

位相差を有する引張圧縮-ねじりの組合せ応力下における疲労寿命評価について

高橋, 秀夫 / Misumi, Masaaki / Tomaru, Takamichi /
Takahashi, Hideo / Ohkawa, Isao / 三角, 正明 / 都丸, 高
道 / 大川, 功

(出版者 / Publisher)

社団法人日本材料学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

材料 / 材料

(号 / Number)

58

(開始ページ / Start Page)

1459

(終了ページ / End Page)

1465

(発行年 / Year)

1991-11-15

位相差を有する引張圧縮-ねじりの組合せ応力下における 疲労寿命評価について†

大 川 功* 高 橋 秀 夫*
都 丸 高 道** 三 角 正 明***

Fatigue Life Evaluation under Out-of-Phase Push-Pull and Torsion

by

Isao OHKAWA*, Hideo TAKAHASHI*, Takamichi TOMARU**
and Masaaki MISUMI***

This paper discusses the stress-based evaluation of fatigue life under both in-phase and out-of-phase combined loading conditions. Load controlled fatigue tests were performed on a low carbon steel under combined push-pull and completely reversed torsion in the intermediate to high cycle regime. Phase differences between two loadings were 0°, 45° and 90°.

Experimental data showed that the increase of phase difference resulted in the increase of fatigue life under combined loadings. This may be explained by the decrease of plastic strain range due to material hardening in out-of-phase conditions.

Gough's ellipse quadrant was generalized to out-of-phase loadings by taking account of the phase differences. This criterion can be easily applied but slightly overestimates the actual life. A modification of Lee's criterion, which was also an extension of Gough's equation, showed good agreement with the observed life. Furthermore, Brown-Miller's theory expressed in terms of the shear and normal stresses on the maximum shear plane was applied to out-of-phase fatigue. As a result, the fatigue lives under push-pull, torsion and combined in- and out-of-phase loadings were well correlated by Brown-Miller's criterion.

Key words : Out-of-phase loading, Combined stress, Fatigue life evaluation,
Equivalent stress, Push-pull, Torsion

1 緒 論

実機は、一般に複雑な組合せ繰返し荷重下で使用されることが多いことから、これまでに応力やひずみの多軸性を考慮した寿命評価法が数多く提案されてきた。

多軸応力下での疲労寿命評価に関する研究は Mises, Tresca といった静的降伏理論を多軸疲労へと拡張することから始まり、その後、疲労を前提とする各種の寿命評価式が提案され、近年ではき裂の発生、伝ばの臨界面上での応力、ひずみにより破壊が起こるとして導出された評価法も提唱されている。

一般的な多軸応力状態においては、応力あるいはひずみ間に位相差を有することから、この位相差が寿命に及ぼす影響について考慮する必要がある。位相差を有する場合 (out-of-phase) の疲労寿命の評価については、これまでに^{1)~7)} 応力、^{8)~17)} ひずみ、あるいはその両方お

よび塑性ひずみエネルギー¹⁹⁾に基づく各種評価法が提案されている。out-of-phase での実験例は数例を除いて^{1), 6), 9)} 延性材についてのものが多く、そのほとんどが曲げ-ねじり^{1)~3), 5)~7)} または引張圧縮-ねじり^{8)~19)} の組合せによるものである。高温での結果を除外し、室温での位相差の影響についてみると、位相差の増加にともない寿命は増加する、あるいは逆に減少するとの報告がある。これらは材料、^{1), 5), 6)} 応力、^{3), 12)} ひずみ比および寿命域 (応力、ひずみレベル)^{18), 19)} に依存し、あるいは寿命評価パラメータの選

び方にも関係があるようである。本研究では、低炭素鋼を用い、室温において位相差を有する引張圧縮-ねじりの組合せ応力条件下で疲労試験を行い、この試験結果に基づき、疲労限度を含めた中、高サイクル域の比較的広い範囲での寿命を統一的に評価し得る応力基準の評価パラメータについて検討した。

† 原稿受理 平成 3 年 1 月 28 日 Received Jan. 28, 1991

* 正 会 員 法政大学工学部 小金井市梶野町, Faculty of Engineering, Hosei University, Kajino-cho, Koganei

** 法政大学大学院 小金井市梶野町, Graduate Student, Hosei University, Kajino-cho, Koganei

*** 正 会 員 成蹊大学工学部 武蔵野市吉祥寺北町, Faculty of Engineering, Seikei University, Kita-machi, Kichijoji, Musashino

Table I. Chemical composition, heat treatment and mechanical properties.

Chemical composition (%)	C	Si	Mn	P	S	Al
	0.120	0.010	0.350	0.020	0.015	0.025
Heat treatment	920°C 1 hr FC, 710°C 4 hr FC, 550°C 4 hr FC, 400°C 8 hr FC, 300°C 8 hr FC, 200°C 12 hr FC, 100°C 24 hr FC					
Mechanical properties	Yield stress in tension (MPa)					252
	Tensile strength (MPa)					328
	Elongation (%)					46
	Contraction of area (%)					74
	Yield stress in torsion (MPa)					118
	Torsional strength (MPa)					492
	Micro-vickers hardness Hv					85

FC; Furnace cooling in vacuum.

2 試料および実験方法

供試材は Al キルド低炭素鋼 CH10A で, その化学成分, 熱処理および機械的性質を Table I に示す. 直径 19 mm の丸棒素材から Fig. 1 に示す中実試験片に切削加工後, 段階的な徐冷を施し, 時効能を約 2 % に抑えた.

