いが，X がコンパクトであれば同じ位相になる（Beer, 1993b, Cor. 5.1.11, p. 143）。

$x_2 = (1 - x_1)/3$ 上でとった点列を消費計画 $x^0 = (1,\ 0)$ に近づければ $\lim_{n \to \infty} u(x^0,\ \succcurlyeq_n) = \frac{1}{4}$ となるが，直線 $x_2 = (1 - x_1)/7$ 上でとった点列を消費計画 $x^0 = (1,\ 0)$ に近づければ $\lim_{n \to \infty} u(x^0,\ \succcurlyeq_n) = \frac{1}{8}$ となるのである。このようにして，弱選好順序の列 $(\succcurlyeq_n)$ の極限は，正しくは，次になると考えられる。

$$u(x,\ \prec_0) = \begin{cases} \dfrac{x_2}{1 - x_1 + x_2} & x_1 + x_2 < 1 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & x_1 + x_2 \geqq 1. \end{cases}$$

というのは，Kannaiの距離（3.3）式を計算すると，$x_1 + x_2 \geqq 1$ のとき $d(\succcurlyeq_n,\ \succcurlyeq_0) = 0$ であり, また，$x_1 + x_2 < 1$ のとき，$F = \{x \in X \mid x_1 + x_2 < 1\}$ とすれば，

$$\sup_{x \in F} \frac{|u(x,\ \prec_n) - u(x,\ \prec_0)|}{1 + \|x\|^2} < \frac{1}{2^n} \cdot \sup_{x \in F} \left\{ \frac{x_1(1 - x_1 + x_2^2)}{(1 - x_1 + x_2)^2} \right\}$$

となるからである。

極限 $\succcurlyeq_0$ は，連続性を満たさない。本稿でのBackの例に対する結論は，そもそもKannai位相では収束列にはなっていないのではないかというものである。しかしながら，仮にそうであったとしても，完備性，反射性，推移性，連続性を満たす弱選好順序の収束列の極限が必ず推移性を満たすと結論づけられるわけではない。

4　選好空間 $\mathscr{P}^W$ への Kannai条件と位相への条件

非反射性，推移性，連続性を満たす選好空間 $\mathscr{P}^S$ に対しKannai条件を要求して「閉収束位相」を選好空間 $\mathscr{P}^S$ に与えても，完備性，反射性，推移性, 連続性を満たす選好空間 $\mathscr{P}^W$ は $\mathscr{P}^S$ において閉集合にならない（Grodal, 1974）。本節以降では，Kannai条件の下で，選好空間 $\mathscr{P}^W$ が閉集合になるための条件を探ることにしたい。裏返せば, Kannai条件を満たす選好空間 $\mathscr{P}^W$ の最小位相を探し，主体の個人的価値形成とその位相の間の整合性を吟味

することで，最終的には，その位相の限界を示す。本節では，そのための第一歩として，その位相が満たす必要条件を確定させることを主眼とする。そのために，選好空間を$\mathscr{P}^W$としたときのKannai条件を書き直すところから出発しよう。

(KII) Kannai条件. 弱選好順序の列$(\succcurlyeq_n)$，消費計画の列(x_n)，(y_n)があったとき，任意の自然数nに対し$y_n \succcurlyeq_n x_n$であり，かつ，$x_n \to x_0$，$y_n \to y_0$，$\succcurlyeq_n \to \succcurlyeq_0$であれば，$y_0 \succcurlyeq_0 x_0$が成り立つ。すなわち，集合

$$\Delta^W = \{(x,\ y,\ \succcurlyeq) \in X \times X \times \mathscr{P}^W \,|\, x \succcurlyeq y\} \tag{4.1}$$

は，積位相において閉集合である。

条件（KII）は，弱選好順序$\succcurlyeq$に対応する強選好順序を$\succcurlyeq$の補集合とすれば，以前の条件（KI）を選好空間$\mathscr{P}^W$に制限したときと同値になる。但し，集合Δ^Wは，集合Δ^Sの補集合には一致しない。

さて，条件（KII）を満たすような選好空間$\mathscr{P}^W$への位相は，どのような条件を満たすのであろうか。実は，次に見る「Kuratowski収束」と，その位相での収束が一致することを示すことができる。

