

シロッコファンの振動特性

栗原, 祥吾 / KURIHARA, Shogo

(発行年 / Year)

2009-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2009-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2008年度 修士論文

シロッコファンの振動特性

指導教員 長松昭男 教授

岩原光男 助手

法政大学院工学研究科

機械工学専攻修士課程

07r1109

栗原 祥吾

目次

第1章 緒論	
1.1 研究背景	1
1.2 目的	1
第2章 モード解析の概要	
2.1 振動の種類	2
2.1.1 自由振動 (free vibration)	
2.1.2 強制振動 (forced vibration)	
2.2 モード解析 (modal analysis)	4
2.2.1 モード解析の概要	
2.2.2 モード解析の長所	
2.3 振動試験	5
2.3.1 振動試験の概要	
2.3.2 対象物の支持方法	
2.4 打撃試験	9
2.4.1 打撃試験の概要	
2.4.2 打撃試験の長所・短所	
第3章 計算モード解析	
3.1 計算モード解析の概要	12
3.2 有限要素法	13
3.2.1 有限要素とトラス部材	
3.2.2 三角要素の剛性マトリクスと仮想仕事の原理	
3.2.3 有限要素法による固有モード解析	
第4章 実験モード解析	
4.1 実験モード解析の概要	32
4.2 実験方法	37
4.2.1 加速度応答を利用したモード解析	
4.2.2 歪み応答を利用したモード解析	

第 5 章	実稼動解析	
5.1	実稼働試験	45
5.2	信号処理	46
	5.2.2 特異値分解の実験データへの適用	
第 6 章	ジャイロモーメント	
6.1	概要	51
6.2	弾性軸に回転体が付いている場合の振動	51
6.3	ジャイロモーメントのみを考慮した場合	54
第 7 章	実験モード解析と特異値分解で得られるモード形状の比較	
7.1	実験目的	56
7.2	実験方法	56
	7.2.1 加振方法	
	7.2.2 支持方法	
	7.2.3 実験装置	
7.3	実験結果	60
7.4	結論	61
第 8 章	シロッコファンのモード解析	
8.1	実験対象	62
8.2	実験方法	63
	8.2.1 加振方法	
	8.2.2 支持方法	
	8.2.3 実験装置	
8.3	実験結果	67
8.4	計算モード解析	
	8.4.1 シロッコファンの有限要素モデル	
	8.4.2 有限要素モデルの解析の結果	
8.5	モード解析における結論	72
第 9 章	シロッコファンの実稼動解析	
9.1	実験方法	73
	9.1.1 加振方法	

9.1.2	実験方法	
9.1.3	実験装置	
9.2	実験結果	77
9.2.1	回転数を変化させたときの振動特性	
9.2.2	回転数を変化させたときのモード形状	
9.3	ジャイロモーメントの影響	82
9.3.1	目的	
9.3.2	考察	
9.4	実稼動解析における結論	84
第10章 結論		85
参考文献		86
謝辞		87

第1章 緒論

1.1 研究背景

本研究では多翼送風機の遠心ファン(シロッコファン)を研究対象とした。多翼送風機は遠心送風機の中では、小型であるが大風量が得られるということや、軸流ファンに対して高い圧力が得られるという特長を活かし、大型情報機器の冷却や発熱量の大きい部品(光学機器(大型プロジェクター)のランプなど)の局所冷却に利用されている。大型情報機器は実装密度や発熱密度が高くなり、軸流ファンでは圧力が低いため、冷却効率を向上させるために多翼送風機が利用されている。また、大型プロジェクターではランプの高輝度化に伴って発熱量が増加しており、冷却効率を上げるために流速を上げる必要があるため、多翼送風機を利用する。一般的に、多翼送風機はインバーターと組み合わせて利用されることが多い。遠心ファンは構造上ケーシングと組み合わせで利用するため、稼働中は圧力変動が生じ、その結果、振動が発生してしまう。インバーターと組み合わせて使用した場合に共振破壊現象が起きることがあり、ランナーは特に共振破壊が発生しやすい特性であるということが分かっている。多翼送風機が利用されるものは振動が嫌われており、遠心ファンの低振動化と共振現象の回避が求められている。

1.2 目的

遠心ファンなどの稼働中における振動特性の実験解析はインパルスハンマーなどを用いた加振試験と比べて実験方法が難しいという問題があった。本研究では遠心ファンの稼働中における振動現象の解析を行い、機械構造物の運転時における実稼働解析法を確立し、対象物の稼働中におけるモード形状を求めることを目的とした。実稼働モード解析を行う場合、遠心ファンなどの回転構造物の解析を行うときは従来モード解析で使用していた加速度ピックアップでは質量が大きすぎるため、より質量の小さい歪ゲージを利用して実験を行った。また、遠心ファンは薄肉化や多翼化など構造が複雑なため詳細なモード形状の把握や、応力集中部を探すことは難しい。そこで、有限要素(FEM)モデルを用いて数値計算を行い現象の理解を行う。

第2章 モード解析の概要

2.1 振動の種類

振動は、自由振動、強制振動、及び複雑な振動に大別できる。ここでは、その中でも特に重要な自由振動、及び強制振動について述べる。

2.1.1 自由振動 (free vibration)

動的な外作用が変化すると必ず発生し、一旦生じれば、外から何もしないでも自分自身だけで自由勝手に振動し続ける。叩く、引っ張っておいて放すなどのように外作用が加わるときはもちろん、今まであった加振力が急に無くなる時や、加振力の大きさ、方向、周波数が急に変わったときにも発生する。同じ物体に同じ外作用の変化があれば同じ自由振動が発生するが、同じ物体でも外作用の変化が異なると異なる自由振動を生じる。大抵、初めは運動の形も振動数もはっきり見分けがつかないが、次第に両方共見分けがつくまで単純になり、やがて消えて行く。

自由振動は、ほとんどの場合が速やかに消えてしまい、実際の機械では強制振動ほど大きい問題を生じないが、実験モード解析から見ると極めて大切である。それは、強制振動や自励振動などのすべての振動を生じる元になる物体の動特性が、自由振動の中にすべて含まれているからである。したがって、自由振動を観察すれば、すべての動特性を知ることができる。しかも、自由振動は外作用が無い状態で続いているから、現象が外環境の影響を受けず、物体自身の動特性だけに支配されている。そこで、現象の分析により動特性を容易に正しく把握できる。自由振動は、1自由度系では最初の振幅の大きさ、振動の速さ、減衰の速さの3つの現象で表される。多自由度系では、これらがそれぞれ固有モード、固有振動数、モード減衰比の3つの現象に対応する。一方動特性は質量、こわさ(剛性)、減衰係数の3種類であり、3という数字が基本になっている。

2.1.2 強制振動 (forced vibration)

外作用に対する応答であり，外作用の開始と共に直ちに発生する．しかし外作用の開始は外作用の変化の一形態なので，同時に自由振動も発生する．大抵は両者の振動数は異なるので両者が混合した複雑な波形を示す．これを過渡振動 (transient vibration) という．やがて自由振動は減衰して消え，強制振動だけが残る．これを定常強制振動または定常振動という．過渡振動は外作用の開始だけでなく，大きさや振動数の急変する時にも生じる．

2.2 モード解析 (modal analysis)

2.2.1 モード解析の概要

通常行われているコンピュータ援用振動解析の例として Fig.2-1 を示す。振動解析は FEM 数値解析と実験解析の 2 通りの流れに始まる。FEM 数値解析では、設計図面や CAD 情報をもとにして FEM モデルを構築すれば、コンピュータ内でエネルギー原理を用いて特性行列 (characteristic matrix) (質量行列と剛性行列) が作成される。そして固有値問題を解いてモード特性 (modal parameter) を導き、モード解析の理論により周波数応答関数を求める。

一方、実験解析では、振動試験で得た加振力と応答の測定結果から、信号処理によって周波数応答関数を求め、さらにモード解析の理論を用いてモード特性を同定する。

これら実験による解析、及び FEM 数値解析をそれぞれ実験モード解析、理論モード解析と呼ぶ。

2.2.2 モード解析の長所

- ・ 固有モードの直交性を利用して多自由度系の運動方程式を非連成化する。そのために、複数の 1 自由度微分方程式を互いに独立に解いただけで、多自由度連立微分方程式を解くのと同等の解を得ることが出来る。
- ・ 運動方程式を固有モード毎に互いに独立な 1 自由度系微分方程式に分解するので、高次固有モードに相当する式を無視するだけで簡単に高次固有モードを省略できる。そして、解くべき 1 自由度系微分方程式の数を著しく少なくすることが出来る。

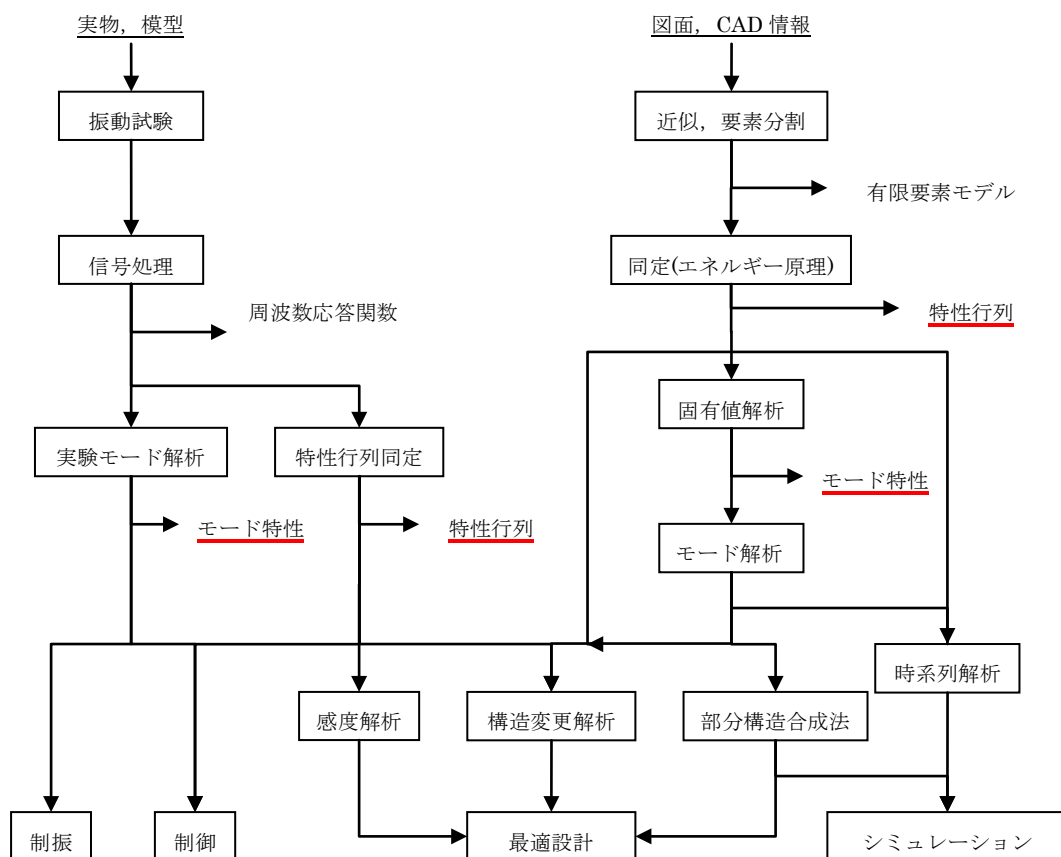


Fig.2-1 コンピュータ援用による振動解析

2.3 振動試験

2.3.1 振動試験の概要

機械や構造物に振動を発生させる目的で動的な作用を加えることを、加振または励振という。加振の対象である機械や構造物（以下対象物という）は、加振によって動的な応答を示す。加振入力と応答の間には、次の関係がある。

$$\text{応答} = \text{対象物の特性} \times \text{入力}$$

対象物を加振して、加振入力と応答の両方を測定し、それらの測定結果に適切な信号処理をほどこして、対象物の動特性を情報として含む信号を取り出す一連の操作を、振動試験という。信号は周波数応答関数として取り出すことが多い。振動試験で得られた信号は、そのままの状態を観察し、不具合対策などに役立てることもあるが、大抵は対象物の動特性を同定するための入力として用いる。モード特性を同定する目的で行う振動試験をモード試験という。またモード試験とモード特性の同定を合わせて実験モード解析という。

実験モード解析を成功させるためには、正しい周波数応答関数を測定することが第一の条件である。モード特性同定の方法にはいろいろあるが、誤差が少ない良い周波数応答関数を入力データとして与えさえすれば、どの方法を用いても大抵は良い結果を得る。反対に、入力データが大きい誤差を含み信頼性が乏しいときには、どんなに複雑で高級な同定方法を用いても、あまり良い結果は得られない。したがって、振動試験は実験モード解析の中で最も重要な部分であるといえる。

2.3.2 対象物の支持方法

振動試験を行うためには、まず対象になる機械や構造物、すなわち対象物を何らかの方法で支持しなければならない。対象物の支持は、ともすれば軽く扱われがちである。しかし、同一の対象物を同一の方法で加振しても、その支持方法によって応答は全く異なったものになるので、目的にあった方法で支持するように、細心の注意が必要である。

対象物の支持は、自由境界または自由支持、固定支持および弾性支持の3通りに大別できる。

【1】 自由境界または自由支持

対象物の動きを拘束したり妨げたりしない支持をいう。理想的には空間に浮かんだ状態を指すが、この理想状態は地球の重力がある限り実現できない。しかし実際には、柔らかいゴムひもで吊ったり、タイヤチューブ、スポンジ、ゴム板、空気ばねなどの上に置いたりすることで、実用上十分な自由支持が比較的簡単に実現できる。対象物を支持しているこれらの物をここでは支持物と呼ぶ。自由支持を実行する上で留意する必要がある主な事項を以下に述べる。

- (1) 支持物のばねこわさが、対象物の剛性に比べて十分小さいこと。そのために、支持物はできるだけやわらかい物にすべきである。他方、対象物の局所的な剛性ができるだけ大きい所を支持するように支持点を選ぶべきである。剛性が小さくやわらかい部分を支持すれば、支持物のばねこわさが測定に影響したり、対象物が自重によって変形し、その動特性が変わってしまう恐れがある。
- (2) 剛体モードの振動数が十分小さいこと。
- (3) 支持物の質量が十分小さいこと。
- (4) 支持物による見かけの減衰の増加が十分小さいこと。
- (5) 測定にできるだけ影響を与えないような支持場所を選ぶこと。
- (6) ゴム板やスポンジは、全体にわたってべったり敷くよりは、部分的に、数箇所に、できるだけ剛性の高い所にできるだけ小さい面積で敷く方がよい。

以上の事項を十分満足しているか否かを支持条件（吊りひもやゴム板などの種類、場所、位置、対象物の姿勢など）をいろいろ変えた予備試験によって検討し、不十分な点があれば対策や、最適の支持条件を選んだりしておく必要がある。

【2】 固定支持

実用時に一部が固定された状態にある構造物や機械の動特性を本来あるがままの状態を知りたいときなどに採用される支持条件であり、自由支持ほど一般的な支持条件ではない。理論的解析では、該当する自由度の変位を零と置くだけで固定支持を極めて簡単に作ることができる。一方、振動試験で理想的な固定支持を実現するためには、質量

と剛性が共に無限大である物体に、溶接などで完全に一体化するように対象物を取付ける必要がある。しかしこれは無理なので、実際には質量と剛性の両方が対象物よりもはるかに大きいと考えられる基礎や定盤のような物体に、ボルト締めなどでしっかり取付けた状態を固定支持とみなす。

このような方法で作った固定支持では、様々な問題が生じることも多く、振動試験では、固定支持はなるべく避け、できるだけ自由支持で行う方がよい。これは、第1に固定支持は自由支持よりも実現が困難だからである。たとえば、やわらかいゴムひもで吊るしたり、やわらかいゴム版の上においた状態を自由支持と近似するのは妥当であるが、大きい基礎に取付けたからといって、必ずしも固定支持にはならない。そして第2に、自由支持の結果から固定支持の結果を導くことは可能であるが、逆は不可能だからである。これは、自由支持の方が固定支持よりも固定すべき点の応答を測定している分だけ自由度が多く、振動試験の結果から自由度を減らすことはできても増やすことはできないからである。

