確率ボラティリティ株価モデルに対するオプション価格の数値解

宮本, 隆史 / MIYAMOTO, Takashi

(発行年 / Year)
2009-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)
2009-03-24

(学位名 / Degree Name)
修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)
法政大学 (Hosei University)

2008年度修士論文

確率ボラティリティ株価モデルに対する オプション価格の数値解

法政大学大学院
工学研究科

みやもと たかし
07R6206 **宮本 隆史**

指導教員 **浦谷 規 教授**

The 2008 Master's Thesis

Numerical Solution for Option Pricing of Stochastic Volatility Model

Department of System Engineering
Graduate School of Engineering
Hosei University

07R6206 Takashi MIYAMOTO

Supervisor Prof. Tadashi URATANI

概　要

現在の金融市場においては，オプションの価格付けに Black and Sholes [7] による BS モデルを用いるのが一般的である．しかし実際の市場では，株価の変動を表すボラティリティ自身の変動が観測されており，ボラティリティが一定であると仮定した BS モデルでは，この現象を説明できない．この問題に対し，株価のボラティリティが確率過程に従うと仮定した，確率ボラティリティモデルが提唱されている．Heston [8] は株価のボラティリティが平均回帰を持つ確率過程に従うと仮定し，ボラティリティの変動を含む株価モデルを提案した．本稿では，Andersen [2] により示された Heston モデルの離散近似手法を明らかにし，また有限差分法による数値解析手法の構築を行う．またこれらの手法を分析し，BS モデルとの比較を行う．

Abstract

Black-Sholes [7] model is traditionally used to price options in the market, however it cannot explain observed volatility change because the volatility of BS-model assumed to be constant. Stochastic volatility model is proposed to solve this problem; Heston[1] model where volatility of stock price follows the mean-reverting stochastic process. In this thesis, we bring out methods of discretising approximation of Heston model introduced by Andersen[2], and build up numerical analysis of finite difference method. We analyze these methods and compare option prices with BS-model.

目次

図目次

表目次

1　はじめに

1.1　研究背景

名門投資銀行 Lehman Brothers の破綻に端を発した世界的な金融危機により，近年の金融市場では株価の急激な下落が同時に発生している．投資家はオプション価格の評価に Black and Sholes [7] による BS モデルを用いるのが一般的であるが，BS モデルでは契約日から満期までの期間，株価の変動を表すボラティリティを一定であるものと仮定して価格評価を行っている．しかし実際の金融市場において，ボラティリティは変動することが観測されている．BS モデルは将来におけるボラティリティの変動を考慮していない為，オプション価格を過小評価しているという問題点がある．

1.2　先行研究

オプション理論で代表的な BS モデルにおいてオプションの価格評価は，現在の株価・ボラティリティ・金利・行使価格および満期によってのみ決まるというものであった．しかしこのモデルでは，契約開始時点から満期までの期間に起こりうる金利およびボラティリティの変動を捉えることが出来ない，という問題があった．

Cox and Ingersol and Ross [4] は，金利が平均回帰を持つ確率微分方程式に従うと仮定した CIR モデルを構築し，Vasicek [14] による利子率モデルの拡張を試みた．BS モデルでは株価がブラウン運動を含む確率微分方程式に従うと仮定していたが，CIR モデルは株価および金利の 2 組の確率微分方程式に従うとするモデルである．これにより，将来における金利の変動を含んだオプション価格の評価が可能となった．

Heston [8] は CIR モデルにおける金利の確率微分方程式をボラティリティに用いるモデルを提案した．すなわち，ボラティリティがある回帰レベルおよび回帰強度を持ち，株価のブラウン運動がボラティリティのブラウン運動と相関を持つというモデルである．このモデルも株価およびボラティリティの 2 組の確率微分方程式によって表され，CIR モデルにおける確率微分方程式と構造は同じである．

しかし，解析的にオプション価格を求められた BS モデルと違い，Heston モデルでは解析的に解を求めることは出来ない．そこでモンテカルロ法による数値解法の研究が進められた．オイラー法による 1 階常微分近似を始めとして，Khal and Jackel [5] による伊藤-Taylor 展開[*1] を用いた近似手法，Broadie and Kaya [3] による分布関数求め，サンプリングにより価格評価を行う手法など，様々な方法が提案されている．また Andersen [2] はこれら Heston モデルの近似手法の評価を行い，自らも近似手法の構築を試みている．

1.3　研究目的

本稿では，リスク中立確率に基づき，Heston モデルにおけるヨーロピアン・コール・オプションの編微分方程式および境界条件の導出を試みる．これを用いて，BS モデルで有効な数値解析手法である有限差分法を Heston モデルに適用し，数値解析手法の構築を試みる．また，Andersen [2] により紹介されている Heston モデルの数値計算手法を明らかにする．さらに，モンテカルロ法と有限差分法のパラメータによる分析を行い，BS モデルと比較する事で，Heston モデルおよび各 Scheme の特性を検証する．

[*1] Appendix A.1 を参照.

1.4 本稿の構成

本稿では，第 2 章において Heston モデルの定義を行い，第 3 章でリスク中立確率に基づくヨーロピアン・コール・オプションの定義と，編微分方程式および境界条件の導出を行う．第 4 章では有限差分法の Heston モデルへの適用を試みる．第 5 章ではオイラー法による数値計算手法を明らかにし，第 6 章では伊藤-Taylor 展開を用いた Khal-Jackel Scheme を紹介する．第 7 章では分布関数のサンプリングによってオプション価格の評価を行う Exact Scheme を紹介する．第 8 章でモンテカルロ法と有限差分法を分析し，BS モデルと Heston モデルの比較を行う．

2　Heston モデル

確率ボラティリティモデルとは，株価のボラティリティが確率過程に従うというモデルである．ここでは，Heston [8] により提案された，平均回帰を持つ確率ボラティリティモデルを定義する．

2.1　Heston モデルの定義

リスク中立測度 $\mathbb{P}$ の下で，時刻 t における株価が，以下に示す 2 組の確率微分方程式に従うものを，Heston モデルと定義する．

定義 2.1　時刻 t における株価 $S(t)$ ，ボラティリティ $V(t)$ は，以下の確率微分方程式に従う．

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_1(t), \tag{2.1}$$
$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t), \tag{2.2}$$

ただし，W_1 および W_2 は $\mathbb{P}$ の下で相関のあるブラウン運動とし，相関係数 $\rho \in (-1, 1)$ を用いて

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt, \tag{2.3}$$

と表される．

Heston モデルの特徴は，ボラティリティ $V(t)$ が平均回帰を持つ確率過程であると定めている点にある．(2.2) 式より，$V(t)$ は回帰レベル θ を持ち，ブラウン運動 W_2 とボラティリティ σ によって拡散し，回帰強度 κ によって回帰レベルに帰着する．このボラティリティ $V(t)$ を基に株価 $S(t)$ の過程が決まるのだが，ブラウン運動 W_1 と W_2 が相関係数 ρ を持つ関係にある事に注意しなければならない．すなわち，相関のあるブラウン運動 W_1 は独立なブラウン運動 W を用いて，以下のように表せる．

定理 2.2　相関を持つブラウン運動 W_1，W_2 は，相関係数 ρ および独立なブラウン運動 W を用いて，以下のように表せる．

$$dW_1(t) = \rho dW_2(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW(t). \tag{2.4}$$

(2.4) 式を (2.1), (2.2) 式に用いると，以下のように書き直せる．

定理 2.3　Heston モデルにおける確率微分方程式は，相関係数 ρ と独立なブラウン運動 W を用いて，以下のように表せる．

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)\left(\rho dW_2(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW(t)\right), \tag{2.5}$$
$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t), \tag{2.6}$$

3　ヨーロピアン・コール・オプション

ここでは，リスク中立確率の下でのヨーロピアン・コール・オプション価格の定義を行う．さらに，第 2.1 章で定義した Heston モデルにおけるヨーロピアン・コール・オプションの偏微分方程式と，境界条件の導出を行う．また，ここで示す偏微分方程式を用いたオプション価格の算出については，第 4.1 節で述べる．

3.1　偏微分方程式の導出

Heston モデルにおけるヨーロピアン・コールオプションのペイオフを，関数 $U(t,s,v)$ によって表すことにする．$U(t,s,v)$ はマルコフ性より以下の定義を満たす．

定義 3.1　時刻 $T \geq t$ に満期となる行使価格 K のコールオプションの時刻 t におけるリスク中立価格において，マルコフ性により，領域 $0 \leq t \leq T$ で次を満たすような関数 $U(t,S(t),V(t))$ が存在する．

$$U(t,S(t),V(t)) = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^{+}\middle|\mathcal{F}(t)\right]. \tag{3.1}$$

$U(t,s,v)$ の編微分方程式の導出を行う為に，$U(t,s,v)$ のマルチンゲール性について述べておく．

定理 3.2　$e^{-rt}U\left(t,S(t),V(t)\right)$ はマルチンゲールである．

証明　$e^{-rt}U\left(t,S(t),V(t)\right)$ の条件付期待値を求めると，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-rt}U(t,S(t),V(t))\middle|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-rt}\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^{+}\middle|\mathcal{F}_t\right]\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{-rT}(S(T)-K)^{+}\middle|\mathcal{F}_t\right]\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-rs}e^{rs}\cdot e^{-rT}(S(T)-K)^{+}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= e^{-rs}\mathbb{E}\left[e^{-r(T-s)}(S(T)-K)^{+}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= e^{-rs}U\left(s,S(s),V(s)\right). \quad \square
\end{aligned}$$

ここで $e^{-rt}U = e^{-rt}U\left(t,S(t),V(t)\right)$ と書く．この微分を求めると，以下の定理が得られる．

定理 3.3　関数 $U(t,s,v)$ は次の編微分方程式を満たす．

$$\frac{\partial U}{\partial t} + rS\frac{\partial U}{\partial S} + \kappa(\theta - V)\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{1}{2}S^2V\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma SV\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2V\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} = rU \tag{3.2}$$

証明　$e^{-rt}U = e^{-rt}U\left(t,S(t),V(t)\right)$ と書く．この微分を求めると，

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}U) =& Ud(e^{-rt}) + e^{-rt}dU \\
=& -re^{-rt}Udt + e^{-rt}\left[\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial S}dS(t) + \frac{\partial U}{\partial V}dV(t)\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}dS(t)dS(t) + \frac{\partial^2 U}{\partial S\partial V}dS(t)dV(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}dV(t)dV(t)\right],
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{gathered}
dtdt = 0, \quad dtdW(t) = 0, \\
dW_1(t)dW_1(t) = dt, \quad dW_2(t)dW_2(t) = dt, \quad dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt,
\end{gathered}$$

より，

$$
\begin{aligned}
dS(t) &= rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_1, \\
dV(t) &= \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2, \\
dS(t)dS(t) &= V(t)S^2(t)dt, \\
dS(t)dV(t) &= \sigma V(t)S(t)\rho dt, \\
dV(t)dV(t) &= \sigma^2 V(t)dt,
\end{aligned}
$$

である事を用いると，

$$
\begin{aligned}
&= e^{-rt}\Bigg[-rUdt + \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial S}\left(rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_1\right) + \frac{\partial U}{\partial V}\left(\kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}V(t)S^2(t)dt + \frac{\partial^2 U}{\partial S\partial V}\sigma S(t)V(t)\rho dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\sigma^2 V(t)dt\Bigg] \\
&= e^{-rt}\left[-rU + \frac{\partial U}{\partial t} + rS(t)\frac{\partial U}{\partial S} + \kappa(\theta - V(t))\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{1}{2}V(t)S^2(t)\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho S(t)V(t)\sigma\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 V(t)\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\right]dt \\
&\qquad + e^{-rt}\left[\sqrt{V(t)}S(t)\frac{\partial U}{\partial S}dW_1 + \sigma\sqrt{V(t)}\frac{\partial U}{\partial V}dW_2\right]
\end{aligned}
$$

ここで **定理 3.2** より，$e^{-rt}U\left(t, S(t), V(t)\right)$ はマルチンゲールであるので，これを微分した dt 項はゼロである．よって，関数 $U(t, S(t), V(t))$ は次の編微分方程式を満たす．

$$
\frac{\partial U}{\partial t} + rS\frac{\partial U}{\partial S} + \kappa(\theta - V)\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{1}{2}S^2 V\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma SV\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 V\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} = rU. \quad \square
$$

ここで得られた **定理 3.2** および **定理 3.3** より，境界条件の導出を行う．

3.2 境界条件

株価 $S(t)$ の対数を取り，確率過程 $X(t)$ を次のようにおく．

$$
X(t) = \ln S(t). \tag{3.3}
$$

リスク中立確率より，$X(t)$ は次の確率微分方程式に従う．

$$
dX_j(t) = (r + u_j V_j(t))dt + \sqrt{V_j(t)}dW_1(t), \tag{3.4}
$$

$$
dV_j(t) = (a - b_j V_j(t))dt + \sigma\sqrt{V_j(t)}dW_2(t), \tag{3.5}
$$

ただし，$j = 1, 2$ に関して以下のようにおく．

$$
u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa. \tag{3.6}
$$

また，$W_1(t)$ と $W_2(t)$ は，ある確率測度 $\mathbb{P}$ の下でのブラウン運動で，$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$ であるとする．領域 $0 \leq t \leq T, -\infty \leq x \leq \infty, v \geq 0$ において，関数 $f(t, x, v)$，$g(t, x, v)$ を次のように定義する．

定義 3.4　関数 $f(t, x, v)$，$g(t, x, v)$ を以下のように定める．

$$
f(t, x, v) = \mathbb{E}^{t,x,v}\mathbb{I}_{\{X_1(T) \geq \log K\}}, \tag{3.7}
$$

$$
g(t, x, v) = \mathbb{E}^{t,x,v}\mathbb{I}_{\{X_2(T) \geq \log K\}}. \tag{3.8}
$$

$f(t,x,v)$ は株価の行使確率を，$g(t,x,v)$ は行使価格の行使確率を表し，$f(t,x,v)$，$g(t,x,v)$ はそれぞれリスク中立確率におけるヨーロピアン・コールオプションのペイオフを構築するインディケーター関数である．後の証明のために，以下の境界条件を示しておく．

定理 3.5 関数 $f(t,X(t),V(t)),g(t,X(t),V(t))$ は，以下のような境界条件を持つ．

$$f(T,x,v)=\mathbb{I}_{\{x\geq K\}} \tag{3.9}$$

$$g(T,x,v)=\mathbb{I}_{\{x\geq K\}} \tag{3.10}$$

証明 関数 $f(t,X(t),V(t)),g(t,X(t),V(t))$ それぞれに関して，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{T,x,v}\mathbb{I}_{\{X(T)\geq\log K\}} &= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{X(T)\geq\log K\}}\middle|X(T)=x,V(T)=v\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{x\geq\log K\}}\right]\\ &= \mathbb{I}_{\{x\geq\log K\}} \quad \square\end{aligned}$$

ここで，関数 $f(t,x,v)$，$g(t,x,v)$ を用いて，リスク中立確率の下でのヨーロピアン・コールオプションのペイオフを構築する．その為に，関数 $f(t,x,v)$，$g(t,x,v)$ がそれぞれマルチンゲールである事を示す．

定理 3.6 関数 $f(t,X(t),V(t)),g(t,X(t),V(t))$ はそれぞれマルチンゲールである．

証明 $f(t,X(t),V(t)),g(t,X(t),V(t))$ の条件付期待値を求めると，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(t,X_1(t),V_1(t))\middle|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{t,X_1(t),V_1(t)}\mathbb{I}_{\{X_1(T)\geq\log K\}}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{X_1(T)\geq\log K\}}\middle|X_1(t),V_1(t)\right]\middle|\mathcal{F}_s\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{X_1(T)\geq\log K\}}\middle|X_1(s),V_1(s)\right]\\ &= f(s,X_1(s),V_1(s))\end{aligned}$$

よって，$f(t,X_1(t),V_1(t))$ はマルチンゲールである．同様にして，$g(t,X_2(t),V_2(t))$ もマルチンゲールである事が導ける．よって，$f(t,X(t),V(t)),g(t,X(t),V(t))$ はそれぞれマルチンゲールである． $\square$

関数 $f(t,x,v)$，$g(t,x,v)$ を用いたヨーロピアン・コール・オプションのペイオフを，関数 U を用いて以下のようにおく．

$$U(t,S(t),V(t))=S(t)f(t,X(t),V(t))-e^{-r(T-t)}Kg(t,X(t),V(t)). \tag{3.11}$$

(3.11) 式の両辺に e^{-rt} を掛けてると，リスク中立確率の下でのペイオフは以下のようになる．

$$e^{-rt}U(t,S(t),V(t))=S(t)e^{-rt}f(t,X(t),V(t))-Ke^{-rT}g(t,X(t),V(t)) \tag{3.12}$$

定理 3.7 (3.12) 式は，偏微分方程式 (3.2) 式を満たす．

証明 (3.12) 式より，

$$e^{-rt}U(t,S(t),V(t))=se^{-rt}f(t,X(t),V(t))-Ke^{-rT}g(t,X(t),V(t))$$

について考える．$g(t,X(t),V(t))$ の微分は，

$$dg(t,X(t),V(t))=\frac{\partial g}{\partial t}dt+\frac{\partial g}{\partial X}dX+\frac{\partial g}{\partial V}dV+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}dXdX+\frac{\partial^2 g}{\partial X\partial V}dXdV+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial V^2}dVdV,$$

となり，ここで，

$$
\begin{aligned}
dX &= \frac{\partial \log S}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log S}{\partial S^2}dSdS = \frac{1}{S}dS + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{S^2}dSdS \\
&= \left(rdt + \sqrt{V}dW_1\right) - \frac{1}{2}Vdt = \left(r - \frac{1}{2}V\right)dt + \sqrt{V}dW_1, \\
dV &= \kappa(\theta - V)dt + \sigma\sqrt{V}dW_2, \\
dXdX &= \left(\sqrt{V}dW_1\right)^2 = Vdt, \\
dXdV &= \left(\sqrt{V}dW_1\right)\left(\sigma\sqrt{V}dW_2\right) = \sigma V\rho dt, \\
dVdV &= \sigma^2 Vdt,
\end{aligned}
$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial X}\left(\left(r - \frac{1}{2}v\right)dt + \sqrt{v}dW_1\right) + \frac{\partial g}{\partial V}\left(\kappa(\theta - v)dt + \sigma\sqrt{v}dW_2\right) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}vdt + \frac{\partial^2 g}{\partial X\partial V}\sigma v\rho dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial V^2}\sigma^2 vdt \\
&= \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial g}{\partial X} + \kappa(\theta - v)\frac{\partial g}{\partial V} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 g}{\partial X^2} + \sigma v\rho\frac{\partial^2 g}{\partial X\partial V} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial V^2}\sigma^2 v\right]dt \\
&+ \sqrt{v}\frac{\partial g}{\partial X}dW_1 + \sigma\sqrt{v}\frac{\partial g}{\partial V}dW_2
\end{aligned}
$$

となる．ここで **定理 3.6** より dt 項がゼロとなり，以下の編微分方程式が導ける．

$$
\frac{\partial g}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial g}{\partial X} + \kappa(\theta - v)\frac{\partial g}{\partial V} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 g}{\partial X^2} + \rho\sigma v\frac{\partial^2 g}{\partial X\partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 g}{\partial V^2} = 0.
$$

次に，$se^{-rt}f(t, X(t), V(t))$ を微分する事を考える．$0 \leq t \leq u \leq T$ において，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S(u)e^{-ru}f(u, X(u), V(u))\middle|\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[S(u)e^{-ru}\mathbb{E}^{u,x,v}\mathbb{I}_{\{X(T)\geq \log K\}}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= S(t)e^{-rt}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{X(T)\geq \log K\}}\middle|X(u), V(u)\right]\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= S(t)e^{-rt}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{X(T)\geq \log K\}}\middle|X(t), V(t)\right] \\
&= S(t)e^{-rt}f(t, X(t), V(t)),
\end{aligned}
$$

