離散値系ウェーブレット変換の電磁界計算への応用

SAITO, Yoshifuru / 齊藤, 兆古

(出版者 / Publisher)
社団法人電気学会 / The Institute of Electrical Engineers of Japan

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
電気学会論文誌 A, 基礎・材料・共通部門誌 / 電気学会論文誌 A, 基礎・材料・共通部門誌

(号 / Number)
10

(開始ページ / Start Page)
833

(終了ページ / End Page)
839

(発行年 / Year)
1996-10

離散値系ウェーブレット変換の電磁界計算への応用 解説

キーワード
ウェーブレット変換，電磁界計算

斎藤兆古
法政大学工学部

1. まえがき

最近ウェーブレット変換なる用語を耳にされた方はたくさんおられるであろう。電子通信情報学会や数理関係雑誌などに解説や論文が多く掲載されている[1][2]。おそらく多くの方は，数学的議論に惑わされイメージがつかみにくく，結果としてフーリエ変換の一種と考えられたであろう。また，具体的な応用は波形や画像解析・圧縮技術分野であり，電磁界の解析とは無関係と感じられた方が大部分であろう。

本稿は，ウェーブレット変換の中で，離散値系のウェーブレット変換が単純な線形変換であり，この線形変換を行うことでデータの平均値と変化率を抽出することが可能であり，結果として，電磁界計算を近似的であるが高速に行うツールとして活用できることを解説するものである。

2. 離散値系ウェーブレット変換とは

2.1 離散値系ウェーブレット変換

離散値系ウェーブレット解析は，基底関数の直交性が常に成り立つ。これはフーリェ解析と同様に離散値系ウェーブレット解析のスペクトラムにパワーの概念が与えられることを意味する。また，離散化されたデータの個数は2のべき乗でなければならないことも大きな特徴である。近年の測定器は大部分がディジタル化され，解像度とサンプリング個数，いずれも2のべき乗であり，離散値系ウェーブレット解析はこの意味でディジタル測定器と相性の良い解析法であることが興味深い。

2.2 離散値系ウェーブレット変換の原理

（1） ウェーブレット変換行列

いま，a と b なる数値を考えてみると，この数値の線形的な組合せは

$$\left.\begin{aligned} s&=a+b \\ d&=a-b \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

が考えられる。さて，逆に s と d が与えられ a と b を求めようとすれば，

$$\left.\begin{aligned} a&=(1/2)(s+d) \\ b&=(1/2)(s-d) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

となる。（1）式の関係を行列を使って書くと，

$$\boldsymbol{X}'=C\boldsymbol{X} \qquad (3)$$

と書ける。ここで，$\boldsymbol{X}', C, \boldsymbol{X}$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{X}'=\begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

である。他方，（2）式は

$$\boldsymbol{X}=D\boldsymbol{X}' \qquad (5)$$

と書ける。ただし，行列 D は

$$D=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

である。行列 C と D の関係は

$$D\cdot C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

となる。すなわち，D は C の逆行列になっている。しかし，（6）式の行列の係数 (1/2) を C と D に平等に分配して，

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ D=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

とすれば，行列 D は C の転置行列であり，かつ逆行列となる。すなわち

$$C^{-1}=C^{T} \qquad (9)$$

である。次に a, b の2個の数値だけでなく，a, b, c なる数値の組合せを考える。この場合，

$$\left.\begin{aligned} &s_1=a+b,\ s_2=b+c,\ s_3=c+a, \\ &d_1=a-b,\ d_2=b-c,\ d_3=c-a \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

等の組合せが考えられる。この関係を行列で書くと，

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad (11)$$

となる。(11)式右辺の係数行列は6行3列の長方行列であるため，（9）式のようにうまく逆行列を得られない。これは，組み合わせる数値の個数が奇数であると（5）～（9）式のような線形変換が適用できないことを意味する。

では，a, b, c, d の4個の数値の組みを考える。最初に考えられる組合せは，

Wavelet Analysis for Computational Electromagnetics.
By *Yoshifuru Saito* (College of Engineering, Hosei University).

