複利率とポアソン過程

MIYAZAKI, Koichi / 宮崎, 耕一

(出版者 / Publisher)
法政大学経済学部学会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
経済志林 / The Hosei University Economic Review
(巻 / Volume)
56
(号 / Number)
2
(開始ページ / Start Page)
7
(終了ページ / End Page)
21
(発行年 / Year)
1988-08-15
(URL)
https://doi.org/10.15002/00006188

複利率とポアソン過程*)

宮 崎 耕 一

は じ め に

複利の数学的分析は，この論文以前に，1983年論文[2]，84年報告[3]，86年論文[4]で筆者によって考察されてきたが，本論文では，以前に十分に明らかにされなかった二つの点を解明することが目的となっている。その二点とは，まず第一に，任意時点に引き出し，預け入れ可能な連続時間モデルで，得られうる利子の上限が，連続的複利であることの厳密な証明，第二は，その上限である連続的複利と，時間を離散的に区切った時の複利との大きさの差を表わす式を示し，その式とポアソン過程において現われる式との類似性について考察すること，である。

*) ポアソン過程との関連は，これまでに公刊された筆者論文では言及されていない点である。

1

はじめの問題は*1)，要するに式で書けば，

sup 〔最終時点（$t=1$）に手にすることのできる利子総額〕

$$\left\{\begin{array}{l}\text{元本と利子の，}0\leqq t\leqq 1\text{ 内での有限回}\\ \text{の引き出し，預け入れによる価値増殖}\\ \text{の，}\dot{\text{あ}}\dot{\text{ら}}\dot{\text{ゆ}}\dot{\text{る}}\text{場合に関する}\end{array}\right\}$$

$$=\exp\left(\int_0^1 b(t)dt\right)-1,\text{（ただし，}b(t)\text{ は利子率関数を表わす。）}$$

を，厳密に証明することである。左辺の sup の下方のカッコ内に，あらゆる場合とあるのに注意されたい。この問題全体は，次の二段階に分けられる。第一は，期間 $0 \leqq t \leqq 1$ を，有限個の小区間に分ける分割 $\varDelta$ のすべてから成る集合を考え，任意の $\varDelta$ に対して，「$\varDelta$ の各小区間内部では，全く引き出し，預け入れが行なわれない任意の預金計画に対して，ある分割 $\varDelta'$ が存在し，$\varDelta'$ に関する離散的複利が，その預金計画を凌駕する」ということを示す。第二には，あらゆる可能な有限区間分割 $\varDelta$ に関する，離散的複利の上限は，上式の右辺が表わしている，連続的複利に等しい，ということを示す。これら二段階のうち，あとの方の段階は，ずっと簡単なので，まずこれをとりあつかうことにしたい。この段階は，命題1と命題2によって示される。

〔命題1〕　任意の有限区間分割 $\varDelta$ に関する離散的複利は，連続的複利を越え得ない。

（証明）　ある $\varDelta$ の小区間の番号を$1, 2, \cdots, l$とする。各小区間 $k(1 \leqq k \leqq l)$ に関する離散的利子率を m_k で表わす。利子率関数 $b(t)(0 \leqq t \leqq 1)$ は有界で常に正，かつ可測とする。m_k は，$b(t)$ の，第 k 小区間に関するルベーグ積分 $\int_{(k)} b(t)dt$ で定義される[*2]。このとき，$\varDelta$に関する離散的複利は $\prod_{k=1}^{l}(1+m_k)-1$ と表わされる。m_k の定義式から，

$$\int_0^1 b(t)dt = \sum_{k=1}^{l} m_k$$

が成立する以上，

$$\exp\left(\int_0^1 b(t)dt\right) = \prod_{k=1}^{l} \exp m_k = \prod_{k=1}^{l}\left(1+m_k+\frac{1}{2}m_k^2+\cdots\right)$$

ゆえに

$$\frac{\exp\left(\int_0^1 b(t)dt\right)}{\prod_{k=1}^{l}(1+m_k)} = \prod_{k=1}^{l}\left(\frac{1+m_k+\frac{1}{2}m_k^2+\cdots}{1+m_k}\right) \geqq 1$$