消費集合の積$X \times X$の部分集合の列(A_n)を考えよう。点$z \in X \times X$の任意の近傍Uに対し，$n \geqq N$であれば$A_n \cap U \neq \emptyset$となる$N$が存在するとき，点$z$を$(A_n)$の**極限点**（limit point）と呼ぶ。集合列(A_n)の極限点の集合を(A_n)の**下極限**（limit inferior, lower closed limit）と呼び，$\mathrm{Li}(A_n)$で示す。一方，点$z \in X \times X$の任意の近傍Uに対し，任意の自然数Nに対し$A_n \cap U \neq \emptyset$となる$n \geqq N$が存在するとき，点$z$を集合列$(A_n)$の**集積点**（cluster point）と呼ぶ。集合列(A_n)の集積点の集合を(A_n)の**上極限**（limit superior, upper closed limit）と呼び，$\mathrm{Ls}(A_n)$で示す[17)]。極限点は集積点であるから，$\mathrm{Li}(A_n) \subset \mathrm{Ls}(A_n)$が成り立つ。したがって，

17）$\mathbb{R}$上の閉集合の列を考えると理解が容易であろう。nが奇数のときに$A_n = [-n,\ -1/n]$，偶数のときに$A_n = [1/n,\ n]$なる閉集合の列(A_n)を考えよう。このとき，$\mathrm{Li}(A_n) = \{0\}$, $\mathrm{Ls}(A_n) = \mathbb{R}$である。

$\mathrm{Ls}(A_n) \subset \mathrm{Li}(A_n)$ のとき, $\mathrm{Li}(A_n) = \mathrm{Ls}(A_n)$ が成り立つ。$\mathrm{Li}(A_n) = \mathrm{Ls}(A_n)$ のとき, 集合列 (A_n) は $A^0 = \mathrm{Li}(A_n) = \mathrm{Ls}(A_n)$ に**Kuratowski収束**するという。

命題4.1. $\mathscr{P}^W$ が任意の第 1 可算ハウスドルフ空間であるとしよう[18)]。もし集合 Δ^W が閉集合であれば，$\mathscr{P}^W$ 上の任意の収束点列 $(\geqslant_n)$ はKuratowski収束する。

証明. $\mathrm{Ls}(\geqslant_n) \subset \mathrm{Li}(\geqslant_n)$ が成り立つことを示せば良い。$\geqslant_n \to \geqslant_0$, $(x_0,\ y_0) \in \mathrm{Ls}(\geqslant_n)$ としよう。任意の実数 $\varepsilon > 0$ と自然数 n_0 に対し, $B_\varepsilon(x_0,\ y_0) \cap \geqslant_n \neq \emptyset$ なる自然数 $n \geqq n_0$ が存在する。$\varepsilon = 1/k$ とすれば, $B_{1/k}(x_0,\ y_0) \cap \geqslant_n \neq \emptyset$ となる自然数 n が存在する。それを n_k とすれば, $(x_{n_k},\ y_{n_k}) \in B_{1/k}(x_0,\ y_0) \cap \geqslant_{n_k}$ なる点列 $((x_{n_k},\ y_{n_k}))$ がとれて, $(x_{n_k},\ y_{n_k}) \to (x_0,\ y_0)$ である。集合 Δ^W は積位相において閉集合なので, $(x_0,\ y_0) \in \geqslant_0$ が成り立つ。したがって，$\mathrm{Ls}(\geqslant_n) \subset \geqslant_0$ である。

次に, $(x_0,\ y_0) \in \geqslant_0$ としよう。$\geqslant_0$ の可算基本近傍系 $\{\mathscr{U}_1,\ \mathscr{U}_2, \ldots\}$ において，$\mathscr{V}_n = \cap_{i=1}^n \mathscr{U}_i$ とすれば，集合族 $\mathscr{B} = \{\mathscr{V}_1,\ \mathscr{V}_2, \ldots\}$ も又，$\geqslant_0$ の可算基本近傍系である。各自然数 n に対し，点 $(x_0,\ y_0, \geqslant_0)$ の近傍 $U_n = B_{1/n}(x_0,\ y_0) \times \mathscr{V}_n$ をとれば，点 $(x_0,\ y_0, \geqslant_0)$ は閉集合 Δ^W の点であるから，$(x_n,\ y_n, \geqslant_n) \in U_n$，かつ，$(x_n,\ y_n, \geqslant_n) \in \geqslant_n$ が成り立つ点 $(x_n,\ y_n, \geqslant_n)$ が存在して，$(x_n,\ y_n, \geqslant_n) \to (x_0,\ y_0, \geqslant_0)$ である。任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対し，$1/n \leqq \varepsilon$ であれば $(x_n,\ y_n) \in B_\varepsilon(x_0,\ y_0) \cap \geqslant_n$ となるので $(x_0,\ y_0) \in \mathrm{Li}(\geqslant_n)$ が成り立つ。すなわち，$\geqslant_0 \subset \mathrm{Li}(\geqslant_n)$ である。

