

ウェーブレット変換を用いた画像の電子透かし法の提案

小川, 裕一 / OGAWA, Koichi / OGAWA, Yuichi / 尾川, 浩一

(出版者 / Publisher)

電子情報通信学会情報・システムソサイエティ

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

電子情報通信学会論文誌. D-II, 情報・システム, II-パターン処理

(号 / Number)

1

(開始ページ / Start Page)

142

(終了ページ / End Page)

147

(発行年 / Year)

2005-01-01

研究速報

ウェーブレット変換を用いた画像の電子透かし法の提案

小川 裕一[†] (学生員) 尾川 浩一^{†a)} (正員)

Proposal on Digital Image Watermarking with the Wavelet Transform

Yuichi OGAWA[†], Student Member and
Koichi OGAWA^{†a)}, Member

[†] 法政大学大学院工学研究科, 小金井市

Graduate School of Engineering, Hosei University, 3-7-2
Kajino-cho, Koganei-shi, 184-8584 Japan

a) E-mail: ogawa@k.hosei.ac.jp

あらまし 本論文では、離散ウェーブレット変換後の画像に対し、二つのしきい値によって選択されたウェーブレット係数の値を変更することにより、電子透かしを画像に埋め込む手法を提案する。

キーワード 電子透かし, ウェーブレット変換, しきい値処理

1. まえがき

近年、デジタル画像の利用が急速に増えている。画像などのデジタルデータは、容易に編集や配布が可能であるという、アナログデータにはない利点がある。しかし、デジタルデータは劣化なしに複製が可能であり、著作権保護をどのように実現するのが議論となっている。デジタルデータの著作権保護の技術の一つとして、電子透かし技術がある。この技術では、実空間領域あるいは周波数領域のいずれかの領域に透かしを埋め込むことが行われる。一般的に、実空間領域よりも周波数領域の方が、埋込済画像に対する画像処理の耐性が優れている。周波数領域の手法としてよく知られている DCT (discrete cosine transform) を用いた電子透かし技術 [1] では、中間周波数帯域に電子透かしを埋め込むことによって、画質を保ったまま、JPEG 圧縮に対する耐性をもたせることができる。しかし、これらは、ブロックベースの DCT 処理が基本となっているため、埋込済画像にブロックひずみやモスキートノイズが現れるという欠点をもっている。一方、DWT (discrete wavelet transform) を用いた電子透かし技術 [2]~[7] は、画像をブロックに分割する必要がなく、上記の DCT を用いた手法で生じた問題は発生しない。

本論文で提案する DWT を用いた電子透かし法は、Inoue らが提案した電子透かし法 [2] を基本とし、画像に埋め込まれる電子透かしの量に関して改良を加え

ている。具体的には、埋込の対象となるウェーブレット係数を二つのしきい値を用いて中間周波数帯域から選択し、そこに電子透かしを埋め込んでいる。この方法では、上記の二つのしきい値を使い、変更されているウェーブレット係数から電子透かしを抽出するので、原画像を参照せずとも電子透かしを抽出することができる。また、顕著な画像の劣化なしに、多くの量の電子透かしを埋め込むことができ、同時に JPEG 圧縮に対して十分な耐性を有している。

2. Inoue の手法

Inoue らは、1998 年にウェーブレット変換を用いた二つの手法を提案している [2]。次にこれらの手法の概要を説明する。

(1) 第一の手法は、EZW (embedded zerotree wavelet) アルゴリズムで定義されるゼロトリー構造を用いた手法である。以下、この手法を「手法 1」と表記する。手法 1 で用いられるパラメータに α と m がある。 α はゼロトリー構築に用いられるしきい値を決定するパラメータであり、 α の増減に伴いしきい値も増減する。 m は埋込強度を表しており、埋込対象となるウェーブレット係数が m によって決定される。

