

3D-PETにおける空間上の厳密な検出確率を考慮した統計的画像再構成

OGAWA, Koichi / 佃, 研 / 尾川, 浩一 / TSUKUDA, Ken

(出版者 / Publisher)

電子情報通信学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

電子情報通信学会論文誌. D-II, 情報・システム, II-情報処理

(号 / Number)

10

(開始ページ / Start Page)

1727

(終了ページ / End Page)

1733

(発行年 / Year)

1996-10-25

論文

3D-PETにおける空間上の厳密な検出確率を考慮した
統計的画像再構成佃 研[†] 尾川 浩一[†]3D PET Image Reconstruction Using the Exact Probability between a Voxel
and Detector PairKen TSUKUDA[†] and Koichi OGAWA[†]

あらまし 近年のPETは複数の検出器リングを積層し、リング間のセプタを取り外すことにより3次元的なデータ収集と画像再構成を行うようになってきている。このような3次元画像再構成を行う手法の一つとして物体空間上における検出確率を用いて再構成を行う統計的画像再構成法がある。本研究ではvoxel j と中心を共有する単位球を仮定し、このvoxelが任意の検出器対に対して張る立体角を単位球上に形成する球面多角形の面積から求めることにより、voxel j から放射された光子対が検出器対 i で検出される確率 c_{ij} を正確に計算した。そして、このようにして求めた検出確率を用いて3次元画像再構成を行った。この結果、我々の提案する手法で求めた検出確率を統計的画像再構成法に適用することで検出器のシステムを画像再構成に取り込むことができ、スライスごとに2次元再構成を行い得られた画像を積層することで、3次元画像を得る手法に比べ、正確な3次元画像再構成を行うことが可能になった。

キーワード 医用画像処理, PET, 画像再構成, ML推定, EMアルゴリズム

1. まえがき

現在の臨床医学において、重要な位置を占めている技術にCT (Computed Tomography) がある。このCTの一種に体内中に陽電子放出核種を投与し、放出された陽電子が近傍の電子と対消滅を起こすときに発生する一対の γ 線を、体軸回りにリング状に配置した検出器で検出し、検出された同時計数データを用いて再構成を行うポジトロンCT (PET: Positron Emission Tomography) がある。近年のPETは複数の検出器リングを積層し核種の3次元分布画像を再構成するようになってきている。このような装置においては、空間を2次元平面の集合として考え各平面に対して従来の2次元画像再構成を適用する手法では、空間位置により検出感度が低下するため再構成画像が劣化する。このため次世代のPETとしてリング間に存在するセプタを除去することにより3次元的なデータ収集と画像再構成を行う3次元画像再構成が注目されている[1]。こ

のような3次元画像再構成法の一つとして、期待値最大化 (EM: Expectation Maximization) アルゴリズムを用いた最尤 (ML: Maximum Likelihood) 推定による画像再構成法を適用することが考えられている[2],[3]。ここで用いられたEMアルゴリズムはA.P. Dempster, N.M. LairdとD.B. Rubinが提案した可観測不完全データと非観測完全データの枠組を用いてML推定を求めるための反復的な手法で、収束性が数学的に証明されているものである[4]。このML EM画像再構成は物体から放出される γ 線対の検出確率を定義し、これを用いて再構成を行うため検出器のモデルを再構成に取り込むことができるという利点がある。一方で欠点として計算量が非常に多く、ML推定解に収束するのに非常に時間がかかるということが挙げられる。これに対する方策として、計算時間の大部分を占める γ 線対の検出確率の計算を事前に行い、配列に保存することで計算時間を短縮する方法がとられている。また、この配列は非常に大きくなるため検出器系の対称性の利用[5],[6]や画素の形状を変形[7]するなどの手法により、配列の大きさを小さくすることが考えられている。一方、ここで事前に求められる

[†] 法政大学大学院工学研究科電気工学専攻, 小金井市
Division of Electrical Engineering, Graduate School of Engineering, Hosei University, Koganei-shi, 184 Japan

