

### 222 制振のからくり : 第 1 報 振動と粘性 : ミクロとマクロの掛橋

長松, 昭男 / NAGAMATSU, Akio

---

(出版者 / Publisher)

日本機械学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集

(巻 / Volume)

2003

(号 / Number)

8

(開始ページ / Start Page)

250

(終了ページ / End Page)

253

(発行年 / Year)

2003-10-30

## 222 制振のからくり

(第1報 振動と粘性：マイクロとマクロの掛橋)

### Mechanism of Damping

(1<sup>st</sup> Report Vibration and Viscosity : A Bridge between Micro and Macro)

正 長松昭男 (法政大)

Akio NAGAMATSU, Hosei University, Kajino-cho 3-7-2, Koganei-shi, Tokyo

Mechanism of damping is studied in this paper from the both viewpoints of micro and macro. First, it is explained how viscosity originates in the potential energy field caused by van der Waals gravity and electronic exchange rejection force among atoms and molecules. Second, it is described how viscous damping force proportional to velocity is caused by shear displacement between atomic rows accompanying material rearrangement. Third, role of viscosity in the free vibration is related. Forth, it is explained how amplitude increases infinitely in the resonance of forced vibration of undamped system. Fifth, the process is shown by which damping makes the resonance stable in forced vibration, and its mathematical expression is given.

**Key Words :** Damping, Viscosity, Potential Energy Field, van der Waals Gravity, Vibration, Resonance

#### 1. まえがき

物質は、質量・剛性・粘性の3種類の力学的特性を持つ。前2者は、力学エネルギーを保存・吸収・放出する物質の本質的性質であり、力学エネルギーの保存場を形成する。これに対して後者は、物質の再編成に伴う副次的性質であり、力学エネルギーを熱エネルギーに変えて消散させ、力学エネルギーの非保存場を形成する。前2者は協調して振動を発生させるのに対し、後者は振動を抑制し減衰させ、制振の主役を演じる。そこで、制振工学の今後の発展には、粘性の正体を解明し、それに基づいて粘性の働きを正確に制御することが、不可欠である。しかし粘性に関しては、質量や剛性に比べてあまり関心を持たれていなかったように思われる。

本解説では、粘性のからくりと働きをマイクロとマクロの両面から考察し、平易に紹介することを試みる。まず、粘性の発生機構に関する筆者の仮説を紹介する。次に、自由振動と強制振動に対する粘性の役割と効果を説明する。なお、本解説では、啓蒙的観点から、学問的正確さよりも分かりやすさを優先させている。

#### 2. 粘性の発生機構 (マイクロ的考察)

2・1 原子間ポテンシャルと粘性 原子核を中心に回転する電子は、速度と位置が同時には確定できないため、確率的な雲のような存在として認識される。原子同士が互いに接近しこの電子雲に重なりが生ずると、交換斥力と呼ばれる斥力が発生する。交換斥力は、原子同士の接触反発力のようなものであり、その力により距離の1/2乗に反比例する斥力ポテンシャル場を生ずる。

一方、原子核を取り巻く電子雲の平均的分布は等方的であるが、瞬間的には常に揺らぎが存在し、それが電気双極子(電荷の偏り)を生じさせる。そのために、その原子を中心にして距離の3乗に反比例する電場が発生し、それが隣接する原子の電子雲に逆電荷の双極子を誘起する。この誘起電気双極子も同様の電場を発生するため、互いに隣接する2個の原子間には距離の6乗に反比例する引力ポテンシャル場を生ずる。これが van der Waals 引力 (vW 引力) の直感的説明である<sup>(1)</sup>。

交換斥力と vW 引力が形成する互いに相反するポテンシャル場が合わさり、図1に示すような原子間距離 0.26nm でエネルギーが最小(底)となるポテンシャル場が形成される。

この底は、共有結合(2個の原子が電子を共有することによる結合)しない原子同士が自発的に近付き得る最小距離であり、2個の原子はこの原子間距離で安定した結合状態にある。しかし、vW 引力による結合は共有結合ほど強力ではないので、外作用によって比較的簡単に2個の原子を引き離すことができる。

一般に、ポテンシャル場に作用する力はエネルギー曲線の傾きに比例し、傾きが負のとき斥力、正のとき引力になる。図1の場合には、安定距離である底よりも近距離では原子間に斥力が働いて反発し合い、底で斥力から引力に変化し、底から遠い方に離れて行くに従って、変極点 a までは引力が増大し、変極点以遠では引力が減少し、やがて引力は零になって、2個の原子はポテンシャル場から解放され、自然に離れ去る。

