

### ECTにおける反復的画像再構成

OGAWA, Koichi / 尾川, 浩一

---

(出版者 / Publisher)

社団法人日本放射線技術学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

日本放射線技術学会雑誌 / 日本放射線技術学会雑誌

(号 / Number)

7

(開始ページ / Start Page)

890

(終了ページ / End Page)

894

(発行年 / Year)

2000-07-20

21世紀の放射線技術学・序章 VII

ECTにおける反復的画像再構成

法政大学工学部電子情報学科 尾川 浩一

はじめに

CT(computed tomography)における画像再構成は解析的手法と反復的手法に大別できる。X線CTなどの透過型CTでは、前者のうち投影断層定理(ある方向の物体の投影データの一次元フーリエ変換が、その物体を二次元フーリエ変換したときの対応する角度の周波数成分に一致する)を利用した、フィルタ付き逆投影(filtered backprojection: FBP)法が使われてきた。この手法の利点は、180度分の投影データを1回用いるだけで画像再構成ができることであり、また、すべての投影データを収集し終わった時点で、ほぼ画像再構成を終えることができるという実時間性にある。一方、後者の反復的手法は、解析的手法と同様に1970年代より研究されてきたものであり、データの不完全性があっても解析的手法と比較して致命的なアーチファクトが発生しない、雑音に対して強い、などの利点がある。しかし、反復的な計算が必要とされるため、一枚の画像を再構成するのに要する時間が長く、実際の装置で用いられることはなかった。ところが、近年、このような反復的な画像再構成法を高速化するアルゴリズムが提案され、この方法はECT(emission CT)の画

像再構成において問題となる光子の散乱, 吸収の補正項を画像再構成の過程に組み込むことができるため、注目を集めるようになった。

1. 反復的画像再構成法はなぜ時間がかかるのか

FBPのような解析的画像再構成法では、一つの方向の投影データが得られた時点で、再構成画像の特定の方向の周波数分布が決定するので、0~180度の投影データを測定した時点で対象となる画像が確定する。これに対し、反復的手法では再構成において評価関数を設け、その評価関数の値が最小(または最大)になるように、繰り返し画像の修正を行っていくというものである。これが再構成に時間のかかる理由である。

反復的手法の代表ともいえる代数的画像再構成法(algebraic reconstruction technique: ART)<sup>1,2)</sup>では、Fig. 1aのようにまず任意の画像 $f_{calc}$ を仮定し、そこから得られる計算投影データ $P_c$ と実測投影データ $P_m$ を比較する。もし、すべての方向の計算投影データが実測された投影データと完全に一致する( $P_c=P_m$ )ならば、そのような計算投影データを生む画像 $f_{calc}$ は、求めようとしていた真の分布 $f_{true}$ に他ならないと考えることができる。

ARTでは計算投影データと実測投影データの差( $P_c-P_m$ )をもとめ、これを投影経路内の画素数で割った値を再構成画像の画素値に加えていくことで、 $f_{calc}$ の修正を行い、計算投影データを実測投影データに一致させていく。また、計算投影データと実測投影データの比( $P_c/P_m$ )をとり、この比が1になったとき両投影データは一致したと考えることもできるので、この比の値が1になるように画素値の修正を行っていく場合もある。

一方、確率論の枠組みによって画像再構成を行う、最尤推定による期待値最大化(maximum likelihood-expectation Maximization: ML-EM)