物体空間内における γ 線対の検出確率の計算は3次元のデータ収集においては非常に複雑であり、簡単な近似により求められているのが現状である。

そこで本論文では、セプタを除去し3次元的データ収集を行う場合について、物体空間内の任意の点における検出確率の正確な計算方法について提案する。注目している検出器対に対して空間内の任意の点から発生する γ 線対の検出確率はその点から検出器対に対して張られる立体角に比例するものであると考えられる。そこで、本手法では空間内の voxel の中心を中心とする単位球を仮定し、検出器対との位置関係によりこの単位球上に形成される球面多角形の面積を求めることで、検出確率を求めることとした。このようにして求められた検出確率を用いて、ML EM アルゴリズムにより3次元画像再構成を行い、従来の2次元的な再構成法による再構成画像との比較を行った。この結果、従来の2次元的な手法では検出感度の低下によりリング間に存在する面での再構成画像の画質が劣化していたが、本手法により求めた検出確率を用いて3次元画像再構成を行うことで、リング間に存在する面での検出感度が向上し画質が改善されることがわかった。

2. 期待値最大化法の原理

EM アルゴリズムとは ML 推定解を求めるために用いられる反復的手法である。この手法では観測される不完全データ \mathbf{y} を不可観測完全データ \mathbf{x} に対応させ、この \mathbf{x} を用いてパラメータ θ が決定される。 \mathbf{X} をデータ \mathbf{x} のサンプル空間、 \mathbf{Y} をデータ \mathbf{y} のサンプル空間とし、 \mathbf{X} から \mathbf{Y} へは多対一写像の関係があるとする。推定するパラメータを θ とすると、 θ の条件下での \mathbf{y} の起きる確率は

$$g(\mathbf{y}|\theta) = \int_{\mathbf{X}(\mathbf{y})} f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} \quad (1)$$

$$\ln g(\mathbf{y}|\theta) = \ln f(\mathbf{x}|\theta) - \ln k(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \theta) \quad (2)$$

となり、ML 推定ではこの $\ln g(\mathbf{y}|\theta)$ を最大とするような θ が推定される。推定するパラメータを θ' とするとき、

$$L(\theta') = \ln g(\mathbf{y}|\theta') \quad (3)$$

$$= E\{\ln f(\mathbf{x}|\theta')|\mathbf{y}, \theta\} - E\{\ln k(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \theta')|\mathbf{y}, \theta\} \quad (4)$$

$$= Q(\theta'|\theta) - H(\theta'|\theta) \quad (5)$$

Jensen の不等式より $H(\theta'|\theta) \leq H(\theta|\theta)$ が証明されているため、 $L(\theta') \geq L(\theta)$ であるための十分条件は $Q(\theta'|\theta) \geq Q(\theta|\theta)$ であることがわかる。よって ML EM アルゴリズムは次の二つのステップから構成される。

Expectation-step :

$$Q(\theta|\theta_n) = E\{\ln f(\mathbf{x}|\theta)|\mathbf{y}, \theta_n\} \text{ の決定}$$

Maximization-step :

$$Q(\theta|\theta_n) \text{ を最大にする } \theta = \theta_{n+1} \text{ の選択}$$

3. 最ゆう推定による画像再構成理論

PET において推定されるべきパラメータは voxel j の voxel 値 λ_j である。 λ_j は各 voxel における γ 線対の発生数に対応するパラメータである。PET での ML 推定による画像再構成では、このような voxel の集合である画像 λ から同時計数データ \mathbf{Y} が発生する条件付き確率 $f(\mathbf{Y}|\lambda)$ を最大化するように画像 λ が推定される。表 1 に PET における画像再構成で用いる記号の定義を示す。