これで命題は証明されたことになる。

〔命題2〕　ある分割列 $\{\Delta_1, \Delta_2, \cdots\}$ の分割 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots$ に関する離散的複利が構成する数列は，連続的複利に収束する。

（証明）　上式の等号の右側の積は，Δを，n個の等しい長さの小区間にとる場合には，[4]で証明したように，$n\to\infty$のとき，1に収束する。

こうして，命題2が成立つことが示されたので，第二段階が証明されたことになる。

注 *1)　第2節の諸仮定を前提する。この問題の本格的な議論は，本論文ではじめてとり上げられた。

注 *2)　このような積分による m_t の定義は，第2節の仮定(1)と結びついている。

2

第一段階を厳密に証明するということは，いかなることであろうか。諸仮定を明らかにすることからとりかかっていこう。

〔諸仮定〕　(1)t_1 から t_2 までの預金は，その金額の $\int_{t_1}^{t_2} b(t)dt$ 倍の利子を生む。(2)生じた利子は，引き出されなければ，元本にくり入れられない。(3)生じた利子は，引き出されただけでは利子を生む預金とはなりえず，利子を生む預金となるためには，再び預け入れられねばならない。(4)元本1，及びその直接の利子として，またはその何代目かの利子として生じた金額は，その一部分または全部を，$0\leqq t\leqq 1$ のいかなる時点で預け入れてもよく，何回に分けて預け入れることも許される。(5)元本1，及びその直接の利子として，またはその何代目かの利子として生じた金額は，その一部分，または全部を，いかなる時点で引き出してもよく，何回に分けて引き出すことも許される。(6)退蔵されている金額が預け入れられるのと同時に引き出されるということは行なわれないとする。(7)預け入れられている金額または生じた利子が，引き出されると同時に預け入れられる，ということはあり得る，とする。

1. **〔預金計画〕**　ある預金計画とは，上記(1)〜(7)の諸仮定をみたし，かつ預け入れの時点の数と引き出しの時点の数が有限な，元本1の運用方式のことである。各々の預金計画には，何らかの正の金額が預け入れられた時点の集合Aと，何らかの正の金額が引き出された時点の集合Bとが付随している。Aの一要素をa，Bの一要素をbで表わす。$0 \leqq a < 1$，$0 < b \leqq 1$と仮定される。各々の時点$t \in A \cup B$で預け入れられた額を$S_t \geqq 0$，tで引き出された額を$T_t \geqq 0$で表わす。
2. **〔預金計画の改善〕**　任意に与えられた預金計画について，最終時点$t=1$において手にすることのできる金額を，より大きくする，という意味において，より改善された預金計画を求める。この改善を，何段階にもわたって行なう。その具体的なやり方は以下のとおり。

(1)　任意の預金計画Pについて，$(A \cup B) - \{0, 1\} = X$の一要素を$t$とする。$C \equiv \{t | t \in X,\ T_t > S_t\}$の元のうち，最小の元を$b$とする。$b > 0$。$b$において引き出されたが預け入れられなかった金額$T'_b = T_b - S_b > 0$は，$A$の元のうち，$b$よりあとの元のうちいくつか（これらを小さい順に$a_1, a_2, \cdots, a_s$とする）において預け入れられるか，または，それ以外の部分は，$t=1$にまで退蔵されるであろう。T'_bのうち，実際に$S_1, S_2, \cdots, S_s (>0)$が，それぞれ$a_1, a_2, \cdots, a_s$で預け入れられ，$T'_b - (S_1 + S_2 + \cdots + S_s)$が$t=1$まで退蔵される。$T'_b$のうち，たとえば$S_1$は，$b$で引き出されたあと，$a_1$に到るまで退蔵され，$a_1$において預け入れられる。$S_2, S_3, \cdots, S_s$についても同様である。明らかに$S_{a_1} \geqq S_1$であり，同様の不等式が$a_2, a_3, \cdots, a_s$についても成立つ。