【3】 弾性支持

大型構造物や重量機械は、自由支持も固定支持も実現しにくい。また、機械の部品の振動試験を行うときに、構造上取り外すことが出来なかったり、組み込んだままの動特性がほしい場合もある。このようなときには、自由と固定の中間の支持で実験を行うことになる。このような支持方法を弾性支持と呼ぶ。弾性支持の場合には、あらかじめ支持物単体の固有振動数、固有モードおよび支持点における周波数応答関数を、計算や実験で明らかにしておく必要がある。そして、振動試験の後に、部分構造合成法を利用して、全体の動特性を表している振動試験結果から支持物単体の動特性を差し引くことによって、対象物単体の動特性を得ることが望ましい。これを完全に行うことが無理な場合には、支持物単体を対象物に取付け点における等価1自由度系に置き換えておき、それを差し引く。

2.4 打撃試験

2.4.1 打撃試験の概要

打撃試験は、FFTの開発と共に現場に急速に普及し、いまや振動試験の中で主役の座を占めている。機械の動的な性質を調べたり不具合対策をしようとする人は、ほとんどまずIMPによる打撃試験を行う。これは、打撃試験が手軽に短時間でできるので、一見簡単そうに見えるからである。しかし、実際には多くの落とし穴があって良い結果を得るのが意外に難しい。むしろ、打撃試験はすべての振動試験の中で最も困難な方法であると言っても過言ではない。これは、方法の簡単さが、人間の技能および計測とデータ処理に負荷をかけることによって実現されているからである。

打撃試験では、力と応答が特別な性質を持っており、それが原因で、外乱と漏れ誤差という2つの問題を生じる。これらに対処するために、打撃試験特有の信号処理方法を必要とする。またこれらの問題による精度低下の程度は、対象物の性質と実施者の技能に大きく依存する。

打撃試験は、大別して3つの目的で行われる。第1に固有振動数と固有モードの有無とおよその値と形を知るため、第2に他の高精度な方法で本試験を行う前の予備試験として、第3に他の方法と同様に正確な周波数応答関数を得るため、である。第1や第2の場合には適当に行ってもよいが、第3の場合には、経験と知識と注意なしでは良い試験を行うことができない。しかし逆にいえば、これらがあれば必ず良い結果を得ることができるのである。

2.4.2 打撃試験の長所・短所

【1】 打撃試験の長所

- (1) 準備と実施の両方の時間が、全加振方法の中で最も短い。

- (2) 基本的には、打撃ハンマと加速度計と2チャンネルFFTさえあれば良く、加振器を使う他の加振方法に比べて装置が簡単で金がかからない。また、機動性に富むから、現場で容易に実現できる。
- (3) だれでもすぐ行うことができる。他の振動試験では加振点を固定させて応答点を移動させるが、打撃試験では加振点の移動が極めて簡単であり、次々と場所を変えて叩いていくだけで全体の振動試験ができる。
- (4) 加振系は、エネルギーを注入する瞬間だけ対象物に接触する。そのために、加振系が対象物に影響を与えその動特性を変えることがない。また、対象物に加振系取付けのための加工を加える必要がない。
- (5) 打撃力は広範囲の連続周波数スペクトルを有するため、広周波数帯域の加振が瞬時にできる。
- (6) 加振力に漏れ誤差が全く生じない。
- (7) 叩ける物であれば何でも加振でき、広いはん用性を有する。

【2】 打撃試験の短所

- (1) 波高率が極端に大きい。
- (2) SN比が極端に小さい。
- (3) 非線形特性を有する対象物には不適である。
- (4) 対象物の減衰の大きさにより制限を受ける。
- (5) 精度が実施者の技能や熟練度に大きく依存する。
- (6) 加振力の大きさ、周波数範囲、周波数成分の割合を調整しにくい。
- (7) 低周波域の加振が困難である。

- (8) 叩くことにより対象物に損傷を与える可能性がある。

第3章 計算モード解析

3.1 計算モード解析の概要

計算モード解析とは、モデル化によって対象物の自由度を決めて物理モデルを作成し、力の釣り合いやエネルギー原理によって数学モデルに変換することにより得られた式を理論解析や数値解析によって解き、固有振動数と固有モードを求めることをいう。本研究では、最も広く使われている有限要素法を使用し、モード特性を求める。モデル作成には3次元CAD ソフトSolid Works とプリ処理ソフトAltair / Hyper Mesh を、ポスト処理ソフトAltair / Hyper Viewを、有限要素法解析にはMSC / NASTRAN を使用した。計算モード解析の流れをFig.3-1に示す。

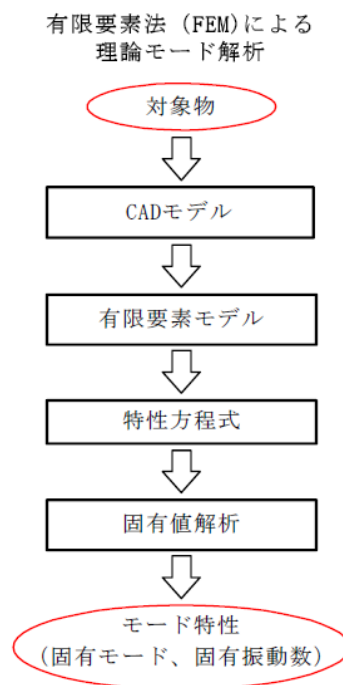


Fig.3.1 計算モード解析の流れ

3.2 有限要素法

有限要素法とはRitz-Galerkin 法の一つで、近似関数として区分多項式を用いるものであり、連続体を幾つかの要素に分けて考え、要素ごとに方程式を作り、それを元に全体としての方程式を組み立てて解く方法のことをいう。

有限要素法の特徴は、

- ・ 問題とする領域<物体>を小部分に分割する
- ・ 各々の小部分を簡単なモデル<数式>で近似する
- ・ それを全体的に組み立てて解く

という点にある。一般に実物モデル（数式）を化解くという形は数学的に問題を解くときの定石であるが、その際、特に「小部分のモデルをつないで全体のモデルとする」というやりかたをとるのが有限要素法である。従来は、たいてい小部分に分けることをせず、全域の現象を単一のモデル（数式）で表現しようとした。そのため、

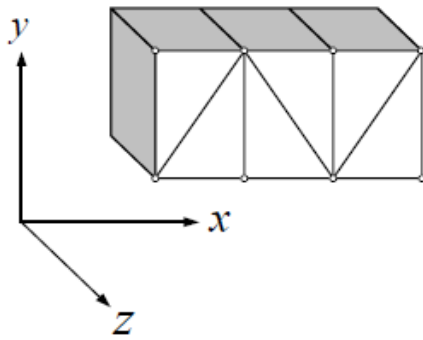
- ・ 領域（物体）の形が単純でないと適用しにくい
- ・ 粗い近似解はすぐ得られるが高精度化が困難

という悩みがあった。この難点を解決するため、有限要素法では区分多項式を用いている。また、有限要素法の特徴として以下のことが言える。

- ・ 近似のバランスが良い
- ・ 計算と実際の中間的存在である
- ・ 実際的问题を扱えるのが強み
- ・ 応用範囲が極めて広い
- ・ コンピュータと密着した計算法である
- ・ データを入れれば即座に解が出る便利な道具である（ブラック・ボックスとして使える）

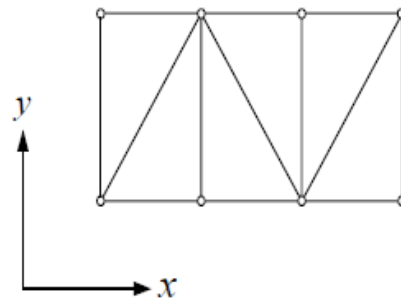
3.2.1 有限要素とトラス部材

連続体を有限要素法により解析する場合、解析対象を有限の大きさを有する他所で分割して取り扱う。この要素のことを有限要素（finite element）といい、連続体を有限要素で分割して力学的に解析する手法を有限要素法（finite element method;略してFEM）という。ここでは2次元の場合を取り扱い、有限要素として三角要素を使用する。ここで注意してもらいたいのは、2次元の意味である。解析対象は物理的に実態のあるもので、空間に3次的に存在するものである。しかし、板厚が他の寸法に比べ非常に小さい場合、あるいは非常に大きい場合は、内部の応力状態は板厚方向には変化せず一定であると考えてよい。このような状態を2次元というのである。また、板厚が小さく $\sigma_z = 0$ と考えられる場合を平面応力状態、板厚が大きく $\varepsilon_z = 0$ と考えられる場合を平面ひずみ状態という。いま、2次元の場合を取り扱うということの意味は、応力状態が平面応力、平面ひずみの状態を扱うということである。また、板厚方向の形状は一定でなければならないから、解析対象の形状としては2次的な形状のみを考えればよいことになる（Fig.3-2）。また、板厚方向に荷重が加わる場合は、2次元応力状態とならないから、荷重も図に示す $x \cdot y$ 面内に働く場合を扱うわけである。



{ 物体は3次元
 形状は2次元
 応力, ひずみ状態は次元
 変位, 荷重はx方向, y方向の2次元

Fig.3-2 2次元連続体



{ 部材は1次元
 構造は2次元
 応力, ひずみ状態は1次元
 変位, 荷重はx方向, y方向の2次元

Fig.3-3 2次元トラス

これをトラスの場合と比較するとわかりやすい。トラスの場合は、実際には3次元的な部材から構成されているが、断面積に比べ部材の長さが長いことから、トラス部材は1次元の棒として扱った。したがって、応力、ひずみも1次元であった。しかし、これら部材の組み合わせからなる構造は、2次元トラスの場合、2次元的に組み合わせられ、それゆえ、荷重、接点変位は2次元的である (Fig.3-3)。

トラスの場合を示すと、

- (1) 荷重は節点を介してのみ伝えられる
- (2) 応力、ひずみは部材内で一定である

これらは物理的に当然のことであった。これにならって、連続体の場合にも同じ仮定を設ける。すなわち、三角形要素の3頂点を節点 (node) といい、

- (1) 荷重は節点を介してのみ伝えられる。
- (2) 応力、ひずみは要素内で一定である。

という仮定をする。トラスの場合には、これが直観的に理解できることであったのに対し、連続体の場合にはあくまでも仮定である。

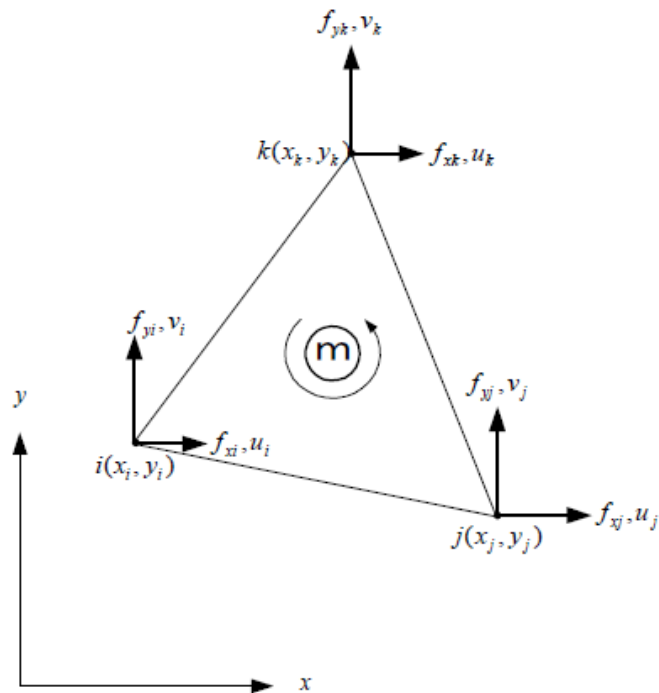


Fig.3-4 三角要素の接点力と接点変位

まず(1)について考えてみる。トラスの場合と同様に三角形の節点の節点力、および節点変位をFig.3-4のように定める。荷重は実際には要素の境界上のすべての表面力として伝わる。トラスの場合、要素境界は節点に一致しているから表面力は節点力に一致するが、連続体の場合は表面力すなわち節点力ということにはならない。そこで、(1)のような仮定を設けるのである。節点力の大きさは節点力が要素になす仕事が表面力が要素になす仕事に一致するように仮想仕事の原理を用いて決められる。この意味での節点力を等価節点力 (equivalent nodal force) という。

次に(2)を考えてみる。トラスの場合は、応力 - ひずみが部材内で一定となるのは当然であるが、連続体の場合は一般に一定とはならない。しかし、要素分割を細かくすれば要素内でほぼ一定と考えてもよい。トラスの場合、なぜ応力、ひずみが一定になるかといえば、変位が部材内で直線的に変化するからである。

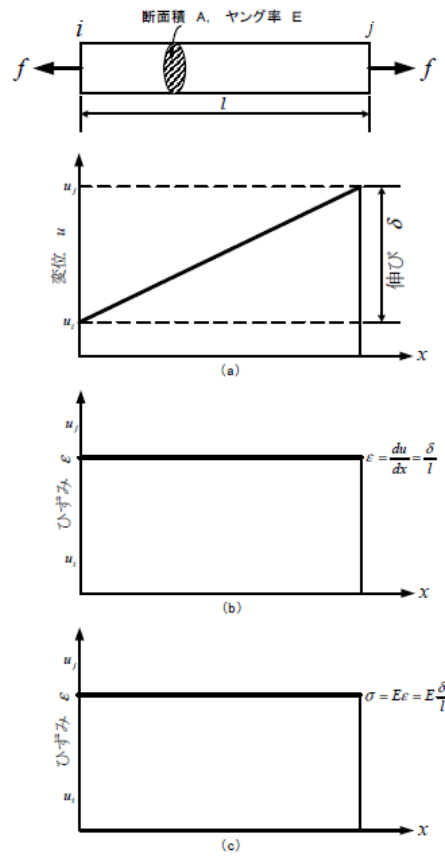


Fig.3-5 部材の変位，歪，応力

Fig.3-5 (a) に示したように変位 u は式(3.1)となる.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x \tag{3.1}$$

また,

$$\begin{aligned} u_i &= u(0) = \alpha_1 \\ u_j &= u(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l \end{aligned}$$

であるから,

$$\alpha_1 = u_i, \quad \alpha_2 = \frac{u_j - u_i}{l}$$

となり, したがってこれらを代入する事により, 式(3.1)は式(3.2)となる.

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_i + \frac{x}{l}u_j \quad (3.2)$$

これはトラス部材の変位-節点変位関係を示している.