図1の底の原子間距離で安定結合している2個の原子間に、外から張力を加えて引き離すことを考える。変極点までは、普通のばねのように剛性(ポテンシャルの2次微分値)が正であるため、引力に抗して原子間距離を増大させるためには、張力を増加させなければならない。

変極点を通過すると、剛性が負になり、原子間距離が増すにつれて引力は減少するため、もはやそれ以上張力を増加

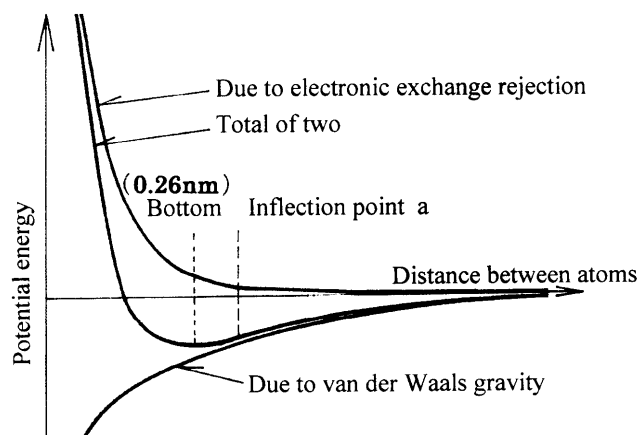


Fig.1 Potential energy field among atoms

させなくても一定張力を加え続けるだけで、原子間距離は自然に増大し離れていく。そして、距離と共に引力が減少するので、一定張力の下で離れる速度は、次第に増加して行く。しかしこの時点でも引力自体は正であるため、張力を零にすれば、2個の原子は底の安定距離に復元する。

このように、原子間ポテンシャルの勾配が正の領域で、変極点を越えて引力が正で剛性が負の領域まで離れると、一定の作用力のままで変形が増大し続け、作用力が無くなれば元の形に戻る、という現象が発現する。これが粘性の発生機構である。

物質を構成する原子や分子の間には、同様なポテンシャル場が必ず存在する。例えば、共有結合していない原子同志には、イオン化し電荷を有する原子間の静電相互作用に起因するイオン結合、すでに電気的な陰性原子（酸素や塩素など）と結合している水素原子が隣接する他の陰性原子とも引き合うことによる水素結合、なども引力として作用し、交換斥力と合わさって上記の原子間ポテンシャル場と同様なポテンシャル場を形成する。したがって、粘性は気体・液体・固体を問わずすべての物質に存在する力学的性質である。

2. 2 物質の再編成と粘性 物質内の2個の原子や分子がポテンシャル場の変極点を越えて離れて行くためには、それらの周囲にある他の多くの原子や分子との位置関係も同時に変化する必要がある。このようにして1箇所の変位の影響は周辺に広がり、広範囲にわたる物質構成の再編成を伴う。この再編成には時間を要するので、粘さには必ず作用力に対する変位の時間遅れが伴う。この遅れが、粘性があるとするとすべるとすべる、という感覚を生む。そして振動では、この遅れが力学的エネルギーの消散を起こす（後述図5参照）。

高分子材料における物体構成の再編成では、長鎖を形成する炭素原子同志の共有結合軸まわりの回転がポテンシャル場における相対位置の変化と同時に起こって鎖に沿って伝わる、高分子間の物理架橋の崩壊と再結成を伴う、などが原因で、再編成領域が通常の低分子流体よりもはるかに大規模になり、巨視的変形に直結する。これにより、高分子材料では粘性が特に大きくなる。（本解説第2報参照）

次にこの物質の再編成を、図2のように、平行な等間隔原子列間の相対すべりで簡略表現する。そして、上下の原子間が最短距離にある点（垂直な位置関係）が底で安定点としたときの原子間ポテンシャルは、図2下段に示すように、図1の底から右の部分折り返してつないだものになる。

図2において、上の原子列中の1個の原子が、作用力から力学的エネルギーを吸収しながら、安定点からポテンシャルの高い右横方向に移動するとき、安定点のごく近傍は弾性域であるが、それ以外の大部分の領域では上記の粘性が作用する。そして、上の原子が下の原子から最も遠い位置にあるポテンシャル場の頂点（不安定点）に到達すれば、右に隣接した底点（安定点）に自発的に落ち込む。その際に、頂点に至るまでに吸収された力学的エネルギーは、熱エネルギーに変えられ消散される。この原子1個分のずれが単位再編成であり、その消散エネルギーを  $E_c$ （一定）とする。