以上より，$\mathrm{Ls}(\geqslant_n) \subset \geqslant_0 \subset \mathrm{Li}(\geqslant_n)$ となって，列 $(\geqslant_n)$ はKuratowski収束

18) 位相空間 $(X,\ \mathscr{T})$ があり，$x \in X$ とする。x の近傍全体を x の**近傍系**（neighborhood system）と呼ぶ。x の近傍系の部分族 $\mathscr{B}$ があったとき，x のすべての近傍 V に対し，$U \subset V$ なる（x の近傍）U を $\mathscr{B}$ がもつとき，$\mathscr{B}$ は**基本近傍系**（base for the neighborhood system）と呼ばれる。すべての $x \in X$ に対し，可算な基本近傍系が存在するとき，位相空間 $(X,\ \mathscr{T})$ は**第 1 可算公理**（the first axiom of countability）を満たすという。ちなみに，第 1 可算公理を満たせば，部分集合 $F \subset X$ に対し，F から収束点列を任意にとってきたときに極限が必ず F に属せば，F は閉集合といえる（Kelley, 1955, Theorem 8, pp. 72－73)。逆は，常に，真である。

する。‖

この命題の逆も成り立つ。

命題4.2. $\mathscr{P}^W$が任意の第１可算ハウスドルフ空間であるとしよう。もし収束がKuratowski収束を意味するのであれば，集合 Δ^W は積位相において閉集合である。

証明. 任意の自然数 n に対し $(x_n, y_n) \in \succcurlyeq_n$，かつ，$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$，$\succcurlyeq_n \to \succcurlyeq_0$ なる点列 (x_n)，(y_n)，$(\succcurlyeq_n)$ を考えよう。もし $(x_0, y_0) \in \mathrm{Li}(\succcurlyeq_n)$ であれば，証明終了である。そこで，$(x_0, y_0) \notin \mathrm{Li}(\succcurlyeq_n)$ としよう。然らば，ある実数 $\varepsilon > 0$ が存在して，$B_\varepsilon(x_0, y_0) \cap \succcurlyeq_n = \emptyset$ なる自然数 n が無数に存在する。$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ であったから，ある自然数 N が存在して，$n \geqq N$ であれば $(x_n, y_n) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$ であり，また，仮定によって，任意の $n \geqq N$ に対し $(x_n, y_n) \in \succcurlyeq_n$ である。すなわち，任意の $n \geqq N$ に対し，$B_\varepsilon(x_0, y_0) \cap \succcurlyeq_n \neq \emptyset$ が成り立つが，これは $B_\varepsilon(x_0, y_0) \cap \succcurlyeq_n = \emptyset$ なる自然数 n が無数に存在することと矛盾する。‖

以上の命題によって，集合 Δ^W が積位相において閉集合となる$\mathscr{P}^W$への最小第１可算ハウスドルフ位相は，収束がKuratowski収束と一致する位相であることが理解できる。ところが，Kuratowski収束自体は，位相を定義しない。すなわち，Kuratowski収束を意味する位相を探さなければならないのである。

５　閉収束位相〜Fell位相〜

Kannai位相は，経済学の文献ではしばしば「閉収束位相」として言及されてきた。Grodal（1974, fn. 2, p. 281）やHildenbrand（1974, p. 18）が「閉収束位相」と呼んでいる位相は，近年の数学文献において「Fell位相」と呼ばれているものになる（Beer, 1993b,a; Holá et al., 1999; Holá and Poppe, 1999; McCoy, 1997）[19]。我々の関心は，前節で確認したKannai条件を満たす第１可算ハウスドルフ位相での収束がKuratowski収束と同値に

なるという性質を有する選好空間への位相がFell位相であるか否か，そして，仮にそうであるときに，Fell位相が選好の「近さ」のモデルとして，主体の個人的評価形成の無矛盾性をどの程度維持できるのかにある。

選好空間に対するFell位相を記述するためには，先ず，消費集合Xの直積 $X \times X$ の閉部分集合の全体 $\mathrm{CL}(X \times X)$ を考える（但し，$\varnothing \in \mathrm{CL}(X \times X)$ である）。直積$X \times X$の閉部分集合の全体$\mathrm{CL}(X \times X)$への位相を考えること自体は，次のファクトから妥当であることが理解できる。