そこで，Pよりも改善された預金計画Qを次のようにして構成する。T'_bを，bにおいて引き出されると同時に預け入れるようにするのである。Qにおいては，S_bがPにおけるよりもT'_bだけ増加するので，$T_b = S_b$となり，$a_1, a_2, \cdots, a_s$においては，それぞれ，$S_{a_1}, S_{a_2}, \cdots, S_{a_s}$が$S_1, S_2, \cdots, S_s$だけ減少する。$T'_b$のうちの，たとえば$S_1$は，$P$では，$a_1$に到って預け入れられたのだが，$Q$では$b$で預け入れられる。

S_1 は，b から a_1 までの間に，利子 (i_1) を新たに生むこととなる。この利子は b 以後，どの部分も引き出されることはない，と仮定する。$a_2, \cdots, a_s$ についても同様である。Q では，P よりも，$t=1$ において手にすることのできる金額が，$i_1+i_2+\cdots+i_s$ だけ大きくなる。

このようにして構成した預金計画 Q に対して，P におけると同様に C を定め，これを C_Q と書くことにする。C_Q の最小の元は b より大きい。なぜならば Q では $T_b=S_b$ となっているからである。P から Q を構成したのと全く同様にして，Q から Q_2 を構成する。

この同じステップを，必要な回数，繰り返すと，最後には，集合 C に相当する集合が空となる。この回数は，たかだか，はじめの P の X の，b 以上の元の個数をこえない。この回数を r とする。$C_{Q_r}=\phi$ である。

Q_r における $(A\cup B)-\{0,1\}$ の部分集合 $D=\{t|t\in X, T_t<S_t\}$ の元を $a'_1, a'_2, \cdots, a'_m$ とする。たとえば a'_1 で，預け入れられたが，引き出されなかった金額 $S'_1=S_{a_1'}-T_{a_1'}>0$ は，a'_1 以前に，ネット（純額）で引き出されたか，あるいは $t=0$ における元本の一部分が a'_1 に到るまで退蔵されていたか，あるいは両方の合成である。ところが，$C_{Q_r}=\phi$ であるから，ネットで引き出されたという場合はない。従って，S'_1 は，すべて，$t=0$ からの元本の一部分である。$a'_2, a'_3, \cdots, a'_m$ においても同様である。

そこで，Q_r よりも改善された預金計画 R を次のようにして構成する。たとえば S'_1 を a'_1 で預け入れるかわりに，$t=0$ で預け入れるようにするのである。R においては，a'_1 では，S_{a_1} が S'_1 だけ減少し，$S_{a_1}=T_{a_1}$ となる。S'_1 は，$t=0$ から a'_1 まで，新規に預金されることとなるので，その間の利子 (i_1) が新たに生じる。この利子は，$t=0$ 以後，どの部分も引き出されることはないと仮定する。S'_1 は，$t=0$ で預け入れられたあと，a'_1 以後もそのまま預金されたままで，a'_1 以後の S'_1 の運用は，Q_r におけるのと全く同じ，とするのである。S'_2,

$S'_3, \cdots, S'_m$ についても同様である。

R においては，$D=\{t|t\in X, T_t<S_t\}=\phi$ である。Q_r から R を構成するやり方から，R においても，Q_r と同様に，$C_R=\phi$ である。従って，R ではすべての $t\in X$ において $S_t=T_t$ となっている。なお，R における X は，はじめの預金計画 P における X に含まれるが，必ずしも一致しない。このことは，P から Q_r を構成するやり方から，言える。

(2)　R における X の元を，小さい順に，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ としよう。これらの時点で引き出され，預け入れられる金額を，それぞれ $S_1, S_2, \cdots, S_n$ とする。$t=0$ において預け入れられる金額を S_0 とし，$t=1$ で引き出され得るか，または退蔵されて手元にあるお金の合計を S とする。$\int_{t_i}^{t_j} b(t)dt$ を簡単に $I(t_i, t_j)$ で表わす。