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ d_1 \\ s_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (12)$$

となる。これには，当然，

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ d_1 \\ s_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (13)$$

が成り立つ。しかし，a と b，c と d それぞれの組合せはできるが，a と c，b と c などの組合せはできない。このため，(12)式の左辺を並べ変えて，次の組合せを得る。

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ D_1 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (14)$$

(14)式で，a, b, c, d の4個の数値の組合せがすべてそろったこととなり，結局，もとの $\{a, b, c, d\}^T$ のベクトルは(12)式と(14)式の2回の線形変換で，和 S_1 と差 D_1, d_1, d_2 を要素とするベクトル $\{S_1, D_1, d_1, d_2\}^T$ に変換された。(14)式の逆変換は

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ D_1 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (15)$$

によって行われ，(15)式の左辺を(13)式右辺のベクトルの形に並べ変えて，(13)式に代入することで完全な逆変換ができる。(12)式から(14)式までの変換をまとめて書くと(16)式または(17)式となる。

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ D_1 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (16)$$

$$\boldsymbol{X}' = W \cdot \boldsymbol{X} \quad \cdots\cdots (17)$$

W はウェーブレット変換行列であり，この変換行列を構成する基底関数をハール（Haar）基底と呼ぶ[3]。(17)式の逆変換は W の転置行列 W^T が W の逆行列になるから，(18)式で与えられる。

$$\boldsymbol{X} = W^T \cdot \boldsymbol{X}' \quad \cdots\cdots (18)$$

次に6個の数値の組合せを考えると，(12)式と同じ形で第1回の変換は，和が3組と差が3組となり，(11)式と同様に第2回の変換はできない。従って，数値の組を和と差に分解する線形変換は，組を構成する数値の個数が，偶数でかつ，2，4，8，16，32など，2のべき乗でなければならない。

（2） ウェーブレット変換行列の物理的意味

さて，2のべき乗個のデータは総て和と差の形に表現できることがわかった。実はこれが離散値系ウェーブレット変換の骨子であり，和と差はそれぞれ積分と微分に対応する概念であるから，ウェーブレット変換は積分と微分を行うディジタルリングを行う演算と考えられる。和をとる演算，すなわち積分演算は数値を平均化する平滑フィルタであり，差をとる演算，すなわち微分演算は数値の変化率の大きい部分をとらえるフィルタとなる。このため，和の部分は全体の平均的情報を抽出し，差の部分は変化率の大きい情報を抽出する。

また，ウェーブレット変換は画像データなどに対して，画像の輪郭やコントラストの高い部分が零でないウェーブレットスペクトラムを与えることとなる。このため，画像データのすべてを記憶しなくても，画像の輪郭やコントラストの高い部分のみを記憶することが可能となり，結果として画像圧縮がなされる。画像データでなく，より一般的な波形データで考えれば，波形データのもつ変化率が急しゅんな特徴のみを抽出するのに極めて有効なディジタルフィルター演算とも解釈できる。これがウェーブレット変換のデータ圧縮原理である。

具体的な例として，データの個数が4個の場合について考える。(17)式の変換行列 W の第1行は，(16)式から，すべてのデータの和をとることを意味する。従って，(16)式の S_1 はデータの平均値的情報を表し，S_1 だけを逆変換した結果を第0次解像度解析結果と呼び，全データの平均値を表す。特に，データの平均的情報を表すウェーブレットスペクトラムをマザーウェーブレット（Mother wavelet）係数と呼ぶ。(17)式の変換行列 W の第2行は，全体のデータを前半と後半に分けて，前半と後半データ間の変化率を求める差分演算になっている。従って，(16)式の D_1 だけを逆変換すると，全体を2分割した場合の変化率を表すこととなり，第1次解像度解析結果と呼ぶ。(17)式の変換行列 W の第3，4行は，隣接するデータ間の変化率を求める差分演算となっている。このため，(16)式の d_1, d_2 だけを逆変換した結果は最も高周波の変化率を表すこととなり，第2次解像度解析結果と呼ぶ。

以上のことから，離散値系ウェーブレット変換は，与えられたデータで，全データの平均値と大きなグループから隣接するデータまでの変化率を抽出する変換であることが明らかであろう。また，2のべき乗である n 個のデータは $\log[n]/\log[2]$ 次までの解像度で解析ができる。