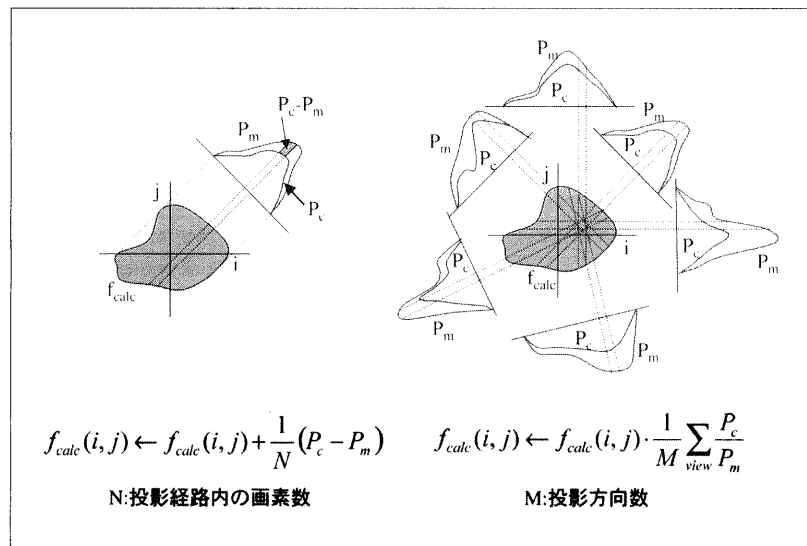


Fig. 1 逐次法と同時法における画素値の変更。

a | b

法<sup>3,4)</sup>では、再構成画像 $f_{calc}$ から実測投影データ $P_m$ と同じものが得られる確率 $p(P_m | f_{calc})$ を最大にするように、画素値の更新がなされていく(Fig. 2)。このような確率論の枠組みでECT画像再構成を定式化すると次のようなメリットがある。すなわち、光子の発生はポアソン過程に従うものであり、観測された投影データ $P_m$ には必然的にこの確率分布に従う揺らぎがある。これを統計変動というが、確率論に基づく再構成では、このような確率モデルを直接、組み込んだ定式化が可能となる。また、再構成の対象となる画像についての先見の知識(事前確率)があれば、これを組み込んだ形で尤度を最大にすることができる。この方法を最大事後確率推定による期待値最大化法(maximum a posteriori-EM: MAP-EM)<sup>5~7)</sup>と呼ぶ。

## 2. 雑音の拡大と収束性

次に画素値の変更の仕方がどのように画像の収束性や雑音の助長につながるかを述べる。Fig. 1aとbの画像再構成法では、推定している画像の画素値を変更する際に参照している投影データが異なっている。すなわち、SIRT(simultaneous iterative reconstruction technique)<sup>8)</sup>などの代数的反復法やML-EM, MAP-EMなどの方法では推定画像の1画素を更新する際に、その画素に関するすべての方向の投影データを一度に参照している(Fig. 1b)。このようなタイプの手法は「同時法」と呼ばれる。これに対し、Fig. 1aのようなARTは一つの方向のみの投影データで推定画像の画素値の更新が順次行われる。このようなタイプの手法は「逐次法」と呼ばれる。これらの両者の相違を画像の持つ周波数成分から述べると以下ようになる。同時法は、雑音がある系であっても一つ一つの投影データに内在する雑音の影響を受けにくい(平均化される)。これに対して逐次法は、一つの方向の投影データを用いて変更が行われるため、強く雑音の影響を受けてしまい、画素値が振動したり、誤差が発散するという現象が起きる。一方、雑音が少ない系での再構成画像の周波数成分の回復という観点から考えると、同時法は低周波成分を少ない反復回数で復元するものの高周波成分は前述した平均化により反復回数を増大させてもなかなか復元することができない。一方、逐次法はこの逆の理由で、画像の高周波成分を少ない反復回数で復元することができる。