よって，$S(t)e^{-rt}f(t, X(t), V(t))$ はマルチンゲールである．$f(t, X(t), V(t))$ の微分は $g(t, X(t), V(t))$ と同様に，

$$
df(t, X(t), V(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X}dX + \frac{\partial f}{\partial V}dV + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}dXdX + \frac{\partial^2 f}{\partial X\partial V}dXdV + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}dVdV,
$$

となる．ここで，$z = se^{-rt}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
dz &= sd\left(e^{-rt}\right) + e^{-rt}ds \\
&= -rse^{-rt}dt + e^{-rt}(rsdt + \sqrt{v}sdW_1) \\
&= \frac{s}{e^{-rt}}(-rdt + rdt + \sqrt{v}dW_1) \\
&= z\sqrt{v}dW_1,
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{aligned}
dfdz &= zv\frac{\partial f}{\partial X}dt + z\sigma v\frac{\partial f}{\partial V}\rho dt \\
&= zv\left(\frac{\partial f}{\partial X} + \sigma\rho\frac{\partial f}{\partial V}\right)dt
\end{aligned}
$$

である事を用いると，

$$\begin{aligned}
d(zf) =&\frac{\partial zf}{\partial z}dz + \frac{\partial zf}{\partial f}df + \frac{\partial^2 zf}{\partial z \partial f}dzdf \\
=&fdz + zdf + dzdf \\
=&fz\sqrt{z}dW_1 + z\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial f}{\partial X} + \kappa(\theta - v)\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + \sigma v\rho\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}\right]dt \\
&+ z\left[\sqrt{v}\frac{\partial f}{\partial X}dW_1 + \sigma\sqrt{v}\frac{\partial f}{\partial V}dW_2\right] + zv(\frac{\partial f}{\partial X} + \sigma\rho\frac{\partial f}{\partial V})dt \\
=&z\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \left(r + \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial f}{\partial X} + (\kappa(\theta - v) + \sigma\rho v)\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \sigma v\rho\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial V}\right]dt \\
&+ z\sqrt{v}\left[\left(f + \frac{\partial f}{\partial X}\right)dW_1 + \sigma\sqrt{v}\frac{\partial f}{\partial V}dW_2\right]
\end{aligned}$$

となる．ここで $zf(t, X(t), V(t)) = se^{-rt}f(t, X(t), V(t))$ はマルチンゲールであるので，dt 項はゼロである．よって，以下の編微分方程式を導ける．

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(r + \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial f}{\partial X} + (\kappa(\theta - v) + \sigma\rho v)\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \rho\sigma v\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} = 0.$$

これらをまとめると，

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}U(t, S(t), V(t))) =&d\left(se^{-rt}f(t, X(t), V(t))\right) - Ke^{-rT}d(g(t, X(t), V(t))) \\
=&d(zf) - Ke^{-rT}d(g) \\
=&z\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \left(r + \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial f}{\partial X} + (\kappa(\theta - v) + \sigma\rho v)\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \sigma v\rho\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}\right]dt \\
&+ z\sqrt{v}\left[(f + \frac{\partial f}{\partial t})dW_1 + \sigma\sqrt{v}\frac{\partial f}{\partial V}dW_2\right] \\
&- Ke^{-rT}\left[\frac{\partial g}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial g}{\partial X} + \kappa(\theta - v)\frac{\partial g}{\partial V} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 g}{\partial X^2} + \sigma v\rho\frac{\partial g}{\partial X \partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial g}{\partial V^2}\right]dt \\
&- Ke^{-rT}\left[\sqrt{v}\frac{\partial g}{\partial X}dW_1 + \sigma\sqrt{v}\frac{\partial g}{\partial V}dW_2\right]
\end{aligned}$$

上記の式において，導いた編微分方程式より，dt 項はゼロになる．すると残るのはマルチンゲール項であるので，$f(t, X(t), V(t)), g(t, X(t), V(t))$ で構築したオプション価格式 $e^{-rt}U(t, S(t), V(t))$ もマルチンゲールである事が導ける．このとき **定理 3.2** より，関数 $U(t, S(t), V(t))$ は，領域 $0 \le t \le T, s \ge 0, v \ge 0$ において，偏微分方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + rS\frac{\partial U}{\partial S} + \kappa(\theta - V)\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{1}{2}S^2 V\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma SV\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 V\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} = rU$$

を満たす事が示せた． □

これにより，Heston モデルにおけるヨーロピアン・コール・オプションのリスク中立確率の下でのペイオフを，関数 $f(t, x, v)$，$g(t, x, v)$ を用いて表せることが示せた．これより，以下の境界条件を導くことが出来る．

定理 3.8　(3.12) 式は次の境界条件をも満たす.

$$U(T,s,v) = (s-K)^+, \tag{3.13}$$
$$U(t,0,v) = 0, \tag{3.14}$$
$$U(t,s,0) = (s - e^{-r(T-t)}K)^+, \tag{3.15}$$
$$\lim_{s\to\infty} \frac{U(t,s,v)}{s-K} = 1, \tag{3.16}$$
$$\lim_{v\to\infty} U(t,s,v) = s. \tag{3.17}$$

証明　(3.7) ∼ (3.8) 式の関数 $f(t,X(t),V(t)), g(t,X(t),V(t))$ 用いて，(3.13) ∼ (3.17) 式の境界条件を示す.

(3.13) **式**　(3.9) 式より，

$$\begin{aligned}
f(T,x,v) &= \mathbb{E}^{T,x,v}\mathbb{I}_{\{X_1(T)\geq \log K\}} \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{X_1(T)\geq \log K\}}\middle| X_1(T)=x, V_1(T)=v\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{x\geq \log K\}}\right] \\
&= \mathbb{I}_{\{x\geq \log K\}}
\end{aligned}$$

同様にして，(3.10) 式より，

$$\begin{aligned}
g(T,x,v) &= \mathbb{E}^{T,x,v}\mathbb{I}_{\{X_2(T)\geq\}} \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{X_2(T)\geq \log K\}}\middle| X_2(T)=x, V(T)=v\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{x\geq \log K\}}\right] \\
&= \mathbb{I}_{\{x\geq \log K\}}
\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}
U(T,s,v) &= sf(T,x,v) - e^{-r(T-T)}Kg(T,x,v) \\
&= s\mathbb{I}_{\{x\geq \log K\}} - K\mathbb{I}_{\{x\geq \log K\}} \\
&= (s-K)\mathbb{I}_{\{x\geq \log K\}} \\
&= (s-K)\mathbb{I}_{\{s-K\geq 0\}} \\
&= (s-K)^+
\end{aligned}$$

よって，境界条件 (3.13) 式を示せた．これは，満期におけるコールオプションのペイオフである.

(3.14) **式**　$s\to 0$ のとき，$\log s_{s\to 0} = -\infty$ なので，

$$\begin{aligned}
U(t,s\to 0,v) &= 0 - exp{-r(T-t)}Kg(t,\log s_{s\to 0},v) \\
&= -e^{-r(T-t)}K\mathbb{E}^{t,\log s_{s\to 0},v}\mathbb{I}_{\{X(T)\geq \log K\}} \\
&= -e^{-r(T-t)}K\mathbb{E}^{t,\log s_{s\to 0},v}\mathbb{I}_{\{\log S(T)\geq \log K\}} \\
&= -e^{-r(T-t)}K\mathbb{E}^{t,s\to 0,v}\mathbb{I}_{\{S(T)\geq K\}} \\
&= -e^{-r(T-t)}K\mathbb{E}^{t,0,v}\mathbb{I}_{\{0\geq K\}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって，境界条件 (3.14) 式を示せた．株価がゼロならオプションを行使しないので，オプションの価格はゼロである.

(3.15) **式**

$$\begin{aligned}
U(t,s,0) &= sf(t,x,0) - e^{-r(T-t)}Kg(t,x,0) \\
&= s\mathbb{E}^{t,x,0}\mathbb{I}_{\{X(T)\geq \log K\}} - e^{-r(T-t)}K\mathbb{E}^{t,x,0}\mathbb{I}_{\{X(T)\geq \log K\}}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{t,x,0}\mathbb{I}_{\{X(T)\geq\log K\}} &= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{X(T)\geq\log K\}}\middle|X(t)=x,V(t)=0\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{S(T)\geq K\}}\middle|S(t)=s,V(t)=0\right]\\ &= \mathbb{I}_{\left\{s\geq e^{-r(T-t)}K\right\}}\\ &= \mathbb{I}_{\left\{s-e^{-r(T-t)}K\geq 0\right\}}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}U(t,s,0) &= \left(s-e^{-r(T-t)}K\right)\mathbb{I}_{\left\{s-e^{-r(T-t)}K\geq 0\right\}}\\ &= \left(s-e^{-r(T-t)}K\right)^{+}\end{aligned}$$

よって,境界条件 (3.15) 式が示せた.これは,ボラティリティがゼロならば $S(t)$ は確率変数を含まないため,株価は初期価格 s,時刻 t,金利 r によってのみ決まることを表している.

(3.16) **式**

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}\frac{U(t,s,v)}{s-K} &= \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{s-K}\left(sf(t,x,v)-e^{-r(T-t)}Kg(t,x,v)\right)\right]\\ &= \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{s-K}\left(s\mathbb{E}^{t,x,v}\mathbb{I}_{\{X(T)\geq K\}}-e^{-r(T-t)}K\mathbb{E}^{t,x,v}\mathbb{I}_{\{X(T)\geq K\}}\right)\right]\\ &= \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{s-K}\left(s-e^{-r(T-t)}K\right)\mathbb{E}^{t,s,v}\mathbb{I}_{\{S(T)-K\geq 0\}}\right]\\ &= \lim_{s\to\infty}\left[\frac{s-K+K-e^{-r(T-t)}K}{s-K}\mathbb{E}^{t,s,v}\mathbb{I}_{\{S(T)-K\geq 0\}}\right]\\ &= \lim_{s\to\infty}\left[1+\frac{K\left(1-e^{-r(T-t)}\right)}{s-K}\right]\cdot\lim_{s\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{S(T)-K\geq 0\}}\middle|S(t)=s,V(t)=v\right]\\ &= \lim_{s\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{S(T)-K\geq 0\}}\middle|S(t)=s,V(t)=v\right]\end{aligned}$$

ここで,十分大きな s に対して $s-K$ はディープ・イン・ザ・マネーであり,このままイン・ザ・マネーで満期まで終わる可能性が高い.これより,

$$\lim_{s\to\infty}\frac{U(t,s,v)}{s-K}=1$$

よって,境界条件 (3.16) 式が示せた.$x\to\infty$ のとき,$U(t,x,v)$ は上限無く増加する.その場合,$x=\infty$ での境界条件を,増加率という考え方で表す.1 という値は,$x\to\infty$ のとき,$U(t,x,v)$ が x と同じ率で増加するということを表す.

(3.17) **式** $v\to\infty$ において,関数 $f(t,x,v),g(t,x,v)$ それぞれの振る舞いを考える.$f(t,X(t),V(t))$ においては,$v\to\infty$ のとき,確率微分方程式 (3.4) ∼ (3.5) は,

$$\begin{aligned}dX(t)_{V(t)\to\infty} &= \left(r+\frac{1}{2}V(t)\right)dt+\sqrt{V(t)}dW_1(t)>0\\ X(t)_{V(t)\to\infty} &= X(0)+\int_0^t\left(r+\frac{1}{2}V(u)\right)du+\int_0^t\sqrt{V(t)}dW_1(u)=+\infty\end{aligned}$$

となる.また

$$\left(-\frac{1}{2}V\right)^2-\left(\sqrt{V}\right)^2=\frac{1}{4}V^2-V=\frac{1}{4}V(V-4)$$

であり，$V > 0$ のとき正となるので，$g(t, X(t), V(t))$ においては，$v \to \infty$ のとき，確率微分方程式 (3.4) $\sim$ (3.5) は,

$$
\begin{aligned}
dX(t)_{V(t)\to\infty} &= \left(r - \frac{1}{2}V(t)\right)dt + \sqrt{V(t)}dW_1(t) < 0 \\
X(t)_{V(t)\to\infty} &= X(0) + \int_0^t \left(r + \frac{1}{2}V(u)\right)du + \int_0^t \sqrt{V(t)}dW_1(u) = -\infty
\end{aligned}
$$

これをまとめると,

$$
\begin{cases}
f(t, x, v \to \infty) & = \mathbb{E}^{t,x,v\to\infty}\mathbb{I}_{\{X(T)\geq \log K\}} \\
 & = 1 \\
g(t, x, v \to \infty) & = \mathbb{E}^{t,x,v\to\infty}\mathbb{I}_{\{X(t)\geq \log K\}} \\
 & = 0
\end{cases}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\lim_{v\to\infty} U(t, s, v) &= sf(t, x, v \to \infty) - e^{-r(T-t)}Kg(t, x, v \to \infty) \\
&= s
\end{aligned}
$$

よって，境界条件 (3.17) 式が示せた. $\square$

4 有限差分法による近似

デリバティブ価格の解析解が求められない場合，数値計算法を利用することになる．ここで述べる有限差分法は，オプションのペイオフが満たす偏微分方程式を解くことで，オプション価格を評価する方法である．偏微分方程式を中央差分を用いて近似し、3 次元の格子を用いて再帰的に方程式を解く．

4.1 有限差分法

株価が第 2 章における Heston モデルに従う場合の，配当支払いの無い株式に関するヨーロピアン・コール・オプション価格の評価を行う．このオプションが満たす偏微分方程式は，第 3 章より，

$$\frac{\partial U}{\partial t}+rS\frac{\partial U}{\partial S}+\kappa(\theta-V)\frac{\partial U}{\partial V}+\frac{1}{2}S^2V\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}+\rho\sigma SV\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial V}+\frac{1}{2}\sigma^2 V\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}=rU \tag{4.1}$$

である．オプション満期を T とし，現時点 0 から満期 T までを等間隔に N 分割する．$\Delta t=T/N$ とし，$N+1$ 個の時点,

$$0,\Delta t,2\Delta t,\ldots,T$$

での振る舞いを考える．十分大きな $S_{\max}$ をとる．$\Delta S=S_{\max}/M$ とし，次の $M+1$ 個の株価,

$$0,\Delta S,2\Delta S,\ldots,S_{\max}$$

のどれか一つが現在の株価の値となるように $S_{\max}$ を選択する．さらに，$V_{\max}$ をとる．$\Delta V=V_{\max}/L$ とし，次の L 個のボラティリティ，

$$\Delta V,2\Delta V,3\Delta V,\ldots,V_{\max}$$

のどれか一つが現在のボラティリティの値となるように $V_{\max}$ を選択する．

計算に用いる格子点は合計 $(N+1)(M+1)L$ 個の時間と株価とボラティリティの各点から構成されている．(i,j,k) 座標の点は時刻 $i\Delta t$，株価 $j\Delta S$ ，ボラティリティ $k\Delta V$ に相当している．(i,j,k) 座標の点でのオプション価格を今後は $U_{i,j,k}$ とする．

4.2 陰的有限差分法

陰的有限差分法は，満期におけるオプションのペイオフを初期条件として与え，後退差分を用いて方程式を立てる方法である．後に述べる陽的有限差分法よりも解の収束が良い．

4.2.1 後退差分近似式

$(i+1,j,k)$ に対して，後退差分近似を行う．すなわち，格子点の内部点 (i,j,k) に対しては，$\partial U/\partial S$ は，次のように近似的に計算できる．

$$\frac{\partial U}{\partial S}=\frac{U_{i,j+1,k}-U_{i,j,k}}{\Delta S} \tag{4.2}$$

あるいは,

$$\frac{\partial U}{\partial S}=\frac{U_{i,j,k}-U_{i,j-1,k}}{\Delta S} \tag{4.3}$$

(4.2) 式は前進差分近似方程式として，(4.3) 式は後退差分近似方程式として知られている．この二つの方程式を平均することで，もう少し対照的な近似を行うことにする．

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j-1,k}}{2\mathit{\Delta} S} \tag{4.4}$$

$\partial U/\partial V$ に関しても同様にして，次のように近似を行う．

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k-1}}{2\mathit{\Delta} V} \tag{4.5}$$

$\partial U/\partial t$ の計算に関しては，前進差分近似方程式を用いることにする．このとき，$i\mathit{\Delta} t$ での値と $(i+1)\mathit{\Delta} t$ での値との間には次のような関係が成り立つ．

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i+1,j,k} - U_{i,j,k}}{\mathit{\Delta} t} \tag{4.6}$$

(i,j,k) 点での $\partial U/\partial S$ に関する後退差分近似方程式は，(4.3) 式で与えられる．$(i,j+1,k)$ 点での後退差分は，

$$\frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j,k}}{\mathit{\Delta} S} \tag{4.7}$$

である．(i,j,k) 点での $\partial^2 U/\partial S^2$ に関する有限差分近似式は次のようになる．

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \left(\frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j,k}}{\mathit{\Delta} S} - \frac{U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k}}{\mathit{\Delta} S} \right) \Big/ \mathit{\Delta} S$$

すなわち，

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \frac{U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k} - 2U_{i,j,k}}{\mathit{\Delta} S^2} \tag{4.8}$$

同様にして，(i,j,k) 点での $\partial^2 U/\partial V^2$ に関する差分近似式は，次のようになる．

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} = \frac{U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1} - 2U_{i,j,k}}{\mathit{\Delta} V^2} \tag{4.9}$$

(i,j,k) 点での $\partial^2 U/\partial S\partial V$ に関する差分近似式は次のように計算できる．

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \left(\frac{U_{i,j+1,k+1} - U_{i,j-1,k+1}}{2\mathit{\Delta} S} - \frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j-1,k}}{2\mathit{\Delta} S} \right) \Big/ \mathit{\Delta} V \tag{4.10}$$

あるいは，

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \left(\frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j-1,k}}{2\mathit{\Delta} S} - \frac{U_{i,j+1,k-1} - U_{i,j-1,k-1}}{2\mathit{\Delta} S} \right) \Big/ \mathit{\Delta} V \tag{4.11}$$

(4.10) 式と (4.11) 式の平均を取ると，

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{U_{i,j+1,k+1} - U_{i,j-1,k+1} - U_{i,j+1,k-1} + U_{i,j-1,k-1}}{4\mathit{\Delta} S \mathit{\Delta} V} \tag{4.12}$$

(4.4) ~ (4.12) 式を (4.1) 式に代入し，$S = j\mathit{\Delta} S$，$V = k\mathit{\Delta} V$ とおくと，有限差分方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{U_{i+1,j,k} - U_{i,j,k}}{\mathit{\Delta} t} + rj\mathit{\Delta} S \frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j-1,k}}{2\mathit{\Delta} S} + \kappa(\theta - k\mathit{\Delta} V) \frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k-1}}{2\mathit{\Delta} V} \\
&\quad + \frac{1}{2} j^2 \mathit{\Delta} S^2 k \mathit{\Delta} V \frac{U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k} - 2U_{i,j,k}}{\mathit{\Delta} S^2} \\
&\quad + \rho\sigma j \mathit{\Delta} S k \mathit{\Delta} V \frac{U_{i,j+1,k+1} - U_{i,j-1,k+1} - U_{i,j+1,k-1} + U_{i,j-1,k-1}}{4\mathit{\Delta} S \mathit{\Delta} V} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 k \mathit{\Delta} V \frac{U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1} - 2U_{i,j,k}}{\mathit{\Delta} V^2} \\
&= rU_{i,j,k}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

が得られる．ここで $i=0,1,\ldots,N-1$，$j=1,2,\ldots,M-1$ および $k=2,3,\ldots,L-1$ である．各項を整理すると，以下の定理を得る．

