

### モード解析によるテニスラケットの振動特性 と構造最適化の研究(機械力学, 計測, 自動制御)

岩原, 光男 / 鈴木, 芳 / NAGAMATSU, Akio / SUZUKI, Kaoru  
/ IWAHARA, Mitsuo / ODATE, Jun / 長松, 昭男 / 大館, 淳

---

(出版者 / Publisher)

社団法人日本機械学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

日本機械学会論文集. C編

(号 / Number)

718

(開始ページ / Start Page)

1751

(終了ページ / End Page)

1758

(発行年 / Year)

2006-06-25

## モード解析によるテニスラケットの振動特性と構造最適化の研究\*

大 館 淳<sup>\*1</sup>, 岩 原 光 男<sup>\*2</sup>  
鈴 木 芳<sup>\*3</sup>, 長 松 昭 男<sup>\*2</sup>A Research of Vibration Characteristics and Structural Optimization  
for Tennis Racket with Modal AnalysisJun ODATE<sup>\*4</sup>, Mitsuo IWAHARA,  
Kaoru SUZUKI and Akio NAGAMATSU<sup>\*4</sup> Department of Mechanical Engineering, Hosei University,  
3-7-2 Kajino-cho, Koganei-shi, Tokyo, 184-8584 Japan

Recently, solving vibration problems in the prediction step is strongly required to shorten the development time. The purpose of this research is to clarify and improve vibration characteristics of products such as sporting goods by experiment and calculation. A familiar tennis racket was chosen and its vibration characteristics were investigated by actual impact test and experimental modal analysis. It was clarified that the largest vibration was generated at the first mode. Structural optimization of the simplified plate could diminish the peak by shifting the node of the mode to the excitation response point. Design variables were the masses given to the circumference or the thickness of elements.

**Key Words:** Modal Analysis, Sensitivity Analysis, Inverse Problem, Anti-Resonance Point, Structural Optimization

## 1. 緒 言

快適性や環境との調和がますます重要視される今日において、用具や製品などから発生する振動・騒音が人体に与える身体的、心理的影響を考慮することが必要である。現在は数多くの製品がエンジニアの経験と勘により設計され、試作と実験を繰り返すことにより開発されている。今後さらに厳しくなる設計条件を満たすと同時に開発時間を短縮するために、振動問題を設計開発の段階で予知して対策する必要がある<sup>(1)</sup>。

振動問題を解決するには、対象物の振動特性を正確に把握する必要がある。このためには有限要素法等の理論解析とともに実働、単純化振動実験と実験モード解析<sup>(2),(3)</sup>を実施することが不可欠であり、実験と計算により振動特性を解明する必要がある。

本稿は身近に使われているテニスラケットを使用し、振動特性が人に与える影響を研究する。テニスラケットに関する研究としては川副らの論文(4)~(8)が著名である。本論文では、まず実際にテニスラケットで球を打った際の振動を実測する。人体に影響する場所としてグリ

ップエンドに加速度ピックアップを接着して振動を測定する。打球点による差、上級者用と初級者用ラケットの差を周波数領域で検討する。次に、より詳細にデータを得るために、ボール落下実験を行い、実打時の現象を再現する。この実験では打点を容易にコントロールできる。実験モード解析を二種類のテニスラケットに適用し、固有振動数、固有モード、モード減衰比を求め、上記二つの実験結果と合わせて考察する。

実打実験、ボール落下実験、実験モード解析の結果より、第1次固有モードが最重要であることを示し、それが一樣梁の自由拘束曲げ2節モードに近いことから、模型テニスラケットとしてアルミの単純板を用いて、固有モードの節位置移動の検討を行う。