上の原子列が速度  $v$  で移動すれば、その中の1個の原子は

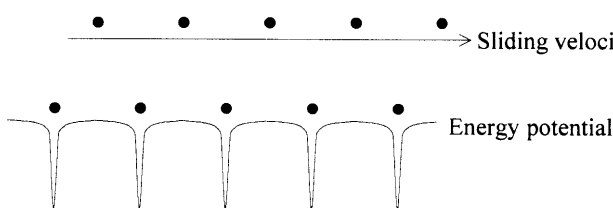


Fig.2 Relative shear movement between rows of atoms or molecules

単位時間に  $v$  個の下の原子とすれ違うから、上の原子1個当りの消散エネルギーは  $E_c v$  になる。またこのとき、単位時間に  $v$  個の下の原子について同じことが起こるから、原子列同志の相対すべりによる単位時間当りの消散エネルギー（パワー）は  $E_c v^2$  になる。この相対すべりによる粘性抵抗力を  $F_c$  とすれば、 $F_c$  が単位時間になす仕事はこの消散エネルギーに等しいから、 $F_c v = E_c v^2$  すなわち  $F_c = E_c v$  になる。これが、粘性が速度に比例する抵抗力を発生する理由である。

なお、これらは筆者の仮説であり、実験的検証や学界の認知を経たものではない。

### 3. 粘性の働き（マクロ的考察）

3. 1 自由振動 図3の1自由度系を、質量  $m$  に剛性  $k$  と粘性  $c$  が作用する系と見なし、両作用の効果を比較することを試みる。比較は次元（単位）と尺度を同一にしないとできないから、剛性の次元と尺度を粘性と同一にしたものを  $c_c$ 、粘性  $c$  と  $c_c$  の比を  $\zeta$  とすれば

$$c_c = 2\sqrt{mk}, \quad \zeta = \frac{c}{c_c} \tag{1}$$

$c_c$  は、見かけ上粘性の次元と尺度なので臨界減衰係数と呼ばれているが、粘性とは無関係であり、物理的には剛性の強さを表す。 $\zeta$  は、粘性と剛性を粘性の単位で比較したものであり、減衰比と呼ばれている。 $\zeta$  が1より大きければ粘性の方が優勢であり、どのような外乱を受けても自由振動は決して発生しないので、この状態を減衰の形で呼び過減衰という。反対に、 $\zeta$  が1より小さければ剛性の方が優勢であり、どのような外乱を受けても自由振動は必ず一旦発生するので、この状態を減衰の形で呼び不足減衰という。

3. 2 強制振動 まず、粘性がない系の共振のからくりを力の釣合の面から説明する。

加振振動数  $\omega$  が固有振動数  $\Omega = \sqrt{k/m}$  より小さい場合には、慣性力  $f_m = \omega^2 mx$  ( $x$  は変位) より大きい復元力  $f_k = -kx$  が加振力  $f$  に対抗し、定常振動を実現する（剛性が主役）。復元力は変位と逆方向に作用するので、加振力は変位と同方向である。

加振振動数が固有振動数より大きい場合には、復元力より大きい慣性力が加振力に対抗し、定常振動を実現する（質量が主役）。慣性力は変位と同方向に作用するので、加振力は変位と逆方向である。

加振振動数が固有振動数に等しい場合には、慣性力と復元力は大きさが等しく方向が逆であり、振動中常に打ち消し合うために、加振力に抵抗する内力が存在しなくなる。そこで、系は構造としての安定性を失い、定常状態を保持できなくなる（主役不在）。そして、系は加振力のなすがままに挙動し、振幅は無限に増大し続ける。これが不減衰共振である。同じ共振のからくりをエネルギーの面から説明する。

加振開始の瞬間に、自由振動と強制振動が同時に発生する。

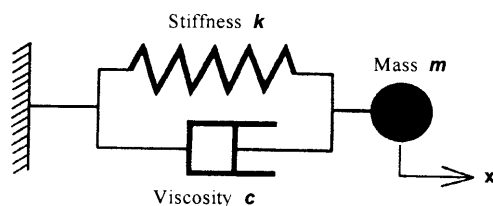


Fig3 Dynamical model of single degrees of freedom system

強制振動は外部から強制される応答であり、系はこれを嫌い、加振源から注入されるエネルギーを加振源に押し戻す。このエネルギーの注入と押し戻しが強制振動である。一方、自由振動は系本来の力学的性質に起因する自発的現象であり、系はこれに対しては抵抗しない。