（3） 高次のウェーブレット係数

いままでは2のべき乗からなるデータベクトルを和と差にわける最も単純なハール基底によるウェーブレット変換について述べた。和と差の概念はそれぞれ積分と微分に対応するが，積分や微分には重み付きで行う場合がある。例えば，ガウス(Gauss)型の数値積分公式などがその典型的な例である。ここではウェーブレット変換の和や差をとる場合，重み付きで行うことを考えよう。換言すれば，重み付き積分・微分演算の概念をウェーブレット変換に導入し，高次の係数を使ったウェーブレット変換へ一般化する。

さて，2のべき乗の要素からなるデータベクトル $\boldsymbol{X}$ を

線形変換する演算(3)式では，行列 C が隣接する要素間の和と差をとる演算子であった。ここでは(19)式のような4個の係数 c_0, c_1, c_2, c_3 をもつ変換行列 C を考える。

$$C=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & c_3 & -c_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (19)$$

(19)式で，第1行はベクトル $\boldsymbol{X}$ の要素1から4までにそれぞれ係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を重みとする平均値をとることを意味する。第2行はベクトル $\boldsymbol{X}$ の要素1から4までにそれぞれ係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を重みとする差分をとることを意味する。換言すれば，(19)式の第1行は重みをつけた積分演算に対応するディジタルフィルタであり，第2行は重みをつけた微分演算に対応するディジタルフィルタであり，第2行は重みをつけた微分演算に対応するディジタルフィルタである。第3，4行はそれぞれベクトルの要素3から6までに対する積分と微分演算を行うことを意味する。従って，積分と微分演算はハール基底の場合と同様にベクトルの2要素ずつシフトして循環する形で行われる。

次に，逆変換を可能とするために

$$C^T C=I \quad \cdots\cdots (20)$$

の条件が成り立つことが必要である。I は C と同じ次数をもつ単位正方行列を示す。(20)式の条件より

$$\left.\begin{aligned} c_0^2+c_1^2+c_3^2&=0 \\ c_2c_0+c_3c_1&=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (21)$$

が成り立つ。しかし，式の数が未知数の数より少なく，(21)式から係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を決めることはできない。このため，次の条件を追加する。

$$\left.\begin{aligned} c_3-c_2+c_1-c_0&=0 \\ 0c_3-1c_2+2c_1-3c_0&=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (22)$$

(22)式で，最初の条件は入力データが一定値であれば常に零となることを意味する。第2の条件は入力データが単調増加であっても常に零であることを意味する。従って，入力データが2次関数以上の変化率をもつとき，第1段階の差分演算を受けた項は零でない値をもつ。第2段階は重み付き積分もしくは平均値の項で2次関数以上の変化率を抽出する演算となる。このことから，この場合のウェーブレット演算はハール基底を用いたウェーブレット演算よりも大きな変化率の部分のみを抽出する変換となる。

(21)式に(22)式の条件を追加することで

$$\left.\begin{aligned} c_0&=\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ c_1=\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ c_2&=\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ c_3=\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (23)$$

として(19)式の要素が求められる。このようにして高次の係数を決めた基底関数をドビッシー (Daubechies) 基底と呼ぶ[3]。

3．電磁界計算への応用

3.1 電磁界計算のシステム方程式

(1) 離散化

電磁界計算はどのような離散化法であっても結局，連立方程式を解くことに問題が帰する。ここでは一般的なシステム方程式

$$\boldsymbol{Y}=C\boldsymbol{X} \quad \cdots\cdots (24)$$

を考える。$\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, C$ はそれぞれ n 次の入力ベクトル，m 次の解ベクトル，そして n 行 m 列のシステム行列とする。ただし，n と m は2のべき乗とする。

(2) ウェーブレット変換

W_n と W_m をそれぞれ n 次と m 次のウェーブレット変換行列とすれば，(24)式は

$$W_n\boldsymbol{Y}=(W_nCW_m^T)(W_m\boldsymbol{X}) \quad \cdots\cdots (25)$$

によってウェーブレット変換される。いま，上式の各演算を以下のように書くとすれば，

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{X}'&=W_m\boldsymbol{X} \\ C'&=W_nCW_m^T \\ \boldsymbol{Y}'&=W_n\boldsymbol{Y} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (26)$$

(25)式は次式のように書き直される。

$$\boldsymbol{Y}'=C'\boldsymbol{X}' \quad \cdots\cdots (27)$$

3.2 システム方程式の近似解

(1) 不適切な線形システム

システム方程式が正方行列でなく，$m>n$ の場合について考える。具体的な問題は図1に示すように平行に配置された m 本の導体に流れる電流を，導体の上方で磁界を n 点測定して求める逆問題である。