梶原らは余因子行列の固有値より反共振点を算出する理論を提案した<sup>(9)</sup>。その後、酒井、岩原らは汎用有限要素法プログラムを用いて反共振点を算出できる可能性(拘束法と表す)を提案した<sup>(10)</sup>。本論分では、拘束法を実際に用いて、汎用有限要素法プログラムにより、プログラム変更することなく反共振点を算出できることを示す。共振点感度と反共振点感度を利用して、両者を一致させることにより、共振峰が消滅することを示す。最適化手法としては、擬似最小2乗法<sup>(11)</sup>を使用する。

\* 原稿受付 2005年6月7日。

<sup>\*1</sup> 法政大学大学院工学研究科(☎184-8584 小金井市梶野町3-7-2)。<sup>\*2</sup> 正員、法政大学工学部。<sup>\*3</sup> 法政大学工学部。

E-mail: iwahara@k.hosei.ac.jp

## 2. 実打試験

**2.1 実験方法** 人間がテニスラケットで実際にボールを打ったときの振動を屋外のテニスコートで計測する。図1に示すようにグリップエンドに3軸加速度ピックアップを接着し、その出力を信号処理機に入力し、離散フーリエ変換を行った。加速度ピックアップからの出力ケーブルは体に固定し、足裏を動かさないように注意しながら打撃を行った。打撃点をスイートスポット、それ以外と変化させて計測を行った。

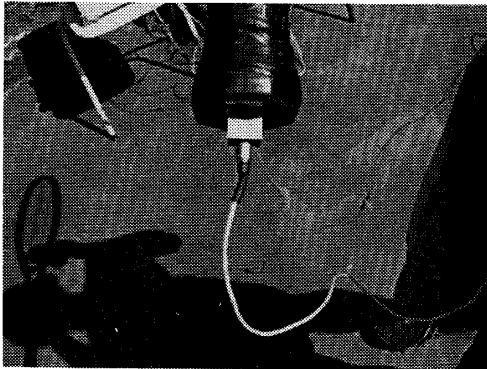


Fig.1 The position of the acceleration pickup

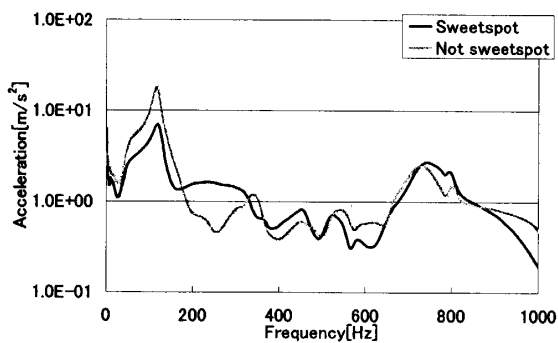


Fig.2 Vibration in striking the ball with beginner racket

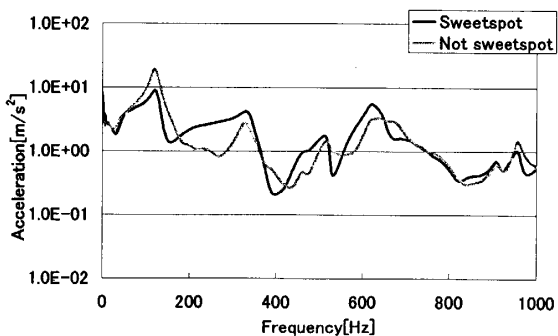


Fig.3 Vibration in striking the ball with superior racket

**2.2 実験結果** 図2に初心者用ラケット, 図3に上級者用ラケットの実打時における振動加速度の分析結果を示す。

図2,3はラケットのスイートスポットで打ったときと、わざとはずして打ったときの両方のグラフである。初心者用ラケットでは150Hz付近に第1のピークがあり、370Hz付近ではスイートスポットをはずして打ったときのみ第2のピークがあることがわかる。上級者用ラケットでは、どちらで打った場合の振動も130Hz, 340Hz付近に第1, 第2のピークが見られる。周波数軸上のピーク位置は、第1, 2共に上級者用が低くなっている。