$t=0$ での預金は S_0 である。従って 0 から t_1 までの利子は $I(0, t_1)S_0$. また $t_1-\varepsilon$ （ε は微少な正数）での元利合計は $(1+I(0, t_1-\varepsilon))S_0$ である。S_1 は t_1 で引き出され，かつ預け入れられる以上，

$$(1+I(0, t_1))S_0 \geqq S_1 \qquad \cdots\cdots(1)$$

$t_1+\varepsilon$ での「利子を生む預金」は，$S_1 \geqq S_0$ ならば S_1 であり，$S_1<S_0$ ならば S_0 である。（$S_1<S_0$ のときには，t_1 での元利合計のうち，利子部分は t_1 で元本に組み入れられず，結局，S_0 だけが t_1 の元本となるからである。）従って，t_1 から t_2 までに生じる利子は，$I(t_1, t_2)\max(S_0, S_1)$ となる。ゆえに，t_2 での元利合計は $(1+I(t_1, t_2))\max(S_0, S_1)$ である。S_2 は，t_2 で引き出され，預け入れられる金額である以上，

$$(1+I(t_1, t_2))\max(S_0, S_1) \geqq S_2 \qquad \cdots\cdots(2)$$

同様にして，$t_2+\varepsilon$ での「利子を生む預金」は，$\max(S_0, S_1, S_2)$ であり，t_2 から t_3 までに生じる利子は $I(t_2, t_3)\max(S_0, S_1, S_2)$。ゆえに t_3 での元利合計は $(1+I(t_2, t_3))\max(S_0, S_1, S_2)$ である。そして

$$(1+I(t_2, t_3))\max(S_0, S_1, S_2) \geqq S_3 \qquad \cdots\cdots(3)$$

一般に，$t_j+\epsilon$ での「利子を生む預金」は $\max(S_0, S_1, \cdots, S_j)$，$t_j$ から t_{j+1} までに生じる利子は $I(t_j, t_{j+1})\max(S_0, S_1, \cdots, S_j)$，$t_{j+1}$ での元利合計は $(1+I(t_j, t_{j+1}))\max(S_0, S_1, \cdots S_j)$，そして，$(1+I(t_j, t_{j+1}))\max(S_0, S_1, \cdots, S_j)\geqq S_{j+1}, \cdots(j+1)$，$j=1, 2, \cdots, n$（ただし，$t_{n+1}=1$ とおく。S_{n+1} は $t=1$ での元利合計とする)。

従って，$t=0$ から $t=1$ までに生じる利子の合計は，

$I(0, t_1)S_0+I(t_1, t_2)\max(S_0, S_1)+I(t_2, t_3)\max(S_0, S_1, S_2)$
$+\cdots\cdots+I(t_n, 1)\max(S_0, S_1, \cdots, S_n)$

この式の中には，もちろん，その全部または一部分がある時点で元本に組み込まれ，その利子を生んだ項が含まれているが，ある時点で元本に組み込まれるか否かにかかわらず，生じてから $t=1$ までに自(みずか)らの価値が保たれることにはかわりがない。$t=1$ において手にすることのできる金額 S は，$t=0$ から $t=1$ まで退蔵される金額 $1-S_0$ と，$t=0$ における初期預金額 S_0 及び上記の利子合計の和に等しい。従って，上記の利子合計の式を，制約条件 $S_0\leqq 1$ 及び(1),(2),$\cdots$,(n)のもとで最大化するような $S_1, S_2, \cdots S_n$ を求めるという問題が，ここにおいて重要となる。$I(0, t_1), I(t_1, t_2)$，等々は所与である以上，max 関数の性質から，この制約付き最大化問題の解は，次のように与えられる。$S_0=1$，$S_1=(1+I(0, t_1))S_0$，$S_2=(1+I(t_1, t_2))S_1, \cdots, S_n=(1+I(t_{n-1}, t_n))S_{n-1}$，すなわち，$S_j=\prod_{k=1}^{j}(1+I(t_{k-1}, t_k))$, $j=1, 2, \cdots, n, \cdots$(A)

このことは，次のことを意味している。$t_1, t_2, \cdots, t_n$ を所与とするとき，各 t_j において引き出される金額と預け入れる金額とが，同じ正の値 S_j であるようなすべての預金計画の中で，$t=0$ から $t=1$ までに生じる利子合計が，最大となる預金計画は，式(A)で表わされる預金計画である。$t=0$ から $t=1$ までは生じる利子を除けば，それらのあらゆる預金計画は，預金と退蔵金の合計額1を，$t=1$で手にすることができる。この最大化する預金計画（式(A)）を，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ による分