定理 4.1　Heston モデルにおける陰的有限差分法による差分式は,

$$
\begin{aligned}
U_{i+1,j,k} =& -a_{j,k}U_{i,j-1,k-1} + b_{j,k}U_{i,j-1,k} + a_{j,k}U_{i,j-1,k+1} \\
&+ c_{j,k}U_{i,j,k-1} + d_{j,k}U_{i,j,k} + e_{j,k}U_{i,j,k+1} \\
&+ a_{j,k}U_{i,j+1,k-1} + f_{j,k}U_{i,j+1,k} - a_{j,k}U_{i,j+1,k+1}
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
a_{j,k} &= \frac{1}{4}\rho\sigma jk\Delta t \\
b_{j,k} &= \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}j^2k\Delta V\Delta t \\
c_{j,k} &= \frac{\kappa(\theta - k\Delta V)}{2\Delta V}\Delta t - \frac{\sigma^2 k}{2\Delta V}\Delta t \\
d_{j,k} &= 1 + r\Delta t + j^2k\Delta V\Delta t + \frac{\sigma^2 k}{\Delta V}\Delta t \\
e_{j,k} &= -\frac{\kappa(\theta - k\Delta V)}{2\Delta V}\Delta t - \frac{\sigma^2 k}{2\Delta V}\Delta t \\
f_{j,k} &= -\frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}j^2k\Delta V\Delta t
\end{aligned}
$$

である．

4.2.2　陰的有限差分法による数値解算出の手順

S_T を T での株価とすると，コール・オプションの T 時点での値は，$(S_T-K)^+$ となる．従って,

$$
U_{N,j,k} = \max[\Delta S - K, 0] \qquad j=0,1,\ldots,M \tag{4.15}
$$

である．株価が 0 の場合，プット・オプション価値は 0 であるから,

$$
U_{i,0,k} = 0 \qquad i=0,1,\ldots,N \tag{4.16}
$$

である．$S=S_{\max}$ のときプット・オプションの価値が $S_{\max}-K$ になると仮定すると,

$$
U_{i,M,k} = S_{\max} - K \qquad i=0,1,\ldots,N \tag{4.17}
$$

(4.15) ∼ (4.17) 式は格子点のグリッドの三つの境界上，すなわち，$S=0, S=S_{\max}, t=T$ でのコール・オプションの価値を定義している． ここで (4.14) 式より，$V=\Delta V$ および $V=V_{\max}$ 上における境界条件を求める．すなわち，ボラティリティを等間隔に L 分割せず，二個のボラティリティ,

$$
\Delta V, V_{\max}
$$

でのコール・オプションの価格を別々に求める．このとき差分近似式は，$k=\Delta V$ の場合,

$$
U_{i+1,j,\Delta V} = b_{j,\Delta V}U_{i,j-1,\Delta V} + d_{j,\Delta V}U_{i,j,\Delta V} + f_{j,\Delta V}U_{i,j+1,\Delta V} \tag{4.18}
$$

となる．また，$k=V_{\max}$ の場合,

$$
U_{i+1,j,V_{\max}} = b_{j,V_{\max}}U_{i,j-1,V_{\max}} + d_{j,V_{\max}}U_{i,j,V_{\max}} + f_{j,V_{\max}}U_{i,j+1,V_{\max}} \tag{4.19}
$$

となる．(4.18) $\sim$ (4.19) 式は，ブラック・ショールズ・モデルにおけるヨーロピアン・コール・オプション価格を陰的有限差分法により計算する方法と同様にして求めることが出来る[*2]．以上の境界条件を求めたのち，その他の内部点での $U_{i,j,k}$ の値を (4.14) 式を用いて計算する．まず $T-\Delta t$ に該当する各格子点の値を求める．(4.14) 式で $i=N-1$ とすると，

$$
\begin{aligned}
U_{N,j,k} = &\ a_{j,k}U_{N-1,j-1,k-1} + b_{j,k}U_{N-1,j-1,k} + a_{j,k}U_{N-1,j-1,k+1} \\
&+ c_{j,k}U_{N-1,j,k-1} + d_{j,k}U_{N-1,j,k} + e_{j,k}U_{N-1,j,k+1} \\
&+ a_{j,k}U_{N-1,j+1,k-1} + f_{j,k}U_{N-1,j+1,k} + a_{j,k}U_{N-1,j+1,k+1}
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

ただし, $j=1,2,\ldots,M-1$, $k=2,3,\ldots,L-1$ である．これらの方程式の各右辺の値は, (4.15) 式における境界条件として既に求めている．さらに, (4.16) $\sim$ (4.19) 式の境界条件より, (4.14) 式は $(M-1)(L-2)$ 本の連立方程式で, $(M-1)(L-2)$ 個の未知数 $U_{N-1,1,2}, U_{N-1,2,2}, \ldots, U_{N-1,M-1,2}, U_{N-1,1,3}, \ldots, U_{N-1,M-1,L-1}$ であるから, 全ての方程式を解き, 各 $U_{i,j,k}$ の値を求めることが出来る．$T-2\Delta t$ 時点, あるいはそれ以前の時点についても, 同様の手順で順次計算することができる．最終的に, $U_{0,1,1}, U_{0,2,1}, \ldots, U_{0,M-1,1}, U_{0,1,2}, \ldots, U_{0,M-1,L-1}$ が求められることになる．これらのうちの該当する時刻，株価，ボラティリティにおける数値解が，求めるオプション価格である．

4.2.3 変数変換

BS モデルにおいては有限差分法を行う場合，原資産として S を用いるよりも，$\ln S$ を用いたほうが計算上効率が良い．これを Heston モデルにおける有限差分法にも適用する事を試みる．$X=\ln S$ と定義すると，(4.1) 式は次のようになる．

$$
\frac{\partial U}{\partial t} + \left(r-\frac{1}{2}V\right)\frac{\partial V}{\partial X} + \kappa(\theta - V)\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{1}{2}V\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \rho\sigma V\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 V\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} = rU \tag{4.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{U_{i+1,j,k}-U_{i,j,k}}{\Delta t} + \left(r-\frac{1}{2}k\Delta V\right)\frac{U_{i,j+1,k}-U_{i,j-1,k}}{2\Delta X} + \kappa(\theta - k\Delta V)\frac{U_{i,j,k+1}-U_{i,j,k-1}}{2\Delta V} \\
&\qquad + \frac{1}{2}k\Delta V\frac{U_{i,j+1,k}+U_{i,j-1,k}-2U_{i,j,k}}{\Delta X^2} \\
&\qquad + \rho\sigma k\Delta V\frac{U_{i,j+1,k+1}-U_{i,j-1,k+1}-U_{i,j+1,k-1}+U_{i,j-1,k-1}}{2\Delta X\Delta V} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sigma^2 k\Delta V\frac{U_{i,j,k+1}+U_{i,j,k-1}-2U_{i,j,k}}{\Delta V^2} \\
&= rU_{i,j,k}
\end{aligned}
$$

これを整理すると，以下の定理を得る．

定理 4.2 Heston モデルにおける変数変換を用いた陰的有限差分法の差分式は,

$$
\begin{aligned}
U_{i+1,j,k} = &-\alpha_{j,k}U_{i,j-1,k-1} + \beta_{j,k}U_{i,j-1,k} + \alpha_{j,k}U_{i,j-1,k+1} \\
&+ \gamma_{j,k}U_{i,j,k-1} + \delta_{j,k}U_{i,j,k} + \epsilon_{j,k}U_{i,j,k+1} \\
&+ \alpha_{j,k}U_{i,j+1,k-1} + \zeta_{j,k}U_{i,j+1,k} - \alpha_{j,k}U_{i,j+1,k+1}
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

[*2] 詳しい計算の手順は，Hull [9, 659-665p] を参照．

ただし,

$$
\begin{aligned}
\alpha_{j,k} &= \frac{\rho\sigma k}{2\Delta X}\Delta t \\
\beta_{j,k} &= -\frac{r}{2\Delta X}\Delta t + \frac{k\Delta V}{4\Delta X}\Delta t - \frac{k\Delta V}{2\Delta X^2}\Delta t \\
\gamma_{j,k} &= -\frac{\kappa(\theta - k\Delta V)}{2\Delta V}\Delta t - \frac{\sigma^2 k}{2\Delta V}\Delta t \\
\delta_{j,k} &= 1 + r\Delta t + \frac{k\Delta V}{\Delta X^2}\Delta t + \frac{\sigma^2 k}{\Delta V}\Delta t \\
\epsilon_{j,k} &= \frac{\kappa(\theta - k\Delta V)}{2\Delta V}\Delta t - \frac{\sigma^2 k}{2\Delta V}\Delta t \\
\zeta_{j,k} &= \frac{r}{2\Delta X}\Delta t - \frac{k\Delta V}{4\Delta X}\Delta t - \frac{k\Delta V}{2\Delta X^2}\Delta t
\end{aligned}
$$

である.

変数変換を行う場合は,初期条件に注意が必要である.すなわち,満期におけるペイオフを $\ln S(T) - K$ として与える.後はこの初期条件に対して**定理 4.2** 式を用いて数値解を算出する.この時,3 次元の格子 (i,j,k) は $S(t)$, $V(t)$ について等間隔ではなく,$\ln S(t)$, $\ln V(t)$ について等間隔な格子となっている.また,BS モデルに変数変換を用いる場合は,差分式の係数 $\alpha_j, \beta_j, \ldots$ から変数が消え,係数は (i,j) によらず定数となり,計算の効率が向上していた.しかし,Heston モデルでは対数の格子を用いても,ボラティリティの格子 $k\Delta V$ が残るために,対数格子を用いる事はあまり効果的ではなくなっている.

4.3 陽的有限差分法

陽的有限差分法は,陰的よりも単純な構造を持つ数値解析手法である.差分近似により得た数値は陰的有限差分法に比べると精度が低いが,計算測度が速いという利点を持つ.今回は陽的有限差分法を数値計算に用いる事は無いが,後に紹介する Crank-Nicholson 法の予備知識として,ここで紹介しておく.

4.3.1 陽的有限差分近似

(i,j,k) に対して前進差分近似を行う.すなわち,$(i+1,j,k)$ に対しては,$\partial U/\partial S, \partial^2 U/\partial S^2$ は,(4.4) 式および (4.8) 式より次のようになる.

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{U_{i+1,j+1,k} - U_{i+1,j-1,k}}{2\Delta S} \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \frac{U_{i+1,j+1,k} + U_{i+1,j-1,k} - 2U_{i+1,j,k}}{\partial S^2} \tag{4.24}$$

同様にして,$\partial U/\partial V, \partial^2 U/\partial V^2$ は,(4.5) 式および (4.9) 式より,次のようになる.

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{U_{i+1,j,K+1} - U_{i+1,j,k-1}}{2\Delta V} \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} = \frac{U_{i+1,j,k+1} + U_{i+1,j,k-1} - 2U_{i+1,j,k}}{\partial V^2} \tag{4.26}$$

$(i+1,j,k)$ 点での $\partial^2 U/\partial S \partial V$ に関する近似式は,(4.12) より,次のようになる.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{U_{i+1,j+1,k+1} - U_{i+1,j-1,k+1} - U_{i+1,j+1,k-1} + U_{i+1,j-1,k-1}}{4\Delta S \Delta V} \tag{4.27}$$

(4.23) ∼ (4.27) 式より，差分方程式,

$$
\begin{aligned}
&\frac{U_{i+1,j,k}-U_{i,j,k}}{\Delta t}+rj\Delta S\frac{U_{i+1,j+1,k}-U_{i+1,j-1,k}}{2\Delta S}+\kappa(\theta-k\Delta V)\frac{U_{i+1,j,k+1}-U_{i+1,j,k-1}}{2\Delta V}\\
&\quad+\frac{1}{2}j^2\Delta S^2k\Delta V\frac{U_{i+1,j+1,k}+U_{i+1,j-1,k}-2U_{i+1,j,k}}{\Delta S^2}\\
&\quad+\rho\sigma j\Delta Sk\Delta V\frac{U_{i+1,j+1,k+1}-U_{i+1,j-1,k+1}-U_{i+1,j+1,k-1}+U_{i+1,j-1,k-1}}{4\Delta S\Delta V}\\
&\quad+\frac{1}{2}\sigma^2k\Delta V\frac{U_{i+1,j,k+1}+U_{i+1,j,k-1}-2U_{i+1,j,k}}{\Delta V^2}\\
&=rU_{i,j,k}
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

が得られる．これを整理すると，以下の定理を得る．

定理 4.3　Heston モデルにおける陽的有限差分法の差分式は,

$$
\begin{aligned}
U_{i,j,k}=\ &a^*_{j,k}U_{i+1,j-1,k-1}+b^*_{j,k}U_{i+1,j-1,k}-a^*_{j,k}U_{i+1,j-1,k+1}\\
&+c^*_{j,k}U_{i+1,j,k-1}+d^*_{j,k}U_{i+1,j,k}+e^*_{j,k}U_{i+1,j,k+1}\\
&-a^*_{j,k}U_{i+1,j+1,k-1}+f^*_{j,k}U_{i+1,j+1,k}+a^*_{j,k}U_{i+1,j+1,k+1}
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

が得られる．ただし,

$$
\begin{aligned}
a^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{1}{4}\rho\sigma jk\Delta t\right)\\
b^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{1}{2}rj\Delta t+\frac{1}{2}j^2k\Delta V\Delta t\right)\\
c^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{\kappa(\theta-k\Delta V)}{2\Delta V}\Delta t+\frac{\sigma^2k}{2\Delta V}\Delta t\right)\\
d^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(1-j^2k\Delta V\Delta t-\frac{\sigma^2k}{\Delta V}\Delta t\right)\\
e^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{\kappa(\theta-k\Delta V)}{2\Delta V}\Delta t+\frac{\sigma^2k}{2\Delta V}\Delta t\right)\\
f^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{1}{2}rj\Delta t+\frac{1}{2}j^2k\Delta V\Delta t\right)
\end{aligned}
$$

である．

(4.29) 式では，未知数 $U_{i,j,k}$ を，既知の $U_{i+1,j-1,k-1},\dots,U_{i+1,j+1,k+1}$ を用いて近似している．ここで注意したいのは，差分式の係数 $d*_{j,k}$ である．これは，オプションのペイオフが格子 $(i+1,j,k)$ から (i,j,k) へ推移する確率を表しているが，以下に示すこの確率,

$$
\frac{1}{1+r\Delta t}\left(1-j^2k\Delta V\Delta t-\frac{\sigma^2k}{\Delta V}\Delta t\right)
$$

が負の値を取り得る事に注意する必要がある．この確率は変数 j,k を含むので，格子のサイズ次第ではあるが，かなり小さめの格子から確率が負になってしまい，オプション価格が負の値を出す．これではペイオフの収束は期待できないので，以下の変数変換を用いて変数を消去を試みる．

4.3.2 変数変換

陽的差分方に変数変換を用いると以下の差分式が得られる;

$$
\begin{aligned}
&\frac{U_{i+1,j,k}-U_{i,j,k}}{\Delta t}+\left(r-\frac{1}{2}k\Delta V\right)\frac{U_{i+1,j+1,k}-U_{i+1,j-1,k}}{2\Delta X}+\kappa(\theta-k\Delta V)\frac{U_{i+1,j,k+1}-U_{i+1,j,k-1}}{2\Delta V}\\
&\qquad+\frac{1}{2}k\Delta V\frac{U_{i+1,j+1,k}+U_{i+1,j-1,k}-2U_{i+1,j,k}}{\Delta X^2}\\
&\qquad+\rho\sigma k\Delta V\frac{U_{i+1,j+1,k+1}-U_{i+1,j-1,k+1}-U_{i+1,j+1,k-1}+U_{i+1,j-1,k-1}}{2\Delta X\Delta V}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sigma^2 k\Delta V\frac{U_{i+1,j,k+1}+U_{i+1,j,k-1}-2U_{i+1,j,k}}{\Delta V^2}\\
&=rU_{i,j,k}
\end{aligned}
$$

これを整理することによって，以下の定理を得る．

定理 4.4 Heston モデルにおける変数変換を用いた陽的有限差分法によるオプション価格の差分式は,

$$
\begin{aligned}
U_{i,j,k}=&+\alpha^*_{j,k}U_{i+1,j-1,k-1}+\beta^*_{j,k}U_{i+1,j-1,k}-\alpha^*_{j,k}U_{i+1,j-1,k+1}\\
&+\gamma^*_{j,k}U_{i+1,j,k-1}+\delta^*_{j,k}U_{i+1,j,k}+\epsilon^*_{j,k}U_{i+1,j,k+1}\\
&-\alpha^*_{j,k}U_{i+1,j+1,k-1}+\zeta^*_{j,k}U_{i+1,j+1,k}+\alpha^*_{j,k}U_{i+1,j+1,k+1}
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
\alpha^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left[\frac{\rho\sigma k}{2\Delta X}\Delta t\right]\\
\beta^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left[\frac{r}{2\Delta X}\Delta t-\frac{k\Delta V}{4\Delta X}\Delta t+\frac{k\Delta V}{2\Delta X^2}\Delta t\right]\\
\gamma^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left[\frac{\kappa(\theta-k\Delta V)}{2\Delta V}\Delta t+\frac{\sigma^2 k}{2\Delta V}\Delta t\right]\\
\delta^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left[1-\frac{k\Delta V}{\Delta X^2}\Delta t-\frac{\sigma^2 k}{\Delta V}\Delta t\right]\\
\epsilon^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left[-\frac{\kappa(\theta-k\Delta V)}{2\Delta V}\Delta t+\frac{\sigma^2 k}{2\Delta V}\Delta t\right]\\
\zeta^*_{j,k}&=\frac{1}{1+r\Delta t}\left[-\frac{r}{2\Delta X}\Delta t+\frac{k\Delta V}{4\Delta X}\Delta t+\frac{k\Delta V}{2\Delta X^2}\Delta t\right]
\end{aligned}
$$

である．

しかし，ここでも $\delta^*_{j,k}$ が負の値を取り得る．この場合はボラティリティの格子の大きさに依存するが，十分な収束を得るだけの格子を作る事は出来ない．よって Heston モデルにおいては陽的有限差分法による解法はペイオフの収束を得る事が出来ないと言える．

4.4 Crank-Nicholson 法

陰的有限差分法は $i\Delta t$ 時点における 9 つの点と $(i+1,j,k)$ との関係を与えている一方，陽的有限差分法は $(i+1)\Delta t$ 時点における 9 つの点と (i,j,k) との関係を与えている．これら陰的および陽的な方法の平均を取る方法が Crank-Nicholson 法であり，BS モデルにおいては陰的有限差分法よりも収束性に優れた方法である．この Crank-Nicholson 法の Heston モデルへの適用を考える．

$(i+1/2,j,k)$ に対して，中央差分近似を行う．すなわち，$(i+1,j,k)$ 点と (i,j,k) 点の差分近似式の平均

を取る．このとき，$\partial U/\partial S, \partial^2 U/\partial S^2$ は，(4.4) 式，(4.8) 式より，次のように近似的に計算できる．

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1,j+1,k} - U_{i+1,j-1,k}}{2\Delta S} + \frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j-1,k}}{2\Delta S}\right) \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1,j+1,k} + U_{i+1,j-1,k} - 2U_{i+1,j,k}}{\Delta S^2} + \frac{U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k} - 2U_{i,j,k}}{\Delta S^2}\right) \tag{4.32}$$

$\partial U/\partial V, \partial^2 U/\partial V^2$ に関しても同様にして，次のように近似を行う．

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1,j,k+1} - U_{i+1,j,k-1}}{2\Delta V} + \frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k-1}}{2\Delta V}\right) \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1,j,k+1} + U_{i+1,j,k-1} - 2U_{i+1,j,k}}{\Delta V^2} + \frac{U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1} - 2U_{i,j,k}}{\Delta V^2}\right) \tag{4.34}$$

$(i+1/2, j, k)$ 点での $\partial^2 U/\partial S \partial V$ に関する中央差分式は，次のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{1}{2}\Biggl(&\frac{U_{i+1,j+1,k+1} - U_{i+1,j-1,k+1} - U_{i+1,j+1,k-1}U_{i+1,j-1,k-1}}{2\Delta S \Delta V} \\ &+ \frac{U_{i,j+1,k+1} - U_{i,j-1,k+1} - U_{i,j+1,k-1} + U_{i,j-1,k-1}}{2\Delta S \Delta V}\Biggr)\end{aligned} \tag{4.35}$$