両振動の振動数が異なる場合には、両振動は互いに無関係に推移する。しかし、加振振動数が系の固有振動数に等しい場合には、系は両振動を区別できないので、加振に対して抵抗せず、加振源から注入されるエネルギーをすべて受け入れて内部に蓄積し、自由振動に変える。そして、自由振動のエネルギーは増加し続ける。

この場合の運動方程式を解けば<sup>(2)</sup>

$$x = \left(\frac{F}{2m\Omega}\right)t e^{j(\Omega t - \pi/2)} \quad (2)$$

式(2)を図示すれば図 4a のようになり、振幅が時間  $t$  に比例して無限に増大し続ける。

次に、粘性がある系の共振のからくりを力の釣合の面から説明する。

加振振動数が固有振動数に等しい場合には、内力のうち慣性力と復元力は互いに打ち消し合い、残る粘性抵抗力だけが加振力に抵抗する（粘性が主役）。粘性は、材料内部や周辺流体などに起因する副次的性質であり、物体が本来有する質量と剛性に比べて振動に及ぼす影響はるかに小さい。このように弱体な粘性  $c$  で振幅一定の加振力に抵抗できるだけの大きさの抵抗力  $-c\dot{x}$  を発生するためには、速度  $\dot{x}$  の振幅が大きく成長する必要がある。このように、加振力に対する内力抵抗の主役が粘性である場合には、応答振幅が大きく成長してから定常状態になる。これが減衰共振である。

粘性抵抗力  $-c\dot{x}$  が加振力を打ち消すから、速度  $\dot{x}$  は加振力と同方向（速度の位相が零）になる。変位は速度より 90 度遅れるので、共振時の変位応答の位相は  $-90$  度になる。

同じ共振のからくりをエネルギーの面から説明する。

加振振動数が固有振動数に等しい場合には、加振開始と共に発生する自由振動に合わせて、加振源から 1 周期あたり  $W_0$  のエネルギーが流入し、系内に蓄積される。

一方、粘性は 1 周期あたり  $W_c$  のエネルギーを熱に変えて消散させる。次式のように、 $W_0$  は振幅に、 $W_c$  は振幅の自乗に比例する<sup>(2)</sup>。

$$W_0 = \pi F |X|, W_c = \pi c \omega X^2 \quad (3)$$

加振直後で振幅が小さいときには  $W_0 > W_c$  であり、エネルギーの流入が消散を上回るので、振幅が増大する。やがて振幅の増加と共に急増する  $W_c$  が  $W_0$  に追いつき、エネルギーの入出力が等しい定常状態に漸近する。

この場合の共振は筆者によって解かれており<sup>(2)</sup>

$$x = \frac{F}{c\Omega} (1 - e^{-ct/(2m)}) e^{j(\Omega t - \pi/2)} \quad (4)$$

$c \rightarrow 0$  の極限では、式(4)は粘性がない場合の式(2)に一致する<sup>(2)</sup>。式(4)を図示すれば図 4b のようになる。

図 5 は、強制振動において加振力が 1 周期の間に系になす仕事を示す。図中、細線が加振力、太線が変位応答、+ が正の仕事（加振源から系へのエネルギーの流入）、- が負の仕事（系から加振源へのエネルギーの押し戻）を示す。

図 5 では、1 周期に加振源がなす仕事は、位相  $\phi$  が 0 度と  $-180$  度の場合に零であり、その間では必ず正になっている。これにより系に流入するエネルギーは粘性によって消散され、応答は定常状態を保つ。また  $-90$  度では、加振源から系にエネルギーが入り続け、押し戻されることがない。そしてこのとき、系に粘性が存在する場合には同量のエネルギー消散によって定常状態を保つが、存在しない場合にはエネルギーが系内に蓄積され続ける。

図 5 から明らかなように、粘性がない場合に定常状態を保つためには位相が 0 度と  $-180$  度以外にはなりえないから、不減衰系の強制振動では、共振振動数を境にして位相が 0 度から  $-180$  度に不連続に変化する。