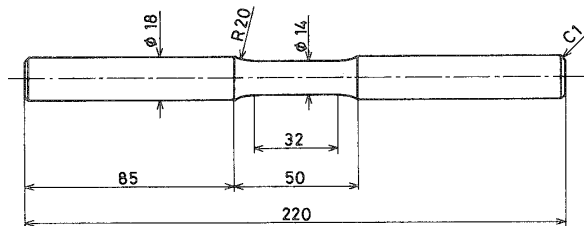


Fig. 1. Specimen geometry.

疲労試験には電気油圧サーボ式複合応力試験機 (鷺宮製作所製, 軸力荷重 98 kN, ねじり負荷 980 N・m) を用い, 室温において引張圧縮とねじりの組合せ応力下で, 繰返し速度 5 Hz の荷重制御両振試験を行った. 組合せ応力比は $\lambda = \tau_0 / \sigma_0 = 1 / \sqrt{3} = 0.577$ で, 応力間の位相差は $\phi = 45^\circ$ および 90° とし, 中, 高サイクル域での寿命のばらつきを考慮して, いずれの位相差の場合についても 15 本以上の試験を行った. 一部の試験片については平行部中央に貼ったひずみゲージにより表面ひずみの測定を行い, ロードセルより得られる荷重信号を用いてヒステリシスループを求め, これより塑性ひずみ幅を算出した. なお, 引張圧縮, ねじりの各単一応力および組合せ同位相 ($\phi = 0^\circ$) の場合の寿命については, 既報の結果を用いた.

3 実験結果および考察

3・1 弾性破損説による寿命評価

Fig. 2 は, 10^5 および 5×10^6 回時間強度における引張圧縮, ねじりの負荷応力振幅 σ_0 , τ_0 をプロットしたものである. また一般に延性材に適用される Mises, Tresca 説およびぜい性材に対する Rankine 説による等寿命線を合わせて示す. これより, 低炭素鋼の中,

高サイクル域では, 同一寿命に対する負荷応力振幅は位相差にともなって増大し, 同位相 (in-phase) に対し安全側となることわかる.

ここで位相差 ϕ を有する場合, 角速度を ω , 引張

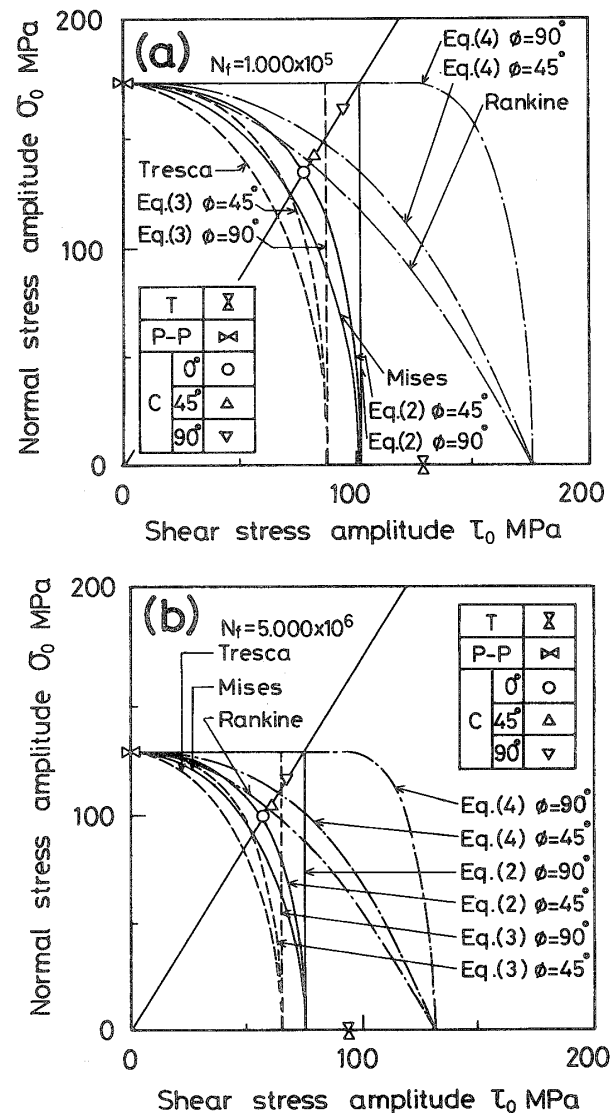


Fig. 2. Fatigue strength diagrams

(a) $N_f = 10^5$, (b) $N_f = 5 \times 10^6$.

圧縮, ねじりの各応力の時間的变化を

$$\sigma = \sigma_0 \sin \omega t, \quad \tau = \tau_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (1)$$

と表し, 応力比を $\lambda = \tau_0 / \sigma_0$ とすると, Mises の等価応力振幅の最大値は

$$\sigma_{ME} = [\sigma_0^2 \sin^2 \omega t + 3\lambda^2 \sin^2(\omega t - \phi)]^{1/2} \Big|_{\max} \quad (2)$$

により与えられる. また, 同様な手法で位相差のある場合に拡張した Tresca の等価応力は

$$\sigma_{TE} = [\sigma_0^2 \sin^2 \omega t + 4\lambda^2 \sin^2(\omega t - \phi)]^{1/2} \Big|_{\max} \quad (3)$$

である. さらに, Rankine 説を拡張した等価応力は

$$\sigma_{RE} = \sigma_0 [\sin^2 \omega t + \lambda^2 \sin^2(\omega t - \phi)]^{1/2} \Big|_{\max} / 2 \quad (4)$$

となる. 式(2)~(4)による等寿命線を Fig. 2 中に示す.