連続体の場合も応力, ひずみが要素内で一定であると仮定することは要素内で変位が直線的に変化すると仮定することに相当する. 式(3.1)に対応して, 三角形要素内の変位場を次のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

ここに, u : x 方向の変位, v : y 方向の変位である. この式を変位関数 (displacement function) という. 定数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ を節点変位 $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k$ および節点座標

$x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ で表す.

$$\begin{aligned}
 u_i &= u(x_i, y_i) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\
 v_i &= v(x_i, y_i) = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\
 u_j &= u(x_j, y_j) = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\
 v_j &= v(x_j, y_j) = \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\
 u_k &= u(x_k, y_k) = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \\
 v_k &= v(x_k, y_k) = \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k
 \end{aligned}$$

これを解くと $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ が得られる。これを式(3.3)に代入すると、式(3.2)に対応する三角形要素の変位-節点変位関係が、次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2\Delta} \{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_k \} \\
 v &= \frac{1}{2\Delta} \{ (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_k + b_k x + c_k y) v_k \}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & a_k &= x_i y_j - x_j y_i, \\
 b_i &= y_j - y_k, & b_j &= y_k - y_i, & b_k &= y_i - y_j, \\
 c_i &= x_k - x_j, & c_j &= x_i - x_k, & c_k &= x_j - x_i,
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Δ は三角形要素の面積で、三角形要素の3 節点 i, j, k が反時計方向の順ならば (Fig.3-4) 行列式を用いて、

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$

と書ける。式(3.4)の変位-節点変位関係を形状関数 (shape function) という。

この様にして、変位 - 節点変位関係が得られれば歪 - 変位関係を用いて歪 - 節点変位関係が求められる。

トラスの場合 (1次元) は、

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (3.6)$$

であるから式(3.2)より式(3.7)を得る。

$$\varepsilon = \frac{1}{l}(u_j - u_i) = \frac{\delta}{l} \quad (3.7)$$

三角形要素の場合 (2次元) は、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.8)$$

であるから，式(3.4)より次式を得る．

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{2\Delta} \{b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k\} = \frac{1}{2\Delta} \{(y_j - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k\} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{2\Delta} \{c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k\} = \frac{1}{2\Delta} \{(x_k - x_j)v_i + (x_i - x_k)v_j + (x_j - x_i)v_k\} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{2\Delta} \{c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k + b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k\} \\
 &= \frac{1}{2\Delta} \{(x_k - x_j)u_i + (x_i - x_k)u_j + (x_j - x_i)u_k \\
 &\quad + (y_j - y_k)v_i + (y_k - y_i)v_j + (y_i - y_j)v_k\}
 \end{aligned}$$

これをマトリックス表示すれば式(3.9)を得る．

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i & y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

この歪 - 節点変位関係式の係数マトリックスを $[B]$ とおき，これを歪 - 変位マトリックス (strain-displacement-matrix) という．すなわち，

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i & y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

いま、歪ベクトル $\{\varepsilon\}$ ，節点変位ベクトル $\{\xi_e\}$ を

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \{\xi_e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix}$$

とすれば、歪 - 接点変位関係式(3.9)は、

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\xi_e\} \tag{3.11}$$

と書くことが出来る。

歪と接点変位の関係がわかれば、応力 - 歪関係式を用いて応力と接点変位の関係がわかる。トラスの場合(1次元)は、 $\sigma = E\varepsilon$ であるから、式(3.6)より、

$$\sigma = \frac{E}{l}(u_j - u_i)$$

となる。一方、三角形要素の場合(2次元)は応力 - 歪関係は応力 - 歪マトリックス $[D]$ によって次のように表される。

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{3.12}$$

マトリックス $[D]$ は平面ひずみの場合は,

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

であり, 平面応力の場合は,

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

である. 式(3.11)により, 三角形要素の応力は, 接点変位ベクトルから次のように求めることができる.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\zeta_e\} \quad (3.13)$$

以上, 三角形要素の節点変位から要素内ひずみ, 応力を導く手順をトラス部材と比較しながら示した. なお1次の変位関数の仮定, すなわち, 要素内のひずみ, 応力が一定であるという仮定は要素が適当に小さければ近似的に容認しうる仮定である. したがって, 形状の変化, 荷重の変化が大きい箇所, すなわち, 応力変化の大きい箇所では要素分割を細かくしなければならないということがわかる.

3.2.2 三角形要素の剛性マトリックスと仮想仕事の原理

前項では要素の節点変位から応力、ひずみを導く手順を示したが、実際には荷重を受けている物体（連続体）に生じる応力、ひずみを求めるためには節点荷重（あるいは節点力）と節点変位関係、すなわち剛性マトリックスを求めなければならない。

トラスあるいはバネの場合は、

$$f = k\zeta = k(u_j - u_i)$$

の関係から直ちに剛性マトリックスを導くことができた。しかし、2次元である三角形要素の剛性マトリックスは常識のように簡単には求められない。前項で節点変位と応力、ひずみの関係を導く際に用いた弾性体の支配方程式は、(1) 歪 - 変位関係式、(2) 応力 - 歪関係式であった。弾性体における支配方程式はもう1つあり、それはつり合い方程式あるいはこれに等価な仮想仕事の原理から導かれるのである。

仮想仕事の原理は次のようである。

$$\int \{\zeta^*\}^T \{P\} dS + \int \{\zeta^*\}^T \{F\} dV - \int \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV = 0 \quad (3.14)$$

ここで、

$\{\zeta^*\}$: 仮想変位ベクトル

$\{P\}$: 単位面積当たりの表面力ベクトル

$\{F\}$: 単位面積当たりの体積力ベクトル

$\{\varepsilon^*\}$: 仮想ひずみベクトル

$\{\sigma\}$: 応力ベクトル

と定義する。いま、体積力を考えないとすると式(3.14)は次のようになる。

$$\int \{\zeta^*\}^T \{P\} dS = \int \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \quad (3.15)$$

三角形要素に仮想仕事の原理を適用して三角形要素の剛性マトリックスを求める。要素に作用する表面力 $\{P\}$ は一般には三角形要素の各辺に作用するが、この表面力がなす仕事と等価な仕事をする節点力を定義する。すなわち、三角形要素の節点ベクトル $\{f_e\}$ 、節点変位ベクトル $\{\xi_e\}$ を

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \\ f_{xk} \\ f_{yi} \\ f_{yj} \\ f_{yk} \end{Bmatrix}, \quad \{\xi_e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

とするとき、節点力のなす仕事 $\{\xi_e\}^T \{f_e\}$ が、表面力 $\{P\}$ のなす仕事に等しくなるように、

節点力を定義するのである。したがって、式(3.15)の左辺は、

$$\int \{\zeta^*\}^T \{P\} dS = \{\zeta_e\}^T \{f_e\} \quad (3.17)$$

となる．ここに， $\{\xi^*\}$ は仮想節点ベクトルである．

また，要素内で応力，ひずみが一定であるから式(3.15)の右辺は，

$$\int \{\xi^*\}^T \{\sigma\} dV = V \{\xi^*\}^T \{\sigma\} \quad (3.18)$$

と書ける．ここには三角形要素の体積であり，

$$V = t\Delta \quad (t:\text{三角形要素の板厚}, \Delta:\text{三角形要素の面積}) \quad (3.19)$$

である．

以上から，仮想仕事の原理は三角形要素に対して，

$$\{\zeta_e^*\}^T \{f_e\} = t\Delta \{\xi^*\}^T \{\sigma\} \quad (3.20)$$

と書くことができる．これに，

$$\text{ひずみ-節点変位関係} \quad \{\varepsilon\} = [B]\{\zeta_e\}$$

$$\text{応力-歪み関係} \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\zeta_e\}$$

を代入する。仮想節点変位ベクトル $\{\xi_e^*\}$ に対応する仮想ひずみベクトル $\{\varepsilon^*\}$ は

$$\{\varepsilon^*\} = [B]\{\xi_e^*\}$$

であることに注意して、式(3.20)を書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \{\xi_e^*\}^T \{f_e\} &= t\Delta \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} \\ &= \{\xi_e^*\}^T (t\Delta [B]^T [D][B]) \{\xi_e\} \end{aligned}$$

は任意の仮想節点変位ベクトルであるから、上式が成立するためには、

$$\{f_e\} = (t\Delta [B]^T [D][B]) \{\xi_e\} \quad (3.21)$$

が必要である。これは三角形要素の節点力ベクトル $\{f_e\}$ と節点変位ベクトル $\{\xi_e\}$ の関係を表しており、三角形要素の剛性方程式である。要素の剛性マトリックスを $[K_e]$ とすれば剛性方程式は

$$\{f_e\} = (t\Delta [B]^T [D][B]) \{\xi_e\} \quad (3.22)$$

となる。

ここで $[K_e]$ は,

$$[K_e] = t\Delta[B]^T[D][B] \tag{3.23}$$

である.

以上のようにして, 要素の剛性マトリックスは $[B]$, $[D]$, t , Δ から計算できることが示された. 以上示した三角形要素に関する諸関係を, 弾性体の支配方程式から導出する手順を整理して, Fig.3.6に示す.

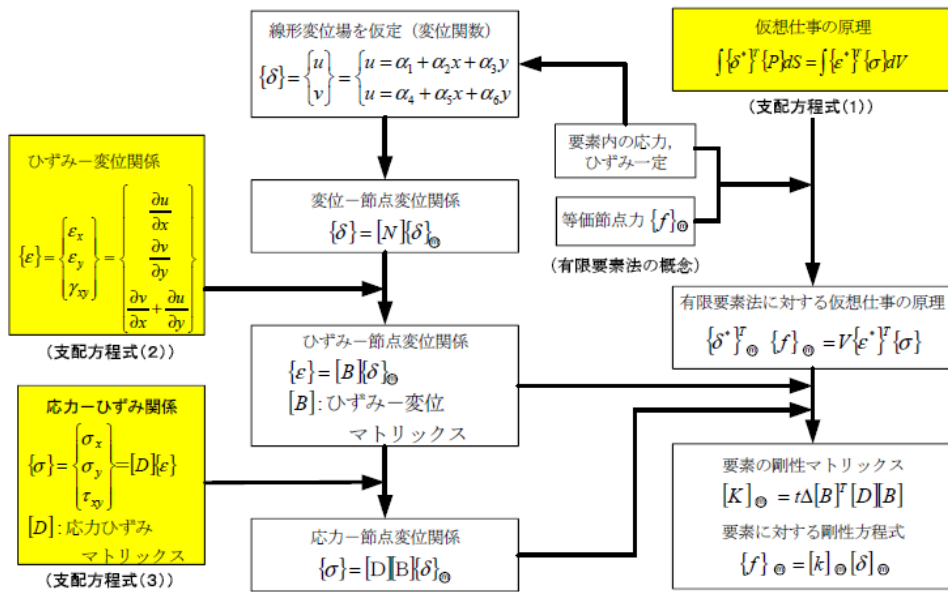


Fig.3-6 弾性論より有限要素法へ

3.2.3 有限要素法による固有モード解析

固有モード解析は構造物の動特性を評価するために一般によく行われる. 例えば回転機械が基板上に据え付けられる場合, 過度な振動を防止しなければならない. この機械

は回転数が基盤の固有振動数に近接しているかどうか調べるために解析される。さらに進んだ解析においては、固有モード解析は動解析と応答解析のために構造物の固有振動数およびモード形状を提供する。Fig.3-6に有限要素法による計算モード解析の流れを示す。

有限要素解析の基本目標は次の単純振動方程式に対する解を得ることである。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (3.24)$$

式(3.24)の解は次の調和形式になる。

$$\{u\} = \{\phi\}e^{j\omega t} \quad (3.25)$$

ここで、 $\{\phi\}$ はモード形状、 ω は振動数である。式(3.25)を式(3.24)に代入すると、次の固有値方程式を得る。

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = 0 \quad (3.26)$$

自明でない解は係数マトリックスの行列式が次式で示すようにゼロになる場合のみ存在する。

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (3.27)$$

また、 ω^2 を λ と置いて

$$\det([K] - \lambda[M]) = 0 \quad (3.28)$$

固有値 λ は複数個の解を持つ。解の数は剛性マトリックス $[K]$ の次元数に等しい。

式 (4.25) は次式のように書き直せる。

$$([K] - \lambda_i[M])\{\phi_i\} = 0 \quad (3.29)$$

下添字 i は 1 から N までの値をとり、 N は剛性マトリックス $[K]$ の次元数である。 λ_i は i 番目の固有値、 $\{\phi_i\}$ は λ_i に対する i 番目のモードベクトルである。

第4章 実験モード解析

4.1 実験モード解析の概要

実験モード解析とは、振動試験で測定した加振力と応答の実験データを分析することによって、その中に隠れた形で混ざり合っている動特性すなわち固有振動数、固有モードおよび減衰の大きさを明らかにすることである。流れとしては振動試験で得た加振力と応答の測定結果から、信号処理によって周波数応答関数を求め、さらにモード解析の理論を用いてモード特性を同定する。

振動試験、及び打撃試験は前章の2.3, 2.4においても示したが、ここではもう少し詳しく説明する。振動試験では、一連の装置を組み合わせて振動試験システムを構成する。システムの構成内容は振動試験の方法によって様々に異なるが、本研究で利用したシステム構成をFig.4-1に示す。

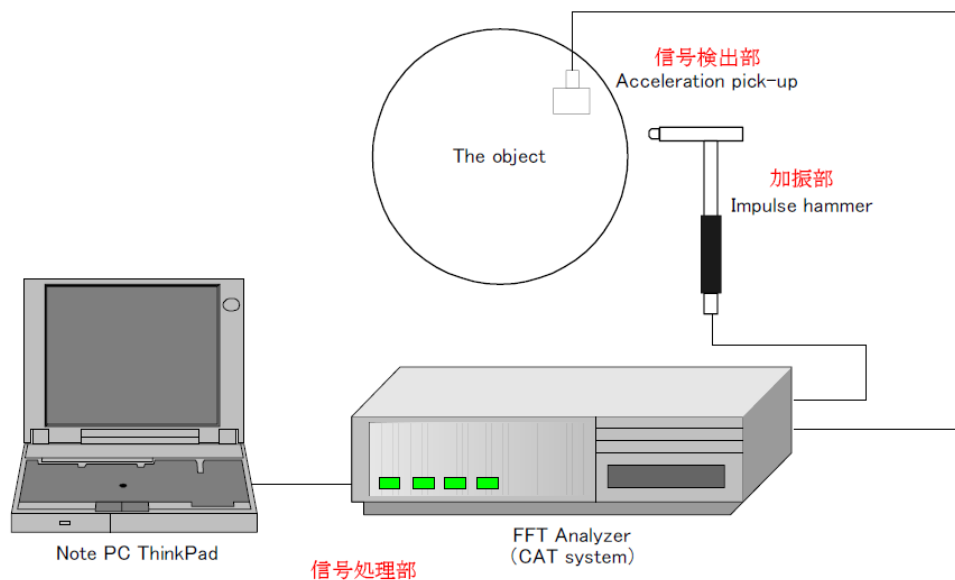


Fig.4-1 振動試験のシステム構成

この図のように、標準的な振動試験システムは加振部，信号検出部および信号処理部の3つの部分によって構成される。

まず加振部は，加振方法によって，加振器を用いる場合，打撃ハンマー（Impulse hammer）を用いる場合，および非接触で加振するなどの場合に分かれる．本研究では打撃ハンマーを用いた（Fig.4-2）．



Fig.4-2 打撃ハンマー

信号検出部は、力や応力、変位を電気信号に変換することによって検出する部分であり、力変換器、応答変換器、電気信号を後続の信号処理が可能になるまで増幅し調整する増幅器からなる。力変換器としては、ピエゾ素子を用いることが多いが、ときにはひずみゲージを用いることもある。応答変換器としては、ピエゾ素子を内蔵する加速度計を用いて加速度を検出することが多いが、渦電流やレーザ光線を利用した非接触変位計、レーザドップラー速度計、ひずみゲージを使用することもある。また本研究では加速度計 (Acceleration Pick-up) , 及び半導体歪ゲージ (Semiconductor Strain Gage) を使用した。

信号処理部は高速フーリエ変換 (FFT) を主体とした種々の信号処理を行って周波数応答関数あるいは単位衝撃応答を出力する。その道具としては、専用のFFT装置を用いる場合と汎用コンピュータの信号処理ソフトを内蔵させる場合がある振動試験システム全体はコンピュータによって制御すると共に監視器によって随時観察する監視器とは、専用のオシロスコープを用いることもあるが、大抵はFFT装置やコンピュータの出力を利用する。また本研究で使用したFFT装置とモード解析用シームレスソフトを Fig.4-3, Fig.4-4に示す。



Fig.4-3 FFT装置

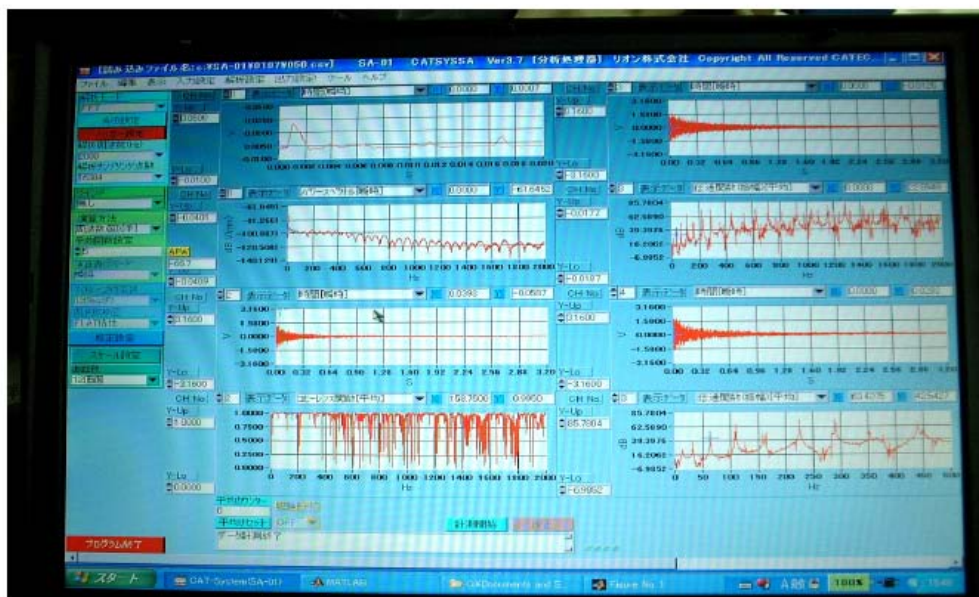


Fig.4-4 モード解析用シームレスソフト

振動試験によって良い周波数応答関数を得ようとするれば、対象物の支持方法、加振器の種類と取り付け、加振波形の種類と大きさ、加振力と応答の両方を検出する変換器の精度と信頼性、窓関数の種類、信号処理方法、結果の良否の見分け方、など様々な事柄に留意しなければならない。

4.2 実験方法

実験モード解析の流れをFig.4-5に示す.