ファクト5.1.　各弱選好順序$\succcurlyeq \in \mathscr{P}^W$に対し，それに対応した強選好順序を$\succcurlyeq$の補集合$\succcurlyeq^C$とする。このとき，

$$\mathscr{P}^W \subsetneqq \mathscr{P}^S \subsetneqq \mathrm{CL}(X \times X).$$

この結果は，ファクト2.3と選好の連続性（レンマ2.1）より従う。この結果，$\mathrm{CL}(X \times X)$への位相は，２つの選好空間$\mathscr{P}^W$と$\mathscr{P}^S$への位相になり得ることが理解できる。集合族$\mathrm{CL}(X \times X)$へのFell位相とは, 次のように定義される。直積$X \times X$の非空な開集合Vに対し，

$$V^+ = \{A \in \mathrm{CL}(X \times X) | A \cap V \neq \varnothing\},$$

直積$X \times X$の非空なコンパクト部分集合Kに対し，

$$K^- = \{A \in \mathrm{CL}(X \times X) | A \cap K = \varnothing\}$$

と定義したとき，直積$X \times X$の非空な開集合Vとコンパクト集合KからV^+とK^-を作成して得られる集合族を部分基底とした位相を$\mathrm{CL}(X \times X)$に対するFell位相という。Fell位相における開集合は, 開集合Vに‘hit‘するか，コンパクト集合Kに‘miss‘（fail to hit）するような閉集合

19）Fell位相は，Fell（1962）が示した位相になる。元の位相空間がハウスドルフ空間でなくとも，閉集合の空間がハウスドルフ空間になることを示しており，それがFellの論文の題名になっている。

$A \subset X \times X$ の全体になる。

Fell位相については，次の結果が知られている[20]。

定理5.2. CL$(X \times X)$をFell位相空間とする。このとき，次が成り立つ。

(1) CL$(X \times X)$はコンパクトである。

(2) $X \times X$が局所コンパクト空間であれば，CL$(X \times X)$はハウスドルフ空間である[21]。

(3) CL$(X \times X)$がハウスドルフ空間であれば，CL$(X \times X)$は距離化可能である。

(4) CL$(X \times X)$が第1可算ハウスドルフ空間であるとしよう。このとき，CL$(X \times X)$の列(A_n)がFell位相において$A \in$ CL$(X \times X)$に収束することの必要十分条件は，列(A_n)がAにKuratowski収束することである。

選好空間$\mathscr{P}^S$と$\mathscr{P}^W$への位相として，Fell位相が妥当であることは，ファクト5.1のみならず，次の命題が示すように，Kannai条件を満たすことからもいえる。

命題 5.3. CL$(X \times X)$をFell位相空間とする。このとき，部分空間$\mathscr{P}^S$ではKannai条件（KI）を，部分空間$\mathscr{P}^W$ではKannai条件（KII）を満たす。

証明. $\Delta^S = \emptyset$であれば自明である。そこで，$(x_0, y_0, \succcurlyeq_0) \in \Delta^S$としよう。$(x_0, y_0) \in \succcurlyeq_0$，および，$\succcurlyeq_0$は閉集合であるから，十分小さな実数$\varepsilon > 0$に対し，$\succcurlyeq_0 \cap \overline{B_\varepsilon(x_0, y_0)} = \emptyset$が成り立つ。したがって，十分小さ

---

20) 定理5.2（1）と（2）はFell（1962）が示している。また，（3）についてはBeer（1993a, Theorem 5.1.5, p. 140），（4）についてはBeer（1993a, Theorem 5.2.10, p. 148）を参照のこと。付言すると，Hildenbrand（1974, p. 19）は，元の空間が局所コンパクト，可分な距離空間であれば，元の空間の閉集合の全体にFell位相を与えるとコンパクト，かつ，距離化可能であり，閉集合の列(A_n)がFell位相においてAに収束することの必要十分条件がAにKuratowski収束することであることを示している。定理5.2は，コンパクト性については無条件で成り立ち，距離化可能性については元の空間がハウスドルフ空間であること，また，Kuratowski収束との同値性については元の空間が第1可算ハウスドルフであれば十分であることを示す。

21) すべての点$x \in X$がコンパクト近傍をもつとき，位相空間$(X, \mathscr{T})$は**局所コンパクト**（locally compact）と呼ばれる。ユークリッド空間は，局所コンパクトである。また，局所コンパクト空間の閉部分集合は，局所コンパクトになる。この結果，消費集合の直積は局所コンパクトである。