割 Δ' に対する離散的複利の場合の預金計画と呼ぶ。従って，

〔命題 3〕 引き出し時点と預け入れ時点の個数が有限な任意の預金計画 P に対して，分割 Δ' が存在し，Δ' に関する離散的複利

$$[\prod_{k=1}^{l}(1+m_k)]-1$$

（ただし，$l=n+1$，$m_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}b(t)dt=I(t_{k-1},t_k)$ とおく）が，P の利子合計を凌駕する。

これで，第1節のはじめの結論が証明されたことになる。

3

この論文の第二の目的は，任意の分割 Δ に対して，Δ に関する離散的複利の大きさと，連続的複利の大きさの差を表わす式と，ポアソン過程の議論において現われる式との類似性について考察することである。

ポアソン過程についての予備的説明を行なっておこう。以下は，大略的説明であり，詳細は伊藤[1]を見られたい。

$0\leqq t\leqq 1$ を，0から1までの長さの時間とする（「時間」と解釈しなくても，他のもの，たとえば距離，その他と解釈する場合もありうる)。このとき，$0\leqq t\leqq 1$ の区間内で，稀にしか起らないある一種類の出来事（event）が，何回か起る可能性があるものとする。その出来事は，その間，一度も起らないかもしれない。また，それは，1.5回起る，というようなことはなく，起るとすれば正整数回起る，とする。

さらに $0\leqq t\leqq 1$ なる区間を，有限個の任意の小区間に分割して，その分割を Δ とし，Δ のそれぞれの小区間の内部でその出来事が起る確率を考える。この確率は，一般的には，その小区間ごとに，互いに異なっている。たとえば，第一の小区間でそれが起る確率（回数は1以上，いくつでもよいとして）は，第二の小区間のそれと異なり得る。ポアソン過程に基本的な仮定のひとつは，次のことである。任意の Δ について，任意の小区間内

にその出来事が起る確率と，同じ Δ の別の小区間内にそれが起る確率とは，互いに独立である。この仮定を独立性という。もうひとつの基本的な仮定は，その出来事が起ることが，本質的には稀であるということと分ち難く結びついている次の点である。区間 $0\leqq t\leqq 1$ 内の，どの時点 t_1 から出発しても，$|t_2-t_1|\to 0$ のとき，$t_1\leqq t\leqq t_2$ なる小区間でその出来事が一回以上起る確率は，0 に収束する，という仮定が，それである。この仮定は，確率連続性という。

今，$0\leqq t\leqq 1$ の上の有界，可測関数 $b(t)\geqq 0$ が所与であるとすると，上記でその特徴を明らかにしたポアソン過程で，次の性質をもつものが存在する（伊藤[1]，定理27.2を見られたい)。区間 $0\leqq t\leqq 1$ 内の任意の小区間 $t_1\leqq t\leqq t_2$ において，その出来事が i 回だけ起る確率が次式で与えられる。

$$(m^i/i!)\exp(-m),\qquad m\equiv\int_{t_1}^{t_2}b(t)dt,$$

$i=0,1,2,\cdots$，すなわち，平均 m のポアソン分布の式である。

以上の事柄から，任意の分割 Δ に関して，全区間 $0\leqq t\leqq 1$ 内で，その出来事が起る確率と，Δ を構成する各小区間内でその出来事が起る確率との間に，次式が成立つ。

$$\left(\left(\int_0^1 b(t)\,dt\right)^i\Big/ i!\right)\exp\left(-\int_0^1 b(t)\,dt\right)=\sum_{g\in G_i}\left[\prod_{k=1}^{l}(m_k^{g_k}/g_k!)\exp(-m_k)\right] \qquad \cdots\cdots(3\text{-}1)$$