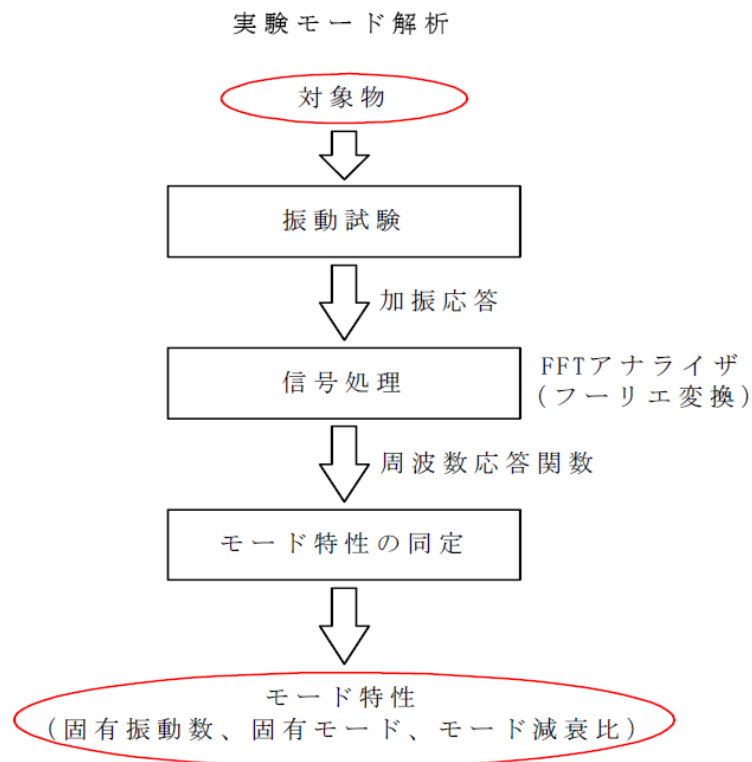


Fig.4-5 実験モード解析の流れ

実験は加振点移動法を用いた。まず、応答点の場所を決め、応答位置に加速度ピックアップ、もしくは歪ゲージを設置する。次に対象物の形状が大まかに分かるよう加振点を設定し、一点ずつ加振を繰り返す、それぞれ加振点と応答点の間の周波数応答関数をとっていく。信号処理はMATRAB言語で組まれたプログラムで実験データをマトリクス形式にまとめ、FORTRAN言語で組まれたモード特性を同定するプログラムを利用す

る。その同定計算の結果はMATLAB言語を用い、アニメーションとして表す。加振点と応答点の配置例をFig.4-6に示す。

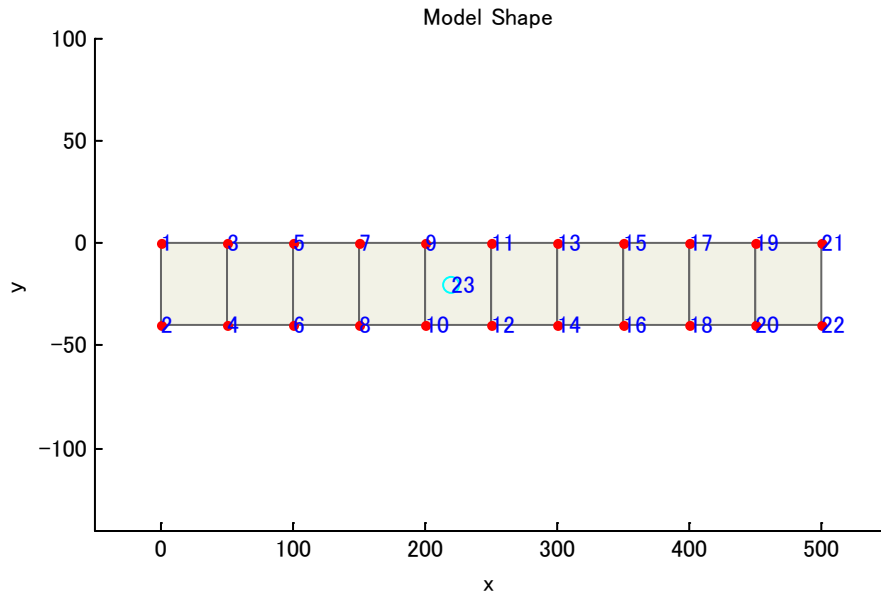


Fig.4-6 加振点と応答点の配置例

4.2.1 加速度応答を利用したモード解析

多自由度系において周波数応答関数を定式化する。単一の角振動数 ω で振幅 F_i の調和加振力が点 i に作用し、他の点には外力が作用しない場合には、外力ベクトル $\{f\}$ は、 i 行目が $F_i e^{j\omega t}$ で他の前項が零になる。これを代入すれば式(4.1)になる。

$$m_r \ddot{\zeta}_r + c_r \dot{\zeta}_r + k_r \zeta_r = \{\phi_r\}^T f = \phi_{ri} F_i e^{j\omega t} \quad (r = 1 \sim N) \quad (4.1)$$

ここで、 ϕ_{ri} は r 次の固有モード $\{\phi_r\}$ の i 行目の項である。式(4.1)は1自由度系の式と同一である。ここで、調和加振力が作用する場合の応答が1自由度のときの式の様に調和波形で表現できるとすれば、 $\dot{\xi}_r = j\omega\xi_r, \ddot{\xi}_r = -\omega^2\xi_r$ となり、これらを式(4.1)に代入して変形すれば式(3.2)になる。

$$\zeta_r = \frac{\phi_{ri}F_i}{-m_r\omega^2 + jc_r\omega + k_r} e^{j\omega t} \quad (r=1\sim N) \quad (4.2)$$

式(3.2)により、角振動数 ω の調和加振力に対する応答がモード解析座標上で求められた。次に空間座標上での応答を求める。 $\{x\} = [\phi]\{\xi\}$ に式(4.2)を代入すれば式(4.3)になる。

$$\{x\} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ri}F_i}{-m_r\omega^2 + jc_r\omega + k_r} \{\phi_r\} e^{j\omega t} \quad (4.3)$$

式(4.3)は点 i に調和加振力が作用するときの全点（自由度）の応答を示す。このうち点 j の応答だけを取り出して $x_j = X_j e^{j\omega t}$ とおけば式(4.4)になる。

$$X_j(\omega) = \left(\sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ri}\phi_{rj}}{-m_r\omega^2 + jc_r\omega + k_r} \right) F_i \quad (4.4)$$

多自由度系における点 i と点 j 間の周波数応答関数（コンプライアンス）は式(4.5)となる。

$$G_{ij}(\omega) = \frac{X_j(\omega)}{F_i} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ri}\phi_{rj}/k_r}{-(m_r/k_r)\omega^2 + j(c_r/k_r)\omega + 1} = \sum_{r=1}^N y_r \phi_{ri}\phi_{rj} \quad (4.5)$$

ここで、 y_r は式(4.6)とする.

$$y_r = \frac{1/k_r}{-(m_r/k_r)\omega^2 + j(c_r/k_r)\omega + 1} \quad (4.6)$$

したがって、式(4.5)を行列にまとめると式(4.7)となる.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1} & G_{m2} & \cdots & G_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = \sum_{r=1}^N y_r \begin{bmatrix} \phi_{r1}\phi_{r1} & \phi_{r1}\phi_{r2} & \cdots & \phi_{r1}\phi_{rm} \\ \phi_{r2}\phi_{r1} & \phi_{r2}\phi_{r2} & \cdots & \phi_{r2}\phi_{rm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{rm}\phi_{r1} & \phi_{rm}\phi_{r2} & \cdots & \phi_{rm}\phi_{rm} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (4.7)$$

m : 応答点数 (出力)

n : 加振点数 (入力)

ここで、 $m = n$ の場合、式(4.7)の右辺を見ると対称行列であることが分かる。このことから、入力点と出力点を入れ換えても伝達特性は等しいということが分かる。この性質のことをマクスウェルの相反定理 (Maxwell's reciprocity) と呼ぶ。

4.2.2 歪応答を利用したモード解析

多自由度系において周波数応答関数を定式化する。まず、歪 - 変位関係式を示す。歪 - 変位関係式は第3章において求めた式(3.11)を一般座標系に変換する。

$$\{\varepsilon\} = [B][\beta]\{\zeta_e\} \quad (4.8)$$

$[\beta]$: 座標変換マトリクス

$\{\zeta_e\}$: 一般座標系における接点変位

ここで、加振力を調和加振力とし、 $\{U_e\}$ を接点変位の振幅とすれば、接点変位は $\{\zeta_e\} = \{U_e\}e^{j\omega t}$ と定義することが出来る。また、接点変位は式(4.9)とすることが出来る。

$$[M_e]\{\ddot{\zeta}_e\} + [C_e]\{\dot{\zeta}_e\} + [K_e]\{\zeta_e\} = \{F_e\}e^{j\omega t} \quad (4.9)$$

この式(4.9)に接点変位の式を代入すれば次の式を得ることが出来る。

$$\{U_e\} = [\Phi][y_r][\Phi]^T \{F_e\} \quad (4.10)$$

ここで $[\Phi]$ は

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \cdots \{\phi_k\} \cdots \{\phi_N\}]$$

とする。これらにより、 $\{\varepsilon\} = \{E\}e^{j\omega t}$ とし、式(4.8)に式(4.10)を代入すると

$$\begin{aligned} \{E\}e^{j\omega t} &= [B][\beta][\Phi][y_r][\Phi]^T \{F_e\}e^{j\omega t} = [\Psi^\varepsilon][y_r][\Phi]^T \{F_e\}e^{j\omega t} \\ &= \sum_{r=1}^N y_r \{\psi_r^\varepsilon\} \{\phi_r\}^T \{F_e\}e^{j\omega t} = [\Psi^\varepsilon]\{q\} = \sum_{r=1}^N q_r \{\Psi_r^\varepsilon\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

を得ることが出来る。ここで、

$$[\Psi^\varepsilon] = [\{\psi_1^\varepsilon\} \{\psi_2^\varepsilon\} \cdots \{\psi_k^\varepsilon\} \cdots \{\psi_N^\varepsilon\}] = [B][\beta][\Phi],$$

$$\{\psi_k^\varepsilon\} = [B][\beta]\{\phi_k\}, \quad q_k = y_k \{\phi_k\}^T \{F_e\}e^{j\omega t}$$

とする。式(4.11)によって定義した $\{\phi_k\}$ に対応している $\{\psi_k^\varepsilon\}$ が k 次のひずみモードである。

エネルギーの観点から見ても $\{\psi_k^\varepsilon\}$ は k 次の共振状態に対応している。したがって、 $\{\psi_k^\varepsilon\}$ は構造物の振動特性パラメータである。また、式(4.11)は歪応答を求めるものであり、 q_k は歪モードにおけるモード座標である。

次に、歪周波数応答関数(SFRF)を求める。まず、式(4.11)から次式を得ることが出来る。

$$\{E\} = [\Psi^\varepsilon][y_r][\Phi]^T \{F_e\} = \sum_{r=1}^N y_r \{\psi_r^\varepsilon\} \{\phi_r\}^T \{F_e\} = [H^\varepsilon]\{F_e\} \quad (4.12)$$

式(4.12)で定義された $[H^\varepsilon]$ は歪周波数応答関数であり，行列内の要素は，

$$H_{ij}^\varepsilon(\omega) = \frac{E_j(\omega)}{F_e} = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_r^\varepsilon \phi_{rj} / k_r}{-(m_r/k_r)\omega^2 + j(c_r/k_r)\omega + 1} = \sum_{r=1}^N y_r \psi_r^\varepsilon \phi_{rj} \quad (4.13)$$

と表すことが出来る．したがって，式(4.13)を行列の形にまとめると式(4.14)を得る．

$$\begin{bmatrix} H_{11}^\varepsilon & H_{12}^\varepsilon & \cdots & H_{1n}^\varepsilon \\ H_{21}^\varepsilon & H_{22}^\varepsilon & \cdots & H_{2n}^\varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}^\varepsilon & H_{m2}^\varepsilon & \cdots & H_{mn}^\varepsilon \end{bmatrix}_{m \times n} = \sum_{r=1}^N y_r \begin{bmatrix} \psi_{r1}^\varepsilon \phi_{r1} & \psi_{r1}^\varepsilon \phi_{r2} & \cdots & \psi_{r1}^\varepsilon \phi_{rn} \\ \psi_{r2}^\varepsilon \phi_{r1} & \psi_{r2}^\varepsilon \phi_{r2} & \cdots & \psi_{r2}^\varepsilon \phi_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{rm}^\varepsilon \phi_{r1} & \psi_{rm}^\varepsilon \phi_{r2} & \cdots & \psi_{rm}^\varepsilon \phi_{rn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (4.14)$$

m : 応答点数 (出力)

n : 加振点数 (入力)

ここで， $m = n$ の場合，式(4.7)の右辺は対称行列であることが分かり，マクスウェルの相反定理が成り立つことが分かった．それに対し，式(4.14)は右辺が対象行列となっていないことが分かる．つまり，歪応答を利用しモード解析を行う場合にはマクスウェルの相反定理は成立しないということが言える．

次に式(4.14)の右辺の行列を見ると， k 行目は $\psi_{rk}^\varepsilon \phi_{r1}, \psi_{rk}^\varepsilon \phi_{r2}, \cdots, \psi_{rk}^\varepsilon \phi_{rn}$ となっていることが分かり，また， k 列目は $\psi_{r1}^\varepsilon \phi_{rk}, \psi_{r2}^\varepsilon \phi_{rk}, \cdots, \psi_{rm}^\varepsilon \phi_{rk}$ となっていることが分かる．

従来，実験モード解析ではマクスウェルの相反定理が成立するということから，応答点を固定し加振点を移動させる方法，または加振点を固定し応答点を移動させる方法が

利用されてきた。そのほかにも多点応答法などもある。しかし、方法は入力点と出力点を入れ換えても伝達特性は等しいという性質を前提とした方法であり、式(4.14)のような場合には実験方法の違いによって結果が異なる。式(4.14)は非対称な行列であり、加振点を移動させる方法を利用した実験の場合は変位モード $[\Phi]$ を求めることができ、加振点を移動させる方法を利用した実験の場合は歪モード $[\Psi^e]$ を求めることができるということがわかる。