(2) 第二の手法では、最も粗いスケールの係数に対するしきい値処理で決定された、埋込の対象となる係数を変更することによって電子透かしを埋め込む。この手法を、以後「手法 2」と表記する。手法 2 のパラメータにはしきい値である T_1 と T_2 があり、変更の対象となる係数を決定する。それらの係数の絶対値は、 T_1 若しくは T_2 となるように変更される。

3. 提案手法

提案手法は、Inoue らの手法を基本とし、多くの量の電子透かしを埋め込めるように改良したものである。次に、提案手法における電子透かしの埋込と抽出について説明する。

3.1 電子透かしの埋込

提案する方式は、電子透かしをウェーブレット変換後の係数に埋め込んでいる。図 1 は、画像 Lenna (a) (マトリックスサイズ 256×256 , 256 階調) とそのレベル 3 でウェーブレット変換後の画像 (b) を表している。この図中の LL, HL, LH, HH はサブバンドのラベルであり、それに続く数字は、各サブバンドのレベルを表している。埋込に用いるパラメータは、埋込の強度 m と、埋込量 $B[\text{bit}]$ とする。また、ここでは埋め込まれる電子透かしをビット列 $W(k)$, ($k = 1, \dots, B$) とする。

はじめに電子透かしを埋め込むサブバンドを選択する。人間の視覚システムは、高周波成分よりも低周波成分のノイズに敏感である。また、同じ理由で、不可逆圧縮の量子化操作では高周波成分の量子化幅を大きくすることが行われる。よって、サブバンドセット LL と HH を除外し、残るサブバンドセット HL と LH から埋込に用いるサブバンドを一つ選択する。次に、埋込に用いる係数を選択するために、しきい値 T_1 と T_2 を設定する。ここで T_1 は、 $T_1 \geq m$ を満たす値とするが、簡単のため $T_1 = m$ とする。 T_2 は、係数の絶対値のヒストグラムを描いたときに、 $T_1 \sim T_2$ の係数の個数が B 個となる値とする。図 2 は、係数の絶対値のヒストグラムを表したものである。この図においてしきい値 T_1 と T_2 によって囲まれる領域 ($T_1 \leq |C_k| \leq T_2$) は、変更の対象となる係数 C_k , ($k = 1, \dots, B$) の絶対値の存在領域を表している。具体的な埋込は、 C_k に対して変更を行い、変更後の係数 C'_k の絶対値が $T = (T_1 + T_2)/2$ より m 離れた値 ($|C'_k| = T \pm m$) をとるようにする。ただし、 $W(k) = 1$ で $|C_k| > T + m$ なら、 $|C_k|$ が既に T より m 以上離れているため、 $C'_k = C_k$ とする。 $W(k) = 0$ の場合も同様である。これらを式に表すと次のようになる。

i) $W(k) = 1$ のとき

$$C'_k = \begin{cases} \text{sgn}(C_k) \cdot (T + m) & (|C_k| \leq T + m \text{ のとき}) \\ C_k & (|C_k| > T + m \text{ のとき}) \end{cases} \quad (1)$$

ii) $W(k) = 0$ のとき

$$C'_k = \begin{cases} \text{sgn}(C_k) \cdot (T - m) & (|C_k| \geq T - m \text{ のとき}) \\ C_k & (|C_k| < T - m \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $\text{sgn}(x)$ は x の符号を表す関数とする。 $T_2 < T + m$ となる場合、 $|C_k| \leq T + m$ という条件は、変更の対象となる係数の値についての $T_1 \leq |C_k| \leq T_2$ という制約から $|C_k| \leq T_2$ となることに注意する。同様に $T_1 > T - m$ の場合、 $|C_k| \geq T - m$ は $|C_k| \geq T_1$ となる。電子透かしの埋込に際して、式 (1), (2) を用いた理由を以下に述べる。提案手法における電子透かし抽出では、係数の絶対値と T とを大小比較している。そのため式 (1), (2) のように変更することで、 m