上式の左辺は，その出来事が $0\leqq t\leqq 1$ の間に i 回だけ起る確率を表わす。右辺の $m_k(k=1,2,\cdots,l)$ は，$\int_{(k)}b(t)dt=\int_{t_{k-1}}^{t_k}b(t)dt$ のことである。なお，$t_0=0$，$t_l=1$ とし，$t_1,t_2,\cdots,t_{l-1}$ は，区間 $0\leqq t\leqq 1$ の，l 個の小区間への分割 Δ の分割点を表わす。右辺の積記号の中の式は，出来事が，第 k 小区間内で g_k 回 ($g_k=0,1,2,\cdots$) だけ起る確率を表わす。積全体の意味は，それらの事象の，$k=1$ から l までの積事象の確率である。和記号の和の範囲 G_i は，$\{g=(g_1,g_2,\cdots,g_l)\mid g_1+g_2+\cdots+g_l=i,\ g_k=0,1,2,\cdots,i\}$ を表わす。す

なわち，合計して i 回となるような，l 個の非負整数 $g_1, g_2, \cdots, g_l$ の構成するベクトルの集合である。

〔複利率とポアソン過程の数学的類似性〕　任意の分割 Δ に関する離散的複利 $\prod_{k=1}^{l}(1+m_k)-1$ について，次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{l}(1+m_k)-1 = {} & m_1+m_2+m_3+\cdots+m_l \\
& +m_1m_2+m_1m_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+m_1m_l \\
& +m_2m_3+m_2m_4+\cdots+m_2m_l \\
& +\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& +m_{l-1}m_l \\
& +\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& +m_1m_2m_3\cdots m_l = \sum_{i=1}^{l}\sum_{g\in D_i}\Big[\prod_{k=1}^{l}(m_k^{g_k}/g_k!)\Big]
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(3\text{-}2)
$$

ここに，$D_i = \{g \mid g_1+g_2+\cdots+g_l=i,\ g_k=0 \text{ or } 1\} = G_i \cap \{g \mid g_k=0, 1\}$

他方，連続的複利は，$\exp\left(\int_0^1 b(t)dt\right)-1$ に等しいから，連続的複利から，Δ に関する離散的複利を差し引いた差を，連続的複利の場合の元利合計 $\exp\int_0^1 b(t)dt$ で割った割合は，次式で表わされる。

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\left(\exp\int_0^1 b(t)\,dt\right)-\prod_{k=1}^{l}(1+m_k)}{\exp\left(\int_0^1 b(t)dt\right)} \\
&= \sum_{i=l+1}^{\infty}\sum_{g\in G_i}\Big[\prod_{k=1}^{l}(m_k^{g_k}/g_k!)\exp(-m_k)\Big] \\
&\quad + \sum_{i=2}^{l}\sum_{g\in G_i\setminus D_i}\Big[\prod_{k=1}^{l}(m_k^{g_k}/g_k!)\exp(-m_k)\Big] \\
&= \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{g\in G_i\setminus D_i}\Big[\prod_{k=1}^{l}(m_k^{g_k}/g_k!)\exp(-m_k)\Big]
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(3\text{-}3)
$$

上式の右辺は，Δの小区間のうち，少なくとも一つにおいてその出来事が2回以上起る確率を表わす。Δを等しい長さへのn分割とすれば，$n\to\infty$のとき$R\to 0$となる（命題2の証明を見よ）。

同じ結論は，より簡明に，次のようにして示すこともできる。

$$\frac{\prod_{k=1}^{l}(1+m_k)}{\exp\left(\int_0^1 b(t)dt\right)}=\prod_{k=1}^{l}\sum_{i=0}^{1}\left(\frac{m_k^i}{i!\,\exp m_k}\right) \qquad \cdots\cdots(3\text{-}4)$$

式(3-4)は，Δに関する離散的複利の元利合計の，連続的複利の元利合計に対する比が，ポアソン過程における次の確率を表わす式と一致する，ということを示している。Δの各々の小区間で，その出来事が全く起らないか，起るとしても高々1回だけ起る確率が，それである。

式(3-3)の右辺が全体として表わしている確率は，式(3-4)の右辺の表わしている事象の余事象の確率に等しい。しかしながら，式(3-3)式は，式(3-4)から直ちに従がう次式とは独立した意義をもつ。すなわち，式(3-4)から，Rを与える式

$$R=1-\prod_{k=1}^{l}\sum_{i=0}^{1}(m_k^i/i!)\exp(-m_k) \qquad \cdots\cdots(3\text{-}5)$$