第5章 実稼動解析

5.1 実稼動試験

実稼動実験モード解析は自動車やその他の機械を稼動させている状態において、測定した振動データから実稼動時の振動形状（Operating Deflection Shape）を求め、アニメーション化し表すものである。この方法は従来の実験モード解析の方法と異なり、実際に稼動している状態での振動現象を把握することが出来るため、稼働中に発生する問題を発見するためには非常に有効な方法である。ただし、通常に加振実験と異なり、入力している加振力を求めることが困難であるため、一定の条件で定常的に稼動させた状態で実験を行う必要がある。また、本来であれば多チャンネル測定器を用い、複数の測定点における振動データを同時に測定し、計算を行うべきであるが、今回は実験環境上実験対称としたシロッコファンを同じ回転数で稼動させるようにし、測定点ごと測定を行った。

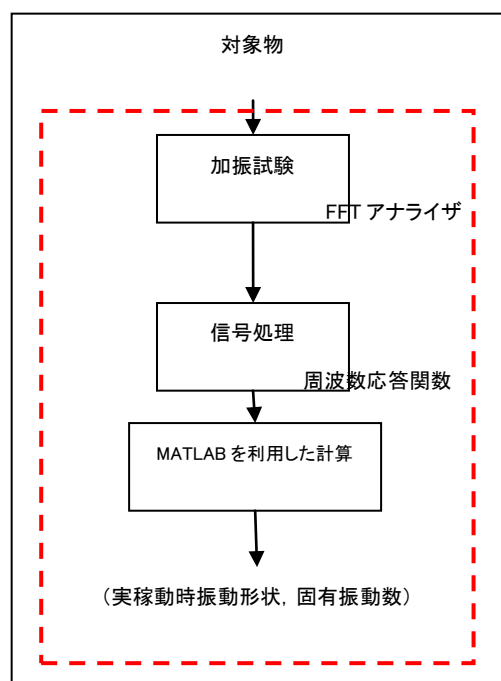


Fig.5-1 実稼動試験の概要

- 加振試験

参照点として加速度ピックアップもしくは歪ゲージを用い計測点にも同じものを用いる。

- 信号処理

周波数応答関数 → 振幅比

位相差

- モード特性の同定

今回作成したものではカーブフィットは行わずに固有振動数とモード形状を求める。

5.2 信号処理

実験モード解析では通常入力と出力の比である伝達関数を用い、モード特性同定計算を行う。しかし、実稼動解析では入力となる加振力を求めることが出来ないため、伝達関数を求めることが出来ない。そこで、本研究では特異値分解を用いることにより、固有モード形状を求めた。

5.2.1 特異値分解の概要

特異値分解とは、線形代数学における、複素数あるいは実数を成分とする行列に対する行列分解の一手法である。また特異値分解は、任意の形の行列を分解することができる。式(5.1)に特異値分解の式を示す

$$\begin{aligned} G &= USV^H \\ S &= \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_r) \\ U &= (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m) \\ V &= (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \end{aligned} \quad (5.1)$$

行列 G は、任意の m 行 n 列の行列。行列 S は、特異値である s_1, s_2, \dots, s_r を対角成分に元行列。行列 U は、左特異ベクトルである $u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m$ を成分に持つ行列であり、行列 V は、右特異ベクトルである $v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n$ 成分に持つ行列である。

また、左特異ベクトル・右特異ベクトルは、行列 G の基底となる正規直交ベクトルを表す。

5.2.2 特異値分解の導出

特異値分解の導出を示す。

あるベクトル $\{g_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, N$ があるとする。そのベクトルの平均は

$$\bar{g} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N g_\alpha \quad (5.2)$$

である。

また、 $\{g_\alpha\}$ から \bar{g} をひいたものは

$$g_\alpha = g_\alpha - \bar{g} \quad (5.3)$$

である。

次に g'_α と $g_\alpha'^T$ の積である行列 M と行列 N を作る。行列 G' は g'_1, g'_2, \dots, g'_N を要素に持つ行列である。また行列 M と行列 N は行列 G' の共分散行列の N 倍となっている。

$$M = \sum_{\alpha=1}^N g'_\alpha g'^T_\alpha = G' G'^T \quad (5.4)$$

$$N = \sum_{\alpha=1}^N g'^T_\alpha g'_\alpha = G'^T G'$$

また、行列M, 行列Nは

$$\begin{aligned} M^T &= (G' G'^T)^T = (G'^T)^T G'^T = G' G'^T = M \\ N^T &= (G'^T G')^T = G'^T (G'^T)^T = G'^T G' = N \end{aligned} \quad (5.5)$$

であり、任意のN次元ベクトルxに対して次の関係が成り立つ

$$\begin{aligned} (x, Mx) &= (x, G' G'^T x) = (G'^T x, G'^T x) = \|G'^T x\|^2 \geq 0 \\ (x, Nx) &= (x, G'^T G' x) = (G' x, G' x) = \|G' x\|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

式(5.5), 式(5.6)より式(5.4)は半正値対称行列であることがわかる。

次に式(5.2)は半正値対称行列であるから、0でない固有値は正である。λが行列Mの固有値であり、u(≠0)がその固有ベクトルであれば

$$Mu = \lambda u \quad (5.7)$$

である。これは式(5.4)の定義から

$$G' G'^T u = \lambda u \quad (5.8)$$

となる。右辺は0でないから $G'^T u \neq 0$ である。式(5.8)の両辺に左から G'^T を掛けると月のようになる。

$$G'^T G' G'^T u = \lambda G'^T u \quad (5.9)$$

これは、(5.4)の行列Nの定義より

$$N(G'^T u) = \lambda G'^T u$$

を意味し、 $G'^T u (\neq 0)$ が行列Nの固有値λに対する固有ベクトルである。

一方、λがNの固有値であり、v(≠0)がその固有ベクトルであれば

$$Nv = \lambda v \quad (5.10)$$

である。これは、式(5.4)の行列Nの定義から

$$G'^T G' v = \lambda v \quad (5.11)$$

となる。右辺は0出ないから $G'^T v \neq 0$ である。式(5.11)に左から G' を掛けると

$$G' G'^T G' v = \lambda G' v \quad (5.12)$$

となり、式(5.4)の行列 M の定義から

$$M(G'v) = \lambda(G'v) \quad (5.13)$$

を意味し、 $G'v$ が行列 M の固有値 λ に対する固有ベクトルとなる。ここで、行列 M の固有ベクトル u' と行列 N の固有ベクトル v は次のように表わされる。

$$u' = G'v \quad (5.14)$$

$$v' = G'^T u'$$

ここで

$$\|u'\|^2 = (G'u, G'u) = (u, G'^T G'u) = (u, Nu) = (u, \lambda u) = \lambda \|u\|^2 = \lambda \quad (5.15)$$

$$\|v'\|^2 = (G'^T u, G'^T u) = (u, G' G'^T u) = (u, Mu) = (u, \lambda u) = \lambda \|u\|^2 = \lambda$$

となる。 u, v は行列 M, N の単位固有ベクトルである。

式(5.12), 式(5.15)より

$$u = \frac{\pm G'v}{\sqrt{\lambda}} \quad (5.16)$$

$$v = \frac{\pm G'^T u}{\sqrt{\lambda}}$$

が得られる。

ここで、行列 M の固有値を大きい順に並べたものを $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ とし、対応する m 次元単位固有ベクトルの正規直交系を u_1, u_2, \dots, u_m とする。これらを列として並べた m 行 m 列の行列を

$$U = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m) \quad (5.17)$$

とする。同様に行列 N の固有値を大きい順に並べたものを $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とし、対応する n 次元単位固有ベクトルの正規直交系を v_1, v_2, \dots, v_n とする。これらを列として並べた n 行 n 列の行列を

$$V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \quad (5.18)$$

とする。また行列 M および行列 N のランクを r とする。

ここで、行列 G' に右から行列 V をかけると次のようになる。

$$G'V = (G'v_1 \ G'v_2 \ \cdots \ G'v_n) \quad (5.19)$$

また、式(5.16), 式(5.19)より

$$G'V = (\pm\sqrt{\lambda}u_1 \ \pm\sqrt{\lambda}u_2 \ \cdots \ \pm\sqrt{\lambda}u_r \ 0 \ \cdots \ 0) \quad (5.20)$$

となり, u_1, u_2, \dots, u_r の符号を正になるようにとれば

$$G'V = U \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_r \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

となる. ただし s は次式のようになる.

$$s = \sqrt{\lambda} \quad (5.22)$$

式(5.19)に右から V^T を掛けると

$$G' = USV^T \quad (5.23)$$

が得られ, 行列 G' が行列 U , 行列 S , 行列 V に分解され特異値分解が導出される. また u_1, u_2, \dots, u_m を左特異ベクトル, $v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n$ を右特異ベクトル, 行列 S の成分 s を特異値と呼ぶ.

5.2.2 特異値分解の実験データへの適用

特異値分解とは, 5.1.1 の特異値分解の導出により, ある行列を N 倍の共分散行列の固有ベクトルと特異値との積に分解することである. また共分散行列は半正値対称行列のため, その固有ベクトルは正規直交基底となる.

本研究では加振力の測定が困難なため, 代わりに基準となる参照点を 1 点設定する. そして, 式(5.24)より g_α を作る. $M_\alpha, \theta_\alpha, M_R, \theta_R$ は測定点の振幅・角周波数, 参照点の振幅・角周波数である. また, 式(5.2), 式(5.3)より g'_α ($\alpha = 1, \dots, m$) を作る. また行列 G' は g'_α より成る m 行 n 列の行列であり, m は測定点数で n は g'_α の要素数である.

$$g_\alpha = \frac{M_\alpha}{M_R} \{e^{2\pi j(\theta_\alpha - \theta_R)}\} \quad (5.24)$$

$$G' = (g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_m)^T \quad (5.25)$$

特異値分解は共振周波数近傍で行う. 共振周波数近傍では, 周波数応答関数は一自由度に近似でき, 他のモードは剰余成分として考えることができる.

また左特異ベクトル, 右特異ベクトルは正規直交基底であり, 行列 G' は実験データの平均の

差分から成る行列である。そのため特異ベクトルとは実験データの代表的な特徴を表すことになる。つまり、左特異ベクトルは各固有モードを表し、右特異ベクトルは各モードごとの振幅比を表わす。

今回の研究ではモード特性の同定計算までは行っておらず、実稼動時の振動形状を求めた。加速度ピックアップを用いる場合に得られる形状は変位モードであるが、歪ゲージを用いる場合は歪モードのモード形状を得ることが出来る。通常、モード形状を求める場合は運動方程式から求められた伝達関数を用い解析を行うが、実稼動実験では入力する加振力を求めることが出来ない。従って、測定点において発生している歪データしか求めることが出来ないため、実稼動試験を行うにあたっては歪モードのみ得ることが出来る。

第6章 ジャイロモーメント

6.1 概要

本研究の研究対象であるシロッコファンは回転機械である。そのため、シロッコファンが稼働するとジャイロモーメントが働く。本章ではジャイロモーメントについての概要を述べる。

6.2 弾性軸に回転体が付いている場合の振動

Fig.6-1 に 2 自由度の回転体の振動系を示す。Fig.6-1 は、z 軸を軸受中心線に一致させた直交座標系 O-xyz 上で、傾き振動をしている回転体を表している。並進運動はなく、回転体の形心 M は常に座標原点 O に一致しているものとする。回転体には動不釣合いがあり、慣性主軸が男性軸の中心線からわずかにずれている。弾性軸は回転体取付け部で θ だけ傾き、回転体はさらに τ だけ傾く。 θ と τ は同じ方向とは限らない。回転体の中心線 OA の傾き、すなわち極慣性モーメント I_p を持つ方向の傾きを θ_1 とする。軸の傾き θ と回転体中心線の傾き θ_1 の成分を xz 平面と yz 平面への投影角を用いて表し、それぞれ θ_x , θ_y , θ_{1x} , θ_{1y} とする。傾き θ が小さい時、軸 OB の傾く方向を φ とすると

$$\theta_x \approx \theta \cos \varphi, \quad \theta_y \approx \theta \sin \varphi \quad (6.1)$$

の関係が近似的に成立する。

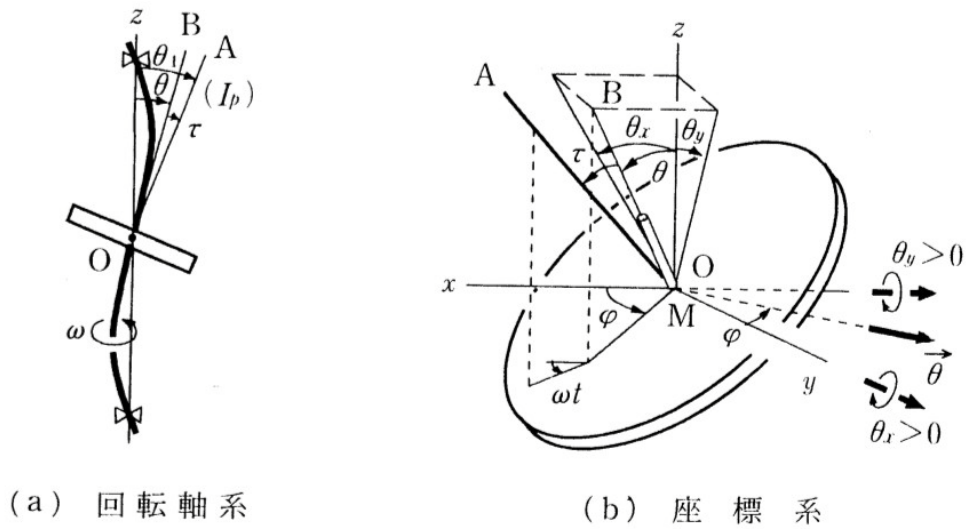


Fig.6-1 2自由度の回転体の振動系

次に Fig6-2 に Fig6-1 の図のモーメントや角運動量をベクトルで表現した図を示す. 回転体の直径に関する慣性モーメントを I_d , 極慣性モーメントを I_p とする. 回転していない回転体が傾き運動するときには, 角運動量の成分は $+y$ 方向に $I_d \dot{\theta}_{1x}$, $-x$ 方向に $I_d \dot{\theta}_{1y}$ となる. さらに回転体が OA の周りに角速度 ω で回転しているときには OA 方向に $I_p \omega$ の角運動量ベクトルが付け加わる. 運動方程式を導くためには, これらの角運動量ベクトルの単位時間当たりの変化を求める必要があるが, そのためにまず微小時間 dt の間に生じる角運動量ベクトルの変化量を求める. dt 時間後に $\theta_1(\theta_{1x}, \theta_{1y})$ が $\theta_1 + d\theta_1(\theta_{1x} + d\theta_{1x}, \theta_{1y} + d\theta_{1y})$ になったとすると, その時(a)に示すように角運動量の変化が現れる. すなわち, 角速度 $\dot{\theta}_{1y}$ の変化によって $-x$ 方向に $d(I_d \dot{\theta}_{1y})$ が現れ, さらに角度 θ_{1x} と θ_{1y} の変化に伴う $I_p \omega$ の方向変化によって, $+x$ と $+y$ 方向にそれぞれ $+I_p \omega d\theta_{1x}$ と $+I_p \omega d\theta_{1y}$ が現れる.