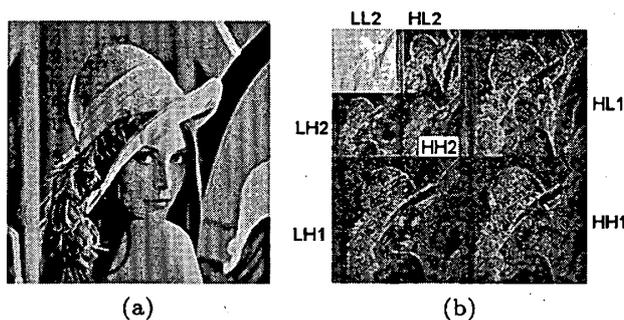


図 1 原画像 Lenna (a) とそのウェーブレット分解 (b)
Fig. 1 The original image Lenna (a) and its wavelet decomposition (b).

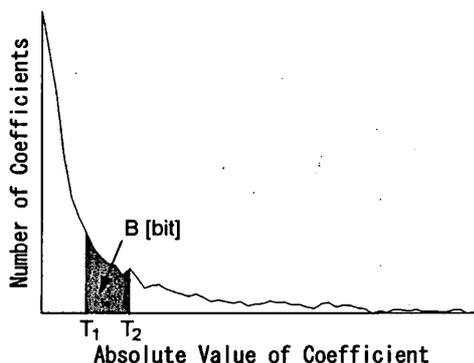


図 2 係数のヒストグラムとしきい値
Fig. 2 The coefficient histogram and thresholds.

の大きさに依存した耐性が得られる。また、 $|C_k|$ が T より m 以上離れている場合は、既に条件を満足することになるので、あえて値は変更せず、過度の画質劣化を避けることにしている。この変更の後、 C'_k の位置としきい値 T_1, T_2 を保存しておく。これは電子透かしの抽出に用いるためである。

3.2 電子透かしの抽出

電子透かしの抽出には、埋込の際に保存してあった C'_k の位置と T_1, T_2 を用いる。変更された係数の値に応じて次式のように電子透かしの値 $W'(k)$, ($k = 1, \dots, B$) を決定する。

$$W'(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } |C'_k| \leq T \\ 1 & \text{if } |C'_k| > T \end{cases} \quad (3)$$

ここで T は埋込のときと同様、 $T = (T_1 + T_2)/2$ である。

4. シミュレーション

提案方式における、電子透かしの埋込に伴う画質の影響と、切り取りや平滑化、JPEG 圧縮に対する耐性を調べた。また、JPEG 圧縮耐性について Inoue らの手法との比較を行った。シミュレーションでは、 $T_1 = m$

表 1 埋込済画像の PSNR[dB]

Table 1 Quality of watermarked images measured by PSNR in dB.

m	$B = 256$	$B = 512$	$B = 768$	$B = 1024$
10	51.95	48.76	46.87	44.79
12	50.52	47.33	45.36	43.27
14	49.05	46.11	43.81	41.74
16	48.01	44.90	42.69	40.51

と設定した。用いた画像は、図 1(a) の Lenna である。また、埋め込んだ電子透かしは、ランダムに生成されたビット列であり、ウェーブレット変換には、Daubechies ($N = 2$) のもの [9] を用いた。電子透かしは、サブバンド HL2 に埋め込んだ。

本論文では、電子透かしの耐性に関して抽出誤り率を 15% まで許容できるものとして、抽出誤りについては誤り訂正符号を導入して、実質的な誤りを低減するものとした。誤り訂正符号としてよく用いられる RS (Reed Solomon) 符号を本手法に適用した場合、どの程度の有効ビット数が得られるかについて述べる。 t 重誤り訂正性能をもつ RS 符号の場合、符号長 n に対して情報点の数は $n - 2t$ となる。誤り率 r のとき $t \geq rn$ であれば誤り訂正が期待でき、このときの情報点数は $(1 - 2r)n$ となる。よって設定した誤り率が 15% のとき、電子透かしの実効的なビット数は約 30% 減少することになる。