図2は $n=16$，$m=64$ とした場合のシステム方程式を図示している。この問題は式の数 n が16で未知数の数 m が64であるから，従来の線形代数の手法では何らかの拘束条件を用いない限り一意的な解は得られない。

図3はシステム行列をウェーブレット変換したシステム行列 C' を示している。図3から，システム行列 C' の(1, 1)から(16, 16)要素までは対角線上に非零要素がならび，かつこれらの対角線上の要素の絶対値は他の要素に比較して大きな値であることがわかる。図4に図3の(1, 1)から(n, n)，$(n=16)$，要素までの部分正方行列 C'' を示す。明らかにこの部分正方行列 C'' は非特異行列であり，逆行列をもつ。

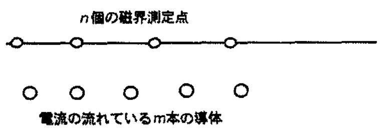


図1　n 点の磁界測定から m 個の導体に流れる電流を求める問題

さて，図1に示すシステム行列 C は $n(=16)$ 行 $m(=64)$ 列であるから，これの逆行列 C^{-1} は $m(=64)$ 行 $n(=16)$ 列と仮定する。いま，逆行列 C^{-1} をウェーブレット変換した行列を C'^{-1} とすれば，ウェーブレット変換された解ベクトル $\boldsymbol{X}'$ は，(27)式から

$$\boldsymbol{X}'=C'^{-1}\boldsymbol{Y}' \quad \cdots\cdots(28)$$

と書ける。(26)式から，(28)式の両辺のベクトルは

$$W_m\boldsymbol{X}=C'^{-1}W_n\boldsymbol{Y} \quad \cdots\cdots(29)$$

と書き直されるから，(29)式の両辺へ W_m^T を掛け算すれば，

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{W}_m^TC'^{-1}W_n\boldsymbol{Y} \quad \cdots\cdots(30)$$

として解ベクトル $\boldsymbol{X}$ が得られる。また，システム行列のウェーブレット逆変換は

$$C^{-1}=W_m^TC'^{-1}W_n \quad \cdots\cdots(31)$$

で計算される。

問題は(28)式の C'^{-1} をいかに求めるかである。ここでは，C'^{-1} が $m(=64)$ 行 $n(=16)$ 列の長方行列で，$(1,1)$ から (n,n) 要素までの部分正方領域へ図4に示されている正方行列 C'' の逆行列 C''^{-1} を入れ，残りの要素をすべて零としたものとする。

次の問題は C'^{-1} を(31)式によりウェーブレット逆変換して得られる C^{-1} の評価である。はたして解が存在し，一意的に決まる逆行列であろうか。

解の存在は，I_n を n 次の単位正方行列として，

$$CC^{-1}=I_n \quad \cdots\cdots(32)$$

を満足するかどうかで確認される。

図5に(32)式の計算結果を示す。図5の結果からウェーブレット変換によって得られる逆行列には必ず解が存在することが確認できる。

次に解は，I_m を m 次の単位正方行列として，

$$C^{-1}C=I_m \quad \cdots\cdots(33)$$

が満足されるとき，一意的に決まる。**図6**に(33)式を計算した結果を示す。図6から，解は完全に(33)式を満足せず，近似的に満足するようである。解ベクトル $\boldsymbol{X}$ がどの程度の近似で得られているかを**図7**に示す。図7で，太線と細線がそれぞれ正解とウェーブレット変換による近似解である。

ここで取り上げた例は磁界の測定から電流を求める問題であり，磁界の測定点数 n よりも電流の流れる導体数 m のほうが多い不適切に設定されたシステムである。このため，従来の方法では何らかの拘束条件を適用しないと解けない問題であった。しかし，ウェーブレット変換を用いれば，近似解が可能であることを述べた。これが代表的なウェーブレット変換による電磁界解析の例であり，従来の手法では不可能であった解析を近似的にせよ可能とすることがわかる。

（2） 固有値問題

固有値は通常正方行列に対して定義される。このため，ここでは一次元ポアソン型の支配方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=-\sigma \quad \cdots\cdots(34)$$