(4.31) $\sim$ (4.35) 式を (4.1) 式に代入すると，差分方程式，

$$\begin{aligned}&\frac{U_{i+1,j,k} - U_{i,j,k}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1,j+1,k} - U_{i+1,j-1,k}}{2\Delta S} + \frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j-1,k}}{2\Delta S}\right) \\ &\quad + \kappa(\theta - k\Delta V)\frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1,j,k+1} - U_{i+1,j,k-1}}{2\Delta V} + \frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k-1}}{2\Delta V}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}j^2 \Delta S^2 k \Delta V \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1,j+1,k} + U_{i+1,j-1,k} - 2U_{i+1,j,k}}{\Delta S^2} + \frac{U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k} - 2U_{i,j,k}}{\Delta S^2}\right) \\ &\quad + \rho\sigma j \Delta S k \Delta V \frac{1}{2}\Biggl(\frac{U_{i+1,j+1,k+1} - U_{i+1,j-1,k+1} - U_{i+1,j+1,k-1} + U_{i+1,j-1,k-1}}{2\Delta S \Delta V} \\ &\qquad\qquad + \frac{U_{i,j+1,k+1} - U_{i,j-1,k+1} - U_{i,j+1,k-1} + U_{i,j-1,k-1}}{2\Delta S \Delta V}\Biggr) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 k \Delta V \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1,j,k+1} + U_{i+1,j,k-1} - 2U_{i+1,j,k}}{\Delta V^2} + \frac{U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1} - 2U_{i,j,k}}{\Delta V^2}\right) \\ &= rU_{i,j,k}\end{aligned} \tag{4.36}$$

が得られる．各項を整理すると，以下の定理を得る．

定理 4.5　Heston モデルにおける Crank-Nicholson 法によるオプション価格の差分方程式は，

$$\begin{array}{lll} -\tilde{a}_{j,k}U_{i,j+1,k+1} & +\tilde{b}_{j,k}U_{i,j+1,k} & +\tilde{a}_{j,k}U_{i,j+1,k-1} \\ +\tilde{c}_{j,k}U_{i,j,k+1} & +\tilde{d}_{j,k}U_{i,j,k} & +\tilde{e}_{j,k}U_{i,j,k-1} \\ +\tilde{a}_{j,k}U_{i,j-1,k+1} & +\tilde{f}_{j,k}U_{i,j+1,k} & -\tilde{a}_{j,k}U_{i,j-1,k-1} \end{array}$$

$$= \begin{array}{lll} +\tilde{a}_{j,k}U_{i+1,j+1,k+1} & -\tilde{b}_{j,k}U_{i+1,j+1,k} & -\tilde{a}_{j,k}U_{i+1,j+1,k-1} \\ -\tilde{c}_{j,k}U_{i+1,j,k+1} & +\tilde{g}_{j,k}U_{i+1,j,k} & -\tilde{e}_{j,k}U_{i+1,j,k+1} \\ -\tilde{a}_{j,k}U_{i+1,j-1,k+1} & -\tilde{f}_{j,k}U_{i+1,j-1,k} & +\tilde{a}_{j,k}U_{i+1,j-1,k-1} \end{array} \tag{4.37}$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{j,k} &= \frac{1}{4}\rho\sigma jk\Delta t \\
\tilde{b}_{j,k} &= -\frac{1}{4}rj\Delta t - \frac{1}{4}j^2k\Delta V\Delta t \\
\tilde{c}_{j,k} &= -\frac{\kappa(\theta - k\Delta V)}{4\Delta V}\Delta t - \frac{\sigma^2 k}{4\Delta V}\Delta t \\
\tilde{d}_{j,k} &= 1 + r\Delta t + \frac{1}{2}j^2k\Delta V\Delta t + \frac{\sigma^2 k}{2\Delta V}\Delta t \\
\tilde{e}_{j,k} &= \frac{\kappa(\theta - k\Delta V)}{4\Delta V}\Delta t - \frac{\sigma^2 k}{4\Delta V}\Delta t \\
\tilde{f}_{j,k} &= \frac{1}{4}rj\Delta t - \frac{1}{4}j^2k\Delta V\Delta t \\
\tilde{g}_{j,k} &= 1 - \frac{1}{2}j^2k\Delta V\Delta t - \frac{\sigma^2 k}{2\Delta V}\Delta t
\end{aligned}
$$

である．

ここで，(4.37) 式の右辺は既知の $U_{i+1,j-1,k-1},\dots,U_{i+1,j+1,k+1}$ を用いているので，一つの数値解が求められる．左辺の $U_{i,j-1,k-1},\dots,U_{i,j+1,k+1}$ は未知数なので，これは $(M-1)(L-2)$ 個の未知数 $U_{i,j,k}$ を求める $(M-1)(L-2)$ 本の連立方程式となる．よって Crank-Nicholson 法は，陰的有限差分法に近い方法であると言える．　しかし，この方法も差分式の係数 $\tilde{g}_{j,k}$ が負の値を取り得るので，ペイオフの収束は期待できない．よって Heston モデルに有限差分法を適用する場合は，陰的有限差分法のみが効果的な手法であると言える．

5 Euler Scheme

Andersen [2] は，Heston モデルのシミュレーションに関して，いくつかの方法を紹介し，各手法に評価を与えている．最も単純な差分近似手法である Euler Scheme に関しても同様で，Heston モデルの特徴を踏まえて導入を行った．Euler Scheme は手軽で高速な為，プライシングの大まかな値を今すぐ知りたい場合などに有効な手法である．

5.1 Euler Scheme

Heston モデルの確率微分方程式は，解析的に解を求めることが出来ない．また，2 次元過程 $(S(t), V(t))$ の分布に対する明示的な式が無い．このため，Shreve [16, 第 (6.3) 節] におけるオイラー法を，確率ボラティリティモデルに拡張したものを用いて確率微分方程式をシミュレートし，数値的に解を求める．
$0 \leq t \leq T$ を所与とし，$V(t) = v, S(t) = s$ を初期条件とする．(2.1) 式より，オプション価格を

$$U(t, S(t), V(t)) = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+ \middle| \mathcal{F}(t)\right],$$

と記す．ここで，$\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+ \middle| \mathcal{F}(t)\right] < \infty$ を仮定する．微小な時間間隔 $\varDelta t$ を選び，

$$\begin{aligned} \ln S(t+\varDelta t) =& \ln S(t) + \left(r - \frac{1}{2}V(t)\right)\varDelta t + \sqrt{V(t)\varDelta t}Z_1, \\ V(t+\varDelta t) =& V(t) + \kappa\left[\theta - V(t)\right]\varDelta t + \sigma\sqrt{V(t)\varDelta t}Z_2, \end{aligned} \tag{5.1}$$

とおく．ここで，Z_1，Z_2 は互いに相関を持つ標準正規確率変数であり，相関係数 $\rho \in [-1, 1]$ および独立な標準正規確率変数 Z を用いて，**定理 2.2** より以下のように表す事ができる．

$$Z_1 = \rho Z_2 + \sqrt{1-\rho^2}Z \tag{5.2}$$

これを用いると，(5.1) 式は以下のように書き換えることが出来る．
定理 5.1　相関係数 ρ を用いると，近似式は以下の通りである．

$$\begin{aligned} \ln S(t+\varDelta t) &= \ln S(t) + \left(r - \frac{1}{2}V(t)\right)\varDelta t + \sqrt{V(t)\varDelta t}\left(\rho Z_2 + \sqrt{1-\rho^2}Z\right), \\ V(t+\varDelta t) &= V(t) + \kappa(\theta - V(t))\varDelta t + \sigma\sqrt{V(t)\varDelta t}Z_2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

5.2 Full Truncation Scheme

ここで一つ問題が発生する．**定理 5.1** によって表された確率過程 $V(t)$ は，正の確率で負の値をとり，$\sqrt{V(t)}$ は計算不可能となる．この問題を回避するために，Lord and Koekkoek and Dijk [12] は $V(t)$ を修正して用いる手法をいくつか提示し，評価を行っている．これらの手法の中で，最も離散化による偏りが小さいものを取り上げて，以下のように置き換える事にする;
定義 5.2　確率過程 $V(t)^+$ を以下のように定める;

$$V(t)^+ = \max(V(t), 0). \tag{5.4}$$

この手法の特徴は，確率過程 $V(t)$ が 0 となる場合に $V(t) = 0$ を取り，マルチンゲール項が 0 の値を取るので，$V(t)$ は確定的に $\kappa\theta$ で回帰レベル θ に向かって上昇するという点にある．Load and koekkoek and

Dijk [12] はこの手法を"Full Truncation Scheme"と定めた．これを用いると，**定理 5.1** は以下のように書き換える事が出来る．

定理 5.3　Full Truncation を用いた Euler Scheme による近似式は，以下のようにおける．

$$\begin{aligned}\ln S(t+\Delta t) &= \ln S(t) + \left(r - \frac{1}{2}V^+(t)\right)\Delta t + \sqrt{V^+(t)\Delta t}\left(\rho Z_2 + \sqrt{1-\rho^2}Z\right), \\ V(t+\Delta t) &= V(t) + \kappa(\theta - V^+(t))\Delta t + \sigma\sqrt{V^+(t)\Delta t}Z_2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

これを時刻 T まで差分を進め，最終的に $S(T)$ の値を決定し， $\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+\middle|\mathcal{F}(t)\right]$ の値を求める．この操作を十分な回数で繰り返し，全ての $\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+\middle|\mathcal{F}(t)\right]$ の平均値を計算する事によって，Euler Scheme による $U(t,S(t),V(t))$ に対する近似値を得る．

6 Khal-Jackel Scheme

Khal-Jackel Scheme を紹介する．これは，確立微分方程式 dV に対し伊藤-Taylor 展開を用いて近似を行い，dS には台形公式を用いて近似式を導く手法である．第 6.1 節では Implicit Milstein Method により dV の近似を，第 6.2 節では IJK Method により dS の近似をそれぞれ行う．Andersen [2] は，Implicit Milstein Method と IJK Method を組み合わせて Heston モデルの近似手法であるとし，これを Khal-Jackel Scheme とした．これを第 6.3 節で扱う．

6.1 Implicit Milstein Scheme

Implicit Milstein Scheme は，Khal [10] により提案された手法であり，これを Heston モデルに適用する場合はボラティィリティの確率微分方程式 (2.2) 式に対して行う．Milstein Scheme [13] を適用する為に，以下のような確率微分方程式をおく．

$$dX = a(X)dt + b(X)dW \tag{6.1}$$

(6.1) 式に伊藤-Taylor 展開*3 を行うと，以下のように導ける．

$$\begin{aligned}X_t =& X_0 + a(X_0)\int_0^t ds + b(X_0)\int_0^t dW_s + b(X_0)b'(X_0)\int_0^t\int_0^s dW_u dW_s \\ &+ a'(X_0)b(X_0)\int_0^t\int_0^s dW_u ds + \left(a(X_0)b'(X_0) + \frac{1}{2}b''(X_0)b^2(X_0)\right)\int_0^t\int_0^s du dW_s \\ &+ \left(b(X_0)b'^2(X_0) + b''(X_0)b^2(X_0)\right)\int_0^t\int_0^s\int_0^u dW_r dW_u dW_s \\ &+ \mathcal{O}(t^2)\end{aligned} \tag{6.2}$$

$\mathcal{O}(t^2)$ を剰余項とみなし，さらに伊藤の公式より，2 重の伊藤積分 $I_{(1,1)}$ を以下のよう導く．

$$I_{(1,1)} := \int_0^t\int_0^s dW_u dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t), \tag{6.3}$$

$W_0 = 0$ と仮定すると，1 次元の Milstein Scheme による差分近似式は以下のように得られる．

$$\begin{aligned}X_{t+1} =& X_t + a(X_t)\Delta t + b(X_t)\sqrt{\Delta t}Z + \frac{1}{2}b(X_t)b'(X_t)(Z^2-1)\Delta t \\ &+ a'(X_t)b(X_t)\sqrt{\Delta t}Z\Delta t + \left(a(X_t)b'(X_t) + \frac{1}{2}b''(X_t)b^2(X_t)\right)\Delta t\sqrt{\Delta t}Z \\ &+ \left(b(X_t)b'^2(X_t)\right)(\sqrt{\Delta t}Z)^3\end{aligned}$$

ここで，Z は独立な標準正規確率変数である．$\Delta t\sqrt{\Delta t}Z = 0$ とみなし，以下の定理が導ける．

定理 6.1 (6.1) 式に対する Milstein Scheme による差分式は，以下のように得られる;

$$X_{t+1} = X_t + a(X_t)\Delta t + b(X_t)\sqrt{\Delta t}Z + \frac{1}{2}b(X_t)b'(X_t)(Z^2-1)\Delta t. \tag{6.4}$$

*3 第 A.1 節, または Kloeden and Platen [11, Chapter 5,Equation (5.4)] を参照

(6.4) 式は，確率過程の収束において改善の余地がある．Khal [10] より，ドリフト項に対して前進差分を取ると，以下の定理を得る．

定理 6.2　(6.1) 式に対する Implicit Milstein Scheme による差分式は，以下のように得られる;

$$X_{n+1} = X_n + a(X_{n+1})\varDelta t + b(X_n)\sqrt{\varDelta t}Z + \frac{1}{2}b(X_n)b'(X_n)(Z^2-1)\varDelta t \tag{6.5}$$

Milstein Scheme との違いはドリフト項 $a(X_{n+1})$ のみである．Khal [10] は一般化されたこの手法を, Implicit Milstein Scheme [*4]と定めた．

Implicit Milstein Scheme を Heston モデルのボラティリティに適用する．第 (6.1) 式に以下を適用する．

$$a(x) = \kappa(\theta - x),\ b(x) = \sigma x^{\frac{1}{2}},$$

ここで $V(t) = X$ とすると，以下の確率微分方程式を得る;

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t). \tag{6.6}$$

(6.6) 式は Heston モデルにおけるボラティリティの確率微分方程式である．これに対して Implicit Milstein Scheme を適用すると，**定理 6.2** より以下の差分式が導ける．

$$V(t+\varDelta t) = V(t) + \kappa(\theta - V(t+\varDelta t))\varDelta t + \sigma\sqrt{V(t)\varDelta t}Z_2 + \frac{1}{4}\sigma^2(Z_2^2-1)\varDelta t \tag{6.7}$$

ただし，Z_2 は Z_1 と互いに相関のある標準正規確率変数である．これをまとめると，以下の差分式が導ける．

定理 6.3　Implicit Milstein Scheme による Heston モデルの差分近似式は，以下のようになる．

$$V(t+\varDelta t) = \frac{V(t) + \kappa\theta\varDelta t + \sigma\sqrt{V(t)\varDelta t}Z_2 + \frac{1}{4}(Z_2^2-1)\varDelta t}{1+\kappa\varDelta t} \tag{6.8}$$

6.2　IJK Method

Khal and Jackel [5] により示された近似手法である．Heston モデルにおいては，株価過程 $S(t)$ に適用し，差分式を導く．(2.1) 式が表す株価過程,

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \int_0^t r ds - \frac{1}{2}\int_0^t V(s)ds + \int_0^t \sqrt{V(s)}dW_1(s), \tag{6.9}$$

に関して, 最も単純に差分近似を行うのが Euler Scheme である．(5.1) 式より, 以下のような近似式であった;

$$\ln S(t+\varDelta t) = \ln S(t) + \left(r - \frac{1}{2}V(t)\right)\varDelta t + \sqrt{V(t)\varDelta t}Z_1.$$

IJK Method は，これとは違う手法を取る．この方法は，ドリフト項,

$$\int_0^t V(s)ds, \tag{6.10}$$

の近似をまず行い，次にマルチンゲール項,

$$\int_0^t \sqrt{V(s)}dW_1(s), \tag{6.11}$$

の近似を行う．以下にそれぞれの算出方法を示す．

[*4] または Balanced Implicit Method (BIM)，あるいは Implicit Milstein Method とも呼ぶ．

6.2.1 Interpolation of the drift term

(6.10) 式に対し台形公式を用いると，以下の定理を得る.

定理 6.4 (6.10) 式に Drift Interpolation を用いると，次のように近似できる.

$$\int_0^t V(s)ds \approx \frac{1}{2}(V(t)+V(0))\Delta t \tag{6.12}$$

(6.9) 式に**定理 6.4** を適用すると，以下の近似式を得る.

$$\ln S(t+\Delta t) = \ln S(t) + r\Delta t - \frac{1}{4}(V(t)+V(t+\Delta t))\Delta t + \sqrt{V(t)\Delta t}\Delta Z_2 \tag{6.13}$$

6.2.2 Mixed interpolation of the diffusion term

株価過程 $S(t)$ のマルチンゲール項である (6.11) 式に**定理 6.4** を適用すると，以下の近似を得る.

$$\int_0^t \sqrt{V(s)}dW_1(s) \approx \frac{1}{2}(V(t)+V(t+\Delta t))\sqrt{\Delta t}Z_1 \tag{6.14}$$

(6.14) 式を (6.9) 式に用いると，以下の差分式を得る.

$$\ln S(t+\Delta t) = \ln S(t) + r\Delta t - \frac{1}{2}V(t)\Delta t + \frac{1}{2}\left(\sqrt{V(t)}+\sqrt{V(t+\Delta t)}\right)\sqrt{\Delta t}Z_1 \tag{6.15}$$

Khal and Jakcel [5] はこの近似手法を Diffusion Interpolation 定めた．これに **定理 6.4** の Drift Interpolation を適用すると，以下のようになる.

$$\ln S(t+\Delta t) = \ln S(t) + r\Delta t - \frac{1}{4}\left(V(t)+V(t+\Delta t)\right)\Delta t + \frac{1}{2}\left(\sqrt{V(t)}+\sqrt{V(t+\Delta t)}\right)\sqrt{\Delta t}Z_1. \tag{6.16}$$

Khal and Jakcel [5] はこの近似手法を Drift + Diffusion Interpolation と定めた．これにブラウン運動の相関関係を考慮すると，**定理 2.2** より以下が得られる.

$$\int_0^t \sqrt{V(s)}dW_1(s) = \rho\int_0^t \sqrt{V(s)}dW_2(s) + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{V(s)}dW(s) \tag{6.17}$$

(6.14), (6.17) 式より，以下の定理を得る.

定理 6.5 (6.11) 式に Diffusion Interpolation+Decorrelation Scheme を用いると，次のように近似できる.

$$\begin{aligned}\int_0^t \sqrt{V(s)}dW_1(s) &= \rho\int_0^t \sqrt{V(s)}dW_2(s) + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{V(s)}dW(s)\\ &\approx \frac{1}{2}\sqrt{1-\rho}\left(\sqrt{V(t)}+\sqrt{V(0)}\right)\sqrt{\Delta t}Z + \rho\sqrt{V(t)\Delta t}Z_2.\end{aligned} \tag{6.18}$$

(6.9) 式に**定理 6.4** および**定理 6.5** を用いると，株価の差分式は以下のようになる.

$$\begin{aligned}\ln S(t+\Delta t) =& \ln S(t) + r\Delta t - \frac{1}{4}\left(V(t)+V(t+\Delta t)\right)\Delta t\\ &+\frac{1}{2}\left(\sqrt{V(t)}+\sqrt{V(t+\Delta t)}\right)\sqrt{\Delta t}Z + \frac{1}{2}\left(\sqrt{V(t)}-\sqrt{V(t+\Delta t)}\right)\rho\sqrt{\Delta t}W_2.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Khal and Jackel は，これを Drift+Diffusion Interpolation+Decorrelation Scheme と定めた．しかし，リーマン積分に台形公式を用いた**定理 6.4** とは違い，伊藤積分に対しては近似値は無視できない誤差が発生する.