また Fig. 3~Fig. 5 は引張圧縮の試験結果に基づき,

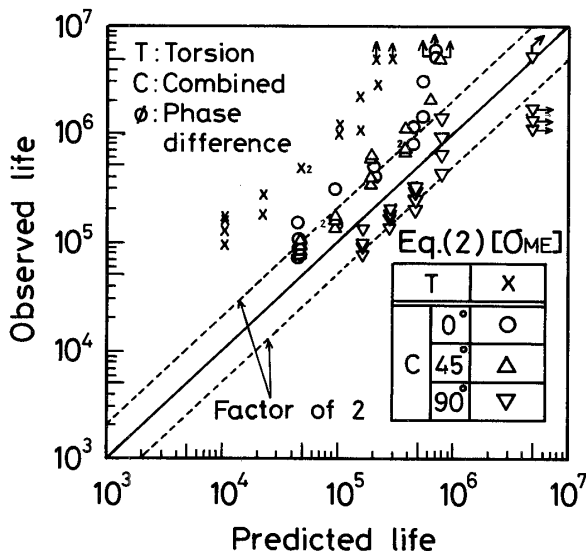


Fig. 3. Life evaluation based on eq. (2) $[\sigma_{ME}]$ with push-pull fatigue data.

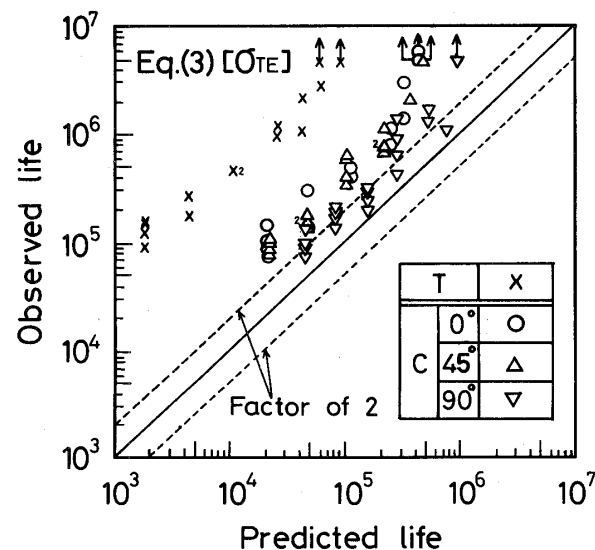


Fig. 4. Life evaluation based on eq. (3) $[\sigma_{TE}]$ with push-pull fatigue data.

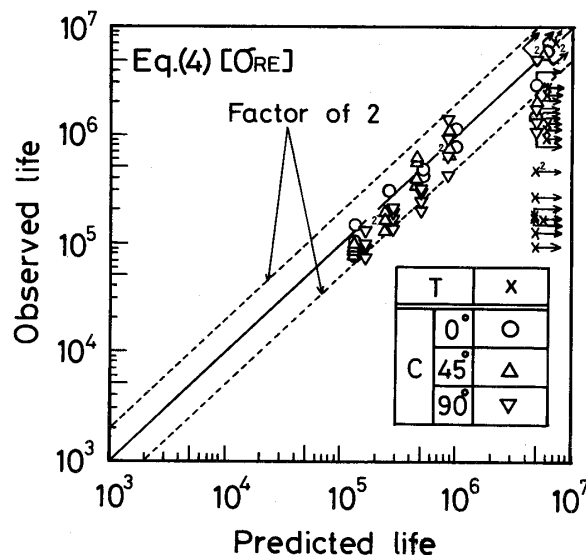


Fig. 5. Life evaluation based on eq. (4) $[\sigma_{RE}]$ with push-pull fatigue data.

それぞれ式(2)~(4)の等価応力を用いて, ねじりおよび組合せ応力下(以下, 図中で T および C と記す)での寿命評価を行ったものである. 平らは⁸⁾低炭素鋼の高温低サイクル試験結果に対し, 式(2)の形の等価ひずみ有効であることを示したが, 本試験結果に対し式(2)~(4)のパラメータを用いると, いずれも out-of-phase の結果は in-phase よりも危険側に評価される. しかし, 式(3)はいずれの負荷形式に対しても単軸の試験結果から安全側の寿命評価を与えることがわかる.

3・2 Gough の 1/4 だ円説による寿命評価

前報において, 引張圧縮-ねじりの組合せ同位相の試験結果は, 延性材の曲げ-ねじりの疲労限度に対して示された実験式, Gough の 1/4 だ円説に基づく等価応力によりほぼ整理できた. 本研究ではこれを位相差のある場合に拡張して適用する.

式(2)~(4)と同様に, 位相差の影響を考慮すると, Gough の等価応力

$$\sigma_{GE} = [\sigma_0^2 \sin^2 \omega t + k^2 \sin^2(\omega t - \phi)]^{1/2} \Big|_{\max} \quad (5)$$

が得られる. 上式中の k は引張圧縮とねじりの時間強度比 σ_N / τ_N で, k の値は繰返し数 N の増加にともない, 減少する傾向がみられ, 本研究では $k = 1.38 \sim 1.24$ の範囲にある. 式(5)による等寿命線を Fig. 6 中に示す. また, Fig. 7 は引張圧縮の試験結果により寿命評価を行ったものである. この σ_{GE} を用いるとねじりおよび組合せ応力下の寿命をかなりの程度まで整理することができるが, いずれも若干危険側に評価される.