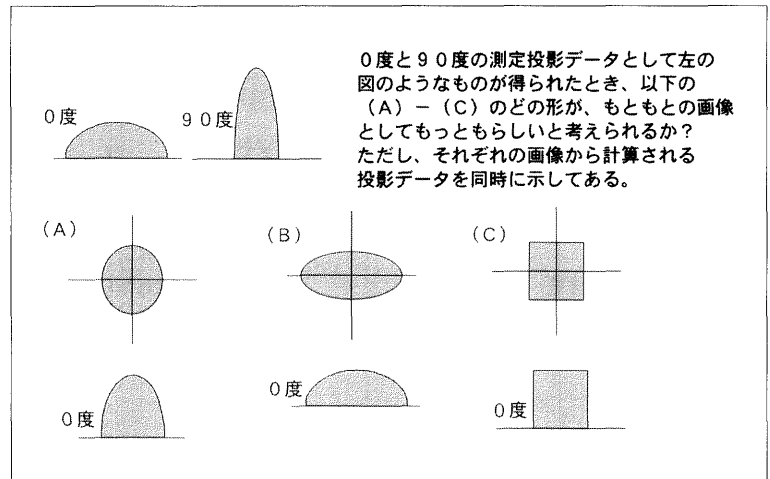


Fig. 2 確率的な画像再構成法の考え方。  
この場合、(B)の計算された投影データがもともとの測定投影データによく似ているので、再構成画像は(B)に近いことが分かるが、確率的な画像再構成では、反復計算ごとに画素値を変更し、その画像から得られる計算投影データと測定投影データが一致するまで反復計算が繰り返される。

## 3. サブセット法のアイディア

このように考えると「同時法」と「逐次法」の中間に位置する方法も存在することが推測できる。これは「サブセット法」あるいは「ブロック法」と名付けられている。この方法は投影データをいくつかのサブセットに分け、このサブセットごとに画素の更新を行うものであり、ML-EMやMAP-EMなどの同時法の収束性を速めることが期待できる。これらの加速法は、Hudson<sup>9)</sup>やByrne<sup>10)</sup>によって提案され、ordered-subsets(OS)アルゴリズムあるいはblock-iterative(BI)アルゴリズムと呼ばれている。すなわちOSとは、投影データをいくつかのサブセットに分割し、ML-EMなどで行っている画素値変更の過程において、その画素に関わるすべての投影データを参照するのではなく、サブセット内の投影データのみを参照し、画素値の変更を行っていくというものである。Tableにこれらの画像再構成法を比較する。このアルゴリズムによって、高周波成分の回復が速まり、数回の計算で高画質の画像再構成が可能となった。

## 4. サブセット法のアルゴリズム

ここではサブセット法のうちOS-EM法による画像再構成をML-EM法と比較して示す。記号の定義をFig. 3に示す。求める画像は $J$ 個の画素で構成されているものとし、 $j$ 番目の画素から放出される光子数を $\lambda_j$ とする。投影データは投影方向数が $T$ 、検出器数が $K$ 個とし、 $t$ 番目の投影方向で $k$ 番目の検出器に検出される投影データを $P_{tk}$ とする。画素 $j$ から $t$ 番目の投影方向へ放出された光子のうち $k$ 番目の検出器に検出され

Table 各種画像再構成法の比較.

	逐次法	ブロック法	同時法
画素値変更で参照する 投影データ数 (全投影数M)	1	2以上Mまで	M
画像再構成法の種類	乗算型ART, 加算型ART	OS-EM, BI-EM	乗算型SIRT, 加算型SIRT, ML-EM, MAP-EM
雑音の影響	大	中	小
高周波成分の回復	速い	比較的速い	遅い
低周波成分の回復	比較的遅い	比較的速い	速い

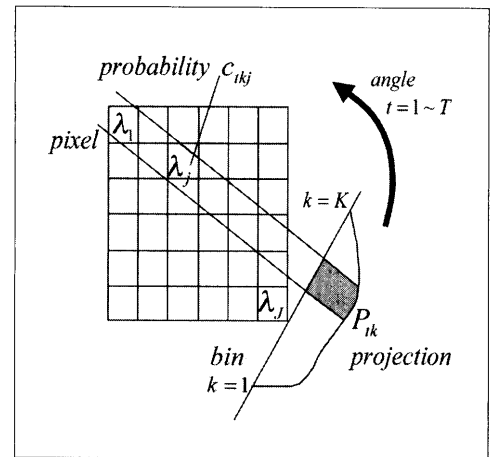


Fig. 3 記号の定義.