初心者, 上級者用のラケット共に第1のピークが最も大きい。高周波数領域になるほど人に影響しにくくなることを考慮すれば、150Hz, 130Hz付近の第1のピークが重要である、と判断する。初心者用, 上級者用のラケット共にスイートスポットをはずして打ったときに第1ピークは大きくなり、初心者用では約2.5倍, 上級者用では約2倍の加速度を示す。

## 3. ボールの落下試験

2章の実打試験は、出力ケーブルに注意して足を止めて打撃するため、正確にラケットの狙った点で打つことは困難である。そこで、より正確に実験するためにボールの落下試験を行った。加速度ピックアップの接着位置は図4に示す位置に、計測機器は2章と同一である。

**3.1 実験方法** まず図4のようにやわらかいスポンジによりラケットをはさみこんで自由支持状態を作る。そして、面の上30cmの高さからボールを自由落下・衝突させ、発生した振動加速度の出力を信号処理機に入力し、離散フーリエ変換を行った。ラケットの面の五箇所にボールを落とし、その時の振動を計測・比較した。

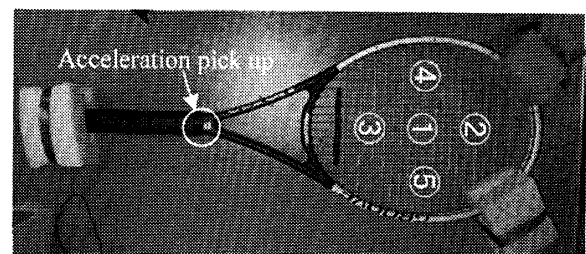


Fig.4 Experiment of dropping ball, position① is sweet spot

**3・2 実験結果** 図5に初心者用ラケット, 図6に上級者用ラケットにおけるボール落下・衝突時の振動加速度の周波数領域でのグラフを示す。

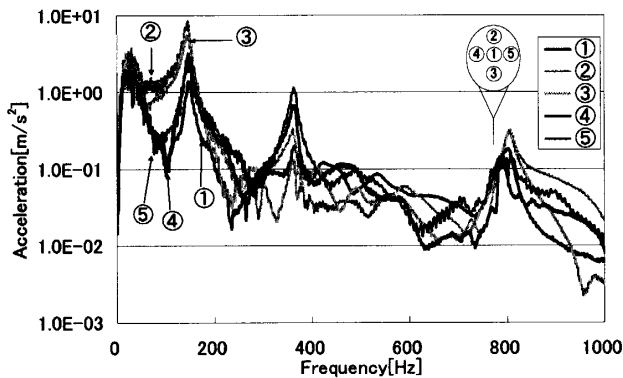


Fig. 5 Vibration in dropping the ball for beginner

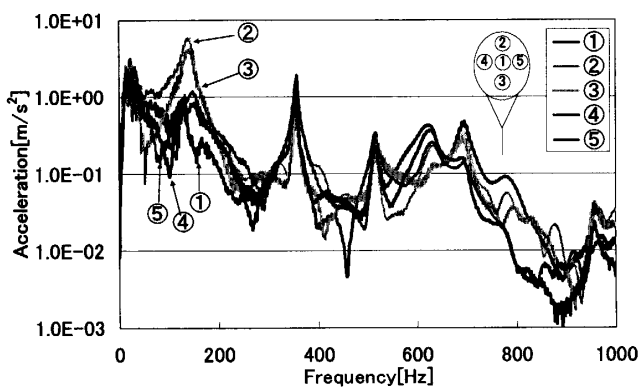


Fig. 6 Vibration in dropping the ball for superior

初心者用ラケットでは, ボール落下点①~⑤のどの場所でも 150Hz 付近に第1, 370Hz 付近に第2の大きなピークが発生している。前章実打試験と同じ現象であり, 150Hz 付近のピークが最も大きい。図2と比較すると各ピークが鋭くなっている, 減衰が小さくなっていると判断する。150Hz 付近ではスイートスポット①とスイートスポットからラケットの横方向に離れた④⑤が比較的小さく, スイートスポットからラケットの縦方向に離れた②③で大きな振動が得られた。370Hz 付近では, 逆に①②③で小さく④⑤で大きな振動が得られた。150Hz 付近と 370Hz 付近では, 振動モードが異なると判断できる。