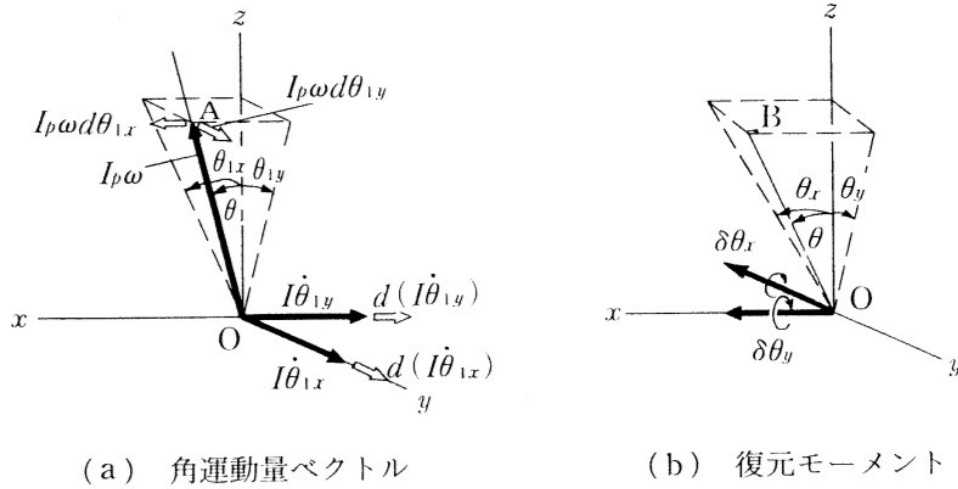


Fig.6-2 角運動量, 復元モーメントとその変化

以上のことから, 単位時間当たりの角運動量の変化は, $-x$ 方向に $\frac{d(I_d\dot{\theta}_{1y})}{dt} - \frac{I_p\omega d\theta_{1x}}{dt}$ $+y$ 方向に $\frac{d(I_d\dot{\theta}_{1x})}{dt} - \frac{I_p\omega d\theta_{1y}}{dt}$ となる. この変化は男性軸の復元モーメントの作用により生じたものである. 復元モーメントの大きさは, 男性軸のばね剛性を δ とすると, (b) のように, $-y$ 方向に $\delta\theta_x$, $+x$ 方向に $\delta\theta_y$ となる. したがって, これらを等値とすれば, 次の運動方程式が得られる.

$$\begin{cases} I_d\ddot{\theta}_x + I_p\omega\dot{\theta}_x = -\delta\theta_x \\ I_d\ddot{\theta}_y - I_p\omega\dot{\theta}_y = -\delta\theta_y \end{cases} \quad (6.2)$$

Fig.6.1 において, τ の方向が x 軸と一致したときを時刻 $t = 0$ に選ぶと

$$\begin{cases} \theta_{1x} = \theta_x + \tau \cos \omega t \\ \theta_{1y} = \theta_y + \tau \sin \omega t \end{cases} \quad (6.3)$$

の関係が成立するから、これを用いて式(6.2)から θ_{1x} , θ_{1y} を消去すると次の運動方程式が得られる.

$$\begin{cases} I_d \ddot{\theta}_x + I_p \omega \dot{\theta}_x + \delta \theta_x = (I_d - I_p) \tau \omega^2 \cos \omega t \\ I_d \ddot{\theta}_y - I_p \omega \dot{\theta}_y + \delta \theta_y = (I_d - I_p) \tau \omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (6.4)$$

6.3 ジャイロモーメントのみ考慮した場合

本研究では、動的不釣合いがないと仮定する. そのような仮定の場合 $\tau = 0$ となり, 式(6.4)の運動方程式は次のようになる.

$$\begin{cases} I_d \ddot{\theta}_x + I_p \omega \dot{\theta}_x + \delta \theta_x = (I_d - I_p) \tau \omega^2 \cos \omega t \\ I_d \ddot{\theta}_y - I_p \omega \dot{\theta}_y + \delta \theta_y = (I_d - I_p) \tau \omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (6.5)$$

さらに定常振動の場合には, λ を静止座標系での固有振動数とすると次のように置くことができる

$$Z = \bar{Z} e^{j\lambda t}, \quad Z = \theta_x + j\theta_y \quad (6.6)$$

ここで, \bar{Z} は時間項を含まない複素数である. 従って, 式(6.5)の解は式(6.6)より次のように求められる.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left| \frac{I_p}{2I_d} \omega + \sqrt{\left(\frac{I_p}{2I_d} \omega\right)^2 + \omega_0^2} \right| \\ \lambda_2 &= \left| \frac{I_p}{2I_d} \omega - \sqrt{\left(\frac{I_p}{2I_d} \omega\right)^2 + \omega_0^2} \right| \\ &\quad \left(\ast \quad \omega_0 = \frac{\delta}{I_d} \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

式(6.7)より回転体はジャイロモーメントにより固有振動数の分離し、また回転数に応じて固有振動数が変化することがわかった。右辺が絶対値になるのは、負の固有振動数は存在しないからである。

また式(6.7)の右辺の絶対値を外した場合、軸の自転の方向を正方向に決めて $\omega > 0$ とすると、 λ_1 は常に正、 λ_2 は常に負であることを示している。すなわち、 λ_1 は軸の回転方向と同じ方向の前向き振れ回り運動、 λ_2 は後向き振れ回り運動の固有振動数であることを示している。

第7章 実験モード解析と特異値分解で得られるモード形状の比較

7.1 実験目的

従来から用いられている，実験モード解析で得られた固有振動数と固有モード形状の結果と特異値分解との結果を比較し違いを確認する．

7.2 実験方法

7.2.1 加振方法

対象としたシロッコファンを Fig.7-1 に示す．応答点は半導体歪ゲージをシロッコファンの翼を支えている平面に 10 枚貼り付け，測定点は翼部に貼り付けた．

インパルスハンマーを用い，シロッコファンを加振する．測定方法は加振点を固定し応答点を移動させる応答点移動法を用い，加振方向はモーター軸方向である．



Fig.7-1 歪ゲージを貼ったシロッコファン

7.2.2 支持方法

実験はモータに固定し，加振試験を行った．支持状態を Fig.7-2 に示す．



Fig.7.-2 シロッコファンの支持状態

シロッコファンはモーターの回転軸にホーローねじより固定した.

7.2.3 実験装置

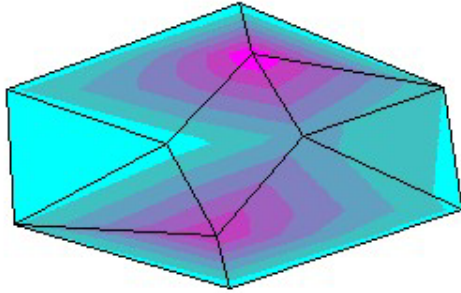
実験装置を Table 7-1 に示す.

Table 7-1 試験機材の詳細

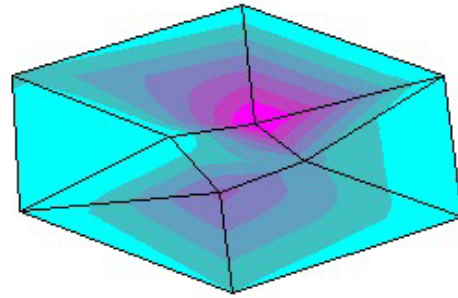
インパルスハンマー : PCB PIEZOTRONICS 087.D80
感度(±15%) : 22.5mV/N 測定範囲 : ±220N
周波数範囲(-10dB)(Hard Tip) : 20kHz 共振周波数 : ≥100kHz
ハンマーの質量 : 2.9g ヘッドの直径 : 7.3mm
チップの直径 : 2.5mm ハンマーの長さ : 101.7mm
FFT アナライザ : RION SA-01(4~17.ch タイプ)
レベルレンジ : -40dB~+30dB 10dB ステップ
ダイナミックレンジ : 90dB
周波数レンジ : 1Hz~20Hz および 40kHz の 15 レンジ
ポイント数 : 257.~3277.8 ポイント(2 のべき乗)
動歪測定器 : 共和電業 DPM-712B
測定チャンネル数 : 1(多チャンネル化可能)
適用ブリッジ抵抗 : 7.0~1000Ω
歪ゲージ : 共和電業 KSN-2-120-E4-17.
ゲージ抵抗 : 約 120Ω ゲージ長さ : 2mm ゲージファクター : -104±3%
最大許容歪 : ±3000μm/m 最大許容電流 : 20mA

7.3 実験結果

加振試験によって得られた固有モード形状を Fig.7-3 に示す.

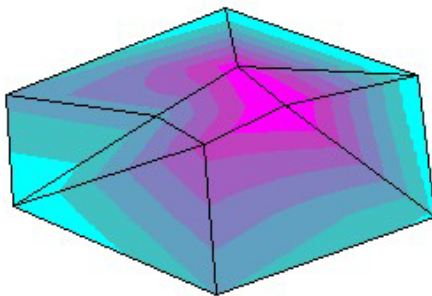


実験モード解析

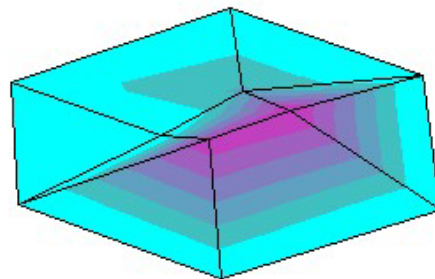


特異値分解

1次モード形状



実験モード解析



特異値分解

2次モード形状

Fig.7-3 シロッコファンのモード形状

左が実験モード解析により得られた固有モード形状であり，右が特異値分解により得られた固有モード形状である．Table 7-2 に固有振動を示す．

Table 7-2 固有振動数

モード	実験モード解析[Hz]
1次	129.8
2次	302.5

7.4 結論

- (1) 実験モード解析，特異値分解を利用することにより固有モード形状を得ることができた。
- (2) 1次固有モード形状は，実験モード解析，特異値分解ともに同じ固有モード形状を得られた。2次固有モード形状では特異値分解により求めた固有モード形状では一部あまり動かない部分が存在した。しかし，動画で確認したところ実験モード解析での結果同じ傾向をもつ固有モード形状であることを確認した。

第8章 シロッコファンのモード解析

8.1 実験対象

本研究で研究対象としたシロッコファンを Fig.8-1 に示す。本実験では、実験対象としてシロッコファンを用いた。シロッコファンとは冷暖房や排気送風など送風機として、また映写機や自動販売機の中など非常に幅広い用途を持っている。その主な特徴を以下に示す。

1. 最小直径 40mm から最大 1000mm まで約 600 種類以上あり、さまざまな用途に対応できる。
2. 小型軽量で構造もコンパクトである。
3. 性能が優れており、頑丈な構造である。
4. 気流がスムーズに流れ、音も静かで大風量である。
5. 取り付け、取り外しが極めて簡単である。

本研究では、オリエンタルモーター製の直径 100mm、深さ 38mm のアルミニウムのシロッコファンを使用した。

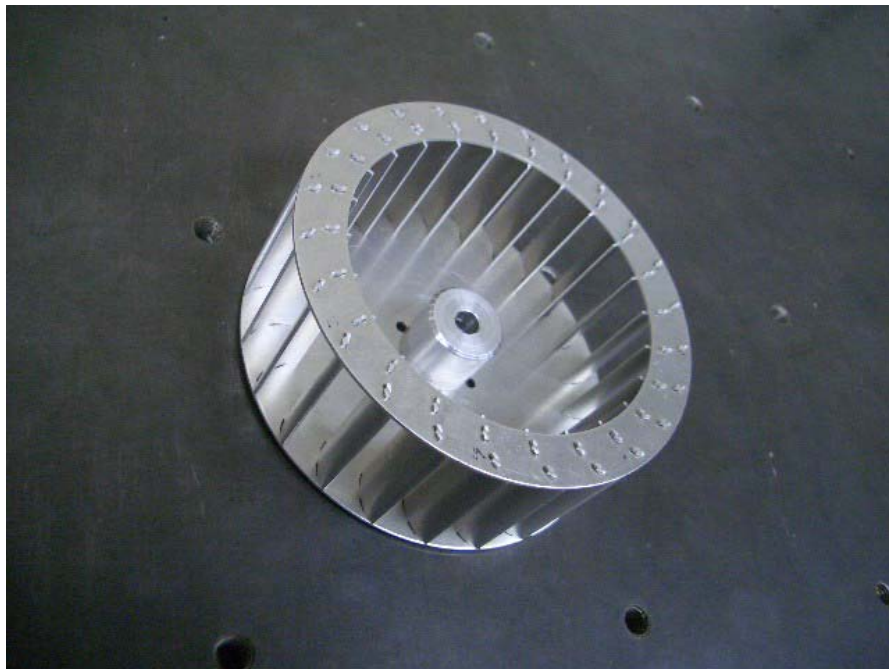


Fig.8-1 シロッコファン

8.2 実験方法

8.2.1 加振方法

インパルスハンマーを用い加振する．測定方法は応答点を固定し加振点を移動させる加振点移動法と，加振点を固定し応答点を移動させる応答点移動法を用いた．歪ゲージを貼ったシロッコファンを Fig.8-2 を示す．実験は 10 回行い，加振点移動の場合は加振点を 10 ヶ所，応答点移動は 1 ヶ所をハンマー加振し 10 枚の歪ゲージそれぞれで振動データをとる．



Fig.8-2 歪ゲージを貼ったシロッコファン

8.2.2 支持方法

実験におけるシロッコファンの支持方法はモーターに組み付けた固定支持で行った。

- ・ 固定支持

固定支持とは実用時に一部が固定された状態にある構造物や機械の動特性を本来あるがままの状態を知りたいときなどに採用される支持条件である。シロッコファンはモーターにより回転させることで使用されるものなので、モーターの回転軸に締め付け固定することで固定支持とした。



Fig.8-3 固定支持状態

8.2.3 実験装置

実験装置を Table.8-1 に示す.

Table.8-1 試験機材の詳細

インパルスハンマー : PCB PIEZOTRONICS 086D80

感度(±15%) : 22.5mV/N 測定範囲 : ±220N

周波数範囲(-10dB)(Hard Tip) : 20kHz 共振周波数 : ≥100kHz

ハンマーの質量 : 2.9g ヘッドの直径 : 6.3mm

チップの直径 : 2.5mm ハンマーの長さ : 101.6mm

FFT アナライザ : RION SA-01(4~16ch タイプ)

レベルレンジ : -40dB~+30dB 10dB ステップ

ダイナミックレンジ : 90dB

周波数レンジ : 1Hz~20Hz および 40kHz の 15 レンジ

ポイント数 : 256~32868 ポイント(2 のべき乗)

動歪測定器 : 共和電業 DPM-812B

測定チャンネル数 : 1(多チャンネル化可能)

適用ブリッジ抵抗 : 60~1000Ω

歪ゲージ : 共和電業 KSN-2-120-E4-16

ゲージ抵抗 : 約 120Ω ゲージ長さ : 2mm ゲージファクター : -104±3%

最大許容歪 : ±3000μm/m 最大許容電流 : 20mA

8.3 実験結果

固定支持における固有モード形状を Fig.8-4 に示す。左が加振点移動により求めた変位モード形状であり、右が応答点移動により求めた歪モード形状である。また、赤い部分が振幅の大きい部分である。

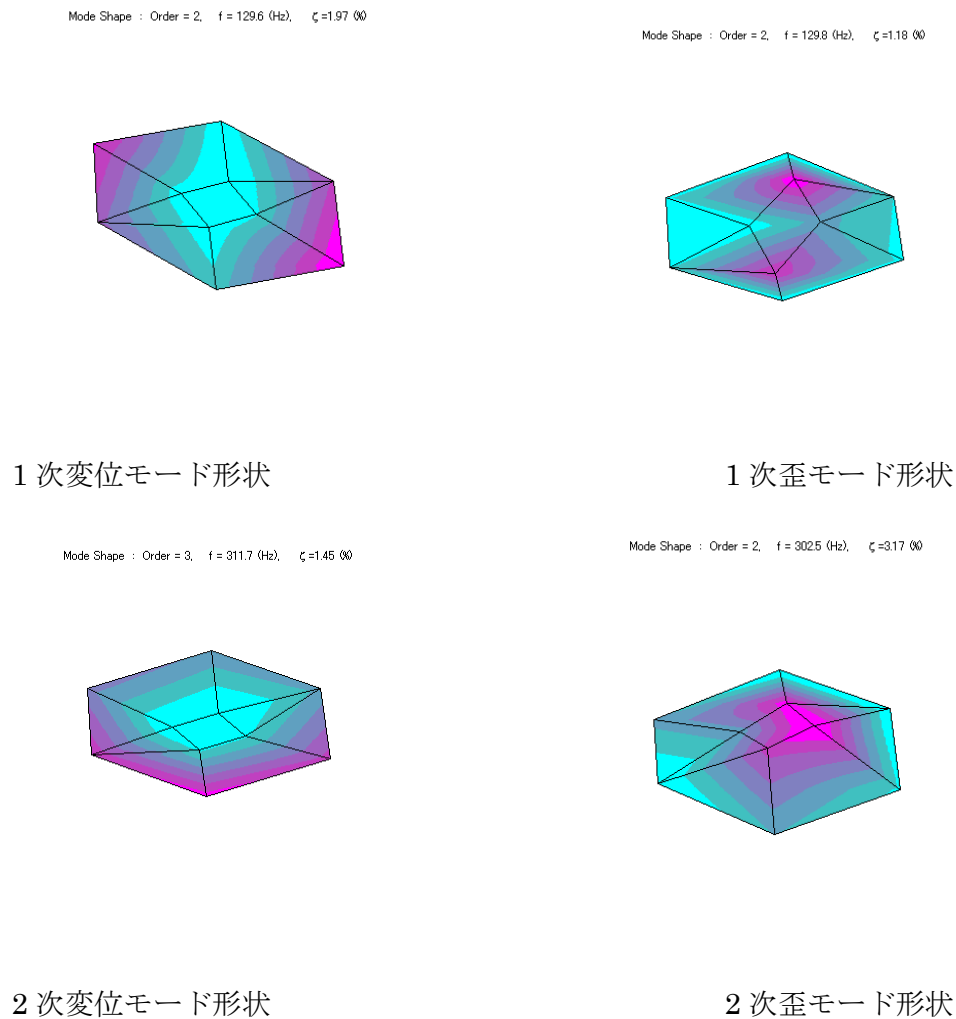


Fig.8-4 シロッコファンのモード形状

Fig8-4 より 1 次固有モード形状は、直径方向に節 1 本のシロッコファンが傾くモード形状で、2 次固有モード形状は全体がモーターの軸方向に振動するモード形状であることが