この誤差を次のように求める．

$$
\begin{aligned}
f(t) :=&\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{V(t)}dW(s) + \rho\int_0^t \sqrt{V(s)}dW_2(s) \\
&-\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^2}\left(\sqrt{V(t)}+\sqrt{V(t+\Delta t)}\right)\sqrt{\Delta t}Z + \rho\sqrt{V(t)}\sqrt{\Delta t}Z_2\right) \qquad (6.20)\\
=&\sqrt{1-\rho^2}\left(\frac{1}{2}V^{-1/2}(t)b_n\int_0^t\int_0^s dZ_2(u)dW(s) + \left[\frac{1}{2}V^{-1/2}(t)a_n - \frac{1}{8}V^{-3/2}(t)b_n^2\right]\int_0^t\int_0^s dudW(s)\right)\\
&+\rho\left(\frac{1}{2}V^{-1/2}(t)b_n\int_0^t\int_0^s dW_2(u)dW_2(s) + \left[\frac{1}{2}V^{-1/2}(t)a_n - \frac{1}{8}V^{-3/2}(t)b_n^2\right]\int_0^t\int_0^s dudW_2(s)\right)\\
&-\frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^2}\left(\frac{1}{2}V^{-1/2}(t)b_n\sqrt{\Delta t}Z_2 + \left[\frac{1}{2}V^{-1/2}(t)a_n - \frac{1}{8}V^{-3/2}(t)b_n^2\right]\Delta t\right)\sqrt{\Delta t}Z\\
=&\sqrt{1-\rho^2}\Bigg\{\underbrace{\frac{1}{2}V^{-1/2}(t)b_n\int_0^t\left((Z_2 - Z - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta t}Z\right)\sqrt{\Delta t}Z_2}_{f_1}\\
&\quad+\underbrace{\left(\frac{1}{2}V^{-1/2}a_n - \frac{1}{8}V^{-3/2}(t)b_n^2\right)\int_0^t\left((s-t)-\frac{1}{2}\Delta t\right)dW(s)}_{f_2}\Bigg\}\\
&+\rho\Bigg\{\underbrace{\frac{1}{2}V^{-1/2}(t)b_n\int_0^t\int_0^s dW_2(u)dW_2(s)}_{f_3}\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}V^{-1/2}(t)a_n - \frac{1}{8}V^{-3/2}(t)b_n^2\right]\int_0^t\int_0^s dudW_2(s)\Bigg\} \qquad (6.21)
\end{aligned}
$$

f_1，f_2 は，Wiener 過程 W, W_2 の条件付期待値を用いると，

$$
\mathbb{E}\left[f_1\middle|\mathcal{P}_N^1,\mathcal{P}_N^2\right]=0,\quad \text{and}\quad \mathbb{E}\left[f_2\middle|\mathcal{P}_N^1\right]=0 \qquad (6.22)
$$

ここで $\mathcal{P}_N^1$，$\mathcal{P}_N^2$ は，Wiener 過程 W, W_2 により生成される σ 加法族である．f_3 の誤差は以下のようになる．

$$
f_3 = \frac{1}{2}V^{-1/2}(t)b_n\int_0^t\int_0^s dW_2(u)dW_2(s) = \frac{1}{2}V^{-1/2}(t)b_n\frac{1}{2}(Z_2^2-1)\Delta t \qquad (6.23)
$$

積分近似の精度を良くするために，この誤差項を近似式に含める．これを IJK Scheme と呼ぶ．この差分式は以下のように得られる．

定理 6.6 IJK Scheme による Heston モデルの株価の差分式は，以下のように導ける．

$$
\begin{aligned}
\ln S(t+\Delta t) =& \ln S(t) + r\Delta t - \frac{1}{4}\left(V(t)+V(t+\Delta t)\right)\Delta t + \rho\sqrt{V(t)\Delta t}Z_2\\
&+\frac{1}{2}\left(\sqrt{V(t)}+\sqrt{V(t+\Delta t)}\right)(Z_1-\rho Z_2)\Delta t + \frac{1}{4}\rho\sigma(Z_2^2-1)\Delta t \qquad (6.24)
\end{aligned}
$$

6.3 Kahl-Jackel Scheme

Andersen [2] は，(6.8) 式および (6.24) 式を，それぞれ Heston モデルにおける差分近似式とし，これを Khal-Jackel Scheme とした．すなわち，Implicit Milstein Scheme に対し，$a(x)=\kappa(\theta-x)$，$b(x)=\sigma x^{1/2}$

とし，IJK Scheme に対し，$p = 1/2$ とすると，以下の差分近似式が得られる．

$$\begin{aligned}
\ln S(t+\Delta t) =& \ln S(t) + r\Delta t - \frac{1}{4}\left(V(t)+V(t+\Delta t)\right)\Delta t + \rho\sqrt{V(t)\Delta t}Z_2 \\
&+ \frac{1}{2}\left(\sqrt{V(t)}+\sqrt{V(t+\Delta t)}\right)\left(Z_1-\rho Z_2\right)\Delta t + \frac{1}{4}\rho\sigma(Z_2^2-1)\Delta t, \\
V(t+\Delta t) =& \frac{V(t)+\kappa\theta\Delta t+\sigma\sqrt{V(t)\Delta t}Z_2+\frac{1}{4}(Z_2^2-1)\Delta t}{1+\kappa\Delta t}
\end{aligned} \tag{6.25}$$

ここで注意したいのは，$V < 0$ の場合を考慮していないことである．残念ながら Khal and Jackel [5] にはこの問題の対処法が記されていない．よって $V < 0$ となる場合は第 5.2 節の full truncation scheme を用いて，$V^+(t)$, $V^+(t+\Delta t)$ を計算する．

定理 6.7 Heston モデルの Khal-Jackel Scheme による差分近似は，以下の 2 組の式によって得られる．

$$\begin{aligned}
\ln S(t+\Delta t) =& \ln S(t) + r\Delta t - \frac{1}{4}\left(V(t)+V(t+\Delta t)\right)\Delta t + \rho\sqrt{V^+(t)\Delta t}Z_2 \\
&+ \frac{1}{2}\left(\sqrt{V^+(t)}+\sqrt{V^+(t+\Delta t)}\right)\left(Z_1-\rho Z_2\right)\Delta t + \frac{1}{4}\rho\sigma(Z_2^2-1)\Delta t, \\
V(t+\Delta t) =& \frac{V(t)+\kappa\theta\Delta t+\sigma\sqrt{V^+(t)\Delta t}Z_2+\frac{1}{4}(Z_2^2-1)\Delta t}{1+\kappa\Delta t}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

これを用いて，株価 S を求めればよい．

7 Exact Scheme

Broadie and Kaya [3] は，微分方程式を用いずに，株価過程の分布をサンプリングし，リスク中立確率によりオプション価格を求める手法を提案した．Euler Scheme では，まず確率過程 $V(t)$ をシミュレートし，次に $V(t)$ を用いて株価過程 $S(t)$ をシミュレートする，という 2 段階の手順を踏んだ．一方，Broadi and Kaya による手法は，$S(t)$ の分布さえサンプリングしてしまえばオプション価格は求められる．価格評価に確率要素が 1 段階少なく構成されているので，これまでの Scheme に比べて収束が期待できる手法である．

7.1 Exact Scheme

(2.1), (2.2) 式により表される確率過程 $S(t)$，$V(t)$ は，相関係数 ρ を用いて以下のように導ける．

$$\begin{aligned}\ln S(T) &= \ln S(t) + r(T-t) - \frac{1}{2}\int_t^T V_s ds + \rho \int_t^T \sqrt{V(s)}dW_1 + \sqrt{1-\rho^2}\int_t^T \sqrt{V(s)}dW_2 \\ V(T) &= V(t) + \kappa\theta(T-t) - \kappa\int_t^T V(s)ds + \sigma\int_t^T \sqrt{V(s)}dW_1 \end{aligned} \tag{7.1}$$

7.2 サンプリング

(7.1) 式を，以下の手順で計算する．

1. $V(t)$ のもとで，$V(T)$ の分布からサンプルを生成する．
2. $V(t)$，$V(T)$ のもとで，$\int_t^T V(s)ds$ の分布からサンプルを生成する．
3. $V(t)$，$V(T)$，$\int_t^T V(s)ds$ のもとで，$\int_t^T \sqrt{V(s)}dW_1(s)$ を求める．
4. $\int_t^T V(s)ds$，$\int_t^T \sqrt{V(s)}dW_1(s)$ のもとで，$S(T)$ の分布を求める．

7.2.1 $V(T)$ のサンプリング

初期値 $V(t)$ をおく．$V(T)$ のサンプルは，非心カイ二乗分布により得られる．

$$V(T) = \frac{\sigma^2(1-e^{-\kappa(T-t)})}{4\kappa}\chi_d'^2(\lambda) \tag{7.2}$$

ここで，非心カイ二乗分布の自由度を d，非心パラメータを λ とおくと，

$$\begin{aligned} d &= \frac{4\theta\kappa}{\sigma^2}, \\ \lambda &= \frac{4\kappa e^{-\kappa(T-t)}}{\sigma^2(1-e^{-\kappa(T-t)})}V(t), \end{aligned} \tag{7.3}$$

である．

7.2.2 $\int_t^T V(s)ds$ のサンプリング

ラプラス変換およびフーリエ逆変換により積分のサンプリングを行う．Pitman and Yor [15] より，

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-a^*\int_t^T V(s)ds\right)\middle| V(t), V(T)\right]$$

を導く．$a^* = -ia$ とおいて，第 A.2 節より，

$$\begin{aligned}\Phi(a) =& \mathbb{E}\left[\exp\left(ia\int_t^T V(s)ds \middle| V(t), V(T)\right)\right] \\ =& \frac{\gamma(a)e^{-\frac{1}{2}(\gamma(a)-\kappa)(T-t)}(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa(1-e^{-\gamma(a)(T-t)})} \\ & \times \exp\left\{\frac{V(t)+V(T)}{\sigma^2}\left[\frac{\kappa(1+e^{-\kappa(T-t)})}{1-e^{-\kappa(T-t)}} - \frac{\gamma(a)(1+e^{-\gamma(a)(T-t)})}{1-e^{-\gamma(a)(T-t)}}\right]\right\} \\ & \times \frac{I_{\frac{1}{2}d-1}\left[\sqrt{V(t)V(T)}\frac{4\gamma(a)e^{-\frac{1}{2}\gamma(a)(T-t)}}{\sigma^2(1-e^{-\gamma(a)(T-t)})}\right]}{I_{\frac{1}{2}d-1}\left[\sqrt{V(t)V(T)}\frac{4\kappa e^{-\frac{1}{2}\kappa(T-t)}}{\sigma^2(1-e^{-\kappa(T-t)})}\right]}\end{aligned} \tag{7.4}$$

ここで，$\gamma(a) = \sqrt{\kappa^2 - 2\sigma^2 ia}$ であり，$I_\nu(x)$ は第 1 種変形 Bessel 関数である．

$$I_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4}x^2)^j}{j!\Gamma(\nu+j+1)}$$

このとき, x は複素数でもよい．次に, フーリエ逆変換を用いて確率変数を計算する．初期値 $V(t)$, サンプリングした値 $V(T)$ のもとで，$\int_t^T V(s)ds$ と同じ分布を持つ確率変数を $V(t,T)$ とおくと，Feller [6, pp.470-472] より,$\int_t^T V(s)ds$ の分布関数は以下のように表せる．

$$F(x) \equiv \mathbb{P}\{V(t,T) \le x\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{t}\Phi(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{t}\mathrm{Re}[\Phi(t)]dt \tag{7.5}$$

これを台形公式を用いて離散化すると，以下のようになる．

$$\mathbb{P}\{V(t,T) \le x\} = \frac{hx}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin hjx}{j}\mathrm{Re}[\Phi(hj)] - e_d(h) \tag{7.6}$$

ここで，h は任意の精度における格子の大きさを表し，$e_d(h)$ は離散化による誤差を表す．この誤差 $e_d(h)$ は, Abate and Whitt [1] により，以下のように表せる．

$$0 \le e_d(h) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[F\left[\frac{2k\pi}{h}+x\right] - F\left[\frac{2k\pi}{h}-x\right]\right] \le F^c\left[\frac{2\pi}{h}-x\right] \tag{7.7}$$

ここで，$F^c(x) = 1 - F(x)$ である．離散化誤差 ϵ を望むのであれば，ステップサイズは，以下であることが望ましい．

$$h = \frac{2\pi}{x+u_\epsilon} \ge \frac{\pi}{u_\epsilon},\ where\ F^c(u_\epsilon) = \epsilon\ and\ 0 \le x \le u_\epsilon \tag{7.8}$$

(7.5) 式 を用いて $\mathbb{P}\{V(u,t) \le x\}$ を計算する場合，和の終端を決めなければならない．ここで計算の最終項を N とおくと，近似式は以下のようになる．

$$\mathbb{P}\{V(t,T) \le x\} = \frac{hx}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{N} \frac{\sin hjx}{j}\mathrm{Re}[\Phi(hj)] - e_d(h) - e_T(N) \tag{7.9}$$

ここで $e_T(N)$ は，無限可算を N 項で切り捨てたことより生じる誤差である．

7.2.3 $S(T)$ のサンプリング

$V(T)$，$\int_t^T V(s)ds$ を得た後，以下の計算により $\int_t^T \sqrt{V(s)}dW_1$ を得る．

$$\int_t^T \sqrt{V(s)}dW_1 = \frac{1}{\sigma}\left(V(T) - V(t) - \kappa\theta(T-t) + \kappa\int_t^T V(s)ds\right) \tag{7.10}$$

ここで，プロセス $V(T)$ はブラウン運動 W_2 とは独立であるので，$\int_t^T \sqrt{V(s)}dW_2$ は $V(T)$ によって生成され，平均 0 ，分散 $\int_t^T V(s)ds$ の正規分布に従う．

$$\ln S(T) = \ln S(t) + r(T-t) - \frac{1}{2}\int_t^T V(s)ds + \rho\int_t^T \sqrt{V(s)}dW_1 + \sqrt{1-\rho^2}\int_t^T \sqrt{V(s)}dW(s) \tag{7.11}$$

これにより，$\log S(T)$ の条件付分布は，以下の平均及び分散を持つ正規分布となる．

$$\mu(t,T) = r(T-t) - \frac{1}{2}\int_t^T V(s)ds + \rho\int_t^T \sqrt{V(s)}dW_1 \tag{7.12}$$

$$\sigma^2(t,T) = (1-\rho^2)\int_t^T V(s)ds \tag{7.13}$$

標準正規確率変数を用いて，以下の式より $S(T)$ のサンプリングを行う．

$$\ln S(T) = \ln S(t) + \mu(t,T) + \sigma(t,T)N(0,1) \tag{7.14}$$

(7.12) $\sim$ (7.14) 式を用いて，リスク中立確率によりオプション価格を求める．

7.3 リスク中立のもとでのオプション価格

定理 6.1

リスク中立確率のもとでのヨーロピアン・コール・オプション価格は，以下のようになる．

$$\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+\right] = S(t)e^{\zeta(t,T)}\Phi(d_-) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_+) \tag{7.15}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\zeta(t,T) &= -r(T-t) + \mu(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,T), \\
d_- &= \frac{\log\frac{S(t)}{K} + \mu(t,T) - \sigma^2(t,T)}{\sigma(t,T)}, \\
d_+ &= \frac{\log\frac{S(t)}{K} + \mu(t,T)}{\sigma(t,T)},
\end{aligned}$$

である．

証明 $X = \ln S$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-rt}U(t,X(t),V(t))\middle|\mathcal{F}_s\right] &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-rt}\widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T-t)}(X(T)-K)^+\middle|\mathcal{F}_t\right]\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-rT}(X(T)-K)^+\middle|\mathcal{F}_t\right]\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-rs}e^{rs}\cdot e^{-rT}(X(T)-K)^+\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= e^{-rs}\widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T-s)}(X(T)-K)^+\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= e^{-rs}U\left(s,X(s),V(s)\right).
\end{aligned}$$

より，$e^{-rt}U(t,X(t),V(t))$ はマルチンゲールである．これを微分すると，

$$d(e^{-rt}U(t,X(t),V(t)) = -re^{-rt}Udt + e^{-rt}\Bigg[\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial X}dX + \frac{\partial U}{\partial V}dV \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}dXdX + \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial V}dXdV + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}dVdV\Bigg]$$

となり，ここで，

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial \log S}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log S}{\partial S^2}dSdS = \frac{1}{S}dS + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S^2}\right)dSdS \\ &= \left(rdt + \sqrt{V}d\widetilde{W}_1\right) - \frac{1}{2}Vdt = \left(r - \frac{1}{2}V\right)dt + \sqrt{V}d\widetilde{W}_1, \\ dV &= \kappa(\theta - V)dt + \sigma\sqrt{V}d\widetilde{W}_2, \\ dXdX &= \left(\sqrt{V}d\widetilde{W}_1\right)^2 = Vdt, \\ dXdV &= \left(\sqrt{V}d\widetilde{W}_1\right)\left(\sigma\sqrt{V}d\widetilde{W}_2\right) = \rho\sigma Vdt, \\ dVdV &= \sigma^2 Vdt, \end{aligned}$$

を用いると，

$$\begin{aligned} =& -re^{-rt}Udt + e^{-rt}\Bigg[\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial X}\left\{\left(r - \frac{1}{2}V\right)dt + \sqrt{V}d\widetilde{W}_1\right\} + \frac{\partial U}{\partial V}\left\{\kappa(\theta - V)dt + \sigma\sqrt{V}d\widetilde{W}_2\right\} \\ &\qquad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}Vdt + \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial V}\rho\sigma Vdt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\sigma^2 Vdt\Bigg] \\ =& e^{-rt}\left[-rU + \frac{\partial U}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial U}{\partial X} + \kappa(\theta - V)\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \rho\sigma V\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial V} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\sigma^2 V\right]dt \\ &+ e^{-rt}\left[\sqrt{V}\frac{\partial U}{\partial X}d\widetilde{W}_1 + \sigma\sqrt{V}\frac{\partial U}{\partial V}d\widetilde{W}_2\right] \end{aligned}$$

となる．ここで，$e^{-rt}U(t,X(t),V(t))$ はマルチンゲールなので，dt 項がゼロとなる．よって，以下の偏微分方程式が導ける．

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}V\right)\frac{\partial U}{\partial X} + \kappa(\theta - V)\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{1}{2}V\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \rho\sigma V\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 V\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} = 0. \quad \square$$

ただし、$\mu(t,T), \sigma(t,T)$ がそれぞれ確率変数なので，(7.14) 式は一意に定まらない．よってこの計算を何度か繰り返し，ペイオフの平均値を取る．

8 数値実験

ここでは，これまでに挙げた価格付けモデルの比較を行う．第 8.1 節で計算時間，第 8.2 節で収束の良さ，第 8.3 節で株価およびボラティリティの分布，第 8.4 節で各パラメータにおけるオプションのペイオフの感応度を見る．計算に使用した近似式を以下に示す．なお，特に断りが無い限り，数値計算に用いたパラメータの値は Table 8.1 の通りである．

Euler Scheme

$$
\begin{aligned}
S(t+\Delta t) =& S(t)\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}V^+(t)\right)\Delta t+\sqrt{V^+(t)\Delta t}Z_S\right],\\
V(t+\Delta t) =& V(t)+\kappa\left[\theta-V^+(t)\right]\Delta t+\sigma\sqrt{V^+(t)\Delta t}Z_V.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Khal-Jackel Scheme

$$
\begin{aligned}
\ln S(t+\Delta t) =& \ln S(t)+r\Delta t-\frac{\Delta t}{4}\left(V(t+\Delta t)+V(t)\right)+\rho\sqrt{V(t)\Delta t}\varepsilon_1\\
&+\frac{1}{2}\left(\sqrt{V(t+\Delta t)}+\sqrt{V(t)}\right)\left(Z_X\sqrt{\Delta t}-\rho Z_V\sqrt{\Delta t}\right)+\frac{1}{4}\rho\sigma\Delta t(Z_V^2-1),\\
V(t+\Delta t) =& \frac{V(t)+\kappa\theta\Delta t+\sigma\sqrt{V(t)}Z_V\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{4}\sigma^2\Delta t(Z_V^2-1)}{1+\kappa\Delta t}.
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