上級者用ラケットでは 130Hz 付近と 360Hz 付近に大きなピークが現れた。初心者用ラケットと同様な現象である。落下点がスイートスポットから離れる方向と振動大小の関係は, 初心者用ラケットと同一である。

#### 4. 実験モード解析

**4・1 実験方法** 実験モード解析手法として非線形最適化法が提案されている。非線形最適化法は周波数領域法である偏分反復法を正確に多点応答に拡張したものであり, 統計的に最も確からしいモード特性を多数の周波数応答関数から抽出できる。この手法を使いテニスラケットのモード特性を求める。非線形最適化法を使用するために, MATLAB 言語を使用して構築した実験モード解析システムを使用した。

テニスラケットを細い糸で懸架し自由支持状態にした。実験の様子を図7に示す。打撃試験は, 加速度ピックアップを一点に固定しインパルス・ハンマを一点ずつ移動して衝撃加振して応答を得る加振点移動方式で行った。試験は五回平均で行い, 3軸の加速度ピックアップによって3方向の応答を測定した。



Fig. 7 Situation of experiment modal analysis

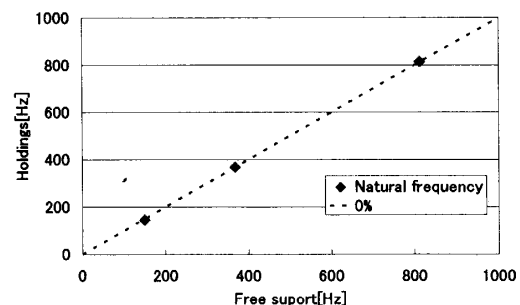


Fig. 8 Difference of natural frequencies by the support condition

**4.2 支持条件による差** 実験モード解析により、自由支持と手支持の条件が振動特性に及ぼす影響を調査する。図 8 に固有振動数の差を示す。横軸が自由支持、縦軸が手で握って実験を行った時の固有振動数である。図 8 より自由支持でも手で握ったときでも固有振動数はほぼ変わらないことが判明した。固有モード形状も同様である。

Table 1 Comparison of damping ratio

| mode No. | damping ratio |          |
|----------|---------------|----------|
|          | free support  | holdings |
| 1        | 1.16%         | 5.99%    |
| 2        | 1.34%         | 2.78%    |
| 3        | 1.36%         | 1.73%    |

支持条件によるモード減衰比の比較を表 1 に示す。第 1, 2, 3 モード共に、手で握ると減衰比が大きくなる。1 次固有モードの減衰比が最も差が大きく、手で握ると約 5 倍の減衰比になる。以上から、1 次固有モードの振動エネルギーが最も大きく手に伝わることを判明した。

**4.3 実験結果** 4.2 の結果より、実験は自由支持で行うことにする。実験モード解析システムにより固有モード形状を動画で見ることができる。図 9, 10 に実験同定により得られた初心者用ラケットの第 1 次, 第 2 次固有モード形状を、図 10, 11 に上級者用ラケットの第 1 次, 第 2 次固有モード形状を示す。左図が横から、右図が軸方向から見たものである。ラケットの面に垂直な形状対称面に関して、モード形状も面対称である。初心者用と上級者用の第 1 次, 第 2 次固有モード形状はほとんど同じである。第 1 次固有モード形状は棒の曲げ 1 次固有モードとほとんど同じ形状であり、打球面の節位置から縦方向に離れると振幅が大きくなる。第 2 次固有モード形状は棒の曲げ 2 次固有モードと似ているが、同時に打球面が変形していて、打球面の節位置から縦方向と横方向に離れると振幅が大きくなる。