光子の放出はポアソン過程に従う現象であるため、その和である同時計数データもポアソン分布に従う。従って、完全データとして $Y_i = \sum_{j \in I_i} X_{ij}$ の関係にある \mathbf{X} の要素 \mathbf{X} を導入すると、 $f(\mathbf{X}|\lambda)$ は

$$f(\mathbf{X}|\lambda) = \prod_i \prod_{j \in I_i} \left\{ e^{-c_{ij}\lambda_j} \frac{(c_{ij}\lambda_j)^{X_{ij}}}{X_{ij}!} \right\} \quad (6)$$

となる。Expectation-Step により求める期待値は

$$Q(\lambda|\lambda^n) = E\{\ln f(\mathbf{X}|\lambda)|\mathbf{Y}, \lambda^n\} = \sum_i \sum_{j \in I_i} \{-c_{ij}\lambda_j \quad (7)$$

$$+ N_{ij} \ln(c_{ij}\lambda_j)\} + R \quad (8)$$

表 1 記号の定義
Table 1 Notation.

i	: チューブ (検出器対) の添字
j	: voxel の添字
I_i	: チューブ i にかかわる voxel の集合
J_j	: voxel j にかかわるチューブの集合
λ_j	: voxel j の voxel 値
Y_i	: チューブ i での同時計数値
X_{ij}	: チューブ i での同時計数値中、voxel j から生じた値
c_{ij}	: voxel j から放射された γ 線対がチューブ i で検出される確率

$$N_{ij} = \frac{c_{ij} \lambda_j^n Y_i}{\sum_{k \in I_i} c_{ik} \lambda_k^n} \quad (9)$$

で与えられる。ここで R は定数項である。Maximization-Step より

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} E\{\ln f(\mathbf{X}|\lambda)|\mathbf{Y}, \lambda^n\} = 0 \quad (10)$$

を解くことで推定式が求まる。これより PET における ML EM 画像再構成の推定式は

$$\lambda_j^{n+1} = \frac{\lambda_j^n}{\sum_{i \in J_j} c_{ij}} \sum_{i \in J_j} \frac{c_{ij} Y_i}{\sum_{k \in I_i} c_{ik} \lambda_k^n} \quad (11)$$

となる。

4. 検出確率 c_{ij} の定義

EM アルゴリズムを用いて画像再構成を行う場合、CT の検出器システムに応じた確率モデルを定義する必要がある。本研究では画像を構成する voxel の大きさが十分に小さいものとし、 γ 線対が voxel の中心から発生しているとモデルを仮定する。ここではこのようなモデルに基づいた γ 線対の検出確率 c_{ij} の定義について述べる。

複数の検出器リングを積層し軸方向セプタを取り外すことで、3次元的な同時計数の収集が可能になる。このような3次元システムにおける γ 線対の検出確率は図1に示すように voxel 中心から検出器対に対して張られる立体角に比例する。

この立体角を angle-of-view とするとき、voxel j から生じた γ 線対がチューブ i において検出される確率 c_{ij} は、

$$c_{ij} = \frac{1}{2\pi} \times \text{angle-of-view} \quad (12)$$

と表される。

今、図2に示すような座標系を定義し、voxel j から放出された γ 線対が検出器 u, v からなるチューブ i において検出される場合について考える。また、voxel j をその中心点 O によって代表するものとする。

検出器 u, v の検出面となる平面をそれぞれ P_u, P_v とし、また軸方向に垂直な平面上で点 O が検出器 u と v の間に最大の角度を形成する二つの平面を P_1, P_2 とする。これら二つの平面 P_1, P_2 が平面 P_u と交わる座標をそれぞれ $(x_{cu1}, y_{cu1}), (x_{cu2}, y_{cu2})$ 、平面

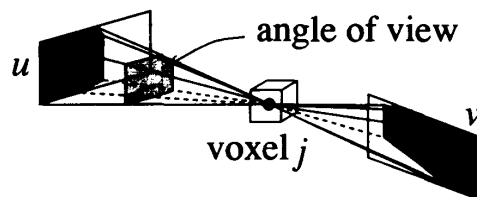


図1 3次元システムにおける angle-of-view
Fig.1 Definition of angle-of-view in 3D system.