つぎに, Lee⁵⁾が Gough の 1/4 だ円説を位相差 ϕ を有する場合を含めて一般化した等価応力

$$\sigma_L = (\sigma_0^\alpha + k^\alpha \tau_0^\alpha)^{1/\alpha} = \sigma_0 (1 + k^\alpha \lambda^\alpha)^{1/\alpha} \quad (6)$$

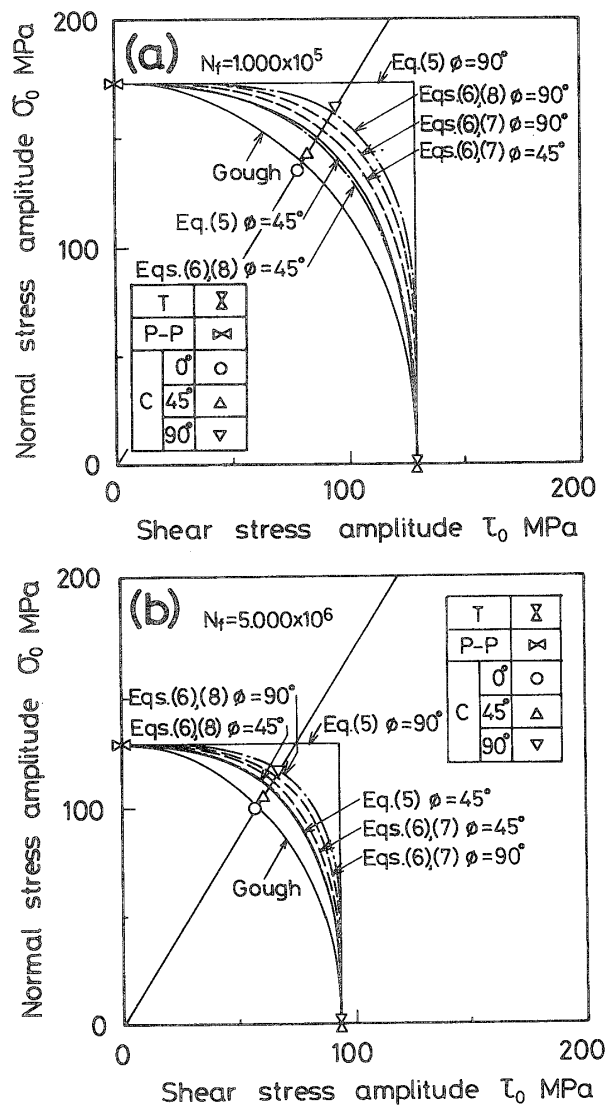


Fig. 6. Fatigue strength diagrams
(a) $N_f = 10^5$, (b) $N_f = 5 \times 10^6$.

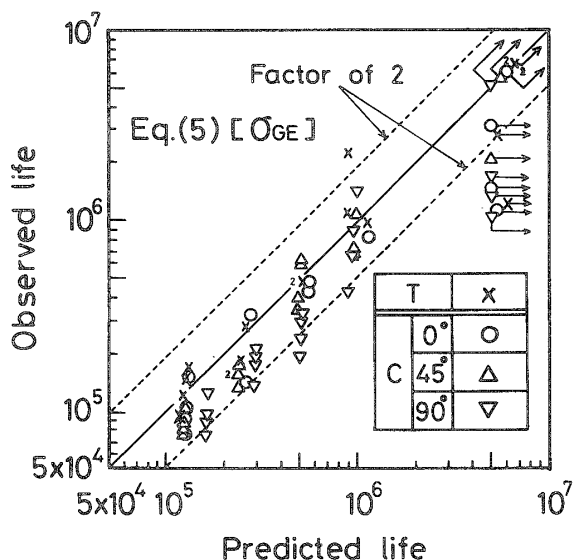


Fig. 7. Life evaluation based on eq. (5)
[σ_{GE}] with push-pull fatigue data.

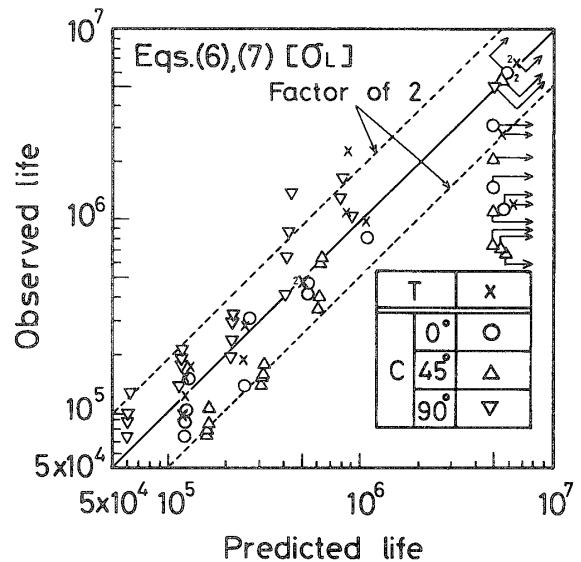


Fig. 8. Life evaluation based on eq. (6), (7)
[σ_L] with push-pull fatigue data.

$$\alpha = 2(1 + \beta \sin \phi) \quad (7)$$

による等寿命線を Fig. 6 中に, またこの σ_L により試験結果を整理したものを Fig. 8 に示す. 式 (7) 中の β は材料定数で, $\beta > 0$ なら同位相の場合に対して安全側, $\beta < 0$ なら危険側に寿命点がくることを意味する. しかし, 本研究では $\phi = 45^\circ, 90^\circ$ の両試験結果より求めた β の最適値は 0.67 であるが, $\phi = 45^\circ$ の寿命点は危険側, $\phi = 90^\circ$ の寿命点は逆に安全側に評価される.