を x 軸方向へ3点差分公式で離散化した線形システムを考える。

図8が例題として取り上げるシステムの係数行列である。図8で，対角線上の要素はすべて2，対角線に隣接する要素は-1，残りはすべて零である。これは x 軸の両端が零の固定境界条件で導かれたシステム行列であることを意味する。

図8をウェーブレット変換したシステム行列は，**図9**に示すように対角線上の要素がすべて非零値をとり，このシステム行列に逆行列が存在することを意味する。また，図9の要素は，$(1,1)$ 要素近傍に絶対値の大きな値が存在しない。これが，有限差分法や有限要素法の離散化法で得られたシステム行列をウェーブレット変換した場合の特徴である。

さて，図8のシステム行列とそれをウェーブレット変換した図9の行列は対称行列であるから，固有値はすべて実数である。図8のシステム行列と図9のシステム行列で $(1,1)$ から $(8,8)$ 要素までの部分正方行列，それぞれの固有値を**図10**に示す。太線が図8の行列，細続が図9の部分正方行列の固有値にそれぞれ対応する。もとのシステム行列は16次の正方行列であるから，16個の固有値を有する。これに対し，半分の大きさ8次に縮小した部分正方行列は8個の固有値をもち，これらの大きさはもとの行列のちょうど半分の大きさであることが，図10からわかる。すなわち，有限差分法で離散化して得られたシステム行列をウェーブレット変換し，半分の大きさに圧縮したシステム行列の固有値は本来の固有値で値の大きい部分を半分の大きさで保持する。これは，閉領域拡散問題などをウェーブレット変換によりシステムを縮小して近似解析を行うと，近似解は厳密な解よりも早く定常状態に達することを意味する。

図11は，次式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\kappa\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\sigma \quad \cdots\cdots(35)$$

の拡散方程式をウェーブレット変換し，モーダル解析法によって求めた近似解であり，**図12**の厳密解に比較して早く定常状態に達していることがわかる。

（3） 最小二乗法

ここでは，式の数 n が未知数の数 m よりも多い線形システムをウェーブレット変換で解くことを試みる。

通常，ある実験値が得られたとき，これをパラメータ x のべき級数の三次までの項で近似しようとすると，

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \quad \cdots\cdots(36)$$

であるから，n 個の測定点に対して，

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=a+bx_1+cx_1^2+dx_1^3 \\ f(x_2)=a+bx_2+cx_2^2+dx_2^3 \\ \cdots\cdots \\ f(x_n)=a+bx_n+cx_n^2+dx_n^3 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(37)$$