な実数 $\varepsilon > 0$ に対し，集合族

$$V_\varepsilon = \{A \in \mathrm{CL}(X \times X) | A \cap \overline{B_\varepsilon(x_0, y_0)} = \varnothing\} \tag{5.1}$$

は,Fell位相において $\succcurlyeq_0$ の開近傍になる。$(x, y, \succcurlyeq) \in B_\varepsilon(x_0, y_0) \times (\mathscr{V}_\varepsilon \cap \mathscr{P}^S)$ であれば，$(x, y) \notin \succcurlyeq$ となるので，$B_\varepsilon(x_0, y_0) \times (\mathscr{V}_\varepsilon \cap \mathscr{P}^S) \subset \Delta^S$ が成り立つ。すなわち，選好空間が $\mathscr{P}^S$ のときに，Δ^S は積位相において開集合である。

次に，Δ^W が閉集合であることを示そう。Δ^W は，Δ^S の補集合ではないので，新たな証明が必要である。しかしながら，定理5.2 (2)，(3)，(4)，および，命題4.2より，Δ^W は閉集合である。より直接的な証明は，次の通り。

定理5.2 (3) より，$X \times X \times \mathscr{P}^W$ は，距離空間の部分空間になる。距離空間は第 1 可算ハウスドルフ空間であるから，Δ^W において $(x_n, y_n, \succcurlyeq_n) \to (x_0, y_0, \succcurlyeq_0)$ なる収束点列をとってきたときに，$(x_0, y_0, \succcurlyeq_0) \in \Delta^W$ であることを示せばよい。そこで，$(x_0, y_0, \succcurlyeq_0) \notin \Delta^W$ としよう。$(x_0, y_0) \notin \succcurlyeq_0$ であり，$\succcurlyeq_0 \in \mathrm{CL}(X \times X)$ であるから，十分小さな実数 $\varepsilon > 0$ に対し，(5.1) 式の集合族 $\mathscr{V}_\varepsilon$ は $\succcurlyeq_0$ の開近傍になる。$B_\varepsilon(x_0, y_0) \times V_\varepsilon$ は $(x_0, y_0, \succcurlyeq_0)$ の近傍なので，ある自然数 N が存在して，$n \geqq N$ であれば $(x_n, y_n, \succcurlyeq_n) \in B_\varepsilon(x_0, y_0) \times \mathscr{V}_\varepsilon$ が成り立つ。しかし，これは，$(x_n, y_n, \succcurlyeq_n) \in \Delta^W$ に矛盾する。‖

しかしながら，Kannai条件 (KI) を要求するのであれば，Kannai位相が最小であった (定理3.1)。そればかりか，次のファクトが成り立つ。

ファクト5.4. $\mathrm{CL}(X \times X)$ へのKannai位相を $\mathscr{T}^K$，Fell位相を $\mathscr{T}^F$ とすれば，

$$\mathscr{T}^K \subset \mathscr{T}^F.$$

証明. 定理3.1より，$\overline{B} \cap \overline{B'} = \varnothing$ となる 2 つの開球 B と B' をとれば，集合族

$$\mathscr{U} = \{A \in \mathrm{CL}(X \times X) | A \cap (\overline{B} \times \overline{B'}) = \varnothing\}$$

は，$\mathscr{T}^K$ の部分基底のメンバーである。直積 $\overline{B} \times \overline{B'}$ はコンパクトであるから，$\mathscr{U} \in \mathscr{T}^F$ である。したがって，$\mathscr{T}^K \subset \mathscr{T}^F$ が成り立つ。‖

この結果，Fell位相は，Kannai条件を満たす最小位相ではないのではなかろうか，といった疑問が湧く。これについては，次の命題が答えを与える。

命題5.5. $\mathrm{CL}(X \times X)$ へのKannai位相を $\mathscr{T}^K$, Fell位相を $\mathscr{T}^F$ としよう。このとき，選好空間 $\mathscr{P}^S \cap \mathscr{P}^{mo}$ 上では，$\mathscr{T}^K = \mathscr{T}^F$ である。

証 明. Grodal（1974, Propositions 1 & 2, p. 282），または Hildenbrand（1974, Theorem 1, p. 96）より，選好空間 $\mathscr{P}^S$ はFell位相 $\mathscr{T}^F$ において $\mathrm{CL}(X \times X)$ の閉部分集合であり，したがって，定理5.2（1）より，コンパクトである。一方，定理3.1より，選好空間 $\mathscr{P}^S \cap \mathscr{P}^{mo}$ は，Kannai位相 $\mathscr{T}^K$ においてハウスドルフ空間である。コンパクト空間の位相より粗いハウスドルフ位相は同相であるから（Bourbaki, 1989a, Cor. 3, p. 88），所期の結果を得る[22)]。‖