4.1 埋込済画像の画質

埋込ビット数 B と埋込強度 m を変化させた埋込済画像の画質を調べた。画質の評価には、PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) [8] を用いた。

表 1 は、埋込ビット数 B を 256, 512, 768, 1024, 埋込強度 m を 10, 12, 14, 16 としたときの埋込済画像の画質を PSNR で表したものである。埋込済画像の PSNR が 45 dB 以上なら、視覚的に十分な品質と思われたので、45 dB を基準に選ぶことにした。 $B < 768$ 及び $m < 16$ のとき、PSNR は 45 dB 以上となり、高い画質の画像が得られた。 $B = 768$ の場合でも、 $m < 14$ ならば PSNR は 45 dB 以上となった。 $B = 768, m = 12$ 若しくは $B = 1024, m = 10$ のときに PSNR が約 45 dB となるので、多量の電子透かしを埋め込む場合、画質を維持するには m として 10 若しくは 12 が適していると考えられる。

4.2 切り取り操作に対する耐性

改ざんの際に、画像の不要な部分を切り取られる場合がある。ここでは埋込済画像の 1/4 を切り取った場

表 2 切り取り画像の抽出誤りビット数 (誤り率 [%])

Table 2 Extracting error bit counts (error rate in %) in cropped images.

m	$B = 256$	$B = 512$	$B = 768$	$B = 1024$
6	29(11.3)	89(17.4)	129(16.8)	161(15.7)
12	38(14.8)	70(13.7)	96(12.5)	134(13.1)
18	26(10.2)	69(13.5)	89(11.6)	117(11.4)

合に、どの程度の耐性をもつのかを調べた。表 2 は、埋込済画像の左上部 1/4 を切り取った場合の抽出誤りビット数と誤り率を示したものである。それぞれの m の値に対して誤り率は 10% から 17% の間を推移している。画像内の周波数分布が位置によらないでほぼ均質であるとする、電子透かしも 25% が失われることになり、電子透かしが 2 値であることから、理論値としての平均的な誤り率は失った割合の半分の 12.5% となる。 $m \geq 12$ のように m を大きくすることで理論値に近づいており、提案手法は切り取り操作に対して理論どおりの耐性をもっているといえる。

4.3 平滑化操作に対する耐性

画像の平滑化操作は、ノイズを低減するためなどに用いられる。ここで平滑化操作は、次のカーネルを用いるものとする。

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

表 3 は埋込済画像を平滑化した場合の、抽出誤りビット数と誤り率を示しており、抽出誤り率は 7~22% となった。 $m = 12$ の場合、誤り率は 13% 以下となり、耐性を維持していると考えられる。全体の傾向として m が大きいほど、また、 B が小さいほど誤り率は小さくなっているが、 B が大きい場合 ($B=1024$)、 m が増大しすぎると逆に誤り率が大きくなってしまふ。これらについては以下のように考えることができる。埋込強度である m は、基本的にはその値が増大するほど、平滑化処理に対する耐性が増す。しかし、 m と B を同時に増大しすぎると、埋込の際に大きな値をもつ係数を多く選択することになる。ところが、大きな値の係数は数が少なく、平滑化処理の影響を受けやすい。よって、 m を増大しすぎるとは逆に平滑化に対する耐性を弱くすることになると考えられる。

4.4 JPEG 圧縮に対する耐性

JPEG 圧縮に対する耐性を調べるため、埋込済画像を JPEG 圧縮したときの抽出誤りを調べた。表 4 で

表 3 平滑化画像の抽出誤りビット数 (誤り率 [%])

Table 3 Extracting error bit counts (error rate in %) in smoothed images.

m	$B = 256$	$B = 512$	$B = 768$	$B = 1024$
6	25(9.8)	65(12.7)	133(17.3)	228(22.3)
12	25(9.8)	62(12.1)	96(12.5)	177(12.3)
18	20(7.8)	36(7.0)	86(11.2)	202(19.7)

表 4 $m = 12$ における JPEG 圧縮画像の抽出誤りビット数 (誤り率 [%])Table 4 Extracting error bit counts (error rate in %) in JPEG compressed images ($m=12$).