が成り立つ。$m=4$ 個の係数 a, b, c, d を決めることは

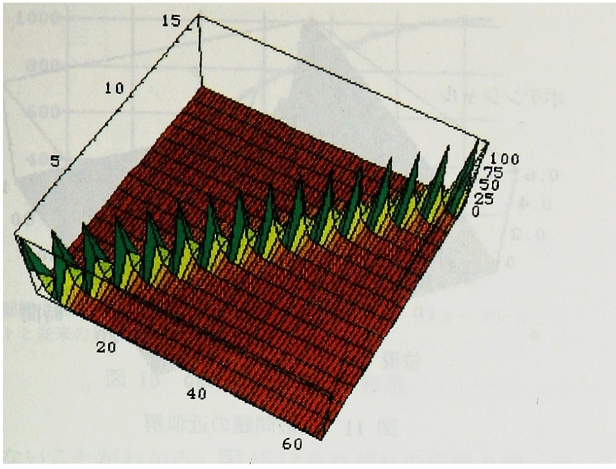


図 2　16×64 のシステム行列 $\boldsymbol{C}$

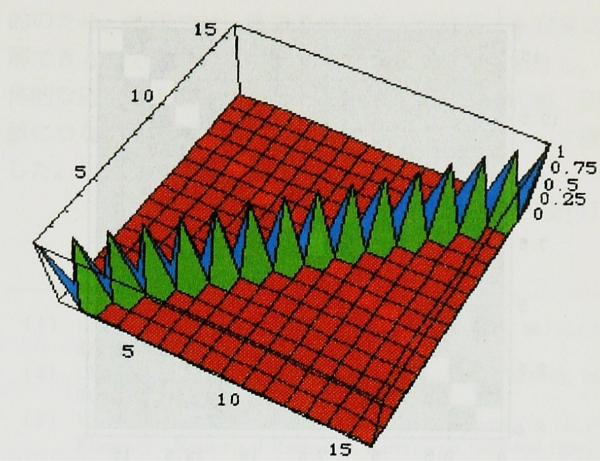


図 5　右側逆行列チェック

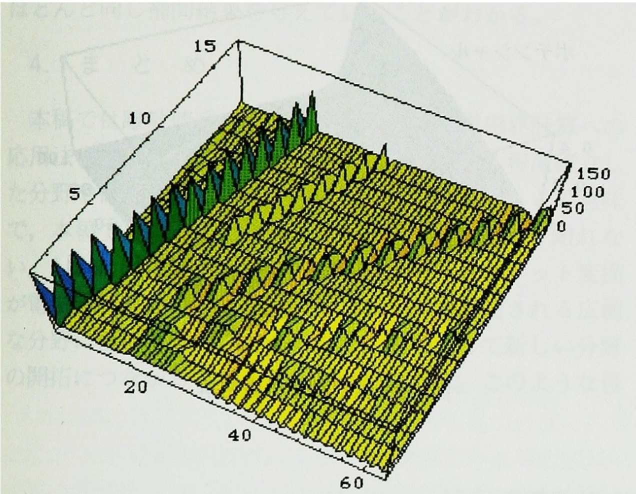


図 3　ウェーブレット変換されたシステム行列 $\boldsymbol{C}'$

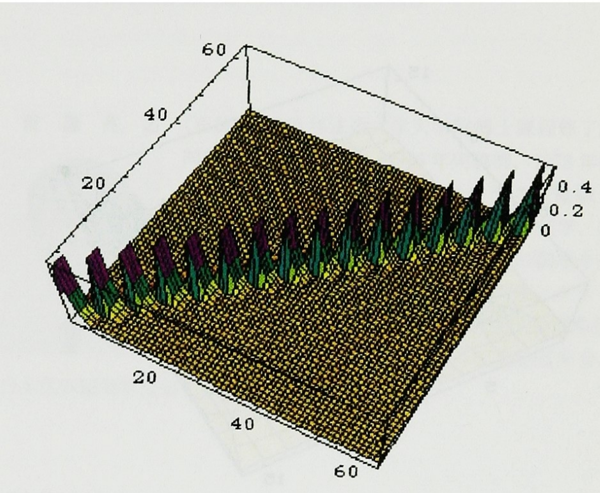


図 6　左側逆行列チェック

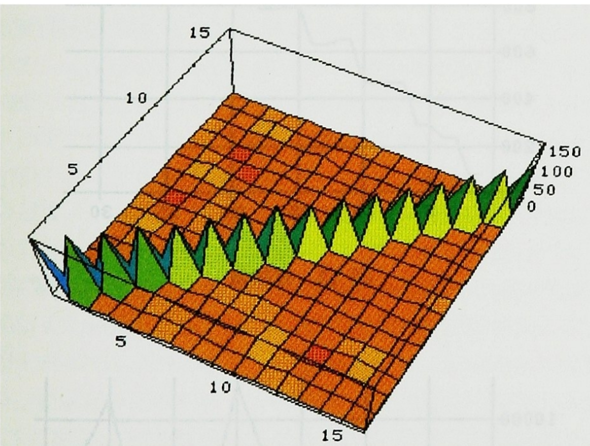
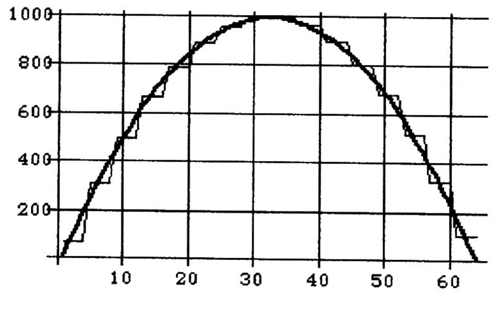


図 4　部分システム行列 $\boldsymbol{C}''$



横軸：導体の位置，縦軸：電流

図 7　厳密な解ベクトル（太線）とウェーブレット変換による解ベクトル（細線）

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \cdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ or } \boldsymbol{Y} = C\boldsymbol{X} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