ボールの落下試験からは、初心者用、上級者用共に第 1 次モードでは図 4 における①④⑥が小さく②③で大きな振動が得られ、第 2 次モードでは①②③で小さく④⑤で大きな振動が得られた。これは実験モード解析によって得られた固有モードの振幅大小と一致している。

初心者用ラケットの固有振動数及び減衰率を表 2 に、上級者用ラケットの固有振動数及び減衰率を表 3 に示す。上級者用ラケットの第 1 次固有振動数は、初心者用ラケットの第 1 次固有振動数より低い。製造元に質問すると、そのように設計している、とのことである。



Fig. 9 1<sup>st</sup> Mode Shape for beginner racket



Fig. 10 2<sup>nd</sup> Mode Shape for beginner racket



Fig. 11 1<sup>st</sup> Mode Shape for superior racket



Fig. 12 2<sup>nd</sup> Mode Shape for superior racket

Table 2 Natural frequency and modal damping ratio for beginner racket

| mode No. | natural frequency [Hz] | damping ratio |
|----------|------------------------|---------------|
| 1        | 149.8                  | 1.16%         |
| 2        | 367.7                  | 1.34%         |

Table 3 Natural frequency and modal damping ratio for superior racket

| mode No. | natural frequency [Hz] | damping ratio |
|----------|------------------------|---------------|
| 1        | 130.9                  | 4.73%         |
| 2        | 363.2                  | 0.44%         |

5. 反共振点移動理論を用いた構造最適化

テニスラケットは様々な材料を組み合わせて製作されており、また、複雑な形状をしているために正確なモデル化が困難である。

そこで本研究では模型テニスラケットとしてテニスラケットと同じ1次の固有振動数を持つ単純板を用いてモデル化し、汎用有限要素法プログラムによる計算から共振点と拘束法による反共振点を求め、得られる共振点感度、反共振点感度から共振点と反共振点を一致させて共振峰を消去する構造最適化を試行する。

5.1 反共振点算出手法 図13に示す2自由度減衰系を考える。

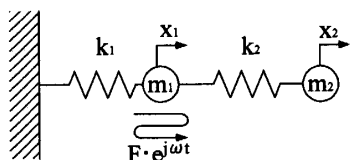


Fig. 13 System of the two-degree-of-freedom

この系の運動方程式は、

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 = F \cdot e^{j\omega t} \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 - k_2 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

2自由度系の運動方程式の解を複素指数関数の形で仮定して、

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \cdot e^{j\omega t} \quad (2)$$

ここで  $X_1$  と  $X_2$  は振幅であり、時刻  $t$  に関係のない値である。これを式(1)に代入すると、

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \cdot \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式(3)から、 $X_1$  を求めると、

$$X_1 = \frac{(-\omega^2 \cdot m_2 + k_2)F}{(-\omega^2 \cdot m_1 + k_1 + k_2)(-\omega^2 \cdot m_2 + k_2) - k_2^2} \quad (4)$$

質量  $m_1$  における自己周波数応答関数の反共振点の角振動数は振幅  $X_1$  が0のときの角振動数なので

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (5)$$

ここで質量  $m_1$  を固定した場合の固有振動数を考える。このときの運動方程式は、

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_2 \cdot x_2 = F \cdot e^{j\omega t} \quad (6)$$

式(2)と同様に  $x_2$  を  $X_2 e^{j\omega t}$  と置き換えると、

$$(-\omega^2 \cdot m_2 + k_2)X_2 = F \quad (7)$$

このときの固有角振動数は

$$\omega' = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (8)$$

これは式(5)の反共振点と一致する。

以上より、2自由度系の反共振点は加振応答点を固定したときの固有角振動数であることがわかる。多自由度系においては、式(3)の係数行列の加振・応答自由度に対応する行成分と列成分を取り除いた余因子行列={0}の固有値方程式を解くことで反共振点を求めることができる<sup>9)</sup>。本研究では反共振点の角振動数を、加振・応答自由度を固定した場合の固有角振動数として拘束法により汎用有限要素法プログラムを使用して計算した。