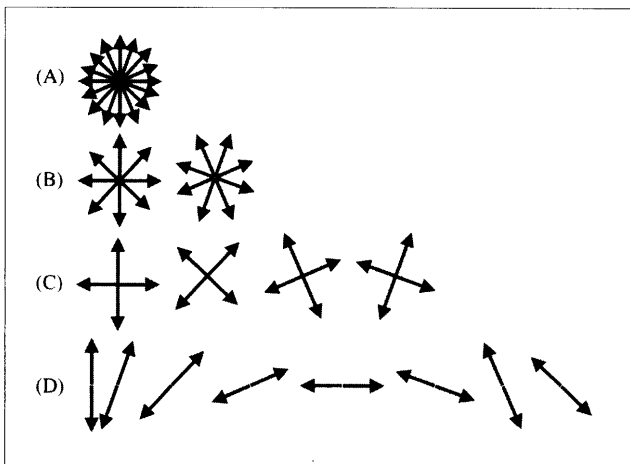


Fig. 4 OS-EMにおけるサブセット(全投影数16の場合). OSレベル: (A)1(ML-EMと等価), (B)2, (C)4, (D)8

る確率を  $c_{ikj}$  で表す. また, 画素  $j$  の  $n$  回目の推定値を  $\lambda_j^n$  とする.

4-1 ML-EM法

ML-EM法では次式によって,  $n+1$  回目の画像の画素値が推定される.

$$\lambda_j^{n+1} = \lambda_j^n \frac{1}{\sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K c_{tkj}} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K c_{tkj} \frac{P_{tk}}{\sum_{j=1}^J c_{tkj} \lambda_j^n}$$

4-2 OS-EM法

いま,  $T$  個の投影方向を  $M$  個の組(サブセット)に重複せず, かつすべての方向の投影データを分けるものとする.  $m$  番目の組に含まれる投影データの集合をサブセット  $S_m$  とするとOS-EMでは次のように反復計算が進められる. まず反復計算回数  $n$  に関して  $n=0$  と

し, すべての画素値  $\lambda_j^n$  に初期値を与える. 初期値としてはたとえば, ある方向の投影データの積分値を全画素数で除した値を用いる. 次に, 以下の処理を収束するまで繰り返す.

- (a)  $\eta_j^n = \lambda_j^n$  とする.
- (b) サブセット番号  $m$  に関して以下の計算を行う.
  - (i)  $m=1$  とする.
  - (ii)  $t \in S_m$  なる投影データを用いた画素値の推定を行う.

$$\lambda_j^{n+1} = \lambda_j^n \frac{1}{\sum_{t \in S_m} \sum_{k=1}^K c_{tkj}} \sum_{t \in S_m} \sum_{k=1}^K c_{tkj} \frac{P_{tk}}{\sum_{j=1}^J c_{tkj} \lambda_j^n}$$

- (iii)  $m=M$  ならば (c) へ, それ以外は  $m=m+1$ ,  $\lambda_j^n = \lambda_j^{n-1}$  として (ii) へ進む.

- (c)  $n=n+1$  とし  $\eta_j^n = \lambda_j^n$  とする.
- (d) 収束判定を行い,  $\eta_j^n$  を最終画像としない場合は  $\lambda_j^n = \eta_j^n$  として (b) へ戻る.

5. OS-EM法の実装と問題点

OS-EM法では数回の反復計算によって, ML-EM法による数十回の計算と同等の画質の再構成画像を得ることができるが, この方法を用いて実際に計算する場合, 以下の点についての考慮が必要である<sup>11)</sup>.