Q	$B = 256$	$B = 512$	$B = 768$	$B = 1024$
75	0(0)	1(0.2)	0(0)	0(0)
50	10(3.9)	23(4.5)	28(3.6)	47(4.6)
40	19(7.4)	37(7.2)	57(7.4)	92(9.0)
30	32(12.1)	73(14.3)	109(14.2)	177(17.3)

表 5 $Q = 50$ における JPEG 圧縮画像の抽出誤りビット数 (誤り率 [%])Table 5 Extracting error bit counts (error rate in %) in JPEG compressed images ($Q=50$).

m	$B = 256$	$B = 512$	$B = 768$	$B = 1024$
8	36(14.1)	69(13.5)	96(12.5)	145(14.2)
10	12(4.7)	26(5.1)	47(6.1)	70(6.8)
12	10(3.9)	23(4.5)	28(3.6)	47(4.6)
14	3(1.2)	8(1.6)	19(2.5)	19(1.9)

は、埋込強度 $m = 12$, JPEG 圧縮の品質値 (Q) を 75, 50, 40, 30 としたときの、抽出誤りビット数と誤り率を示している。ここで品質値は、JPEG 圧縮された画像の画質を決めるパラメータである。標準的な値である $Q = 50$ のとき、抽出誤り率は 5% 以下であることから、提案手法は十分な耐性をもつと考えられる。このときの埋込済画像の PSNR は 43~50 dB であり、十分に高い画質となっている。

次に、埋込強度 m の大きさと JPEG 圧縮耐性との関係を調べた。表 5 は、JPEG 圧縮の品質値 Q を 50 としたときの、埋込強度 m と抽出誤りビット数 (誤り率) との関係を示したものである。 $m < 10$ の場合、抽出誤り率が顕著に大きくなり、 m が大きくなれば、誤り率は急激に小さくなる。このことから、JPEG 圧縮に対して更に十分な耐性を得るためには、 m は 10 以上となる必要がある。しかし、 m が大きすぎる場合、埋込済画像の画質は劣化してしまうため、 m は 14 以下に保つ必要がある。

4.5 Inoue の手法との比較

我々が提案する手法と Inoue らの手法との JPEG 圧縮耐性について比較した。ここでは、JPEG 圧縮耐

表 6 手法 1 と提案手法の埋込条件

Table 6 The embedding condition of the conventional method 1 and the proposed method.

	ビット数	手法 1	提案手法
条件 1	180	$\alpha = 0.025, m = 6$	$m = 16$
条件 2	256	$\alpha = 0.03, m = 2.75$	$m = 12$

表 7 手法 1 と提案手法の埋込済画像の PSNR

Table 7 Quality of images watermarked by the conventional method 1 and the proposed method.

	手法 1 (dB)	提案手法 (dB)
条件 1	49.54	49.57
条件 2	50.58	50.52

表 8 手法 1 と提案手法の JPEG 圧縮による抽出誤りビット数 (誤り率 [%])

Table 8 Extracting error bit counts (error rate in %) in JPEG compressed images after watermarking by the conventional method 1 and the proposed method.