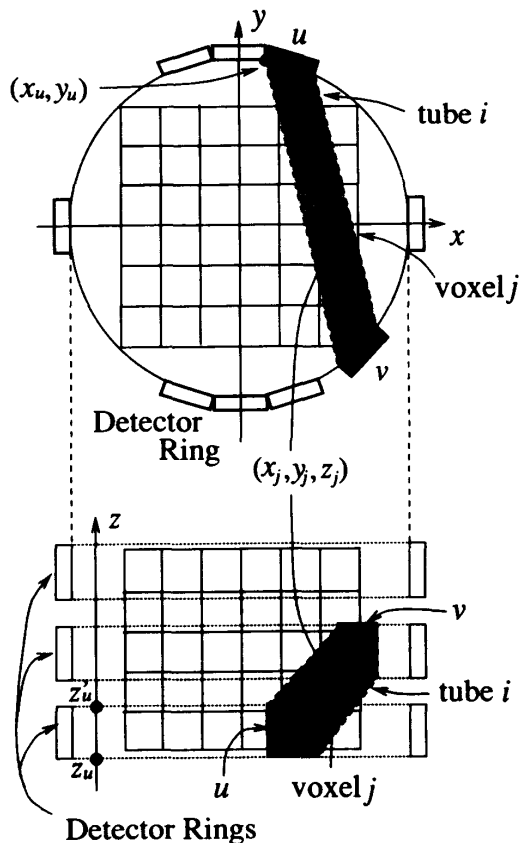


図2 3次元画像再構成での座標系の定義
Fig.2 Geometry of 3-D PET image reconstruction.

P_v と交わる直線をそれぞれ $(x_{cv1}, y_{cv1}), (x_{cv2}, y_{cv2})$ とするとき、検出器 v 側において求められる点 1 ~ 4 (図 3(b)) の各座標は

$$\text{点 1 : } \left(x_{cv1}, y_{cv1}, (z_u - z_j) \frac{x_{cv1} - x_j}{x_{cu1} - x_j} + z_j \right)$$

$$\text{点 2 : } \left(x_{cv1}, y_{cv1}, (z'_u - z_j) \frac{x_{cv1} - x_j}{x_{cu1} - x_j} + z_j \right)$$

$$\text{点 3 : } \left(x_{cv2}, y_{cv2}, (z_u - z_j) \frac{x_{cv2} - x_j}{x_{cu2} - x_j} + z_j \right)$$

$$\text{点 4 : } \left(x_{cv2}, y_{cv2}, (z'_u - z_j) \frac{x_{cv2} - x_j}{x_{cu2} - x_j} + z_j \right)$$