すなわち，Fell位相の下では，選好空間 $\mathscr{P}^S$ はコンパクト空間 $\mathrm{CL}(X \times X)$ の閉部分集合であり，このことが，Kannai条件を満たす最小位相であることを保証しているのである。以上のことから，完備性，反射性，推移性，連続性を満たす二項関係 $\geqslant$ の全体である $\mathscr{P}^W$ がFell位相において閉集合になるか否かの疑問が生じる。この疑問に対する答えは，既にGrodal（1974）が否定的であることを示している。Kannai位相のみならず，Fell位相を用いても，選好空間 $\mathscr{P}^W$ はコンパクト空間 $\mathscr{P}^S$ の閉部分集合であると結論づけ

22）X への２つの位相 $\mathscr{T}$ と $\mathscr{T}'$ があったとき，$\mathscr{T} \subsetneq \mathscr{T}'$ であるにもかかわらず，$(X, \mathscr{T}')$ がコンパクト空間であり，$(X, \mathscr{T})$ がハウスドルフ空間ならば，X 上では $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$ になるというのは，いささか，奇妙に感じるかもしれない。例えば，$X = \{0, 1\}$, $\mathscr{T}'$ を $\mathbb{R}$ への通常位相としよう。このとき，$(X, \mathscr{T}')$ はコンパクトである。ところが，$\mathscr{T} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, X\}$ とすれば，$(X, \mathscr{T})$ はハウスドルフ空間であり，しかも，$\mathscr{T}$ は $\mathscr{T}'$ の各メンバーと X の共通部分から構成される位相と一致する。

ることはできない。

本稿では，選好空間$\mathscr{P}^W$がコンパクト空間$\mathscr{P}^S$の閉部分集合ではないというGrodal（1974）とは異なり，Fell位相が主体の個人的評価の価値形成とどこまで矛盾しないのかを示す。本稿では，$\mathscr{P}^W$の収束点列$(\succcurlyeq_n)$の極限$\succcurlyeq_0$がFell位相において完備性，反射性，連続性を満たすことを示す。

命題 5.6. $\mathscr{P}^W$の点列$(\succcurlyeq_n)$がFell位相において$\succcurlyeq_0$に収束するとしよう。このとき，$\succcurlyeq_0$は，完備性，反射性，連続性を満たす。

証明. 任意にx_0，$y_0 \in X$をとろう。$(x_0,\ y_0) \in \succcurlyeq_0$，または，$(y_0,\ x_0) \in \succcurlyeq_0$が成り立てば$\succcurlyeq_0$は完備性を満たす。そこで，$(x_0,\ y_0) \notin \succcurlyeq_0$，かつ，$(y_0,\ x_0) \notin \succcurlyeq_0$としよう。然らば，次の集合族

$$V = \{A \in \mathrm{CL}(X \times X) | A \cap \{x_0,\ y_0\} = \varnothing,\ A \cap \{y_0,\ x_0\} = \varnothing\}$$

は，Fell位相において$\succcurlyeq_0$の開近傍である。Fell位相において$\succcurlyeq_n \to \succcurlyeq_0$であるから，ある自然数$N$が存在して，任意の$n \geqq N$に対し$\succcurlyeq_n \in \mathscr{V}$である。しかし，これは$\succcurlyeq_n$が完備性を満たすことに矛盾する。したがって，$(x_0,\ y_0) \in \succcurlyeq_0$，または，$(y_0,\ x_0) \in \succcurlyeq_0$が成り立つ。

反射性については，上記において$y_0 = x_0$とすれば良い。連続性については，$\succcurlyeq_0 \in \mathrm{CL}(X \times X)$より従う。‖

以上より，$\succcurlyeq_0$が推移性を満たせば$\succcurlyeq_0 \in \mathscr{P}^W$となって，Fell位相において$\mathscr{P}^W$は閉集合，したがって，コンパクトになる。