5.2 計算結果 図14に共振点、拘束法により算出した反共振点、自己周波数応答関数の振幅を示す。

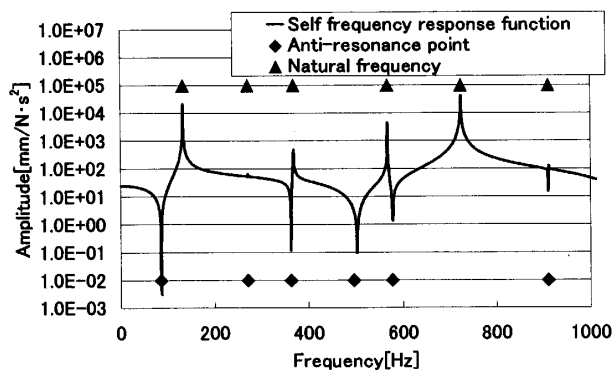


Fig. 14 Calculation result of the anti-resonance point

共振点は通常の固有値解析で、反共振点は加振・応答自由度を固定した固有値解析で求めた。自己周波数応答関数は、計算時間短縮のためモード合成法で求めた。採用モード数が少ない場合には、共振点と自己周波数応答関数の頂部は一致するが、反共振点と自己周波数応答関数の底部は一致しない。採用モード数を増加すると反共振点と自己周波数応答関数の底部が一致する。図14では、共振点と反共振点共に自己周波数応答関数振幅の頂部と底部に一致している。

**5.3 付加質量を設計変数にする構造最適化** 図14において、2次と6次の共振峰は共振点と反共振点が近いために小さくなっている。したがって、反共振点を共振点に近づけることにより共振峰を小さくできる。テニスラケット周囲に重りを付加することを想定し、付加質量を設計変数にする構造最適化で反共振点と共振点を一致させる構造変更を行う。

汎用有限要素法プログラムを使用して、設計変数としての付加質量  $m$  を変化させる場合の固有振動数の変化割合である感度  $\partial f / \partial m$  を計算する。

この感度を使用し、構造変更後の固有周波数を求める。現在の周波数を  $f_0$ 、目標とする周波数を  $f$  とすると、1つの設計変数を変化させる場合には、

$$\Delta f = f - f_0 = \Delta m \cdot \frac{\partial f}{\partial m} \quad (9)$$

ここで、 $\Delta m$  が構造変更として求めたい変更量である。実際には  $n$  個の設計変数を変化させるので、

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial m_i} \cdot \Delta m_i \quad (10)$$

共振点の周波数を  $f_R$ 、反共振点の周波数を  $f_U$  とすると、

$$\Delta f_R = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_R}{\partial m_i} \cdot \Delta m_i \quad (11)$$

$$\Delta f_U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_U}{\partial m_i} \cdot \Delta m_i \quad (12)$$

共振点と反共振点の周波数が一致するためには、

$$f_R + \Delta f_R = f_U + \Delta f_U \quad (13)$$

$$\Delta f_R - \Delta f_U = f_U - f_R \quad (14)$$

$$\therefore f_U - f_R = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_R}{\partial m_i} - \frac{\partial f_U}{\partial m_i} \right) \cdot \Delta m_i \quad (15)$$

ここで

$$\frac{\partial f_R}{\partial m_i} - \frac{\partial f_U}{\partial m_i} = a_i \quad (16)$$

とおくと、擬似最小二乗法<sup>(11)</sup>を使用して、

$$\{\Delta m\} = \{a\} \cdot \left[ \{a\}^T \cdot \{a\} \right]^{-1} \cdot (f_U - f_R) \quad (17)$$