Q	条件 1		条件 2	
	手法 1	提案手法	手法 1	提案手法
75	0(0)	0(0)	2(0.8)	0(0)
50	0(0)	1(0.6)	42(16.4)	10(3.9)
40	5(2.8)	7(3.9)	46(18.0)	19(7.4)
30	24(13.3)	20(11.1)	71(27.7)	20(7.8)
20	41(22.8)	38(21.1)	106(41.4)	31(12.1)

性について調べているが、その際、比較のため埋込済画像の PSNR をできるだけ同値となるように、埋込込み条件を設定した。また、電子透かしを手法 1 ではサブバンドセット LH に、手法 2 ではサブバンド LH3 にそれぞれ埋め込んだ。

はじめに、手法 1 と提案手法のそれぞれにおける JPEG 圧縮時の抽出誤りについて示す。表 6 は、手法 1 と提案手法の埋込条件を示したものであり、条件 1 では、手法 1 の典型的な埋込条件を設定し、条件 2 では、提案手法で我々が良いと考えている埋込条件を設定している。表 7 は、それぞれの条件における埋込済画像の PSNR を示したものである。表 7 より、両手法とも埋込済画像の画質はほぼ等価になっていることが分かる。表 8 は、それぞれの条件下で、JPEG 圧縮の品質値と抽出誤りビット数 (誤り率) との関係を手法別に示したものである。条件 1 では、手法 1 と提案手法との間には、ほとんど差が見られないが、条件 2 では、手法 1 の方が誤り率が大きくなっている。これは、条件 2 では条件 1 よりも埋込強度を低く設定しているため、手法 1 では、JPEG 圧縮耐性が悪くなるという結果が現れたと考えられる。それに対し、提案手

表 9 手法 2 と提案手法の埋込条件
Table 9 The embedding condition of the conventional method 2 and the proposed method.

	ビット数	手法 2	提案手法
条件 3	212	$T1 = 20, T2 = 50$	$m = 18$
条件 4	256	$T1 = 5, T2 = 25$	$m = 12$
条件 5	512	$T1 = 4, T2 = 35$	$m = 12$
条件 6	768	$T1 = 1, T2 = 48$	$m = 12$
条件 7	768		$m = 16$

表 10 手法 2 と提案手法の埋込済画像の PSNR
Table 10 Quality of images watermarked by the conventional method 2 and the proposed method.

	手法 2 (dB)	提案手法 (dB)
条件 3	47.91	47.90
条件 4	50.46	50.52
条件 5	43.91	47.33
条件 6	38.17	45.36
条件 7	—	42.69

法は誤り率がそれほど高くなっていないことが分かる。

次に、手法 2 と提案手法のそれぞれにおける JPEG 圧縮時の抽出誤りについて比較した。表 9 は手法 2 と提案手法の埋込条件を示したものであり、表 10 はそれぞれの条件における埋込済画像の PSNR を示したものである。ここで条件 3 では手法 2 の典型的な埋込条件を設定し、条件 4 では提案手法で我々が良いと考えている埋込条件を設定している。なお、前述の条件 2 と条件 4 は全く同じ条件であるが、容易に比較しやすいようにここで再度提示している。条件 5 と条件 6 では、埋込ビット数を条件 1、条件 2 よりも増大させている。条件 7 では、条件 6 よりも提案手法の m を増大させている。条件 3 と条件 4 における二つの手法の PSNR は、ほぼ同じ値となっているが、条件 5 と条件 6 では、手法 2 の方が低くなっている。このことは、埋込ビット数が増大したことによる画質の低下が、手法 2 の方が大きいことを表している。図 3 は条件 7 における手法 2 と提案手法の埋込済画像を示したものであるが、この図からも視覚的に画質の劣化が確認できる。

表 11 は、JPEG 圧縮の品質値と抽出誤りビット数（誤り率）との関係を示したものである。埋込ビット数が小さい条件 3 と条件 4 の場合、双方の手法とも JPEG 圧縮に対する耐性があるといえる。条件 7 では $Q \geq 40$ において誤り率が 2%以下となっているため、提案手法は十分な耐性をもっていると思われる。 $Q \leq 30$ の場合の誤り率が大きくなっているが、この