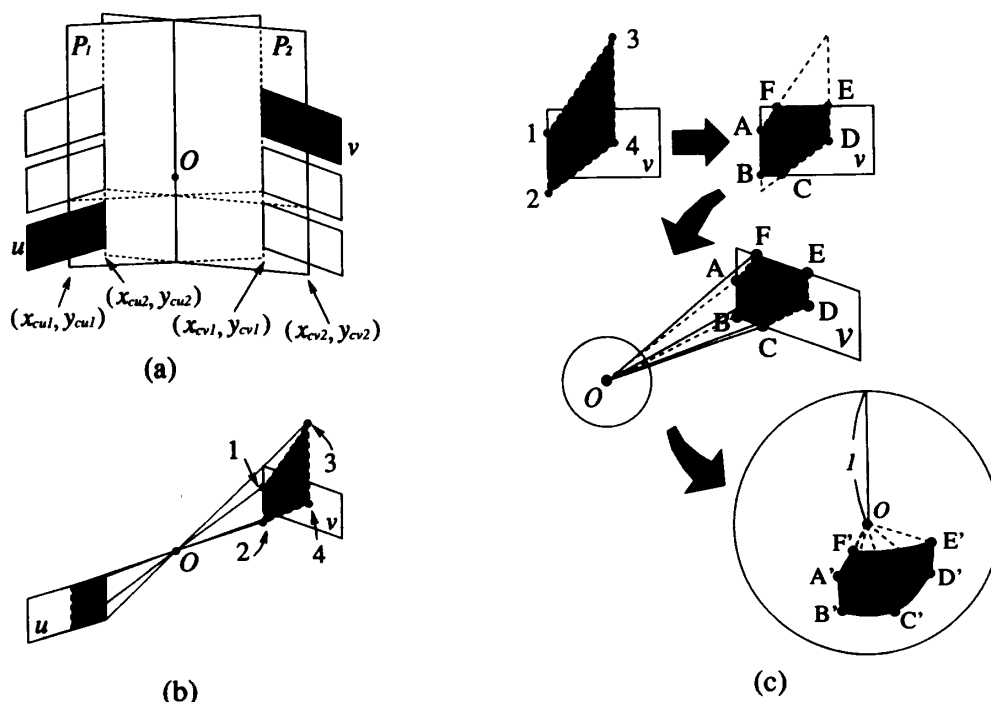


図3 立体角の計算
Fig.3 Calculation of solid angle.

となる。

これらの点1~4が検出器v上に形成する多角形は図3(c)に示すように3から6個の頂点をもつ多角形であり、各頂点をA~Fとし各座標を点1~4より求める。ここで図3(c)に示すように点Oを中心とする単位球を仮定する。点Oから先に求めた多角形の各頂点A~Fに直線を引く。単位球と各直線の交点をそれぞれA'~F'とし、これらの点により球面上に投影された球面多角形A'B'C'D'E'F'の面積Sが求める立体角となる。

ここで球面多角形A'B'C'D'E'F'の面積Sは球面三角形の面積の和として

$$S = S_{A'B'C'} + S_{A'C'D'} + S_{A'D'E'} + S_{A'E'F'} \quad (13)$$

により求められる。また単位球上の球面三角形A'B'C'の面積S_{A'B'C'}は

$$S_{A'B'C'} = A' + B' + C' - \pi \quad (14)$$

により求めることができる。ここでA', B', C'は球面三角形A'B'C'の各頂角である。

また球面三角法の余弦定理より、

$$\cos \widehat{B'C'} = \cos \widehat{A'C'} \cos \widehat{A'B'}$$

$$+ \sin \widehat{A'C'} \sin \widehat{A'B'} \cos A \quad (15)$$

の関係が成り立つため、これより頂角A'は

$$A' = \cos^{-1} \frac{\cos \widehat{B'C'} - \cos \widehat{A'B'} \cos \widehat{A'C'}}{\sin \widehat{A'B'} \sin \widehat{A'C'}} \quad (16)$$

と求めることができる。ここでA'B', B'C', A'C'は球面三角形A'B'C'のそれぞれの辺の長さである。ここでは単位球上の球面三角形を考えているため、

$$\widehat{A'B'} = \angle A'OB' = \angle AOB \quad (17)$$

$$\widehat{B'C'} = \angle B'OC' = \angle BOC \quad (18)$$

$$\widehat{A'C'} = \angle A'OC' = \angle AOC \quad (19)$$

となり、検出器上の各点A, B, Cの座標より求めることができる。またS_{A'C'D'}, S_{A'D'E'}, S_{A'E'F'}に関しても同様に考えることで求める立体角Sを得ることができる。

5. シミュレーション結果と検討

先に述べた手法により3次元画像再構成を行った。また比較のため隣接する検出器リング間でのみ収集を行った同時計数からリング間のスライスに対する同時

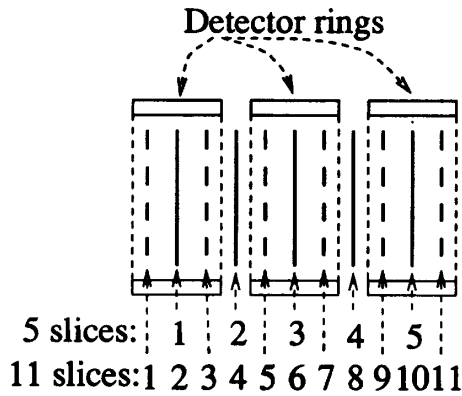


図4 スライス位置
Fig. 4 Slice position.