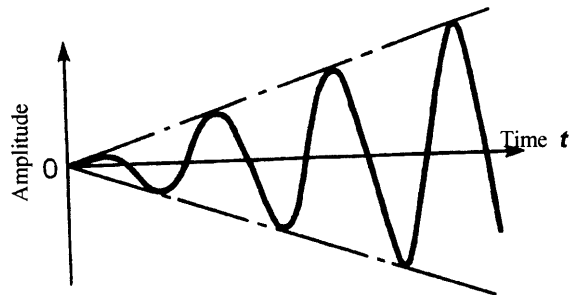
#### 4. まとめ

制振の主役を演じる粘性のからくりを、マイクロとマクロの両面から考察した。すなわち

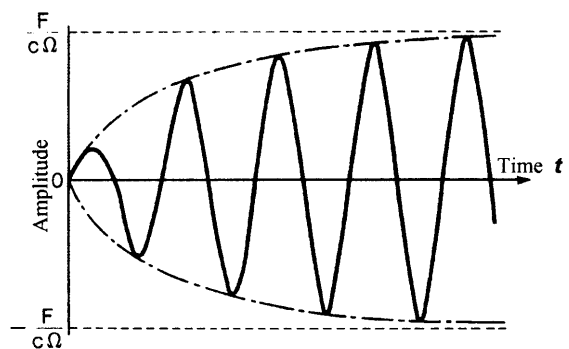
- 1) 原子間に作用する交換斥力と van der Waals 引力が合わさって形成されるポテンシャルエネルギー場において粘性が発現する機構を、明らかにした。
- 2) 物質の再編成を伴う原子列間のすべりが速度に比例する粘性抵抗を発生させる機構を、明らかにした。
- 3) 自由振動における粘性の役割を説明した。
- 4) 粘性がない系における共振の発生機構を述べ、振幅が無限に成長して行く理由を説明した。
- 5) 粘性がある系における共振の発生機構を述べ、粘性が有限振幅の定常共振状態を実現する理由を説明した。

#### 文 献

- (1) R.P.Feynman, ファインマン物理学, 岩波書店, 1968
- (2) 長松昭男, モード解析入門, コロナ社, 1993



a. Undamped system



b. Damped system

Fig.4 Resonance phenomena in forced vibration

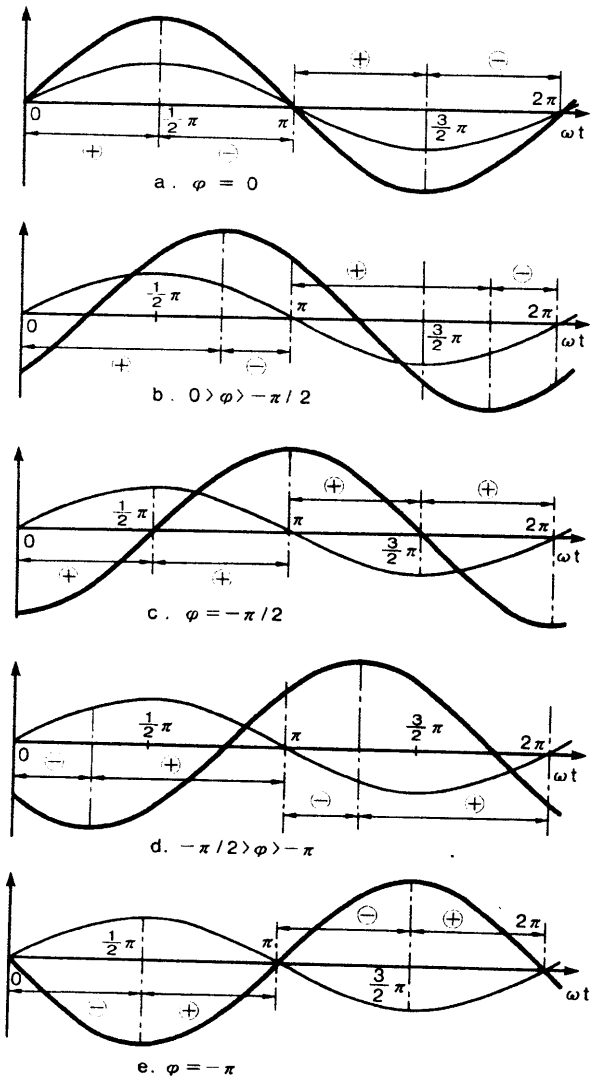


Fig.5 Works done by exciting force in one period of forced vibration