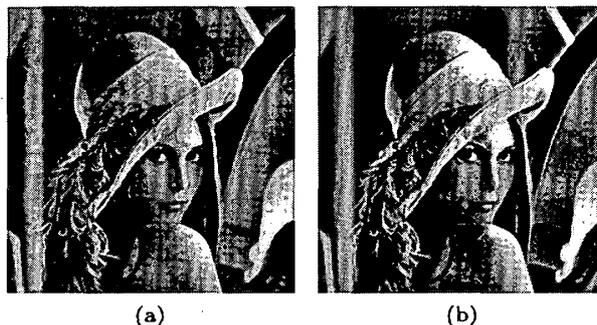


図 3 $B = 768$ の埋込済画像, (a) 手法 2, (b) 提案手法
Fig. 3 Images watermarked by two methods with $B = 768$, (a) the conventional method 2, (b) the proposed method.

表 11 手法 2 と提案手法の JPEG 圧縮による抽出誤りビット数（誤り率 [%]）

Table 11 Extracting error bit counts (error rate in %) in JPEG compressed images after watermarking by the conventional method 2 and the proposed method.

Q	条件 3		条件 4		条件 7
	手法 2	提案手法	手法 2	提案手法	提案手法
75	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)
50	0(0)	2(0.9)	1(0.4)	10(3.9)	13(1.7)
40	0(0)	3(1.4)	5(2.0)	19(7.4)	15(2.0)
30	3(1.4)	11(5.2)	24(9.4)	20(7.8)	65(8.5)
20	18(8.5)	38(17.9)	49(19.1)	31(12.1)	135(17.6)

ときの JPEG 圧縮された画像の画質は、視覚的に大きく劣化しているので、誤り率について考慮しなくてもよいと考える。

5. む す び

本論文では、ウェーブレット変換を用いた電子透かし法を提案した。本手法は、埋め込まれる電子透かしの量を制御することができ、また、抽出する際に原画像を参照する必要がないという特徴をもつ。シミュレーションより、埋込済画像の顕著な劣化なしに、多くの量の電子透かしを埋め込むことができ、JPEG 圧縮や画像処理に対する十分な耐性があることが示された。また、Inoue の手法と比べて、顕著な画質の劣化なしに、より多くの量の電子透かしを埋め込むことができることが明らかになった。更に本手法は、埋込強度 m を調整することで、画質と JPEG 圧縮耐性とのバランスをとることが可能である。

文 献

[1] C. Hsu and J. Wu, "Hidden digital watermark in images," IEEE Trans. Image Process., vol.13, no.1, pp.58-68, Jan. 1999.
[2] H. Inoue, A. Miyazaki, A. Yamamoto, and T. Katsura, "A digital watermark based on the wavelet

- transform and its robustness on image compression," IEEE ICIP'98, vol.2, pp.391-395, 1998.
- [3] R. Dugad, K. Ratakonda, and N. Ahuja, "A new wavelet-based scheme for watermarking images," IEEE ICIP'98, vol.2, pp.419-423, 1998.
- [4] M. Tsai, K. Yu, and Y. Chen, "Joint spatial and wavelet transformation for digital watermarking," IEEE Trans. Consum. Electron., vol.46, no.11, pp.241-245, 2000.
- [5] L. Xie and G.R. Arce, "A class of authentication digital watermarks for secure multimedia communication," IEEE Trans. Image Process., vol.10, no.11, pp.1754-1764, Nov. 2001.
- [6] Y. Lu and M.M. Suzuki, "A wavelet-watermark insertion technique," Proc. IEICE Gen. Conf. 2001, D-11, p.105, March 2001.
- [7] Q. Lin, Y. Lu, and M.M. Suzuki, "Multi-ordered wavelet watermark with complementary signal modulations," Proc. Inf. & Syst. Conf. IEICE 2001, D-11, p.125, Sept. 2001.
- [8] D.S. Taubman and M.W. Marcellin, JPEG2000 Image Compression Fundamentals, Standards and Practice, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [9] I. Daubechies "Ten lectures on wavelets," SIAM, May 1992.

(平成 15 年 8 月 11 日受付, 12 月 2 日再受付)