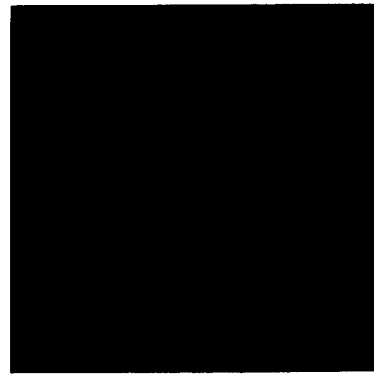


図5 原画像
Fig. 5 Original image.

計数を生成し 2 次元的手法による画像再構成も行った。原画像は voxel 数 64×64 、スライス数 5, 11 とした。スライスの位置を図 4 に示す。

また、リング間のスライスに欠損のある円柱形のファントムを用い、検出器数 128 個、リング数 3 個、リング半径 45 cm、リング幅 1 cm、リング間のギャップ 0.4 cm、反復回数は 50 回で行った。スライス数 5 での原画像および再構成画像を図 5, 図 6 に、リング間に存在するスライスでの再構成画像のプロファイルを図 7 に示す。またスライス数 11 の場合の原画像および再構成画像の一部を図 8 に示す。

図 5 を見ると 2 次元的手法により再構成を行った場合については、リング内に存在するスライスでの再構成はほぼ正しく行われており、また隣接するリングの間に存在するスライスでは欠損が再構成されていることから、隣接リングの間に存在するスライスの同時計数は隣接するリング間の同時計数の平均値によってある程度正しく求められていると推測されるが、図 7 のプロファイルからわかるように再構成画像の voxel 値が画像の外部に向かって本来の値より低くなっていることがわかる。これは隣接する同時計数の平均値を中間スライスの同時計数としたため、必要な情報が中間スライスの同時計数には十分に含まれていないためではないかと考えられる。先に述べた検出確率を用い 3 次元画像再構成法により再構成を行った場合についても図 6 の結果から再構成が行えることがわかる。しかし図 7 のプロファイルよりわかるように、3 次元的手法では 2 次元手法による再構成で見られたような voxel 値の低下は生じず、ほぼ正しい値が再構成されている。これは 3 次元的手法によるデータ収集を行うことでリング間のスライスの中心から離れた部分

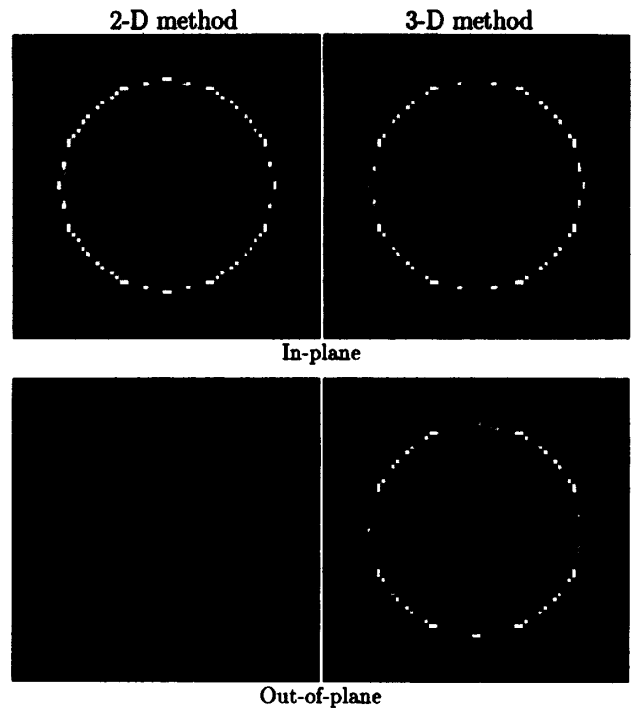


図6 再構成画像 (反復回数 : 50 回)
Fig. 6 Reconstructed images. (50 iterations)