Exact Scheme

$$
\begin{aligned}
\ln S(T) = \ln S(t)+r(T-t)-\frac{1}{2}\int_t^T V(s)ds\\
+\rho\int_t^T\sqrt{V(s)}dW_1+\sqrt{1-\rho^2}\int_t^T\sqrt{V(s)}dW(s).
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Table 8.1　パラメータの値

パラメータ	記号	値
株価の初期値	$S(0)$	100
行使価格	K	100
ボラティリティ初期値	$V(0)$	0.2
$V(t)$ のボラティリティ	σ	0.2
回帰強度	κ	1.0
回帰レベル	θ	0.2
相関係数	ρ	0.5
満期	T	1 年
金利	r	0
時間分割	Δt	0.1 年

8.1 計算時間の比較

各モデルの計算時間の比較を Table 8.2 に示す．モンテカルロ法は発生させた乱数の個数によって，有限差分法は株価の分割数によって比較を行った．モンテカルロ法と有限差分法はともに離散化による数値解析法であるが，近似手法が大きく異なるために単純な比較は出来ない．よってここでは，計算時間が近くなるようにそれぞれを比較した．なお，有限差分法は比較のために，BS モデルにおける陰的有限差分法の計算時間との比較を示しておく．

モンテカルロ法は，オイラー法が最も計算時間が短い結果となった．一見して複雑そうな Exact Scheme が Khal-Jackel より劣っているのは，第 5.2 節における Full Truncation を使用している為である．この為に Euler Scheme も特別に速い訳ではなくなっている．また Exact Scheme は $\int V(s)ds$ のサンプリングさえしてしまえば，第 7.3 節のリスク中立確率によりオプション価格の算出が可能である．よって Exact Scheme の計算時間とは，$\int V(s)ds$ のサンプリング時間とほぼ同義である．

有限差分法は，BS モデルと比較しても，またモンテカルロ法と比較しても膨大な計算量を要することは想像に難くなく，またその通りの結果となった．ここでは時間の分割数を 10，ボラティィリティの分割数を 5 としたが，連立方程式を同時に解くという性質上，株価およびボラティィリティの分割数を増やすほど，同時に解く方程式の数は 1 次関数的に増大する．(なお，計算に使用した R 2.4.1 の環境では，株価の分割数を 2,000 以上にすると，連立方程式を行う関数 solve() が停止する事を述べておく．同時に 10,000 本以上の連立方程式を解く事は出来ないようである．)

Table 8.2 近似モデルによる計算時間の比較

乱数の個数	Euler	Khal-Jackel	Exact	株価の分割数	BS 陰的	Heston 陰的
10^3	0.03	0.04	0.05	10^1	0.00	0.06
10^4	0.25	0.55	0.40	10^2	0.00	0.72
10^5	3.00	5.88	4.24	10^3	0.61	46.52
10^6	260.66	316.34	282.68	$2 * 10^3$	1.65	354.26

8.2 収束の早さ

モンテカルロ法によるヨーロピアン・コール・オプションのペイオフの分散をパスの本数毎に示したのが Figure 8.1 である．収束の速さは Exact Scheme が際立っている．これは確率変数がペイオフに与える影響が最も小さいのが Exact Scheme だからである．Exact Scheme のオプション価格の算出方法はリスク中立確率に基づくものであり，これは BS モデルにおける解析解である．Heston モデルにおいては $\int V(s)ds$ のサンプリングを行うため，リスク中立確率による解法が解析解にならないが，Exact Scheme は結局 $\int V(s)ds$ のサンプリングさえ終えればオプションのペイオフを計算できる．一方，Euler Scheme・Khal-Jackel Scheme に関しては，$V(t)$ のパスをサンプリングした後に $S(t)$ のパスをサンプリングする必要がある．オプションのペイオフを計算するために，確率変数を用いて 2 Step のサンプリングを行う必要がある訳で，収束の速さは Exact Scheme に比べて期待出来ない事は明らかである．

Euler Scheme に対し Khal-Jackel Scheme は収束しやすい傾向にあるが，どちらの Scheme の収束も最初のペイオフの偏りに依存しており，ここで極端な値が出れば両者の分散はしばしば逆転する．

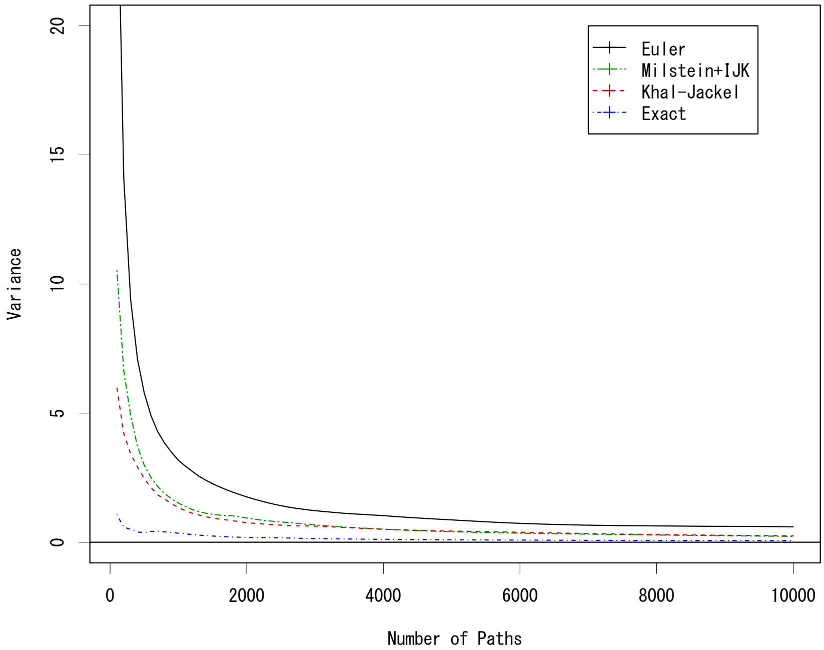

Figure 8.1　パスの本数毎のペイオフの分散

8.3　ボラティリティおよび株価の分布

モンテカルロ法を用いる各モデルのボラティリティおよび株価の，満期におけるそれぞれの分布を示す．Figure 8.2 はボラティリティの分布，Figure 8.3 は株価の分布である．なお，パスの発生本数は共に 100,000 本である．

ボラティリティのパスをサンプリングする際 Euler Scheme・Khal-Jackel Scheme は，共にボラティリティが負の値を取る事を防ぐために Full Truncation を用いている．その為 $V(t)$ はパスの途中で負の値を取った場合に，確率変数の係数を 0 とし，回帰強度 κ で回帰レベル θ に向かう．このため，満期において $V(T) > 0$ が必ず成り立つようになっている．ボラティリティの分布はいずれも回帰レベルの周辺に非芯 χ^2 分布している事が分かる．いずれも自由度を等しく取ったが，ボラティリティに関しては Khal-Jackel Scheme が回帰レベルに強く集まった．これは伊藤-Taylor 展開における伊藤積分 $I_{(1,1)}$ の項を差分式に残し，ドリフト項に Implicit method を適用した影響だと考えられる．これが Euler Scheme よりも強い回帰性を示すのは直感的に理解できるが，Exact Scheme よりも強いというのは興味深い事である．

株価の分布に関して BS モデルも描いた．Exact Scheme が最も分散が小さく，これは第 8.2 節で示した結果と一致する．Euler Scheme・Khal-Jackel Scheme は共に，株価 > 100 の方向に Long-Tail 型な分布となっている．この為，Heston モデルにおけるオプション価格は，BS モデルよりも高くなる事が分布から読み取れる．行使価格未満の株価はオプションのペイオフに影響を与えないので，この結果より Euler Scheme および Khal-Jackel Scheme により算出されたオプション価格は，Exact Scheme により求めたものよりも高い値を示す事が考えられる．

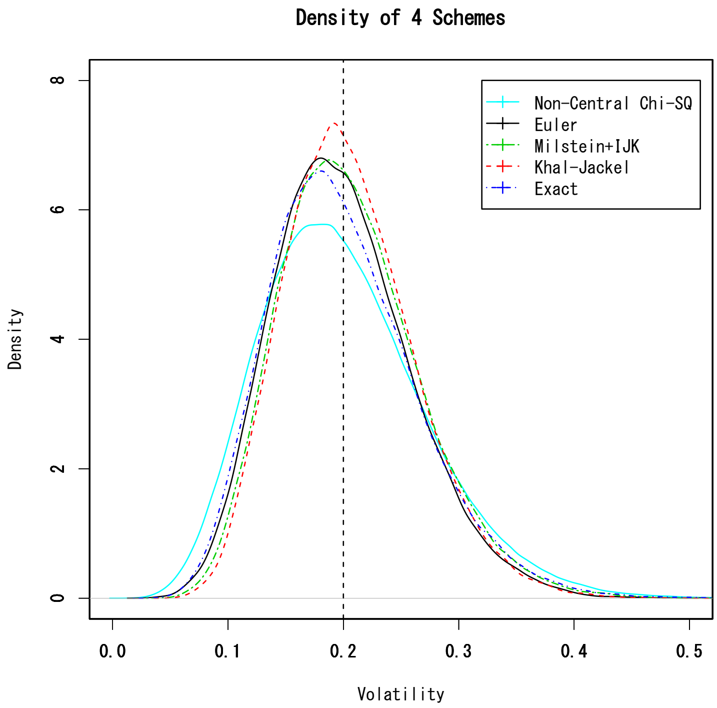

Figure 8.2　ボラティリティの分布

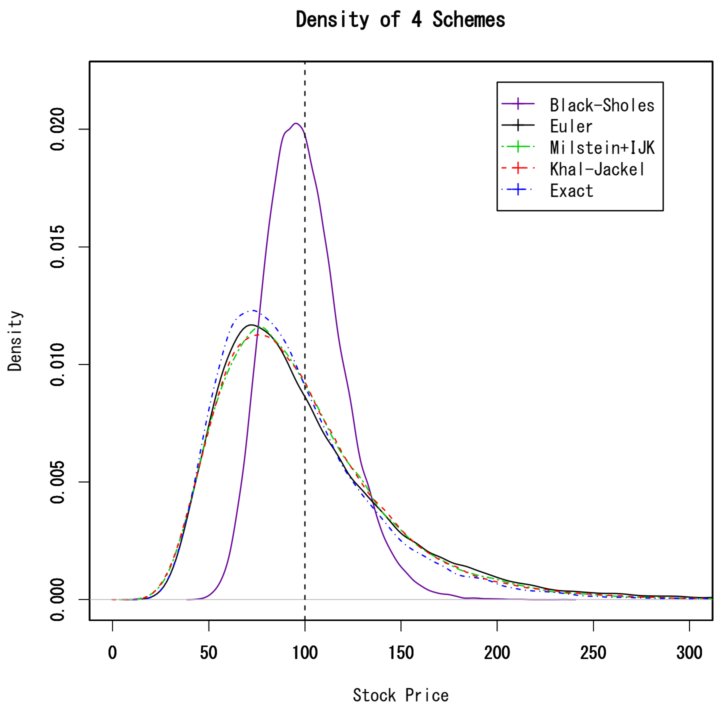

Figure 8.3　株価の分布

8.4　パラメータに対するオプション価格の影響

ここでは，Heston モデルにおけるパラメータがオプション価格にどのような影響を与えるのかを見ていく．実験するパラメータは，ボラティリティ, 回帰強度, 回帰レベル, 相関係数，満期，金利，時間の分割である．行使価格はペイオフに直接影響を与えることが明白な為，全ての場合においてその影響を調べた．

8.4.1　ボラティリティのオプション価格への影響

Figure 8.4 から，ボラティリティとオプション価格の変化に関して次のような結果が得られた．

- ボラティリティ σ の値は，オプション価格への影響は小さい

σ は $V(t)$ のボラティリティであるので，これが直接オプション価格に影響を与える事は少ない．ボラティリティ σ が上昇するほど，$V(t) > 0$ が増大して株価の変化もまた大きくなる事が考えられるが，$V(t)$ は回帰レベル θ に回帰するので，ここから乖離するには ボラティリティ σ が回帰強度 κ を上回る必要がある．すなわち，$\sigma > \kappa$ の場合ならば，σ により株価の変動が大きくなり，オプション価格に影響を及ぼすと考えられる．

8.4.2　回帰強度のオプション価格への影響

Figure 8.5 から，回帰強度とオプション価格の変化に関して次のような結果が得られた．

- 回帰強度 κ が小さいと，オプション価格は上昇する

回帰強度は，ボラティリティ σ によって乖離した $V(t)$ を回帰レベル θ に回帰させるパラメータである為，この強度が強いほど $V(t)$ は回帰レベル θ に収束し，株価のボラティリティは θ に限りなく近づく．κ が弱いとボラティリティは θ から乖離する．$V(t)$ が θ の上側に乖離した場合は株価の変動は大きくなり，ペイオフが増大する．一方，$V(t)$ が θ の下側に乖離した場合は株価の変動が小さくなり，ペイオフは先程の場合に比べて減少する．ペイオフは必ず正の値を取るので，十分な回数の数値計算を行った場合，κ が小さいほどオプション価格は上がる事になる．

8.4.3　回帰レベルのオプション価格への影響

Figure 8.6 から，回帰レベルとオプション価格の変化に関して次のような結果が得られた．

- 回帰レベル θ が大きいと，オプション価格は上昇する

$\kappa > \sigma$ の場合 $V(t)$ は θ に収束し，よって株価のボラティリティは θ に収束する．この為 θ が大きいとペイオフが上昇し，オプション価格は高くなると考えられる．$\kappa < \sigma$ の場合は $V(t)$ が θ から乖離するが，$V(t) > \theta$ に乖離するとオプション価格は上昇し，$V(t) < \theta$ ではオプション価格が下がることは第 8.4.2 節で述べた．すなわち，回帰レベル θ は BS モデルにおけるボラティリティそのものであり，Heston モデルではこれに回帰強度とボラティリティおよびブラウン運動が加わり，平均回帰を持つ確率過程であるとしたのである．よって回帰レベル θ が大きいとオプション価格が上昇するのは明らかである．

8.4.4　相関係数のオプション価格への影響

Figure 8.7 から，相関係数とオプション価格の変化に関して次のような結果が得られた．

- 相関係数 ρ が大きく，$\kappa < \sigma$ の場合，オプション価格は増加する

相関係数は Heston モデルにおいて最も複雑な振る舞いをするパラメータである．Figure 8.7 では $\theta = V(0) = 0.2$ としたので，相関係数の増減による影響は少ないと思われるが，それでも ρ の増加に伴ってオプション価格が減少している事が読み取れる．相関係数の影響が大きくなるのは $\theta > V(0)$ もしくは $\theta < V(0)$ の場合であると考えられる．前者の場合に ρ が大きければ，株価のボラティリティは θ の値が強くなり，オプション価格は高くなるが，ρ が小さいと株価のボラティリティは $V(0)$ の値が強くなり，オプション価格は低くなる．また後者の場合はこの逆である．ここまでは直感的に理解できる．

これが $\theta = V(0)$ の場合はどうなるだろうか．第 8.5 節でも述べたが，$\kappa < \sigma$ で ρ が大きければオプション価格が増加する．$\kappa < \sigma$ より $V(t)$ は 回帰レベル θ から乖離する．$V(t)$ が θ より上側に乖離し，かつ ρ が大きければ株価の変動が増大し，オプションのペイオフが高くなる．$\kappa > \sigma$ の場合は複雑である．相関係数 ρ はそもそも $V(t)$ のブラウン運動と 株価 $S(t)$ のブラウン運動の相関である．$\kappa < \sigma$ の場合は回帰強度の影響が少ないので，$V(t)$ のプロセスを見れば $V(t)$ のブラウン運動のプロセスが大まかに読み取れるが，$\kappa > \sigma$ の場合はブラウン運動の動きが回帰強度 κ によって補正されてしまう．もし $V(t)$ のブラウン運動の値が平均的に $S(t)$ のブラウン運動の値を上回っていればオプション価格は高くなるが，反対に下回っている場合はオプション価格は先程の場合と比べて低くなる．これを十分な回数で数値計算した場合，すなわち $\mathbb{E}\left[\sqrt{1-\rho}W_S - \rho W_V\right] = 0$ となる事から，結局通常通りのブラウン運動と等しくなる．残るのは平均回帰を持つ $V(t)$ だが，回帰強度 κ が 強い為 $V(t)$ の値は 回帰レベル θ に帰着する．　しかし ρ が小さい場合は，V(t) は影響しない

8.4.5 満期のオプション価格への影響

Figure 8.8 から，満期とオプション価格の変化に関して次のような結果が得られた．

- 満期 T が増加すると， $K = S(0)$ のオプション価格に収束する

満期が 1 年や 2 年といった短期間の場合は，行使価格がオプション価格に直接影響を与える．すなわち株価の初期値 $S(0)$ に対して，行使価格が高ければオプション価格は小さくなり，逆ならばオプション価格は大きくなる．ところが Figure 8.8 を見ると，満期が増加するにつれて変化が起こっている．行使価格が高い場合はオプション価格が大きくなり，低い場合はオプション価格は小さくなっている．また両者はともに $S(0) = K = 100$ のオプション価格に近づいている事が読み取れる．ここから，満期が増加すると，$K = S(0)$ におけるオプション価格に収束していく事が分かる．

8.4.6 金利のオプション価格への影響

Figure 8.9 から，金利とオプション価格の変化に関して次のような結果が得られた．

- 金利 r が大きくなると，オプション価格は増加する

これは直感的な感覚とズレが無い．金利が上昇すれば株価が上がり，オプション価格が上昇する．ただ，陰的有限差分法の金利が下がっているのは謎である．

8.4.7 時間分割のオプション価格への影響

Figure 8.10 から，時間分割とオプション価格の変化に関して次のような結果が得られた．

- 時間分割 Δt の増減は，オプション価格に影響しない

時間の分割を細かくしても，オプション価格にはあまり影響が無い．印象としては時間分割を細かくすると計算の精度が向上しそうであるが，これを望む場合の手段としては，モンテカルロ法においては発生させるパス

の本数を増加させるのが一般的であり，また有限差分法に関しては株価の分割数を増加させる事によって，オプション価格算出の精度を向上させることができる．特にモンテカルロ法に関しては，時間分割を細かくすることで発生する乱数の数が増加し，計算時間が増加するが，オプションのペイオフは満期における株価と行使価格によって決まるので，パスの途中で発生した変動の多さは計算に影響を及ぼさない．Δt をあまり細かくしても，丸め誤差の累積が大きくなり，むしろ精度は下がってしまう．Exact Scheme では 2^6 からオプション価格が減少しており，これは微小な数の切り捨てによるものと考えられる．よって突き詰めてしまえば，モンテカルロ法における時間分割は $\Delta t = 1$ 年，あるいは $\Delta t = T$ 年で良い．時間分割を少なくするとパス 1 本あたりの精度は下がるが，その分多くのパスを発生させる事で，同じパスの本数ならば計算時間が節約でき，同じ計算時間ならばより計算精度を高めることができる．また満期が数ヶ月、あるいは数日の短期間のオプション価格を算出する場合は，それに合わせて Δt を調整するのが良い．