わかった。また、変位は翼付け根付近で大きくになり、応力はボス付近に大きくかかることがわかった。

Table 8-2 に Fig.8-4 の固有振動数を示す。

Table.8-2 シロッコファンの固有振動数

	変位モード[Hz]	歪モード[Hz]
1次固有振動数	129.6	129.8
2次固有振動数	311.8	302.5

8.4 計算モード解析

8.4.1 シロッコファンの有限要素モデル

シロッコファンの計算モード解析を示す。計算モデルは、CAD データを基に Altair Hyper Mesh を使用し作成した。Fig.8-5 に 研究対象であるシロッコファンの有限要素モデルを示す。モデルの要素は四面体二次要素で、接点数 685,065 点、要素数は 341,818 要素である。解析には MSC/NASTRAN を使用し固有値解析、周波数応答計算を行った。また Table.8-3 に実際のシロッコファンの質量と有限用モデルの質量の比較を示す。

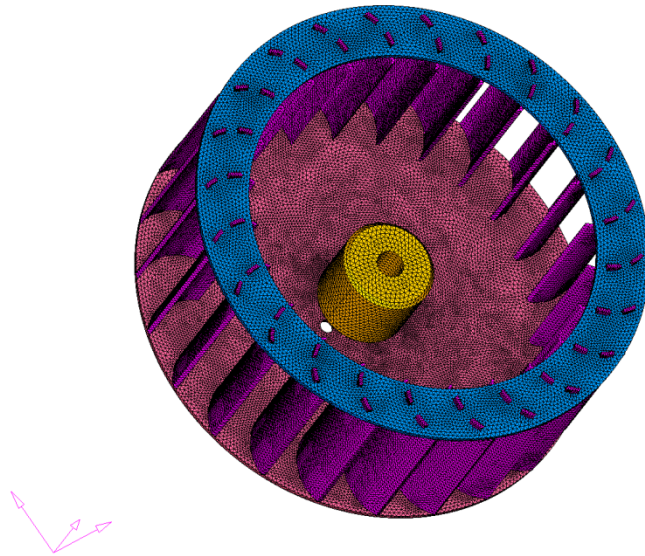


Fig.8-5 シロッコファンの有限要素モデル

Table.8-3

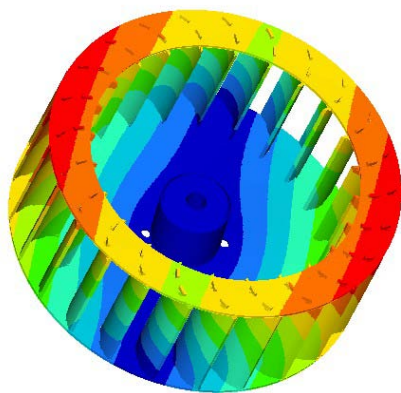
実物[g]	FEM モデル[g]	誤差[%]
68.8	81.5	3.9

Table.8-3 より実物の質量を再現する有限要素モデルを作成することができた。

8.4.2 有限要素モデルの解析の結果

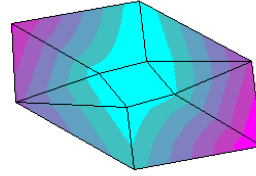
Fig.8-6 に固有値解析により求めた固有モード形状と実験モード解析により求めた固有モード形状の比較を示す。また Tabel.8-4 にその固有振動数と誤差を示す。固有モード形状は変位モードである。

第8章 シロッコファンのモード解析

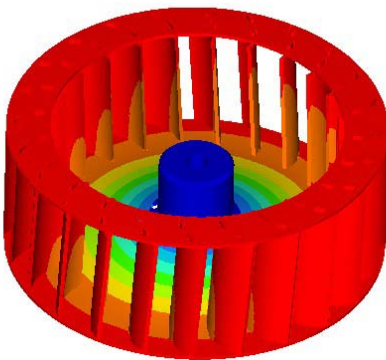


FEMモデルの1次モード形状

Mode Shape : Order = 2, f = 129.6 (Hz), $\zeta = 1.97$ (%)

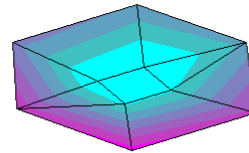


実験での1次モード形状



FEMモデルの2次モード形状

Mode Shape : Order = 3, f = 311.7 (Hz), $\zeta = 1.45$ (%)



実験での2次モード形状

Fig.8-6 有限要素モデルの固有モード形状

Table 8-4 有限要素モデルと実験モード解析の固有振動数の比較

固有振動数	実物[Hz]	FEMモデル [Hz]	誤差[%]
1次	129.6	128.5	-0.8
(1次対称)		130.1	
2次	311.8	308.9	-0.9

Fig.8-6 は赤い部分が変位の大きい部分で、青い部分が変位の小さい部分である。

Fig.8-7 に周波数応答計算の結果を示す。上の図は振幅、下の図が位相である。また青い線が周波数応答計算、赤い線が実験値である。

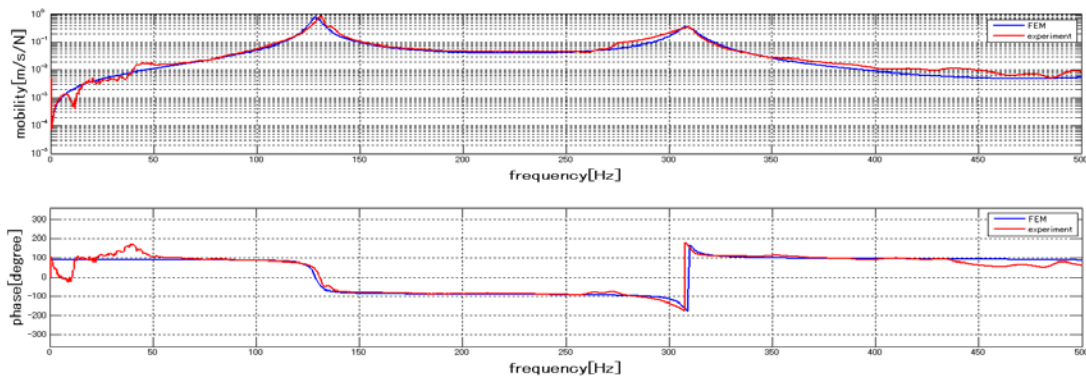
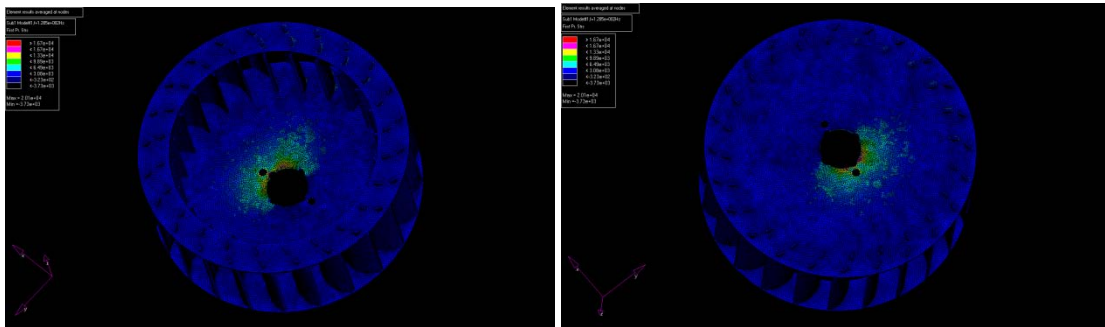


Fig.8-7 有限要素モデルの周波数応答計算の結果

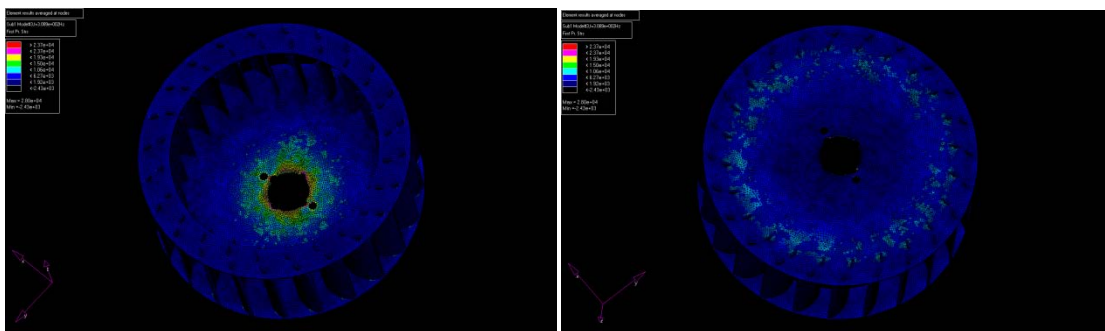
Fig.8-8 より作成した有限要素モデルは、振幅・位相ともに実物を再現した。

以上の結果より、作成した有限要素モデルは実物の振動特性を再現すると確認した。また、実験モード解析では得られなかった、詳細な振動の形状を得ることができた。

次に Fig.8-8 に応力解析の結果を示す。赤い部分が応力の高い部分、青い部分が応力の小さい部分である。



1次モード



2次モード

Fig.8-8 応力解析の結果

Fig.8-8 より、ボスの付け根部分に高い応力がかかることが判明した。

8.5 モード解析における結論

- (1) 加振点移動および応答点移動の方法からシロッコファンの変位モードと歪モードのモード形状を得ることが出来た。
- (2) 二つの異なった実験方法から得られた固有振動数は非常に誤差が小さい結果となった。
- (3) 実験値に対し非常に近い有限要素モデルを作成することが出来た。また、そのモデルを使用することによりシロッコファンの詳細な振動の形状や応力分布が判明した。

第9章 シロッコファンの実稼動解析

9.1 実験方法

9.1.1 加振方法

実稼動試験は研究対象としたシロッコファンを一般的に使用している条件で実験を行う。したがって、シロッコファンをサーボモーターの回転軸に固定し、モーター加振による実験を行った。実験方法は二つの方法で行う。

- (1) 1080rpm, 1440rpm, 2160rpm, 2580rpm でシロッコファンを回転させ、回転数における振動特性の変化を求める。
- (2) 2160rpm および 2580rpm で回転させた時の振動データを各測定点で計測し、それぞれの回転数における振動モード形状を求める。

9.1.2 実験方法

振動データを測定するためにハンマー加振による実験モード解析において用いた10枚の半導体歪ゲージを測定点とした。また、ハンマー加振による実験と異なり、実稼動試験では周波数応答関数を利用することが出来ないため、位相の基準をとることが出来ない。したがって、実稼動試験では位相の基準を取るために測定点とは別に参照点として半導体歪ゲージを1枚用意した。

また、稼動時の振動データを収録するためには歪ゲージの配線が振れたり絡んだりしない様にスリップリングを使用し、実験を行った。使用したロータリートランスミッターをFig.9-1に示す。



Fig.9-1 Jordil Technic 社製ロータリートランスミッター

このロータリートランスミッターを作成したコネクタを介し、シロッコファンと接続させた。コネクタ、動歪測定器および接続した実験装置を図に示す。



Fig.9-2 コネクタ



Fig.9-4 動歪測定器

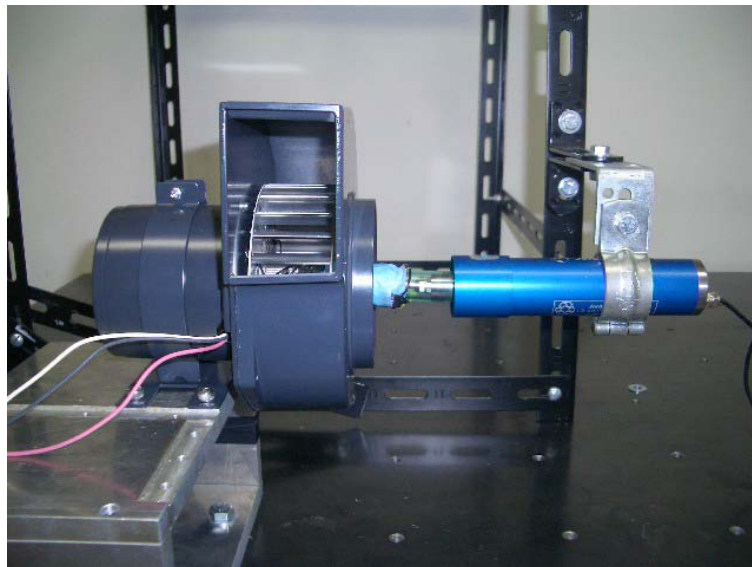


Fig.9-5 実験装置

9.1.3 実験装置

実験装置を Table.9-1 に示す.

