D-1-8 H行列における線形相補性問題の反復アルゴリズム(D-1．コンピュテーション)

LI, Lei / 佐藤, 悠史 / SATO, Yushi / KOBAYASHI, Yuji / 小林, 裕司 / 李, 磊

(出版者 / Publisher)
電子情報通信学会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
電子情報通信学会総合大会講演論文集 / 電子情報通信学会総合大会講演論文集
(号 / Number)
1
(開始ページ / Start Page)
8
(終了ページ / End Page)
8
(発行年 / Year)
2004-03-08

D-1-8 H行列における線形相補性問題の反復アルゴリズム

Iterative Algorithm for the Linear Complementarity Problem with an H-matrix

*佐藤 悠史 *李 磊 **小林 裕司
*Yushi Sato *Lei Li **Yuji Kobayashi

*法政大学 工学部 **法政大学大学院 工学研究科
*Faculty of Engineering, Hosei University **Graduate School of Engineering, Hosei University

1．はじめに

線形相補性問題(Liner Complementarity Problem,以下 LCP)は数理計画法などの分野でよく知られている.これは数理計画法の凸二次計画問題の最適性の必要十分条件として定式化されたものであり，二人非ゼロ和ゲームのナッシュ均衡解を求める問題が線形相補性問題に帰着できる.

本稿では係数行列が n 次 M 行列に属する場合の LCP アルゴリズム[1]を拡張した,係数行列が n 次 H 行列に属する場合の LCP アルゴリズムを提案する.

2．線形相補性問題

行列 $A \in R^{n\times n}$ とベクトル $q \in R^n$ に対して

$$\omega = Az + q, \omega \ge 0, z \ge 0, \omega^T z = 0$$

を満たす $z \in R^n, \omega \in R^n$ を求める問題を LCP(線形相補性問題)という.

3．M 行列と H 行列

行列 $A \in R^{n\times n}$ が

$$A = (a_{ii}) > 0, a_{ij} \le 0 \ , i \ne j, A^{-1} \ge 0$$

を満たす A を M 行列という.
また, 正の対角行列

$$D = diag\{di | di > 0, i = 1,2,\cdots,n\}$$

が存在し,行列 $A \in R^{n\times n}$ が

$$|a_{ii}|d_i \ge \sum_{j\ne i} |d_{ij}| d_j \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

を満たすとき A を H 行列という.

4．M 行列を係数とする LCP アルゴリズム

係数行列を $A \in R^{n\times n}$ 定数項ベクトルを $q \in R^n$ 変数ベクトルを $z \in R^n$ とするとき LCP は次のように表せる.

$$Az + q \ge 0, z \ge 0, z^T(Az + q) = 0$$

このとき係数行列が M 行列に属するならば次のような条件でブロック化することができる.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -b^T \\ -c & a_* \end{pmatrix} \quad A_* \in R^{(n-1)(n-1)}$$

$$b, c, q_*, z_* \in R^{n-1}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_* \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_* \end{pmatrix} \quad b > 0, c > 0, a_{11} > 0, q_1 < 0$$

さらに次に示す２つの式

$$\tilde{A} = A_* - \frac{1}{a_{11}} cb^T, \tilde{q} = \frac{1}{a_{11}} cq_1 + q_*$$

より得られる行列 $\tilde{A}$ と $\tilde{q}$ は LCP

$$\tilde{A}z_* + \tilde{q} \ge 0, z_* \ge 0, z^T(\tilde{A}z_* + \tilde{q}) = 0$$

を構成する.このとき $\tilde{A} \in M$ 行列になるので以上のことが再帰的に適用可能であり, z_* が得られたなら

$$z_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b^T z_* - q_1\right)$$

より再帰的な変換を戻り, z を得ることが可能である[1].

5．H 行列を係数とする LCP アルゴリズム

H 行列は H 行列＝M 行列+非負行列に分解できる.

$$Mz + Nz + q \ge 0, z \ge 0, z^T(Mz + Nz + q) = 0$$

を得る.この式を

$$Mz_{k+1} + Nz_k + q \ge 0, z_{k+1} \ge 0, {z_{k+1}}^T(Mz_{k+1} + Nz_k + q) = 0$$

として $q' = Nz_k + q$ とすると

$$Mz_{k+1} + q' \ge 0, z_{k+1} \ge 0, {z_{k+1}}^T(Mz_{k+1} + q') = 0$$

となり, $|z_{k+1} - z_k| < \varepsilon$ (ε は十分小さい値）になるまで反復を繰り返すことにより,係数行列が M 行列に属する場合の LCP に帰着できる.

6．計算量

係数行列が M 行列に属する LCP の計算量は, $O(n^3)$ であり[1],反復回数を l とすると係数行列が H 行列に属する場合の LCP の計算量は $O(l \cdot n^3)$ となる.

7．まとめ

係数行列が n 次 M 行列である LCP アルゴリズムを拡張し,係数行列が n 次 H 行列である $O(l \cdot n^3)$ の LCP アルゴリズムを提案した.これは実際計算機上で実装し,正しい解を得られることを確認した.今後の課題としては H 行列以外の行列への適用の可能性について検証していきたい.

8．参考文献

[1]李磊,大久保佳典,M 行列における線形相補性問題の再帰的アルゴリズム,INFORMATION,4:3(2001),287-294.