5-1 サブセットの数

サブセットの数をOSレベルと呼ぶ(Fig. 4. ここで矢印の向きは投影方向を示している). たとえば, OSレベルが1ならばML-EM画像再構成とOS-EM画像再構成は一致する. OS-EMの場合, サブセットバランス(ある画素から放出された光子が検出される確率が, 異なったサブセット間で均等であること)が保たれることが収束を保証することになるが, OSレベル

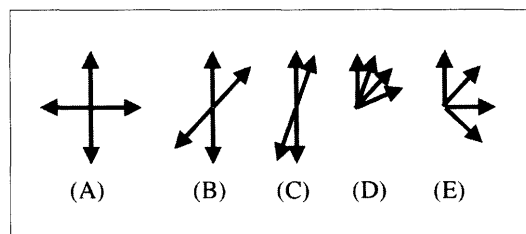


Fig. 5 サブセット内の投影データの選び方.

が大きくなるとサブセットバランスは崩れる。OSレベルが小さい時には、サブセット間で分散は小さいが、OSレベルが大きくなると大きな分散を持つ。OSレベルを大きくすると高周波成分の戻りはよいが、サブセットバランスを崩し、雑音の大きな系ではその収束性を低下させる。

### 5-2 投影データの選択

一つのサブセット内の投影データ数が決まったとき、具体的な投影データとしてどのようなものを用いるかが、ここでの投影データの選択ということになる (Fig. 5)。吸収のない系ではなるべく独立した投影データを選ぶのが合理的である。すなわち、一つのサブセット内の投影データが4の場合では、(E)のように0, 45, 90, 135度の投影データを選ぶ。これに対し、吸収がある系ではサブセット間でその影響が均等化されるように投影データを選ぶことは、収束を速めるうえで合理的である。すなわち、投影データの独立性よりも吸収の影響が大きくなる場合には、360度の角度を均等に分割した角度の投影データを用いた方が収束が速くなる。具体的には、サブセット内の投影データの数が4の場合、90度離れた投影データ(360度を等角度で分離する投影データ)の組(A)を利用する。

### 5-3 サブセット間の計算順番

Fig. 6はサブセット間の計算順番を示すもので、現在使用している投影データのサブセットと次に使用する投影データのサブセットを、最大角度離すようにアクセスするのが収束を速めるのに効果的である。Fig. 6で、(A)は22.5度離れたサブセットを順次利用しているが、(B)では(A)の投影データの組のうち最大の角度離れたものを二分する投影データを含むサブセットが参照される。すなわち、2回目に45度離れた投影データのサブセットが利用され、3回目に22.5度、4回目に67.5度というように参照されていく。

## 6. より高画質な画像再構成に向けて

### 6-1 サブセットバランスの改善

OS-EM法の留意点について前述したが、その収束

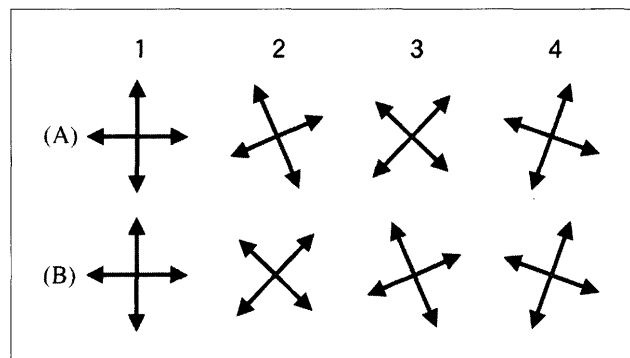


Fig. 6 サブセット間の計算順番.