Table.9-1 試験機材の詳細

FFT アナライザ : RION SA-01(4~16ch タイプ)

レベルレンジ : -40dB~+30dB 10dB ステップ

ダイナミックレンジ : 90dB

周波数レンジ : 1Hz~20Hz および 40kHz の 15 レンジ

ポイント数 : 256~32769 ポイント(2 のべき乗)

動歪測定器 : 共和電業 DPM-712B

測定チャンネル数 : 1(多チャンネル化可能)

適用ブリッジ抵抗 : 60~1000Ω

ロータリートランスミッター : Jordil Technic ROTRANS-04-R

許容回転数 : 42,000rpm 内部抵抗 : 0.25mΩ

測定チャンネル数 : 4 (ワイヤー数)

歪ゲージ : 共和電業 KSN-2-120-E4-16

ゲージ抵抗 : 約 120Ω ゲージ長さ : 2mm ゲージファクター : -104±3%

最大許容歪 : ±3000μm/m 最大許容電流 : 20mA

9.2 実験結果

9.2.1 回転数を変化させたときの振動特性

1080rpm, 1440rpm, 2160rpm, 2580rpm でシロッコファンを回転させ、回転数における振動特性の変化を調べた。

Fig.9-6 に回転数におけるピーク周波数の変化の図を示す。Fig.9-6 は縦軸がピーク周波数で、横軸が回転数である。直線は実験結果を1次関数で近似して描いたものである。Table 9-2 に回転数におけるピーク周波数の変化の表を示す。

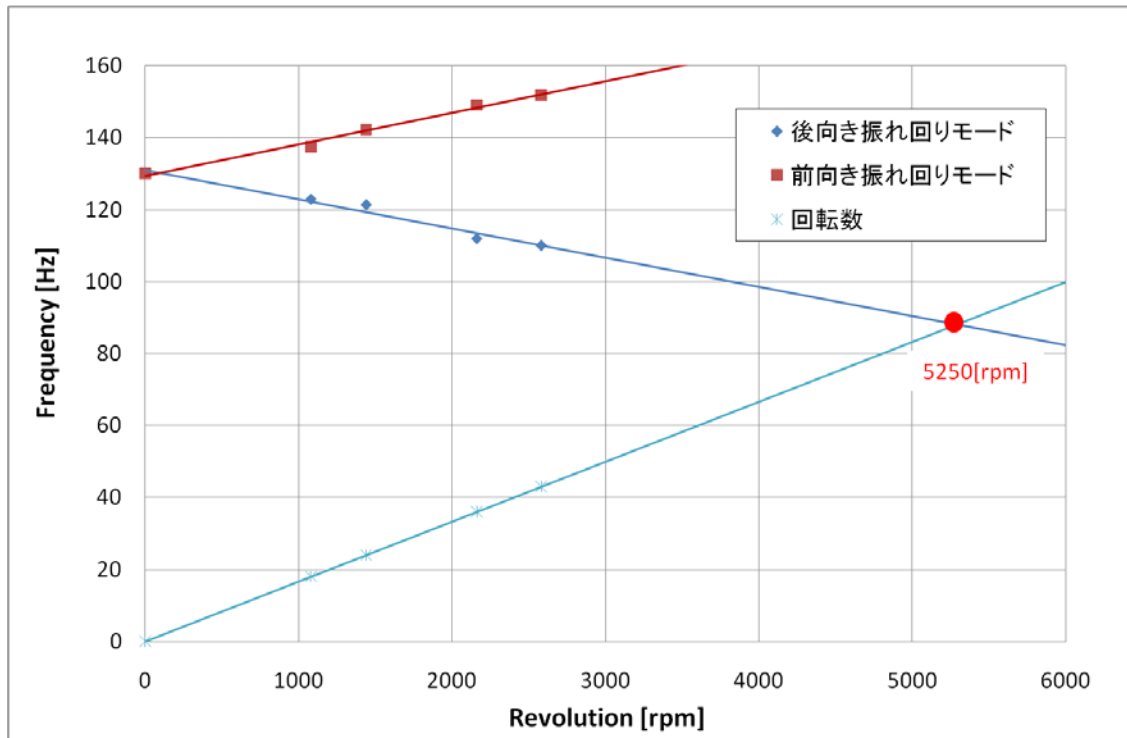


Fig.9-6 回転数におけるピーク周波数の変化

Table 9-2 回転数におけるピーク周波数の変化

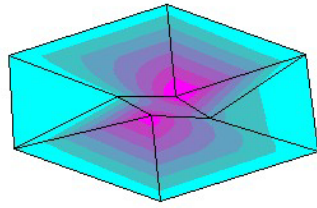
回転数[rpm]	後向き振れ回りモード[Hz]	前向き振れ回りモード[Hz]	2次モード [Hz]
0	130		304.7
1080	122.9	137.5	302.5
1440	121.3	142.2	300.3
2160	111.9	149.1	301.1
2580	110	151.9	303.9

Fig.9-6 より，静止時の1次のピーク周波数が2つに分離し，回転数に応じて1つは周波数が下がっていき，もう一つは周波数が上がっていった．これは，シロッコファンが回転しているため，ジャイロモーメントが働いた結果と考えられる．しかし2次のピーク周波数では回転数に応じての周波数の変化が見られなかった．これは2次の固有モード形状は，中心を固定して全体がモーターの軸方向に前後に動く形状のため，シロッコファンに傾きが発生しない．そのために，2次のピーク周波数にはジャイロモーメントが発生しなかったと考えられる．

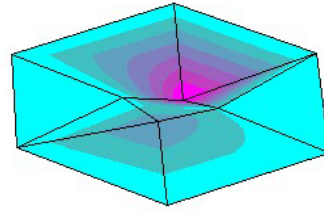
また，回転数 5250rpm で後向き振れ回りモードと回転数の次数成分が重なることが判明した．この回転数でシロッコファンを稼働させると，回転数成分と共振を起こし大きな振動の発生や，破壊につながると予測される．

9.2.2 回転数を変化させたときのモード形状

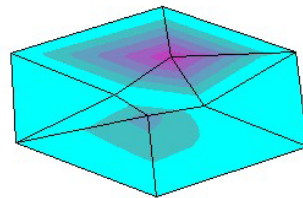
2160rpm および 2590rpm で稼働させたときのモード形状を示す．モード形状の算出には特異値分解を用いて算出した．Fig.9-7 が 2160rpm のモード形状で，Fig.9-8 が 2590rpm のモード形状である．ここで示すモード形状は，参照点・測定点共に歪ゲージを使用しているため歪モード形状である．



後向き振れ回りモード

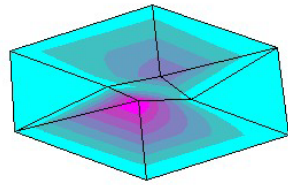


前向き振れ回りモード

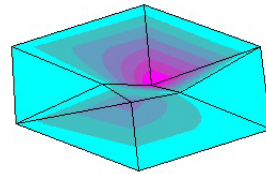


2次モード形状

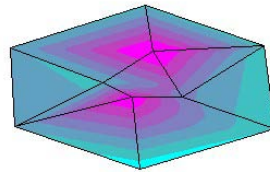
Fig.9-7 2160rpm で稼働させたときのモード形状



後向き振れ回りモード



前向き振れ回りモード

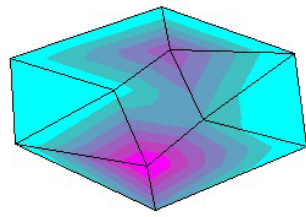


2次モード形状

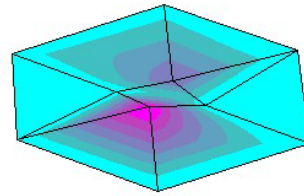
Fig9-8 2590rpm で稼働させたときのモード形状

Fig.9-7, Fig9-8 より回転数が変化し、ピーク周波数が変化してもモード形状には影響を与えない結果となった。

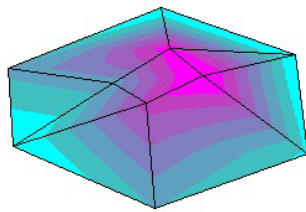
Fig9-9 に静止時と稼働時のモード形状を示す。



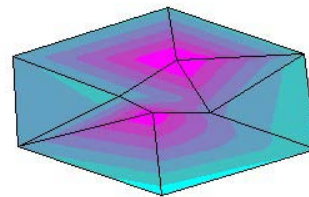
1次モード形状



前向き振れ回りモード



2次モード形状



稼働時2次モード形状

Fig.9-9 静止時と稼働時のモード形状の比較

Fig.9-9 より静止時と稼働時のモード形状は同じモード形状という結果となった。

Fig.9-7, Fig.9-8, Fig.9-9 より後向き振れ回りモード, 前向き振れ回りモードのモード形状は, 静止時の1次固有モード形状と同じ傾向を持つモード形状だということを確認した。

9.3 ジャイロモーメントの影響

9.3.1 目的

回転数を変化させたときの振動特性で、1次のピーク周波数の分離・値の増減はジャイロモーメントの影響が考えられると述べた。本項では、ジャイロモーメントが働いているのか、またその他の影響について述べる。

9.3.2 考察

Fig.9-10 に実験値と式(6.7)のジャイロモーメントのみを考慮した式の比較を示す。Table 9-3 に後向き振れ回りモードに対しての式(6.7)との比較、Table 9-4 に前向き振れ回りモードに対しての式(6.7)との比較を示す。式(6.7)からは直線を引くことはできないが、シロッコファンで使用される回転速度では直線で近似できるため、本研究では直線で近似する。

慣性モーメント I_d は $6.361 \times 10^{-5} [kg \cdot m^2]$ で、極慣性モーメント I_p は $5.711 \times 10^{-5} [kg \cdot m^2]$ である。慣性モーメントは実験により求めたものではなく、質量・形状から算出したものである。

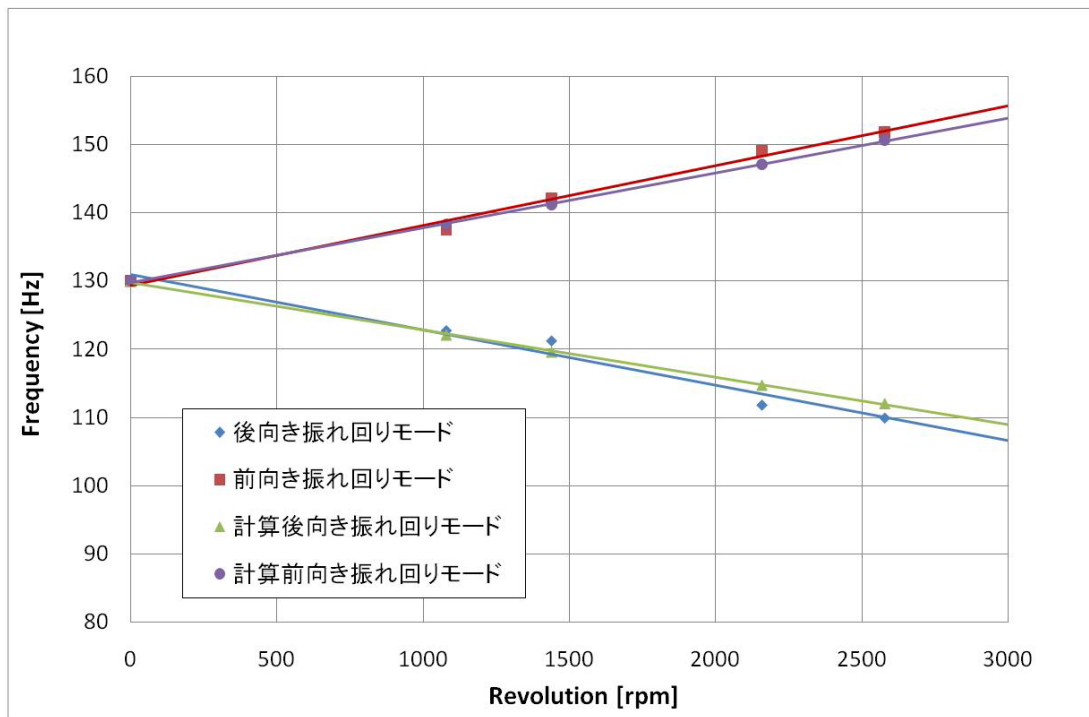


Fig.9-10 実験値と解析値の比較

Table 9-3 後向き振れ回りモードに対しての実験と計算の比較

回転数[rpm]	実験[Hz]	計算[Hz]	誤差[%]
0	130.0	130.0	0
1080	122.9	122.2	-0.5
1440	121.3	119.7	-1.3
2160	111.9	114.9	2.6
2580	110.0	112.1	1.9

Table 9-4 前向き振れ回りモードに対しての実験と計算の比較

回転数[rpm]	実験[Hz]	計算[Hz]	誤差[%]
0	130.0	130.0	0
1080	137.5	139.3	0.6
1440	142.2	141.2	-0.7
2160	149.1	147.2	-1.3
2580	151.9	150.7	-0.9

Fig9-10, Table 9-3, Table 9-4 より実験値と式(6.7)はほぼ同じ値をとることがわかる. そのため, 稼働時におけるピーク周波数の変化は, ジャイロモーメントに大きな影響を受けることが確認された. 実験値と式(6.7)の値の差は, 正確なシロッコファンの慣性モーメントが得られなかった可能性と, シロッコファンの不釣り合いなどの影響出で発生したと考えられる.

9.4 実稼動解析における結論

- (1) モーターの回転数を変化させることにより、稼働時のシロッコファンの振動特性への影響を調べることが出来た。
- (2) 今回用いた信号処理から実稼動時のモード形状を得ることが出来た。また、その形状はハンマー加振において得ることが出来た歪モードと同じ形状であった。
- (3) シロッコファンは回転すると1次のピーク周波数が分離し、一つは周波数が落ちて行き、もう一つは周波数が上がっていく結果となった。これはジャイロモーメントが原因と考えられる。
- (4) 2次のピーク周波数では、周波数の変化は見られなかった。これは、傾きが発生しないモード形状のため、ジャイロモーメントの影響が少なかったためだと考えられる。
- (5) 危険回転数を5250rpmと予測することができた。

第10章 結論

本研究では回転機械であるシロッコファンを対象とし、従来のハンマー加振による実験モード解析の方法では行うことが困難な、稼働時における振動モード形状や共振周波数を求めることを目標とした。

今回、研究対象としたものは回転機械であるため、対象の稼働時の振動特性の把握には、実稼働解析を行わなければならなかった。つまり、モーター加振を行い、対象の回転している状態でのデータの取得を求められた。そこで、従来実験モード解析で利用してきた加速度ピックアップではなく、より軽量で回転時に影響を与えにくい半導体歪ゲージを用い、実験を行った。歪ゲージを用いた実験では、実験方法を変えることにより変位モードと歪モードを求めることが出来るという特徴が分かった。そこで、まずはインパルスハンマーと歪ゲージを用い加振試験を行い、変位モードと歪モードを求めた。また、二つの実験から得られた固有振動数がほぼ同じ値となることも確認出来た。また、有限要素モデルを使用して計算モード解析を行った結果、詳細なシロッコファンのモード形状を把握するとともに、その応力分布を確認した。

歪ゲージを用いた実験モード解析が可能だということで、次の段階として実稼働試験を行った。回転状態では、静止では確認されなかった振動特性が確認された。大きく分けて2つあり、1つは静止時の1次の固有モードが回転すると2つに分離すること、もう1つはその分離した固有モードは回転数に応じて1つは周波数が下がっていき、もう一つは上がっていくことである。これは、解析モデルを使用することによりジャイロモーメントの影響が大きく関わっていることを確認することが出来た。また今回導入した信号処理方法である、特異値分解を用いることにより稼働時のモード形状を得ることが出来た。そして、そのモード形状は周波数は違えども静止時の固有モード形状と同一であることを確認した。最後に、本試験により対象のシロッコファンの危険回転数を把握した。

今後の課題として、本研究では実稼働試験を行うために歪ゲージを利用することにより、不釣合いや遠心力の影響を極力減らそうとした。しかし、本来は無い歪ゲージやその配線により、多少なりとも影響があったと考えられる。そこで、より細い配線を利用するなどにより影響が少ない方法を考える。次に、特異値分解を利用したモード形状の算出では、2次のモード形状では実験モード解析と比べ、はっきりとした形状を得られたとは言い難い結果となった。そのため、これを改善する方法を試みる。最後に、シロッコファンの危険回転数や応力集中部の予測は出来たが、実際にその回転数が危険回転数なのか、有限要素モデルで確認した応力集中部で破壊現象が起きるのかを確認しなければならない。

参考文献

- 1)長松昭男, ”モード解析入門”, コロナ社, 1993 年.
- 2)三好俊郎, ”有限要素法入門”, 培風館, 2001 年.
- 3)モード解析ハンドブック編集委員会編, ”モード解析ハンドブック”, コロナ社, 2000 年.
- 4)山本敏男, 石田幸男, 回転機械の力学, (2001), コロナ社
- 5)吉村卓也, 特異値分解を用いた狭帯域モード特性同定法, Dyn Des Conf Vol.1990
No.900-44 Pt A Page.55-58 (1990.07)
- 6) 萩原憲明, 菊地勝昭, 森靖, 椎木和明, 羽根車の前後ふれまわりモードの共振現象, 日本
機械学会論文集 Vol.47 No.423 Page.1457-1465 (1981.11)
- 7) L.H.Yam, T.P.Leung, D.B.Li, K.Z.Xue, "THEORETICAL AND EXPERIMENTAL
STUDY OF MODAL STRAIN ANALYSIS", Journal of Sound and Vibration (1996)
191(2), 251-260

謝辞

本研究を行うにあたり，大変多忙な中ご指導して下さいました長松昭男教授，岩原光男助手に心より感謝を申し上げます．先生方のご教授なしに本研究を遂行することは不可能でした．また実験の補佐をして頂いた、吉田達也君に深くお礼申し上げます．

研究対象を提供し，貴重な助言をいただきましたオリエンタルモーター(株)の高橋様，および皆様に深くお礼申し上げます．