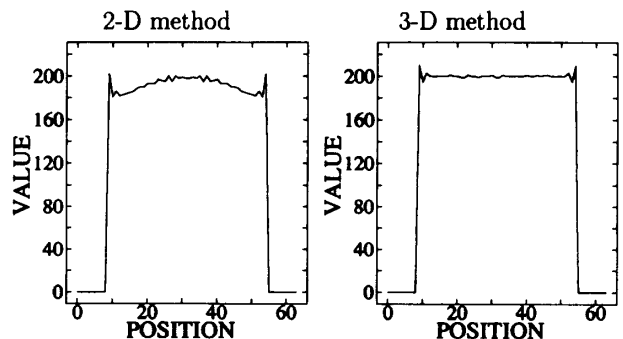
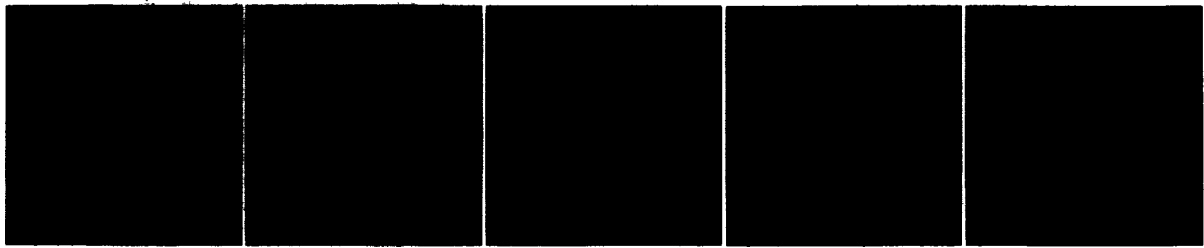
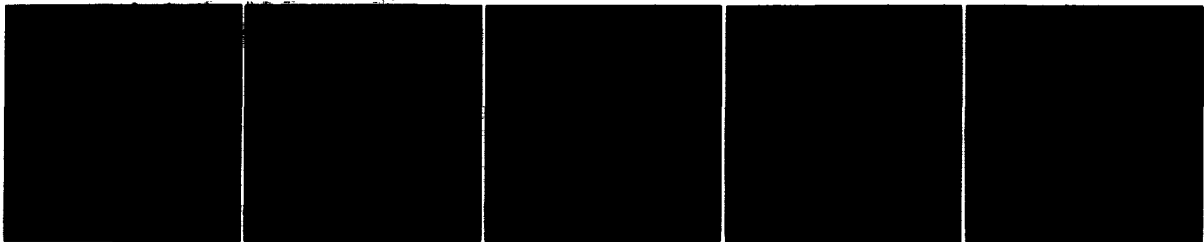


図7 リング間スライスでの再構成画像のプロファイル
Fig. 7 Profiles of reconstructed out-of-plane image along $y = 32$ in out-of-plane.

Original Image



Reconstructed Image



(a) slice 1

(b) slice 2

(c) slice 3

(d) slice 4

(e) slice 5

図8 スライス数11での再構成画像 (反復回数: 50回)

Fig.8 Reconstructed images. (11 slices, 50 iterations)

に対しても同時計数の収集が行われたことと、本論文で提案した3次元空間上での検出確率をML EMアルゴリズムに組み込んだことで先に述べた2次元的手法に見られた問題点が改善されたためと考えられる。