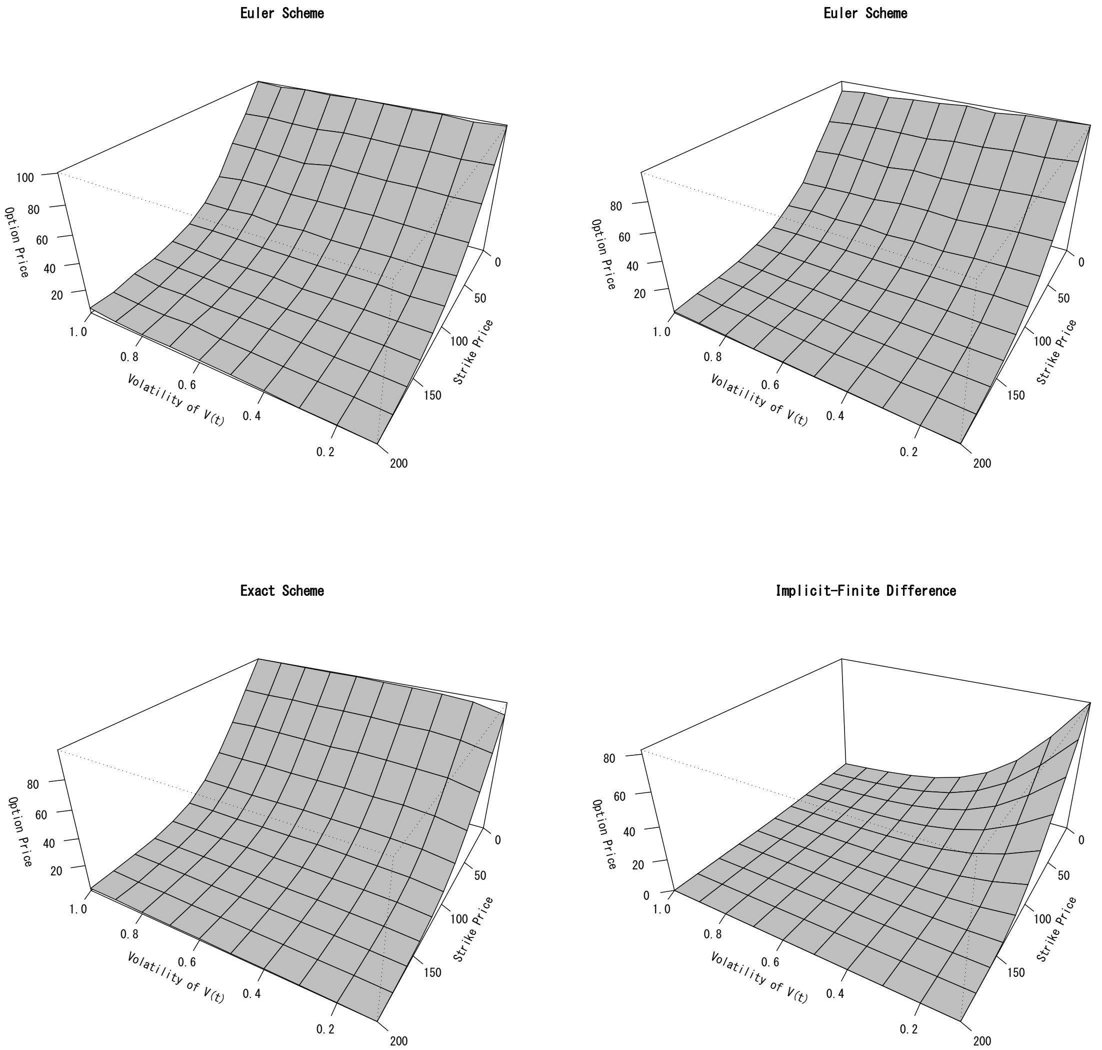

Figure 8.4　ボラティリティのオプション価格への影響

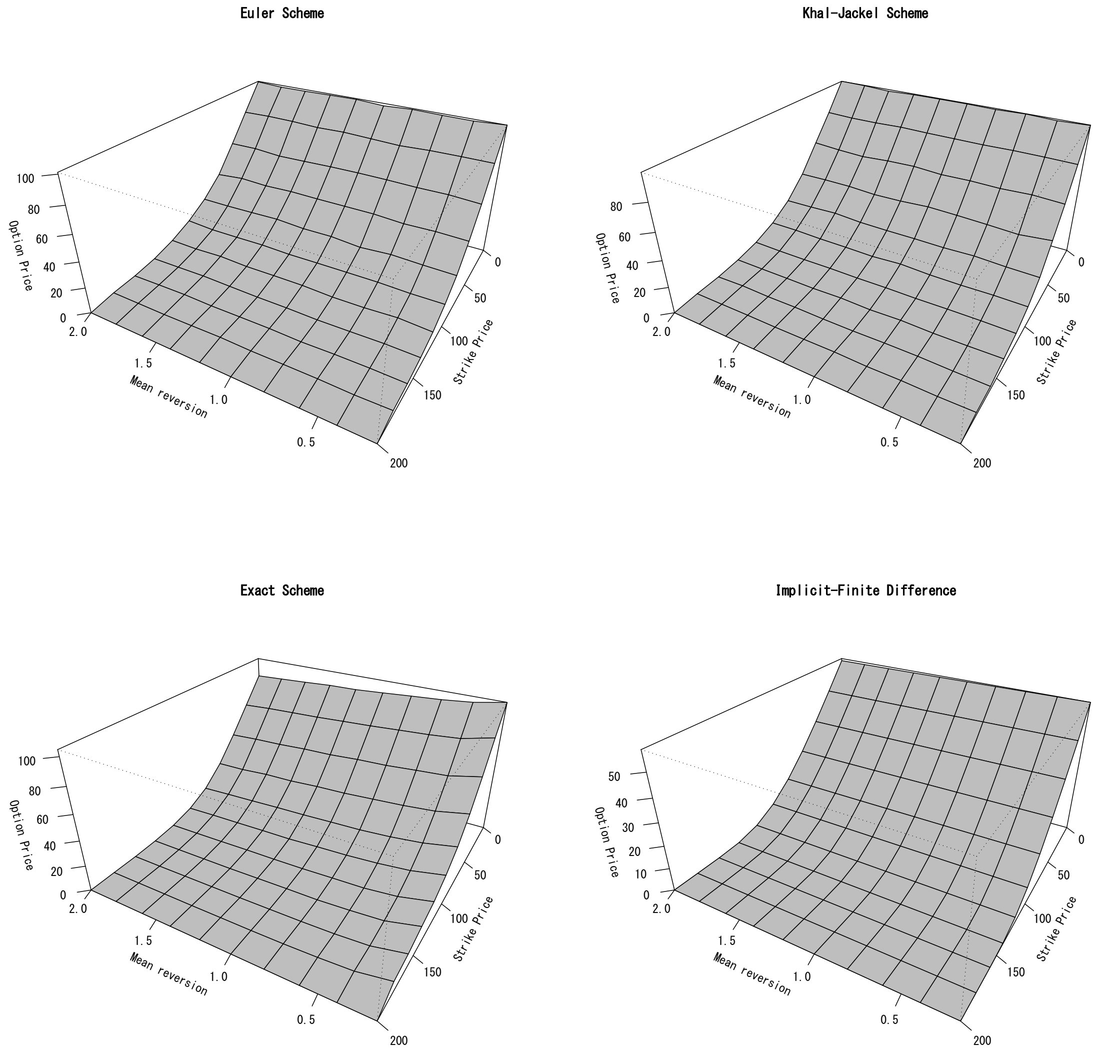

Figure 8.5　回帰強度のオプション価格への影響

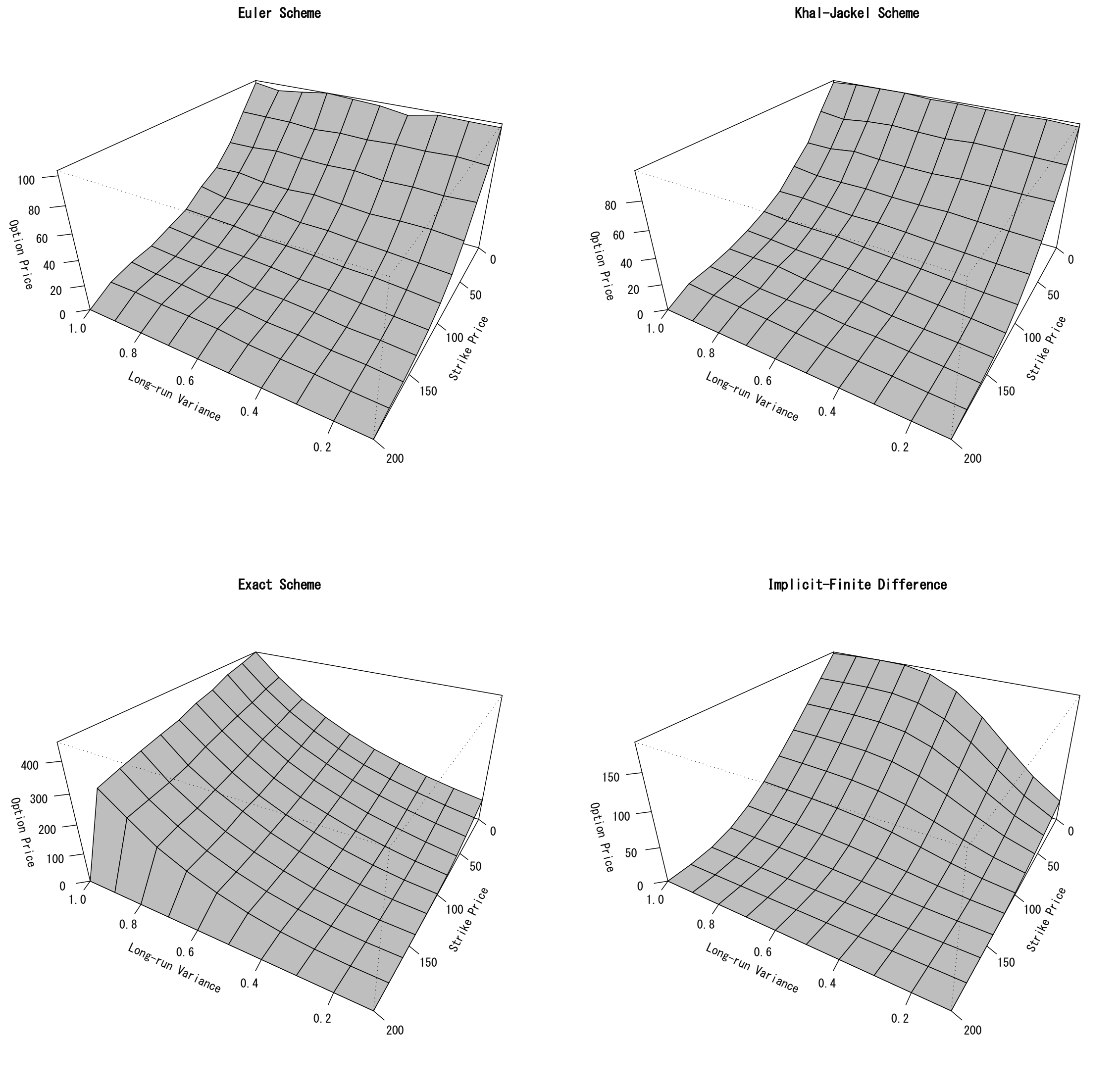

Figure 8.6　回帰レベルのオプション価格への影響

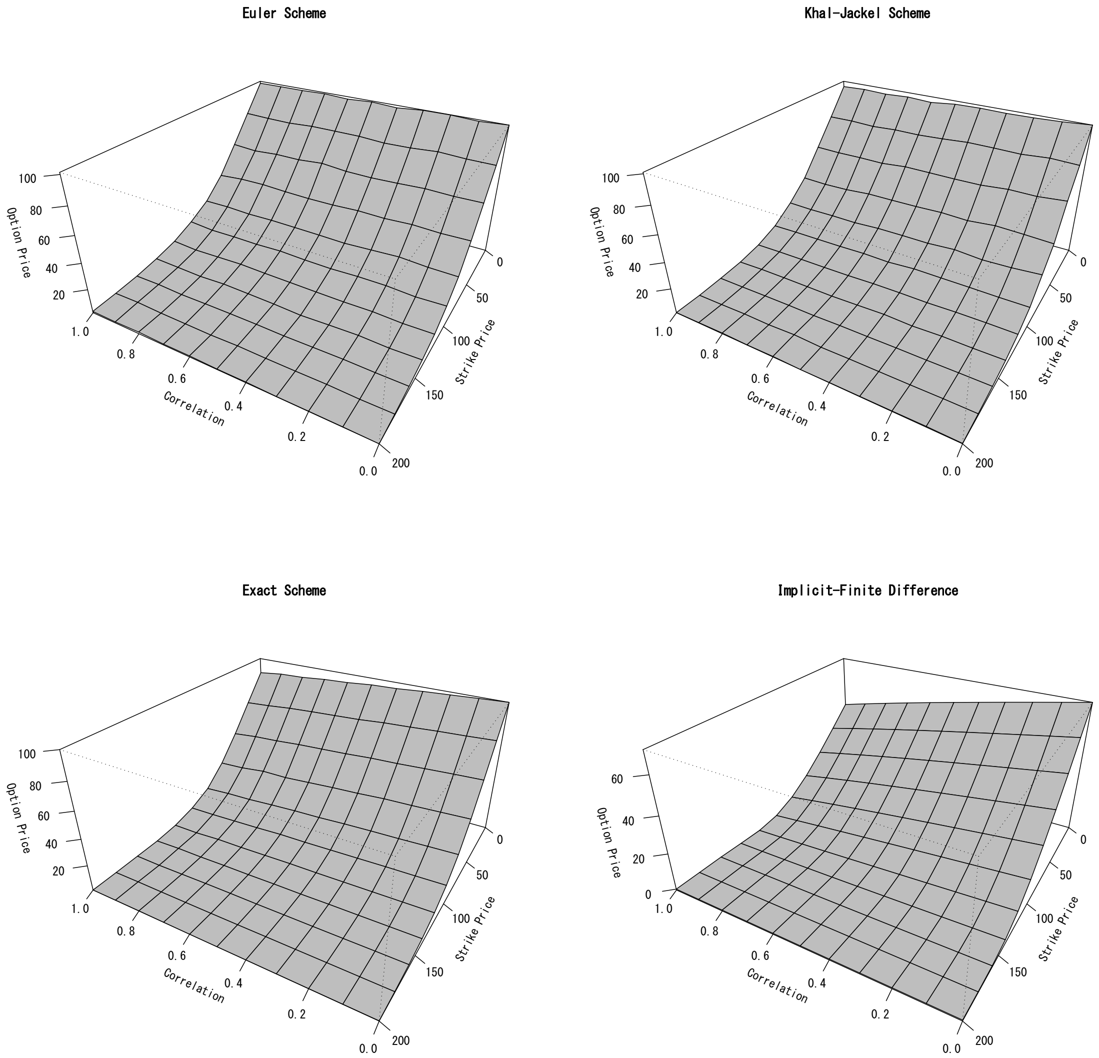

Figure 8.7　相関係数のオプション価格への影響

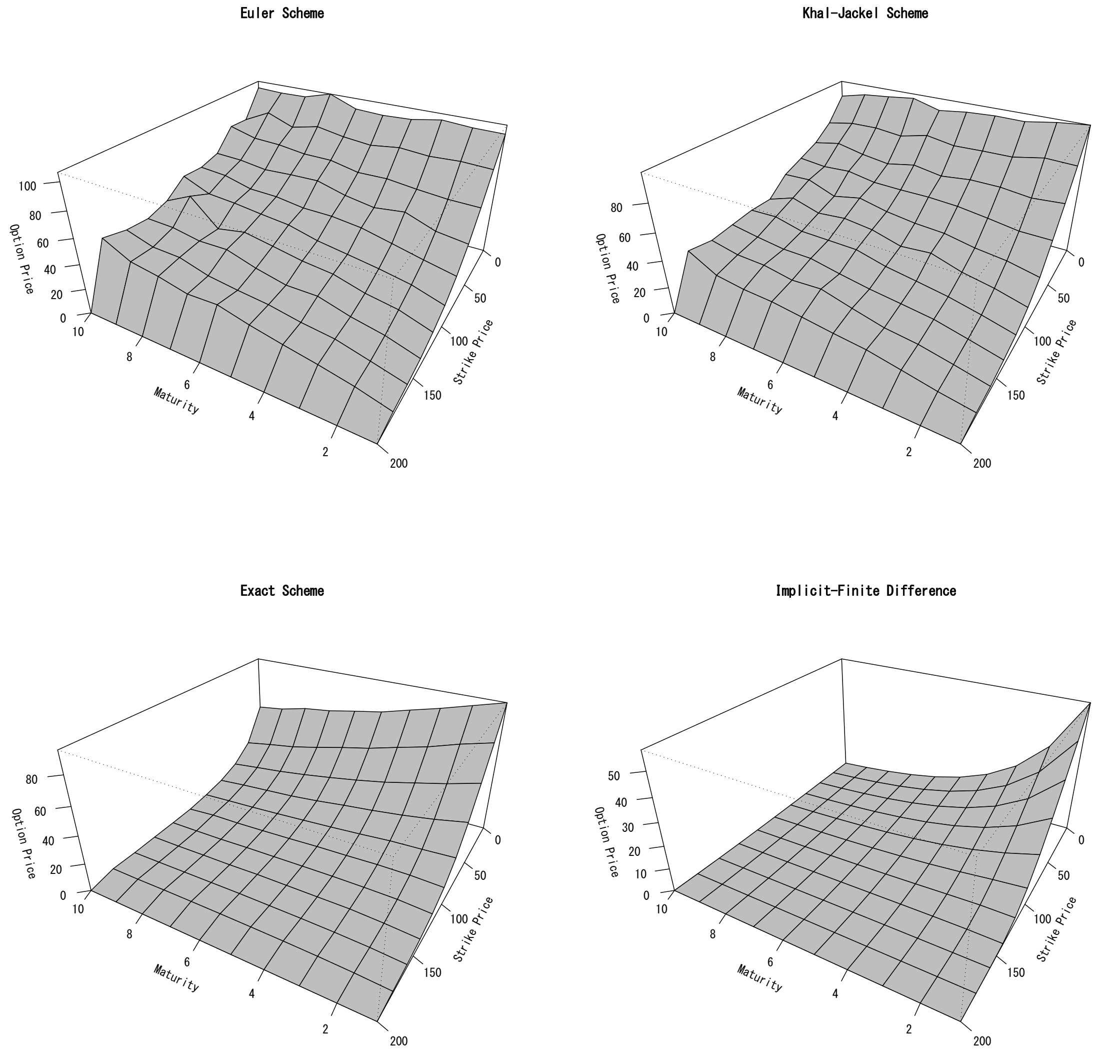

Figure 8.8　満期のオプション価格への影響

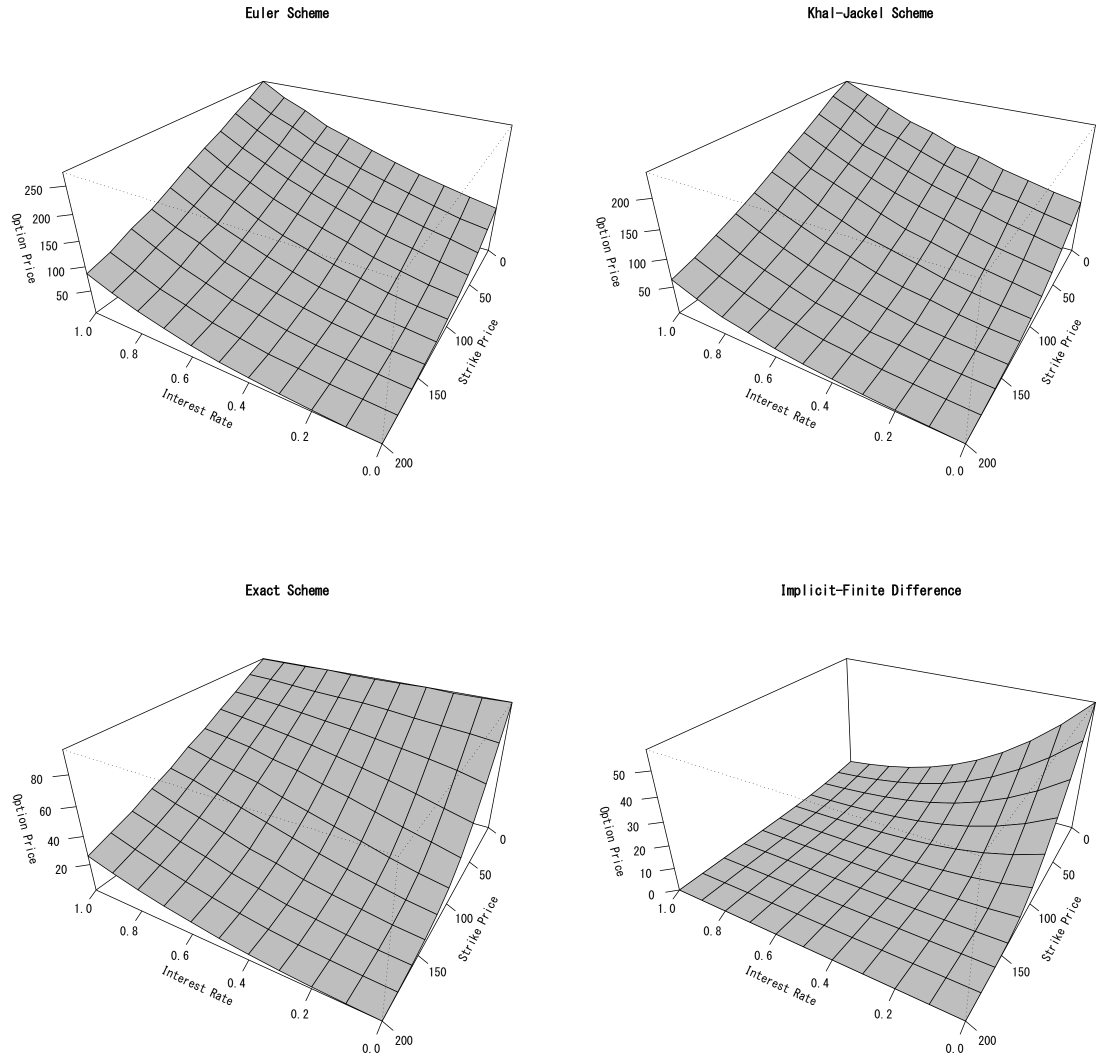

Figure 8.9　金利のオプション価格への影響

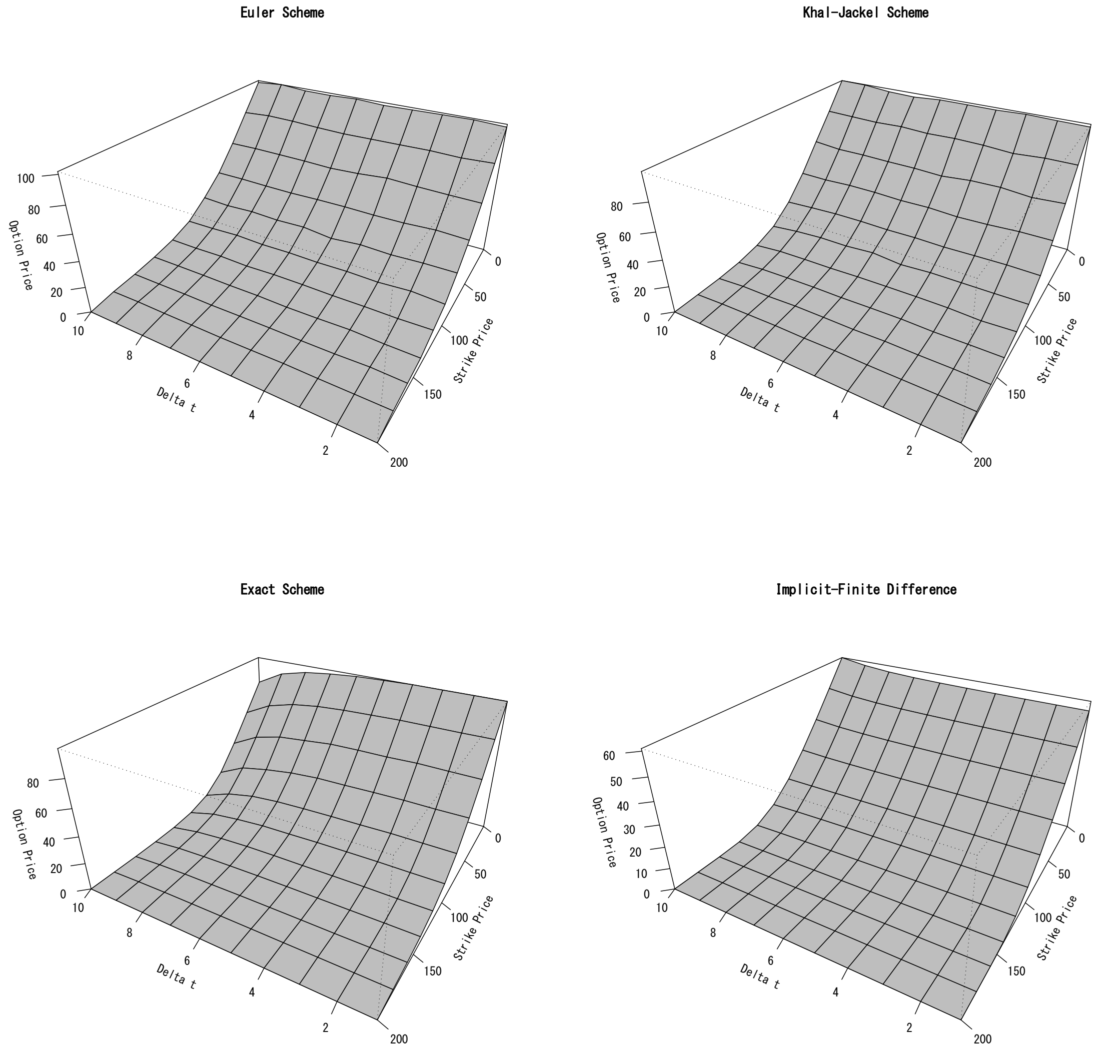

Figure 8.10　時間分割のオプション価格への影響．ここで [Delta t] 軸の目盛 $1 \sim 10$ は，$1/(2^1) \sim 1/(2^{10})$ である．

9 総括

本稿では，Andersen [2] により提案された，Heston モデルにおける数値計算の手法，および有限差分法による手法を，オプション価格の算出への導入および比較検証を行った．

まず最初に，市場で観測されるボラティリティの変動は，BS モデルでは捉えることが出来ない事を言及した．実例として，日経平均株価のヒストリカル・ボラティリティは日々変動しており，その都度オプション価格が変化する訳であるが，これは現時点におけるボラティリティをプライシングに含めたものであって，将来の変動を含みに入れた価格付けでは無い事に注意されたい．確率ボラティリティモデルとは，現時点から将来起こりうる突発的な変動を考慮してプライシングを行うモデルである．中でも Heston モデルは平均回帰を持つボラティリティを仮定しており，これは「バブルはいつかはじける」と同様，ボラティリティが時間経過によって回帰レベルに帰着するという事は，直感的に理解しやすい概念である．

本稿で扱ったヨーロピアン・コール・オプションのリスク中立確率の下でのオプション価格，編微分方程式および境界条件は，Shreve [16] の Exercise が基になっている．これを元に構築した有限差分法は，Hull [9] の有限差分法に着想を得たものである．Heston モデルに有限差分法を導入する場合は，3 次元格子の組み方に注意が必要である．すなわち，求めるオプション価格の株価およびボラティリティが，時刻 0 において格子平面の中心に位置していなければ，正確なオプション価格が計算出来ないからである．また本稿中にも述べたが，陽的有限差分および Crank-Nicholson 法は確率が負の値を取る事から未だに実用には至れない．今後の応用として記しておく．

今回の数値計算で最も収束が期待出来ると考えた Exact Scheme であるが，Euler および Khal-Jackel と比べてオプション価格が離れてしまった．株価の分布の裾野がやや狭い為であると思われるが，この原因はリスク中立確率によりオプション価格を求めた為であると考えられる．これにより確率要素が 1 段階分少なくなった為，結果として株価は収束を見せるのである．Euler および Khal-Jackel は，確率要素が 2 段階に及ぶ為に分布の裾野が広がってしまうのだとすれば，むしろこちらはボラティリティの変動を過大評価している事になる．いずれにせよ，Heston モデルにおけるオプション価格の真の値は求められない為，これらのモデルをさらに比較するならば，市場に照らし合わせて見る必要が生じてくるであろう．

A　Appendix

A.1　伊藤-Taylor 展開

伊藤-Taylor 展開に用いる，多重伊藤積分 $I_\alpha[f(\cdot)]_{\rho,\tau}$ を定めておく．

定義 A.1.1　多重伊藤積分を以下のように定める．

$$I_\alpha[f(\cdot)]_{\rho,\tau} := \begin{cases} f(\tau) & : \quad l = 0, \\ \int_\rho^\tau I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho,s} ds & : \quad l \geq 1 \quad \text{and} \quad j_l = 0, \\ \int_\rho^\tau I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho,s} dW^{j_l}(s) & : \quad l \geq 1 \quad \text{and} \quad j_l \geq 1. \end{cases} \tag{A.1}$$

ただし α は伊藤積分の多重指数であり， $\alpha = (j_1, j_2, \ldots, j_l)$ である．簡単のために，$I_\alpha[f(\cdot)]_{\rho,\tau}$ を $I_{\alpha,\tau}$, あるいは単に I_α と書く．

例 A.1.2　多重伊藤積分 $I_\alpha[f(\cdot)]_{\rho,\tau}$ は，以下のような例が考えられる．

$$\begin{aligned} I_k[f(\cdot)]_{0,t} &= f(t), \\ I_{(0)}[f(\cdot)]_{0,t} &= \int_0^t f(s)ds, \\ I_{(1)}[f(\cdot)]_{0,t} &= \int_0^t f(s)dW(s) \\ I_{(0,2,1)}[f(\cdot)]_{0,t} &= \int_0^t\int_0^v\int_0^u f(s)dsdW^2(u)dW(v). \end{aligned}$$

これを用いて，ドリフト $a(x)$ ，拡散係数 $b(x)$ を持つ独立な伊藤過程 X_t は，以下のように展開できる．

$$\begin{aligned} X_t \quad = \quad & X_{t_0} + aI_{(0)} + bI_{(1)} + \left(aa' + \frac{1}{2}b^2a''\right) I_{(0,0)} \\ & + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2b''\right) I_{(0,1)} + ba'I_{(1,0)} + bb'I_{(1,1)} \\ & + \left[a\left(aa'' + (a')^2 + bb'a'' + \frac{1}{2}b^2a'''\right) + \frac{1}{2}b^2\left(aa''' + 3a'a''\right.\right. \\ & \quad \left.\left. + \left((b')^2 + bb''\right)a'' + 2bb'a'''\right) + \frac{1}{4}b^4a^{(4)}\right] I_{(0,0,0)} \\ & + \left[a\left(a'b' + ab'' + bb'b'' + \frac{1}{2}b^2b'''\right) + \frac{1}{2}b^2\left(a''b' + 2a'b''\right.\right. \\ & \quad \left.\left. + ab''' + \left((b')^2 + bb''\right)b'' + 2bb'b''' + \frac{1}{2}b^2b^{(4)}\right)\right] I_{(0,0,1)} \\ & + \left[a\left(b'a' + ba''\right) + \frac{1}{2}b^2\left(b''a' + 2b'a'' + ba'''\right)\right] I_{(0,1,0)} \\ & + \left[a\left((b')^2 + bb''\right) + \frac{1}{2}b^2\left(b''b' + 2bb'' + bb'''\right)\right] I_{(0,1,1)} \\ & + b\left(aa'' + (a')^2 + bb'a'' + \frac{1}{2}b^2a'''\right) I_{(1,0,0)} \\ & + b\left(ab'' + a'b' + bb'b'' + \frac{1}{2}b^2b'''\right) I_{(1,0,1)} \\ & + b\left(a'b' + a''b\right) I_{(1,1,0)} + b\left((b')^2 + bb''\right) I_{(1,1,1)} + R. \end{aligned}$$

A.2　積分式のラプラス変換

$V(t)$ は以下の square-root process に従う．

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \kappa[\theta - V(s)]ds + \int_0^t \sigma\sqrt{V(s)}dW_s$$

これを，以下のように近似する．

$$\begin{aligned}\int_0^t \sigma\sqrt{V(s)}dW_s &= 2\int_0^t \sqrt{V(s)}\frac{\sigma}{2}dW_s \\ &\cong 2\int_0^t \sqrt{V(s)}dW_{\frac{\sigma^2}{4}s} \\ &= 2\int_0^t \sqrt{V\left(\frac{4}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{4}s\right)}dW_{\frac{\sigma^2}{4}s}\end{aligned}$$

ここで，ブラウン運動の Scaling Property を用いた．$u = \frac{\sigma^2}{4}s$ とおいて，$du = \left(\frac{\sigma^2}{4}\right)ds$ より，

$$V\left(\frac{4}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{4}t\right) = V(0) + \frac{4}{\sigma^2}\int_0^{\frac{\sigma^2}{4}t} \kappa\left[\theta - V\left(\frac{4}{\sigma^2}u\right)\right]du + 2\int_0^{\frac{\sigma^2}{4}t} \sqrt{V\left(\frac{4}{\sigma^2}u\right)}dW_u$$

ここで，$\rho(u) = V\left(\frac{4u}{\sigma^2}\right)$ とプロセスを定義する．

$$\rho\left(\frac{\sigma^2}{4}t\right) = \rho(0) + \frac{4}{\sigma^2}\int_0^{\frac{\sigma^2}{4}t} \kappa[\theta - \rho(u)]du + 2\int_0^{\frac{\sigma^2}{4}t} \sqrt{\rho(u)}dW_u$$

$n = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}$，$j = -\frac{2\kappa}{\sigma^2}$ とおいて，