を解くことに帰する。

最小二乗法による解は

$$\boldsymbol{X} = (C^T C)^{-1} \cdot C^T \boldsymbol{Y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (39)$$

となる[4]。(39)式で得られる解 a, b, c, d を(36)式に代入すれば測定値を表す近似式が得られる。

具体的な例として，図 13 のようにばらつく実験値が得られているものとする。

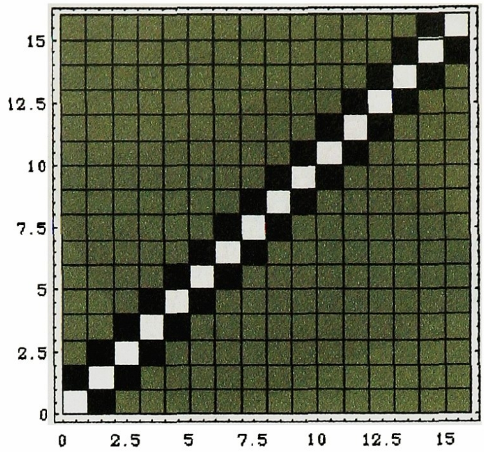


図 8　固有値問題のシステム行列

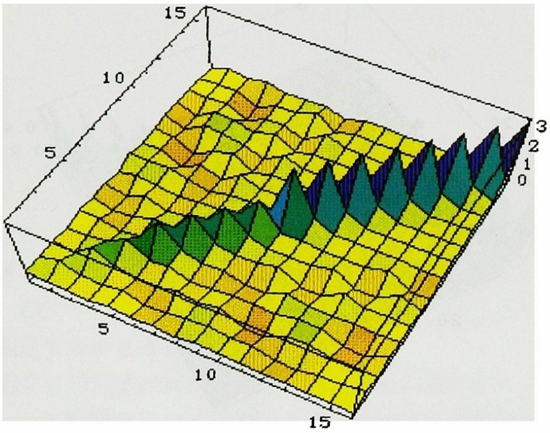
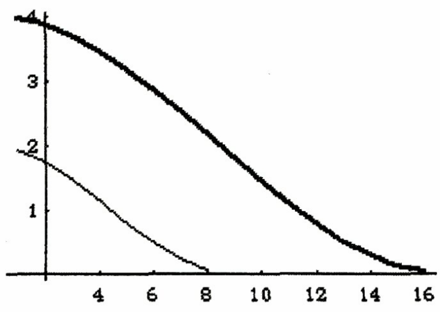


図 9　図 8 に示す行列をウェーブレット変換したシステム



太線：もとの行列，細線：ウェーブレット変換した行列で半分の大きさにした行列，横軸：個数，縦軸：固有値の大きさ

図 10　固有値

この場合，測定点の数は $n=32$ である。これに(36)式と同様な近似式を適用する。システム方程式を，$m=8$ として $m>n$ の場合と同様な手順で解く。

図 14 に(36)式の係数を示す。細線が(39)式による従来の最小二乗法による係数であり，太線がウェーブレット変換によって得られた係数である。ウェーブレット変換によって得られた係数は最小二乗法に比較して係数の値がばら