そこで, 位相差 ϕ の寿命に及ぼす影響を表す式 (7) を修正し,

$$\alpha = 2[1 + \beta(1 - |\cos \phi|)] \quad (8)$$

とした場合の等寿命線を Fig. 6 中に示す. また, この等価応力 σ_{LM} を用い, $\beta = 0.93$ として整理した結果を Fig. 9 に示す. この σ_{LM} を用いると, 疲労限度におい

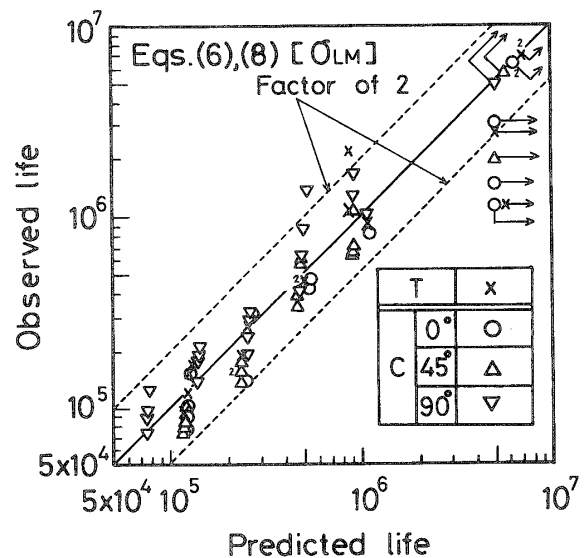


Fig. 9. Life evaluation based on eq. (6), (8)
[σ_{LM}] with push-pull fatigue data.

ては寿命のばらつきの大きさを反映して危険側に評価される場合もあるが、中、高サイクル域の比較的広い範囲での寿命をほぼ統一的に整理することができる。

3・3 最大せん断面上での応力に基づく寿命評価

Brown^{21), 22)}らはき裂の観察に基づき、組合せ同位相の場合に対し、最大せん断ひずみとその作用面上での垂直ひずみにより描かれた等寿命線を用いた寿命評価法を提唱した。out-of-phaseの場合についても、これらのひずみパラメータの重要性が指摘されており、等寿命線より得られる等価せん断ひずみ幅を用いて延性材の高温低サイクル寿命を整理した研究例も報告されている。^{15), 16)}

本研究では、最大せん断応力とその作用面上での垂直応力に基づき、out-of-phaseの場合にも適用し得る等価応力について以下検討し、これを用いて低炭素鋼の中、高サイクル疲労試験結果の整理を試みた。

引張圧縮とねじりの組合せ応力状態において、負荷垂直応力 σ とせん断応力 τ の時間的変化は式(1)で与えられるから、試験片軸方向から θ 傾いた面上でのせん断応力と垂直応力は次式より求められる。

$$\tau_{\theta} = A \sin(\omega t + \gamma), \quad \sigma_{\theta} = B \sin(\omega t + \delta)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A &= \sigma_0 \{ \lambda \cos 2\theta \cos \phi - 1/2 \sin 2\theta \}^2 \\ &\quad + (\lambda \cos 2\theta \sin \phi)^2 \}^{1/2} \\ B &= \sigma_0 \{ \cos^2 \theta + \lambda \sin 2\theta \cos \phi \}^2 \\ &\quad + (\lambda \sin 2\theta \sin \phi)^2 \}^{1/2} \\ \tan \gamma &= - \frac{\lambda \cos 2\theta \sin \phi}{\lambda \cos 2\theta \cos \phi - 1/2 \sin 2\theta} \\ \tan \delta &= - \frac{\lambda \sin 2\theta \sin \phi}{\cos^2 \theta + \lambda \sin 2\theta \cos \phi} \end{aligned} \right\} (9)$$

τ_{θ} の振幅 A が最大となる方向 θ_m は

$$\tan 4\theta_m = 4\lambda \cos \phi / (1 - 4\lambda^2) \quad (10)$$

で与えられるから、式(9)と式(10)より、最大せん断応力 $\tau_{\max}$ とその作用面上での垂直応力 σ_n が求まる。各単一応力とin-phaseの場合、 $\tau_{\max}$ 、 σ_n の代表値としてその応力振幅 A 、 B を用いた。out-of-phaseの場合

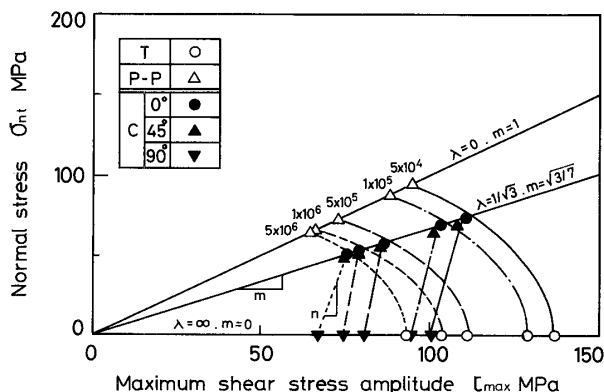


Fig. 10. Contours of constant fatigue life on $\tau_{\max}$ - σ_{nt} plane.