が得られるが，この式は，いわば残差の形をとっている。それに対して，式(3-3)の右辺は，Rを明示的な要素に分解して表わしているのである。

式(3-3)～(3-5)の右辺に現われる$(m_k^i/i!)\exp(-m_k)$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$の形の式を複利の言葉で解釈するならば，次のようになろう。[2]で示されているように*2)，$m_k^i/i!$は，時間$0\leqq t\leqq 1$の分割Δの，第k小区間において，もしも時間が無限に分割可能であれば最大化の帰結として生じるであろう，段階的な利子生み過程の中の，第i段階の利子率を示す。($i=0$の場合は元本1を表わす。)他方，$\exp m_k$は，その同じ段階的な利子生み過程によって生じる第1～$+\infty$段階の利子率の合計と，元本1との和を表わす。従って，$(m_k^i/i!)\exp(-m_k)$

は，それらの比を表わす。すなわち，それは，その段階的利子生み過程の中の第 i 段階の利子率の，その利子生み過程に伴なう全段階の利子率並びに元本1の合計の中に占める割合を表わしている[*3)]。

それゆえ，式(3－4)の右辺の和は，そのような割合を，$i=0$ の場合と $i=1$ の場合とについて加え合わせた割合を表わすと解釈し得る。その和が $i=2$ 以上の場合を除外している理由は，$\varDelta$ の第 k 小区間内において，時間が実際には全く分割されていない，という仮定が，$\varDelta$ に関する離散的利子の場合には置かれているからである。実際，第 k 小区間内で分割が行なわれない限り，その段階的利子生み過程は，第1段階で止まらざるを得ない。従って，第 k 小区間内の分割が行なわれないという制約条件が，もしそれが置かれなかったならば生じた第2～＋∞段階の利子率を失なわしめているのである。このことを式で表わせば，次のように表わされる。

$$[(3-4)\ \text{の左辺}]=\prod_{k=1}^{l}\left(1-\sum_{i=2}^{\infty}(m_k^i/i!)\exp(-m_k)\right) \qquad \cdots\cdots(3\text{-}6)$$

以上で考察されたとおり，複利の数学的分析は，ポアソン過程と形式上密接な関係を有し，ポアソン過程との類推によって，Rを明示的に分解して表わす式(3-3)が導き出されるのである。また，段階的利子生み過程の理論は，分割 $\varDelta$ の小区間に適用されることによって，R を表わす，式(3-3)とは別の式(3-5)に，適切な解釈を付与するのである。それによれば，$\varDelta$ のどの小区間内でも，分割が行なわれないという制約によって，各小区間での段階的利子生み過程が，第1段階でいわば「停止」する。その場合の $k=1\sim l$ の小区間で生じた元利合計の積の，その制約が置かれない場合の $t=1$ での最大化された元利合計に対する割合が，式(3-5)の第2項の意味であると言ってもよい。

注 *2)　補論を参照されたい。
　*3)　次節をも参照されたい。

4

前節の議論は，複利の理論を，それとは実質上，何の関係もない（従って意味のない）ポアソン過程という確率過程と形式上結びつけているだけではないか，との批判が出てくるかもしれない。そのような批判に対しては，筆者は次のように反論したい。Δに関する離散的複利の元利合計の，連続的複利の元利合計に対する割合という，経済的にも何らかの意味をもつ比率だけに注目する場合にも，われわれは式(3-4)だけでなく，式(3-3)の裏側の式

$$\frac{\prod_{k=1}^{l}(1+m_k)}{\exp\left(\int_0^1 b(t)dt\right)}=\sum_{i=0}^{l}\sum_{g\in D_i}\prod_{k=1}^{l}\left(\frac{m_k^{g_k}}{g_k!\exp m_k}\right)\quad\cdots\cdots(3\text{-}7)$$

を得ることができるが，この式の導出は，ポアソン過程との類推によるところが大きい。そして，この式の右辺のカッコ内の式は，詳しく記せば，

$$\frac{\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}b(t)dt\right)^{g_k}\Big/g_k!}{\exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}b(t)dt\right)}$$