性はサブセットバランスが保たれなければ保証されない。この点に関して、Byrneはrescaled block iterative (RBI)法<sup>12, 13)</sup>を提案している。RBI-EM法では以下のように定式化される。

$$\lambda_j^{n+1} = \lambda_j^n + \xi_n \frac{\lambda_j^n}{\sum_{r \in S_n} \sum_{k=1}^K c_{ikj}} \sum_{r \in S_n} \sum_{k=1}^K c_{ikj} \left[ \frac{P_{rk}}{\sum_{j=1}^J c_{ikj} \lambda_j^n} - 1 \right]$$

$$\frac{1}{\xi_n} = \max_j \left[ \frac{\sum_{r \in S_n} \sum_{k=1}^K c_{ikj}}{\sum_{r=1}^R \sum_{k=1}^K c_{ikj}} \right]$$

### 6-2 画像の全帯域の周波数成分の回復

OS-EM法においてOSレベルは一連の反復計算において固定されているが、OSレベルと画像の回復させたい周波数成分とは密接な関係がある。すなわち画像の高周波成分を回復させるにはサブセット内の投影データの数を少なくすることが効果的であり、また雑音の影響を低減するにはサブセット内の投影データの数を増やすことが効果的である。このように、ML-EM法では回復が困難な高周波成分を反復回数の少ないうちに回復させ、低周波成分の回復は多くの投影データより行い雑音の影響を減らすことが考えられる。これは、サブセット内の投影データの数を反復回数が多くなるに従って、たとえば64方向の投影データがある場合、2→4→8→16→32→64と6回のシークエンスでサブセット内の投影データを組み替えるというものである<sup>14)</sup>。

### おわりに

反復的手法による画像再構成法について、その問題点を述べ、近年開発された高速化アルゴリズムの代表的なものについて述べた。さらに、画質を改善するための研究について紹介を行った。

## 参考文献

- 1) Gordon R, Bender R, and Herman GT: Algebraic reconstruction technique (ART) for three dimensional electron microscopy and x-ray tomography. *J Theoret Biol*, 29, 470-481, (1971).
- 2) Gordon R: A tutorial on ART (algebraic reconstruction technique). *IEEE Trans Nucl Sci*, 21, 78-93, (1974).
- 3) Shepp LA and Vardi Y: Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Trans Med Imag*, 1, 112-121, (1982).
- 4) Lange K and Carson R: EM reconstruction algorithm for emission and transmission tomography. *J Comput Assist Tomogr*, 8, 306-316, (1984).
- 5) Geman S and Geman D: Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian reconstruction of images. *IEEE Trans Pattern and Machine Intell*, 6, 721-741, (1984).
- 6) Geman S and MaClure D: Bayesian image analysis: An application to single photon emission tomography. *Proc Amer Statist Assoc Stat Comp Sect*, 12-18, (1985).
- 7) Levitan E and Herman GT: A maximum a posteriori probability expectation maximization algorithm for image reconstruction. *Amer Statist Assoc*, 80, 8-37, (1985).
- 8) Gilbert P: Iterative methods for the three-dimensional reconstruction for an object from projections. *J Theor Biol*, 36, 105-117, (1972).
- 9) Hudson HM and Larkin RS: Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE Trans Med Imag*, 13, 601-609, (1994).
- 10) Byrne CL: Block-iterative methods for image reconstruction from projections. *IEEE Trans Imag Proc*, 5, 792-794, (1996).
- 11) 尾川浩一, 高橋昌寛: Ordered subsetsを用いた期待値最大化法における投影データの選択と計算順番が再構成画像に与える影響. *電子情報通信学会論文誌*, J82-D-II, 1093-1099, (1999).
- 12) Byrne CL: Accelerating the EMLL algorithm and rescaled iterative algorithms by rescaled block-iterative method. *IEEE Trans Imag Proc*, 7, 100-109, (1998).
- 13) Lalush DS, Karimi SS, and Tsui BMW: Convergence and resolution recovery of block-iterative EM algorithms modeling 3D detector response in SPECT. *IEEE Conf Record of Medical Imaging Conference*, 3, 1618-1622, (1996).
- 14) 浦部洋史, 尾川浩一: ECTにおけるOSアルゴリズムを用いたMAP-EM画像再構成. *電子情報通信学会論文誌*, J82-D-II, 1223-1226, (1999).