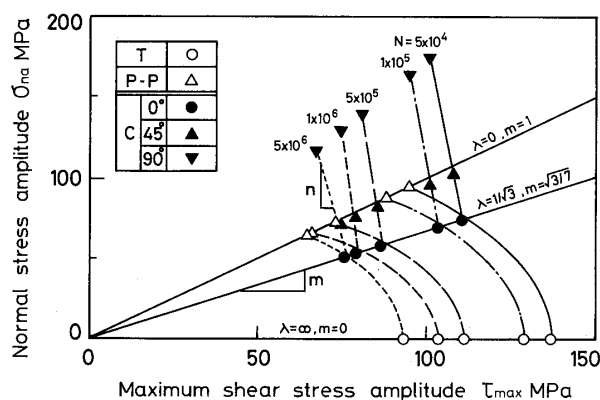


Fig. 11. Contours of constant fatigue life on $\tau_{\max}$ - σ_{na} plane.

合は、1サイクル中で $\tau_{\max}$ 、 σ_n が最大値 A 、 B をとる時刻は異なる。そこで、 σ_n として $\tau_{\max}$ が1サイクル中最大となる時刻 t における垂直応力 σ_{nt} あるいは垂直応力振幅 $\sigma_{na}(=B)$ を取り、これに対する $\tau_{\max}$ としていずれも最大せん断応力振幅 A をとって描いた等寿命線がFig. 10およびFig. 11である。

各指定繰返し数における引張圧縮、ねじりの時間強度をそれぞれ σ_N 、 τ_N とすると、両単一応力および組合せ同位相に対する等寿命線は、だ円

$$\tau_{\max}^2 / \tau_N^2 + (4 / \sigma_N^2 - 1 / \tau_N^2) \sigma_n^2 = 1 \quad (11)$$

により、ほぼ近似することができる。これは、Goughの1/4だ円説を $\tau_{\max}$ と σ_n により表示したものであり、また、Brown²²⁾らが延性材について示した等寿命線の式の中のべき数を2としたものである。

一方、組合せin-phaseとout-of-phaseに対する等寿命線は、Fig. 10、Fig. 11ともにほぼ直線で表すことができる。in-phaseの場合の $\tau_{\max}$ と σ_n の関係は、式(9)、(10)で $\phi=0$ とおくと

$$\tau_{\max} = m \sigma_n, \quad m = (1 + 4\lambda^2)^{-1/2} \quad (12)$$

と表されるから、等寿命線の勾配を n とすると、式(9)、(10)より与えられるout-of-phaseの $(\tau_{\max}, \sigma_{n})_{out}$ と等価なin-phaseの $(\tau_{\max}, \sigma_{n})_{in}$ は

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{\max})_{in} &= (\sigma_{n})_{out} \\ &\quad - n(\tau_{\max})_{out} / (m - n) \\ (\sigma_{n})_{in} &= m(\tau_{\max})_{in} \end{aligned} \right\} (13)$$

と表すことができる。したがって、 $k = \sigma_N / \tau_N$ とおき、out-of-phaseの場合を含めて、式(11)より導かれる等価応力を一般化すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_H &= H \{ k^2 + (4 - k^2) m^2 \}^{1/2} \\ H_{in} &= (\tau_{\max})_{in} \\ H_{out} &= \{ (\sigma_{n})_{out} - n(\tau_{\max})_{out} / (m - n) \} \end{aligned} \right\} (14)$$

となる。ここで、 H_{in} 、 H_{out} はそれぞれ、in-phase、out-of-phaseの場合の H の値を表す。

Fig. 10およびFig. 11における等寿命線の勾配 n を全寿命域にわたり、それぞれ5.70、-9.30とし、 σ_{nt} 、

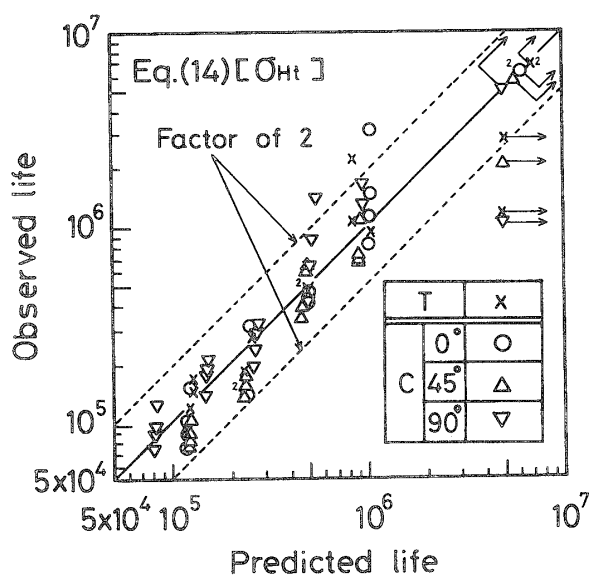


Fig. 12. Life evaluation based on eq. (14) $[\sigma_{Ht}]$ with push-pull fatigue data.