となるが，Δの第k小区間における第g_k段階の利子率の，同じ第k小区間における連続的複利の元利合計に対する割合，という，複利理論上の一概念を表わしている点において無視し得ない。それゆえ式(3-7)自体，式(3-1)及び(3-3)という，ポアソン過程に関する式と形式上合致する他式と並んで，決して経済理論として無意味とは言いきれないものである。のなお，$g_k=0$の場合には，上の比率は，元本1の，連続的複利の元利合計に対する割合を表わす。

5

この論文の第一の部分では，連続的複利について，ひとつの非常に基本

的な命題を，諸仮定の設定を踏まえつつ一般的なフレームワークの中で証明した。その証明は，単に，その基本的な命題の成立の確認の為だけではなく，ある一定のルールのもとで起り得るあらゆる経済行動を，明示的にとり上げ，それらをすべて凌駕する経済行動として，連続的複利というものを浮かび上がらせた。

また，この論文の第二の部分（後半）では，前半においてその最大化の性質を明らかにされた連続的複利と，同じく前半において，一定の離散的なフレーム・ワークの中での最大値としての性質をくわしく考察された離散的複利との，数量的な関係について，詳細に分析した。その両者の数量的関係は，全区間 $0 \leqq t \leqq 1$ の分割 Δ で生じる各々の小区間における第 k 段階の利子率と，それぞれの小区間における連続的複利との間の数量的関係にまで還元され得るということを示した。

補　　論

この論文をセルフ・コンテインドにするために，第3節以下で言及された「第 k 段階の利子率」という概念について手短かな説明を加えておこう。

連続的複利 $\exp\left(\int_0^1 b(t)dt\right)-1$ は，$I_k \equiv \left(\int_0^1 b(t)dt\right)^k \Big/ k!$ の, $k=1$ から ∞ での総和としても表わされ得るが，その I_k に対して，次のような「第 k 利子層」（第 k 段階の利子率）としての解釈を付することが可能である。

時間 t を $0 \leqq t \leqq 1$ なる変数として，まず元本1が $0 \leqq t \leqq 1$ で直接に生み出す利子を，「第1利子層」と定義する。すなわち，元本の，時刻 t に始まる微少時間 dt において生み出す利子の，$0 \leqq t \leqq t_1$ での合計を $I_1(t_1)$ とし，これを $0 \leqq t \leqq t_1$ で生じた第1利子層と定義する。

$$I_1(t_1) \equiv \int_0^{t_1} b(t)dt$$

この関数 $I_1(t)$ は，$0 \leqq t \leqq 1$ で定まる。$I_1(t)$ は時刻 t におけるストックの次元をもつ。$I_1(t)$ の，時刻 t に始まる微少時間 dt において生み出す利子

の，$0 \leqq t \leqq t_1$ での合計を $I_2(t_1)$ とし，これを $0 \leqq t \leqq t_1$ で生じた第２利子層と定義する。

同様に，$I_k(t_1)$ を定め，これを $0 \leqq t \leqq t_1$ で生じた第 k 利子層と定義する。

第３節以下で言及された「段階的利子生み過程」とは，$I_1(t), I_2(t), \cdots, I_k(t), \cdots$ が，最初の元本 $I_0(t) \equiv 1$ から，そのようにして逐次，生み出される過程を意味している。「第 k 段階の利子率」とは，$t=1$ における $I_k(t)$ の値 $I_k(1)$ を指す。$I_k(1)$ は，元本１に対する利子の率でもあるので，「率」の語を付加してこれを呼んでいるものである。(cf. [2])

文　献

［1］伊藤　清『確率論』，岩波書店，1953年。

［2］宮崎耕一 The Phillips-Mundell Relation in Theory and Data: I. Inflation Theory,『経済志林』，第50巻第３号，1983年。

［3］宮崎耕一「複利について」，1984年理論・計量経済学会大会報告。

［4］宮崎耕一 The Exponential Compound Interest is the Limit of the k-Stratum Interest,『経済志林』，第53巻第３，４号合併号，1986年。

*) この論文は，理論・計量経済学会1986年度大会（11月３日名古屋大学）における筆者の研究報告を，そのまま掲載したものである。