式(17)から算出される  $\{\Delta m\}$  は、もとの値  $m_0$  よりも大きくなりすぎてしまい計算誤差が大きくなってしまふ。

そこで今回は

$$b \cdot \left. \frac{\Delta m_i}{m_0} \right|_{\max} \leq 1.8 \quad (18)$$

となるような縮小因子  $b$  を  $\{\Delta m\}$  にかけて使用する。式(18)の基準値 1.8 は、感度による予測誤差がほとんどない範囲として確認後設定した。

アルミ板の周囲 36ヶ所に 1.0g の質量を付加し、その質量を変えることで、実験によって最も重要であると判明した第1次固有モードの共振峰を小さくすることを試行する。式(17)を使用する最適化手法により、自己周波数応答関数の第1次の共振点と反共振点を繰返し計算により一致させることができた。図15に構造最適化後の質量分布を示す。

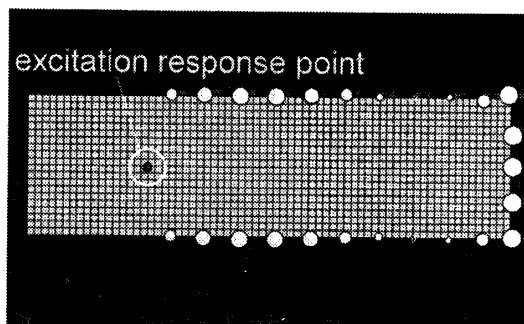


Fig. 15 Mass distribution

円の面積の大きい部分が質量の大きいことを表す。構造最適化後の質量は最大で 42.9g、合計で 635g となった。モデルの質量が 4.24kg なので、これは約 15% の質量に相当する。実際のテニスラケットでは、握り部分と打球面外周部に重りを配置すれば打球感触が変化する可能性がある。

構造最適化を行う際に得られた周波数応答関数を図16に示す。この計算では3回目から4回目に行きすぎが見られる。これは前述の補正値が大きすぎて、目標の固有振動数をすぎてしまったためと考えられ、補正値を小さくしたところ5回目のようになり6回目の計算でほぼ共

振点と反共振点が一致し、共振峰を消すことができた。付加質量を設計変数にする場合には、共振点、反共振点共に低下しながら一致している。

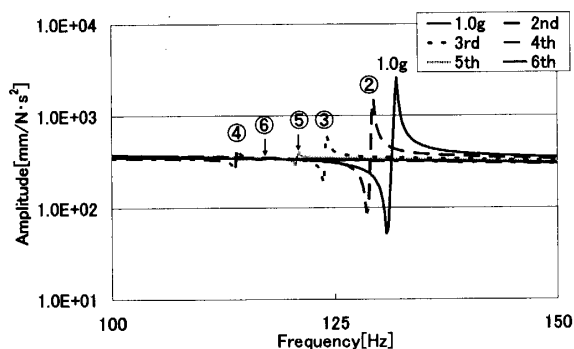


Fig. 16 Frequency response function of mass change

5.4 板厚を設計変数にする構造最適化 板厚を設計変数にした結果を図 17 に示す。最も厚い部分が 14.1mm, 最も薄い部分が 9.4mm となりその違いを色の濃淡で 7 段階に表した。実際のテニスラケットでは打球中心付近のガット剛性を上げると打球感触が変化する可能性がある。

繰返し計算で得られた周波数応答関数を図 18 に示す。設計変数を質量とした構造最適化とは異なり、共振点の周波数は高くなり最終的には 5 回目の計算で共振峰を消すことができた。板厚の場合には計算誤差が生じない程度の変化量だったので式(7)のような補正値を使わずに計算を行った。