注意5.7. $\prec_0$を$\succcurlyeq_0$の補集合としたとき，$\prec_0$が推移性を満たすことは，次のように示すことができる。$(x,\ y) \in \prec_0$, $(y,\ z) \in \prec_0$としよう。$\prec_0$は開集合であるから，$B_\varepsilon(x) \times B_\varepsilon(y) \subset \prec_0$，かつ，$B_\varepsilon(y) \times B_\varepsilon(z) \subset \prec_0$なる実数$\varepsilon > 0$が存在する。したがって，次の集合族

$$\mathscr{U} = \{A \in \mathrm{CL}(X \times X) | A \cap (\overline{B_\varepsilon(x)} \times \overline{B_\varepsilon(y)}) = \varnothing,\ A \cap (\overline{B_\varepsilon(y)} \times \overline{B_\varepsilon(z)}) = \varnothing\}$$

は$\succcurlyeq_0$の開近傍になるから，自然数n_0が存在して，$n \geqq n_0$であれば$\succcurlyeq_n \in \mathscr{U}$が成り立つ。$n \geqq n_0$に対し，$(s,\ t) \in B_\varepsilon(x) \times B_\varepsilon(z)$であれば，

任意の $w \in \overline{B_\varepsilon(y)}$ に対し，$s \prec_n w$，かつ，$w \prec_n t$ である。$\succcurlyeq_n$ の推移性より，$s \prec_n t$ であるから，任意の $n \geqq n_0$ に対して $\succcurlyeq_n \cap (B_\varepsilon(x) \times B_\varepsilon(z)) = \emptyset$ が成り立つ。したがって，$(x, z) \notin \succcurlyeq_0$ といえる。

注意5.8. $\succcurlyeq_0$ が推移性を満たすことの証明の可能性について，簡単に触れておこう。先ず，$(x_0, y_0) \in \succcurlyeq_0$，かつ，$(y_0, x_0) \in \succcurlyeq_0$ のときに，$(x_0, z_0) \notin \succcurlyeq_0$ であったとしよう。このとき，次が成り立つ。

(1) $x_0 \neq y_0$，$y_0 \neq z_0$;

(2) $x_0 \neq z_0$（$\succcurlyeq_0$ の反射性によって）;

(3) $(z_0, x_0) \in \succcurlyeq_0$（$\succcurlyeq_0$ の完備性によって）;

(4) $B_\varepsilon(x_0, z_0) \subset \prec_0$ なる実数 $\varepsilon > 0$ が存在（$\succcurlyeq_0$ の閉性）; この結果，

(5) $\succcurlyeq_0 \cap \overline{B_\varepsilon(x_0, z_0)} = \emptyset$ なる実数 $\varepsilon > 0$ が存在する。

以上の性質より，次の集合族は所期の開近傍の候補に見える。

$$\mathscr{V} = \{A \in \mathrm{CL}(X \times X) | A \cap (B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(y_0)) \neq \emptyset,\ A \cap (B_\varepsilon(y_0) \times B_\varepsilon(z_0)) \neq \emptyset,\\ A \cap (B_\varepsilon(z_0) \times B_\varepsilon(x_0)) \neq \emptyset,\ A \cap (\overline{B_\varepsilon(z_0)} \times \overline{B_\varepsilon(z_0)}) = \emptyset\}$$

確かに，十分小さな実数 $\varepsilon > 0$ をとれば，$\mathscr{V}$ はFell位相において $\succcurlyeq_0$ の開近傍になる。ところが，どれだけ ε を小さくしても，何らの矛盾を得ない。その理由は，次の通りである。$(s_n, t_n) \in \succcurlyeq_n \cap (B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(y_0))$ なる $(s_n, t_n, \succcurlyeq_n)$ と，$(u_n, v_n) \in \succcurlyeq_n \cap (B_\varepsilon(y_0) \times B_\varepsilon(z_0))$ なる $(u_n, v_n, \succcurlyeq_n)$ がとれるが，$t_n \succcurlyeq_n u_n$ なる n が存在するとはいえないからである[23]。

6 おわりに

本稿の目的は，完備性，反射性，推移性，連続性を満たす選好順序の全体に対して，Kannaiが導入した経済的に「自然」な条件（Kannai条件）を満たす位相―「閉収束位相（Fell位相）」―の，選好の「近さ」のモデルと

23）証明の方向性は，別にあることを本稿後に発見できていることを申し添えたい。脚注 7 参照。

しての限界を探ることにあった。Grodal（1974）が，既に，Fell位相の限界を示していたが，本稿では，むしろ，選好の「近さ」のモデルとしてのFell位相が，主体の個人的価値形成との無矛盾性をどれだけ維持できるかを示すことで，裏返せば，維持できない無矛盾性を明らかにすることで，その限界を探って来た。本稿では，完備性，反射性，推移性，連続性を満たす選好順序の全体にFell位相を与えた場合，収束列の極限は完備性，反射性，連続性を満たすことまでは示すことができており，残るは推移性のみといえる。