また図8に示す結果よりスライス数を11枚とした場合は、あるスライスの再構成画像が隣接するスライスの再構成から影響を受け、画質が劣化していることがわかる。例えば、図8(c)にのみ存在する欠損が(c)に比べれば小さいながらも同図(a), (b), (d)における再構成に対して影響を与え再構成値を減少させている。これは再構成の1回の修正においては同一チューブに含まれているvoxelに対してはvoxel値の増減は同方向に行われるため、チューブの幅に比べスライスの間隔が狭い場合にこのようなことが生じると考えられる。また同図(c)の下部にある値の高い部分は、スライス4と5が同時に再構成されるときに(e)の下部に存在する欠損により(d)の下部に値の減少が生じ、次にスライス3と4が同時に再構成されるときに(c)の下部のvoxel値の増加が生じたと考えられる。

6. むすび

本論文ではセプタを除去し3次元データ収集を行った場合について物体空間上の検出確率の定義を行い、3次元画像再構成のシミュレーションを行った。

従来の2次元再構成画像を積層する手法ではリング間に存在するスライスの中心から離れた部分の検出感

度が低下するため、再構成値が本来の値より低くなってしまった。これに対し検出器リング間に存在するセプタを取り外し同時計数の収集をすべてのリング間で行い、また空間上の検出確率を求めてML EMアルゴリズムにより3次元画像再構成を行うことで正しく再構成が行われることがわかった。但しリングの幅、リング数に対してスライス数を多くしすぎると空間上のサンプリング密度が低下するため、再構成時に隣接スライスが相互に影響を受け合い画質が劣化することがわかった。

しかしながら、リング数の増加は検出確率を記憶するための大量の配列を必要とし、実用的ではない。このため再構成アルゴリズムの改良等による必要配列の低減が今後の課題である。

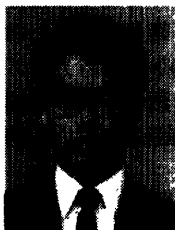
文 献

- [1] 田中栄一, "PETと画像再構成," Medical imaging technology, vol.11, no.3, pp.203-210, 1993.
- [2] L.A. Shepp and Y. Vardi, "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography," IEEE Trans. Med. Imaging, vol.MI-1, no.2, pp.113-122, Oct. 1982.
- [3] K. Lange and R. Carson, "EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography," J. Comput. Assist. Tomog., vol.8, no.2, pp.306-316, April 1984.
- [4] A.P. Dempster, N.M. Laird, and D.B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete Data via EM algorithm (with discussion)," J. Royal Statist. Soc. B, vol.39, pp.1-38, 1977.
- [5] C.M. Chen, S.Y. Lee, and Z.H. Cho, "Parallelization of the EM algorithm for 3-D PET image reconstruc-

tion," IEEE Trans. Med. Imaging, vol.10, no.4, pp.513-522,1991.

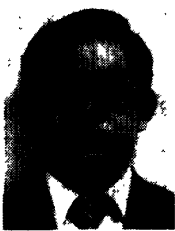
- [6] C.A. Johnson, Y. Yan, R.E. Carson, R.L. Martino, and M.E. Daube-Witherspoon, "A System for the 3D reconstruction of retracted-septa PET data using the EM algorithm," IEEE Trans. Nucl. Sci., vol.42, no.4, pp.1223-1227, 1995.
- [7] L. Kaufman, "Implementing and accelerating the EM algorithm for positron emission tomography," IEEE Trans. Med. Imaging, vol.MI-6, no.1, pp.37-51, 1987.

(平成 8 年 3 月 28 日受付)



佃 研 (正員)

平 6 法政大・工・電気卒。平 8 同大大学院修士課程了。同年富士通株式会社入社。在学中、医用画像処理の研究に従事。



尾川 浩一 (正員)

昭 55 慶大・工・電気卒。昭 57 同大大学院修士課程了。同年同大医学部助手。平 2 同大・医・講師。平 3 法政大・工・助教授。医用画像処理、放射線計測の研究に従事。工博。平 1 日本医用画像工学会論文賞、平 3 日本核医学会賞各受賞。日本医学放射線学会、日本核医学会、IEEE、SNM 等各会員。