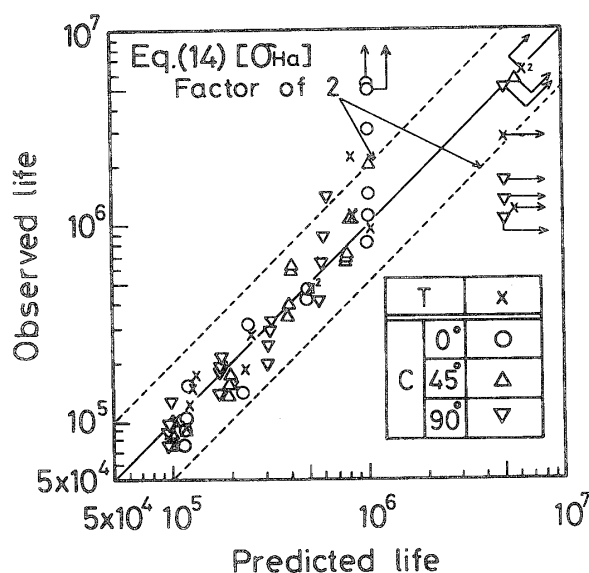


Fig. 13. Life evaluation based on eq. (14) $[\sigma_{Ha}]$ with push-pull fatigue data.

σ_{na} に対応する式 (14) の等価応力 σ_{Ht} , σ_{Ha} を用いて試験結果を整理したものが Fig. 12 および Fig. 13 である。いずれの場合も等価応力 σ_{LM} による結果 (Fig. 9) と同様、疲労限度を含む広範にわたる中、高サイクル域での寿命評価に対し、有効なパラメータであることがわかる。

3・4 各等価応力による寿命評価法の比較

3・1 節の out-of-phase の場合に拡張した弾性破損説は材料定数を含まず単純であるが、それ故 Fig. 2～Fig. 4 のように、試験結果を整理し得ない場合もあり、その適用にあたっては引張圧縮とねじり両単一応力での疲労強度比は限定される。近年、Stage I, Stage II き裂伝ばに対し、それぞれ Tresca, Rankine 説を適用し、両者を組合せることにより広範な荷重荷形式、

材料および寿命域に適応させる試みもみられる。¹⁷⁾

3・2 節の Gough 説を拡張して得られた等価応力 σ_{GE} (式 (5)) は両単一応力下での S-N 線図より疲労限度比 k が与えられれば適用可能で、寿命はやや危険側に評価されるが、簡便で、比較的寿命推定精度は良い。また、Lee 説を修正して得られた等価応力 σ_{LM} (式 (6), (8)) では、材料定数 β を定めるため、out-of-phase での S-N 線図を最低一つ必要とするが、全寿命域にわたり推定精度は高い。

Brown-Miller 説を out-of-phase の場合に拡張した等価応力 σ_{Ht} および σ_{Ha} (式 (14)) を導出し、本試験結果に適用すると、疲労限度を含めた中、高サイクル域での寿命を統一的に整理できる。この方法でも、等価応力 σ_{LM} と同様、in-phase と out-of-phase の関係定数 n の決定のため、out-of-phase での S-N 線図を一つ必要とするが、この評価法では荷重荷形式は曲げ-ねじりあるいは引張圧縮-ねじりに限定されず、最も汎用性が高い。しかし、等寿命線の形態は材質、応力条件により異なることが予想されることから、^{16), 21), 22)} により詳細な検討を要する。

なお、本研究では中実試験片を用いており、上記の各寿命評価法は、試験片表面での応力状態に基づくものである。低サイクル域では試験片中心部による表面での塑性変形の拘束の有無により、中実、中空試験片の寿命は異なるが、長寿命 (低応力) となるにつれてその差異は小さくなる。²³⁾ したがって中空の場合を含め、引張圧縮-ねじり (あるいは曲げ-ねじり) の中、高サイクル域での延性材の寿命に対し、上記評価法が適用可能であると考えられる。

3・5 疲労寿命に及ぼす位相差の影響

Fig. 2 に示したように、低炭素鋼の中、高サイクル域の組合せ応力下での寿命は位相差の増加にともない延伸する。

Fig. 14 は、荷重制御組合せ応力下での疲労過程における塑性ひずみ幅の変化を Mises の等価ひずみにより例示したものである。繰返し過程における塑性ひずみ幅の二乗平均値を用いてこれらを比較すると、位相差 $\phi=45^\circ$ での塑性ひずみ幅は同位相 ($\phi=0^\circ$) の場合の 50～60%、 $\phi=90^\circ$ では 15～20% となる。すなわち位相差の増加にともない、材料は見掛け上、硬化し、グメジは減少することを示しており、これは out-of-phase で寿命が延びるという試験結果と符合する。この硬化は、主応力方向の回転に起因する異なったせん断面上での変形の相互作用によるものとされ、^{14), 16)} ひずみ制御試験では逆に、この硬化により応力振幅は増大し、き裂の発生、伝ばは加速され、寿命は短くなると考えられる。¹⁴⁾