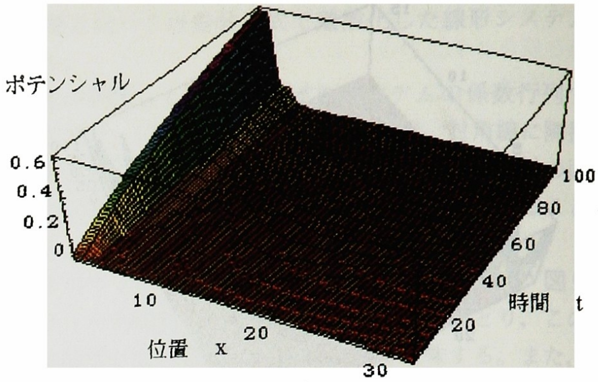


図 11　拡散問題の近似解

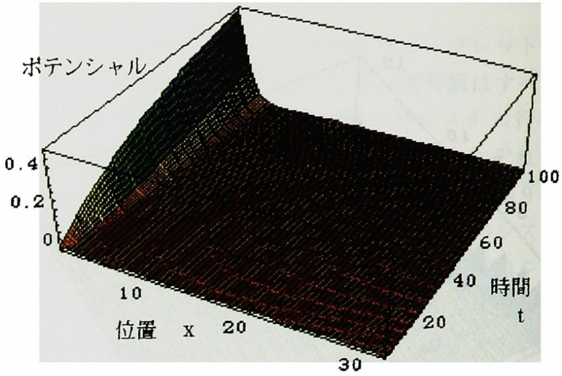


図 12　拡散問題の厳密解

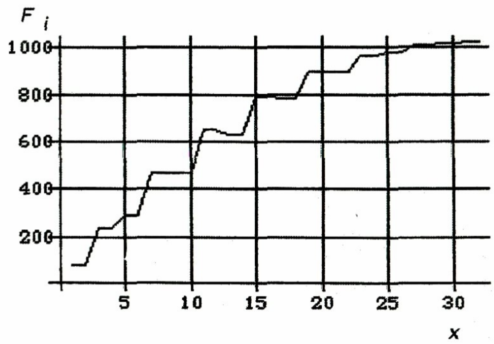
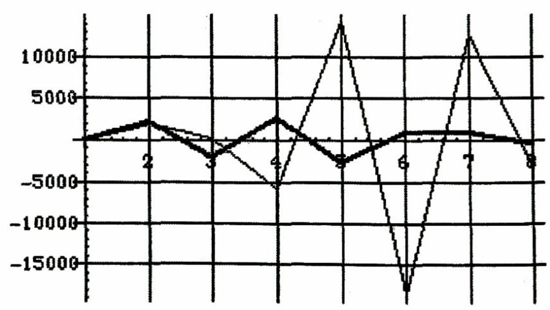
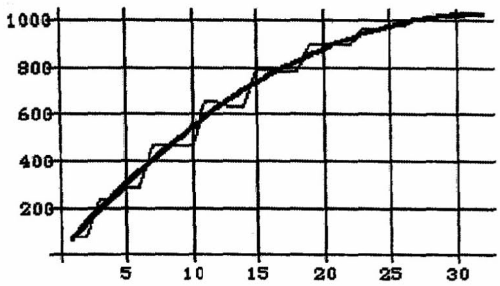


図 13　実験値



太線：ウェーブレット変換，細線：最小二乗法

図 14　(32)式の係数



細線：図13の実験値，太線：(32)式による計算（ウェーブレットと従来の最小二乗法の結果が重なっている）

図 15　(32)式による近似結果

つかないことがわかる。図15はそれぞれの係数を使って(36)式から計算された補間曲線である。係数が違っても，ほとんど同じ補間結果を与えていることがわかる。

4. ま と め

本稿では離散値系ウェーブレット変換の電磁界計算への応用法について概説した。本来，解説とはある程度確立した分野や領域についてなさるのが普通であろう。この意味で，本稿で述べた内容は解説よりも論文向きかも知れない。しかし，あえて解説にしたのは，ウェーブレット変換が電磁界計算のみならず，線形システムで記述される広範な分野に極めて強力な方法となり，結果として新しい分野の開拓につながると考えられるためである。このような目的のため，本稿では，電気系技術者・研究者にも容易に理解できる形で離散値系のウェーブレット変換を紹介し，具体的な応用例として，磁界から電流を求める逆問題，固有値につながる拡散問題，更に補間法への応用について概説した。

(平成8年6月7日受付)

文　献

(1)　山口昌哉・山田道夫：「ウェーブレット解析」，科学，**60**，No. 6，398～405（平2）
(2)　山田道夫：「ウェーブレット解析とその応用」，信学誌，**76**，518～528（平5-5）
(3)　W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vettering & B. P. Flannery : Numerical Recipes in Fortran pp. 584～599 (1992) Cambridge University Press
(4)　G. ストラングス（山口昌哉，井上　昭 訳）：線形代数とその応用，第10刷，pp. 113～134（平元）産業図書

斎 藤 兆 古（正員）1975年法政大学大学院博士課程修了。同年3月同大学助手，1976年同講師，1978年同助教授，1987年同教授，現在に至る。電磁気学，電気機器，大学院応用数学，電磁気学，電気機器，大学院応用数学，電磁力学の講座を担当。主として，計算電磁力学，逆問題，ウェーブレット変換応用の研究などに従事。工学博士。IEEE，電子通信情報学会，日本応用磁気学会，日本生体磁気学会会員。