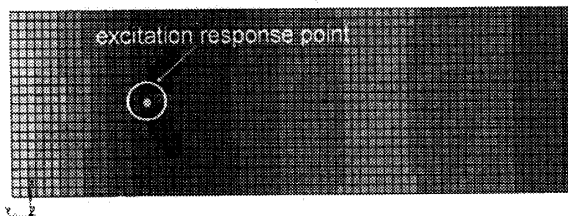


Fig. 17 Thickness distribution of the model

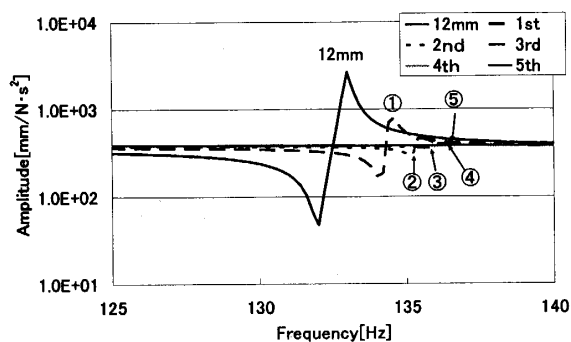


Fig. 18 Frequency response function of thickness change

## 6. 結論

1. 実打試験より、テニスラケットグリップエンドの振動は、初心者用、上級者用共に周波数軸における最初のピークが最も大きく、共にスイートスポットを外して打球すると更に大きくなるのが判明した。

2. ボール落下試験では初心者用、上級者用共に第 1 のピークでは、スイートスポットからラケットの縦方向に打点が離れると振動が大きくなり、第 2 のピークでは、スイートスポットからラケットの横方向に打点が離れると振動が大きくなるのが判明した。

3. 実験モード解析による固有モード形状から、初心者用、上級者用共に第 1 のピークは棒の曲げ 1 次固有モード形状に近く、第 2 のピークは棒の曲げ 2 次固有モード形状と打球面曲げモードが混在している。固有振動数よりピーク周波数を、固有モード形状の振幅大小よりボール落下試験の振動大小を説明できることが判明した。

3. 実験モード解析によるモード減衰比から、手に伝わっている振動エネルギーの中で最も大きいものは 1 次の振動であることが判明した。

4. 汎用有限要素法プログラムで拘束法を用いれば、反共振点の計算がプログラム変更なしに可能であることが判明した。自己周波数応答関数とも一致することが確認できた。共振点の感度計算ルーチンを利用して反共振点の感度も容易に計算できる。

5. 加振応答点において第 1 次モードを節にする構造最適化を、アルミ板において周囲の質量とその板厚を設計変数として試行でき、有益な知見を得た。

## 参考文献

- (1) Nagamatsu Akio, Introduction to modal analysis (in Japanese), 1993, Coronasya.
- (2) Ishiwata T et al., *Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University*, Vol. 16, pp. 35-40, 2003.
- (3) Ishii T et al., *Bulletin of Computational Science Research Center, Hosei University*, Vol. 16, pp. 41-46, 2003.
- (4) Kawazoe Yoshihiko, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 56, No. 526, 1990, pp. 1511-1517.
- (5) Kawazoe Yoshihiko, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 58, No. 552, 1992, pp. 2467-2474.
- (6) Kawazoe Yoshihiko, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 59, No. 558, 1993,



pp. 521-528.

(7) Kawazoe Yoshihiko, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 59, No. 562, 1993, pp. 1678-1685.

(8) Kawazoe Yoshihiko, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 61, No. 584, 1995, pp. 1300-1307.

(9) Kajiwara I et al., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 54, No. 505, 1988, pp. 2084-2091.

(10) Sakai T et al., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 65, No. 631, 1999, pp. 887-894.

(11) Iwahara M et al., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 56, No. 523, 1990, pp. 612-618.

(12) Iwahara Mitsuo, The research on the performance improvement of the modal property identification, *The dissertation of Tokyo Institute of Technology*, 1996.

---