$$\rho(t) = \rho(0) + \int_0^t [2j\rho(u) + n]du + \int_0^t \sqrt{\rho(u)}dW_u \tag{A.2}$$

このプロセスの無限の生成小作用素は $2xD^2 + (2jx+n)D$，$D = \frac{d}{dx}$ である．Pitman and Yor [15] は，Squared Bessel Process $X(s)$ を用いて，生成作用素 $2xD^2 + nD$ を持つ式を以下のように示した．

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{-\frac{b^2}{2}\int_0^t X(s)ds\right\}\middle| X(0)=x, X(t)=y\right] &= \left(\frac{bt}{\sinh bt}\right)\exp\left\{\frac{x+y}{2t}(1 - bt\coth bt)\right\} \\ &\quad\times I_\nu\left(\frac{\sqrt{xy}b}{\sinh bt}\right)\Big/ I_\nu\left(\frac{\sqrt{xy}}{t}\right)\end{aligned} \tag{A.3}$$

ここで，$\nu = \frac{n}{2} - 1$，$I_\nu(\cdot)$ は第 1 種変形 Bessel 関数であり，$\widetilde{\mathbb{E}}$ は Squared Bessel Process のもとでの期待値である．これを 付録 B.1 に用いるには測度変換が必要で，ドリフト項の確率変数を消して，$j = 0$ のプロセスを得る．

よって求めるラプラス変換は，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left\{-a\int_t^T V(s)ds\right\}\middle|V(t),V(T)\right] =&\mathbb{E}\left[\exp\left\{-a\int_t^T \rho\left(\frac{\sigma^2}{4}s\right)ds\right\}\middle|\rho\left(\frac{\sigma^2}{4}t\right),\rho\left(\frac{\sigma^2}{4}T\right)\right] \\
=&\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{4a}{\sigma^2}\int_{\frac{\sigma^2}{4}t}^{\frac{\sigma-2}{4}T} \rho(s)ds\right\}\middle|\rho\left(\rho\frac{\sigma^2}{4}t\right),\left(\rho\frac{\sigma^2}{4}T\right)\right] \\
=&\widetilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{-\left(\frac{4a}{\sigma^2}+\frac{j^2}{2}\right)\int_{\frac{\sigma^2}{4}t}^{\frac{\sigma^2}{4}T} \rho(s)ds\right\}\middle|\rho\left(\frac{\sigma^2}{4}t\right),\rho\left(\frac{\sigma^2}{4}T\right)\right]\Bigg/ \\
&\widetilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{-\frac{j^2}{2}\int_{\frac{\sigma^2}{4}t}^{\frac{\sigma^2}{4}T} \rho(s)ds\right\}\middle|\rho\left(\frac{\sigma^2}{4}t\right),\rho\left(\frac{\sigma^2}{4}T\right)\right]
\end{aligned}
$$

3 つ目の等号は，Pitman and Yor [15] の測度変換 $(6.d)$ 式を用いた．期待値の分子と分母は，付録 B.2 式を用いて計算される．
変形した式を $V(\cdot)$ に適用すると，以下のラプラス変換式を得る．

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left\{-a\int_t^T V(s)ds\right\}\middle|V(t),V(T)\right] =&\frac{\gamma(a)e^{-\frac{1}{2}(\gamma(a)-\kappa)(T-t)}(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa(1-e^{-\gamma(a)(T-t)})} \\
&\times\exp\left\{\frac{V(t)+V(T)}{\sigma^2}\left[\frac{\kappa(1+e^{-\kappa(T-t)})}{1-e^{-\kappa(T-t)}}-\frac{\gamma(a)(1+e^{-\gamma(a)(T-t)})}{1-e^{-\gamma(a)(T-t)}}\right]\right\} \\
&\times\frac{I_{\frac{1}{2}n-1}\left[\frac{4\gamma(a)\sqrt{V(t)V(T)}}{\sigma^2}\frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma(a)(T-t)}}{1-e^{-\gamma(a)(T-t)})}\right]}{I_{\frac{1}{2}n-1}\left[\frac{4\kappa\sqrt{V(t)V(T)}}{\sigma^2}\frac{e^{-\frac{1}{2}\kappa(T-t)}}{1-e^{-\kappa(T-t)}}\right]}
\end{aligned}
$$

ただし，$\gamma(a)=\sqrt{\kappa^2+2\sigma^2 a}$ である．

謝辞

3 年間ご指導頂いた浦谷規教授に深く感謝を致します．また，研究を進めるにあたり，多くの助言を頂きました安田先生に深く感謝致します．日頃から私を支え，切磋琢磨し合った研究室の加藤君，叶多君，上原さん，先輩の皆様，後輩の皆に感謝致します．最後に，6 年間に渡り私を経済的，精神的に援助をして下さった両親に感謝を致します．

2009 年 2 月

宮本 隆史

参考文献

[1] Joseph Abate and Ward Whitt. The fourier-series method for inverting transforms of probability distributions. *Queueing Systems*, Vol. 10, No. 1, pp. 5–88, 1991.

[2] Leif Andersen. Efficient simulation of the heston stochastic volatility model. *The Journal of Computational Finance*, Vol. 11, No. 3, pp. 1–42, 2008.

[3] Mark Broadie and Özgür Kaya. Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Operations Research*, Vol. 54, No. 2, pp. 217–231, 2006.

[4] Cox J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, Vol. 53, pp. 385–407, 1985.

[5] Kahl C. and P.Jackel. Fast strong approximation monte-carlo schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, Vol. 6, No. 6, pp. 513–536, 2006.

[6] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. Ⅱ. John Wiley & Sons, second edition, 1971.

[7] Black Fischer and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 81–98, 1973.

[8] Steven L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327–343, 1993.

[9] John Hull. フィナンシャルエンジニアリング:デリバティブ取引とリスク管理の総体系, 第 18.8 章. 金融財政事情研究会, 第 5 版, 2005. 三菱証券商品開発本部 訳.

[10] C. Khal. Positive numerical int4egration of stochastic differential equations. Master's thesis, Bergische Universitat Wuppertal, www.math.uni-wuppertal.de/ kahl/publications/DT.pdf, 2004.

[11] P. E. Kloeden and E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.*, chapter 5.5. Springer, 1992.

[12] Roger Lord, Remmert Koekkoek, and Dick van Dijk. A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Tinbergen Institute Disucussion Paper*, 2006.

[13] G. N. Milshtein. Approximate integration of stochastic differential equations. *Theory of Probability and Applications*, Vol. 19, pp. 557–562, 1974.

[14] Vasicek Oldrich. An equilibrium characterisation of the term structure. *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 177–188, 1977.

[15] Jim Pitman and Marc Yor. A decomposition of bessel bridges. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie*, Vol. 59, pp. 425–457, 1982.

[16] Steven E. Shreve. ファイナンスのための確率解析 II. シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008. 長山いづみ 他 訳.