本研究では、延性材の中、高サイクルの広範な寿命

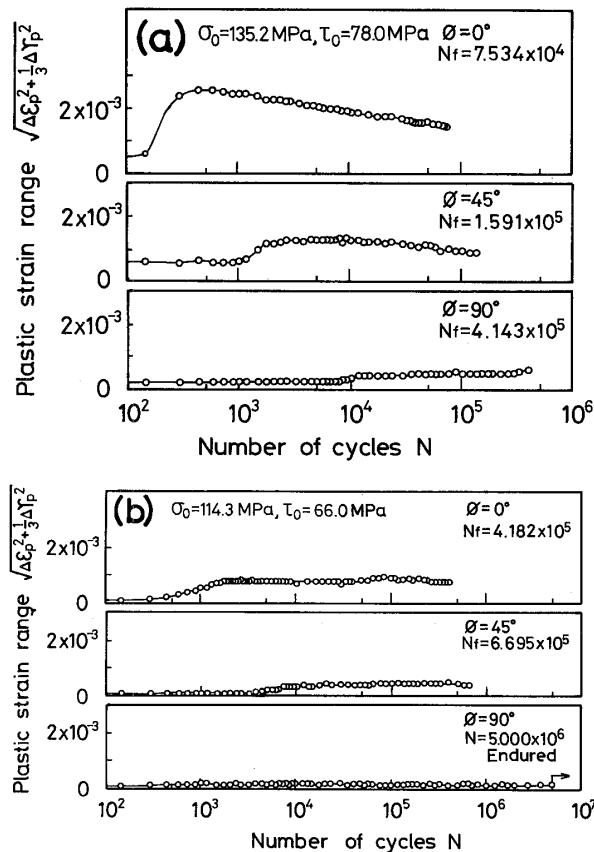


Fig. 14. Variation of plastic strain range under combined in- and out-of-phase loadings.

域を対象とし、これを統一的に整理し得る評価法について検討したが、これをより一般化するため、今後種々の材料、負荷条件下での変形およびき裂の発生、伝ば挙動に関する知見が必要であると考ええる。

4 結 論

室温において低炭素鋼に組合せ引張圧縮-ねじりが位相差をもって加わる場合について荷重制御疲労試験を行い、疲労限度を含む中、高サイクル域の比較的広い範囲での寿命を統一的に評価し得る応力基準のパラメータについて検討した。

本研究では、位相差の増加にともない、組合せ応力下での疲労寿命は延伸する。これは、同一負荷応力振幅に対する塑性ひずみ幅が、位相差の増加にともない減少することと符合する。

Gough 説を位相差のある場合を含めて拡張した等価応力 σ_{GE} は、各単一応力での時間強度比が知れば適用可能であり、簡便であるが、寿命はやや過大評価される。また、Lee 説を修正した等価応力 σ_{LM} では、単一応力に加え、位相差を有する場合の S-N 線図を少なくとも一つ必要とするが、組合せ応力下での寿命を比較的精度良く評価することが可能である。さらに、

Brown-Miller 説を out-of-phase の場合に拡張して得られた等価応力 σ_{Ht} および σ_{Ha} を用いると、本試験結果を全寿命域にわたり、ほぼ統一的に整理することが可能であることから、これも非常に有用な寿命評価法であると考えられる。

(平成 2 年 11 月 17 日 第 20 回疲労シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) T. Nishihara and M. Kawamoto, *Memoirs, College of Engineering, Kyoto University*, **11**, 145 (1945).
- 2) R. E. Little, *Aeronautical Quarterly*, **20**, 57 (1969).
- 3) D. L. McDiarmid, *Aeronautical J.*, **85**, 118 (1981).
- 4) H. Dietmann and L. Issler, *Conf. Dimensioning Strength Calc.*, **5**, II-388 (1974).
- 5) S. B. Lee, *ASTM STP 853*, 553 (1985).
- 6) C. M. Sonsino and V. Grubisic, *Z. Werkstofftech.*, **18**, 148 (1987).
- 7) S. B. Lee, *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, p. 621 (1989).
- 8) 平 修二, 井上達雄, 吉田紀元, *日本機械学会論文集*, **34**, 255 (1968).
- 9) K. Mizuhata, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kobe University*, **15**, 9 (1969).
- 10) S. Y. Zamarik and R. E. Frishmuth, *Exper. Mech.*, **13**, 204 (1973).
- 11) M. N. F. Rizk, *Can. Congr. Appl. Mech.*, 7th, **1**, 303 (1974).
- 12) K. Kanazawa, K. J. Miller and M. W. Brown, *Trans. ASME, J. Engng. Mater. Technol.*, **99**, 222 (1977).
- 13) 大南正瑛, 浜田直巳, *材料*, **30**, 822 (1981).
- 14) C. M. Sonsino and V. Grubisic, *ASTM STP 853*, 586 (1985).
- 15) 新田明人, 緒方隆志, 桑原和夫, *材料*, **36**, 376 (1987).
- 16) R. M. Andrews and M. W. Brown, *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, p. 641 (1989).
- 17) M. W. Brown and D. E. Buckthorpe, *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, p. 499 (1989).
- 18) A. Fatemi and D. F. Socie, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, **11**, 149 (1988).
- 19) Y. S. Garud, *Trans. ASME, J. Engng. Mater. Technol.*, **103**, 118 (1981).
- 20) 大川 功, 高橋秀夫, 柳澤潤一郎, 三角正明, *材料*, **38**, 1122 (1989).
- 21) M. W. Brown, K. J. Miller, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, **187**, 745 (1973).
- 22) M. W. Brown and K. J. Miller, *ASTM STP 770*, 482 (1982).
- 23) 田中紘一, 松岡三郎, 宮沢和徳, *日本機械学会論文集*, **A-45**, 204 (1979).