非反射性，推移性，連続性を満たす選好順序の全体であれば，Kannai位相とFell位相（閉収束位相）は同一であり，しかも，Fell位相において閉集合である。すなわち，収束列の極限は，非反射性，推移性，連続性を満たす。完備性，反射性，推移性，連続性を満たす選好順序の全体の場合でも，Kannai位相とFell位相が同一になるといえるためには，消費集合の直積の閉部分集合の全体がFell位相においてコンパクトであるので，完備性，反射性，推移性，連続性を満たす選好順序の全体がコンパクト空間の閉部分集合になることを示せば良い。今後の研究が待たれるといえよう。

〈参考文献〉

Back, Kerry (1987) "A Compact Space of Transitive Locally Non-Satiated Preference Relations," *Economics Letters*,Vol. 24, No. 3, pp. 253－256.

Beer, Gerald (1993a) *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

———(1993b) "On the Fell Topology," *Set-Valued Analysis*,Vol. 1, No. 1, pp. 69-80.

Bourbaki, Nicolas (1989a) *General Topology, Chapters 1–4*, NewYork: Springer-Verlag.

———(1989b) *General Topology, Chapters 5–10*, NewYork: Springer-Verlag.

Debreu, Gerard (1969) "Neighboring Economic Agents," in *La Dècision*, Paris: Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, pp. 85–90. Reprinted in *Mathematical Economics: Twenty Papers of Gerard Debreu*, chap. 13, pp. 173-178, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

———(1972) "Smooth Preferences," *Econometrica*,Vol. 40, No. 4, pp. 603–615.

Fell, J. M. G. (1962) "A Hausdorff Topology for the Closed Subsets of a Locally Compact Non-Hausdorff Space," *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 13, No. 3, pp. 472–476.

Grodal, Birgit (1974) "A Note on the Space of Preference Relations," *Journal of Mathematical Economics*,Vol. 1, No. 3, pp. 279–294.

Hildenbrand,Werner (1974) *Core and Equilibria of A Large Economy*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Holá, L'. and H. Poppe (1999) "Fell Topology on the Space of Functions with Closed Graph," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*,Vol. 48, No. 3, pp. 419–430.

Holá, L'., S. Levi, and J. Pelant (1999) "Normality and Paracompactness of the Fell Topology," *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 127, No. 7, pp. 2193–2197.

Kannai,Yakar (1970) "Continuity Properties of the Core of a Market," *Econometrica*, Vol. 38, No. 6, pp. 791–815.

Kelley, John L. (1955) *General Topology*, New York: Springer-Verlag.

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green (1995) *Microeconomic Theory*, NewYork: Oxford University Press.

McCoy, Robert A. (1997) "Fell Topology and Uniform Topology on Compacta on Spaces of Multifunctions," *Rostocker Mathematisches Kolloquium*, pp. 127–136.

Munkres, James R. (2000) *Topology*, Upper Saddle River, NJ:Prentice Hall, 2nd edition.

Schmeidler, David (1969) "Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders and Incomplete Preferences," *Econometrica*, Vol. 37, No. 4, pp. 578–585.

——— (1971) "A Condition for the Completeness of Partial Preference Relations," *Econometrica*, Vol. 39, No. 2, pp. 403–404.

Varian, Hal R. (1992) *Microeconomic Analysis*,NewYork: Norton, 3rd edition.（ハル R. ヴァリアン著，佐藤隆三，三野和雄訳『ミクロ経済分析』勁草書房，1986）.

奥山利幸（2009）『ミクロ経済学』，白桃書房.

The Fell Topology for Preference Spaces: Preliminary Results

Toshiyuki OKUYAMA

《Abstract》

The topology of closed convergence (Fell topology) has hitherto served as a standard model of neighboring preferences in economics. Grodal (1974) and Hildenbrand (1974) provided thorough analyses of the Fell topology for irreflexive, transitive, and continuous binary relations on a given set of alternatives. The purpose of this paper is to give a preliminary analysis of whether the Fell topology can be a rational model of neighboring preferences on the space of complete, reflexive, transitive, and continuous binary relations. I demonstrate, as an intermediate result, that the subspace of complete, reflexive, and continuous binary relations is closed, and hence compact, under the Fell topology.