列車の間隔について

FUKAWA, Masami / 布川, 正巳

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
1
(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
4
(発行年 / Year)
1964-05
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004297

列車の間隔について

研究助手 布 川 正 巳 （基礎学科）

A Certain Estimate for the Interval between Trains

Masami Fukawa, *Research Assistant*

§1. 問　　題

本稿は，国鉄保線区の人からの要請に応じて，考えたものである．

ある地点で，1日に N 本の列車が通ることはわかっているが，そのダイヤがどのように組まれるかわかっていない．保線作業には t 分以上の時間間隔が必要であるが，そのような時間間隔が得られる確率を求めたい．

これが問題である．列車1本あたりの平均通過時間の N 倍を 24 時間から引き，（もし，どんなダイヤが組まれても，列車の時間間隔が必ず t_0 分以上であることがわかっているならば，Nt_0 分をさらに引き）残った時間を時間の単位として1としよう。t 分（あるいは $(t-t_0)$ 分）をこの単位で測った数値を a とする．そうすれば，問題は，時間間隔を表わす N 個の確率変数 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ について，

$$B:\qquad x_1+x_2+\cdots+x_N=1,\quad 0\leqq x_i\leqq a\ (i=1,\cdots,N)$$

となる確率 $1-p$ を求めることとなる．（p が最終的に求めたい確率である．）

確率を求めるには，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ の分布を知らなければならないが，それについて何もわかっていないので，これらは random であると仮定しよう．すなわち，N 次元ユークリッド空間内の超平面上の区域

$$A:\qquad x_1+x_2+\cdots+x_N=1,\quad 0\leqq x_i\quad (i=1,\cdots,N)$$

上で一様分布する確率変数 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ の値が B に含まれる確率を $1-p$ としよう．いいかえれば，この超平面上での通常の面積（ルベーグ測度）を m とすれば，

$$1-p=\frac{m(B)}{m(A)}$$

となる。

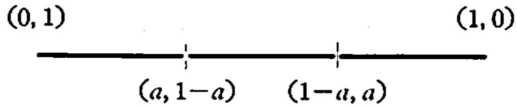
§2. $N=2, 3, 4$ の場合についての試み

N の値が小さいときには，幾何学的に p を簡単に求めることができる．これらを求めることは，p の幾何学的意味を理解するためばかりでなく，次項で求める一般の場合の公式を check す

るためにも必要であろう．

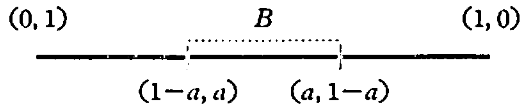
$N=2$ の場合：A は，2 点 $(0,1)$ と $(1,0)$ を結ぶ線分となり，B は，$a<\frac{1}{2}$ ならば空集合，$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ ならば，次図のような A 上の線分となる．

$0\leqq a<\frac{1}{2}$ の場合



$1-p=0$

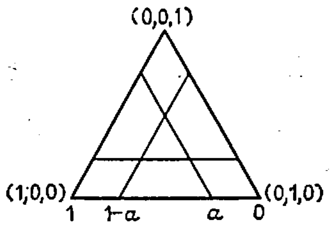
$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ の場合



$1-p=a-(1-a)=2a-1$

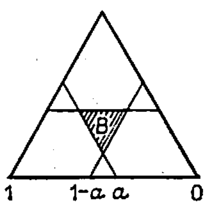
$N=3$ の場合，A は正三角形となる．

$0\leqq a<\frac{1}{3}$



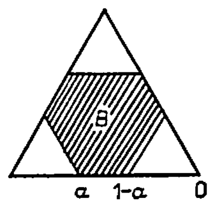
$1-p=0$

$\frac{1}{3}\leqq a<\frac{1}{2}$



$1-p=(3a-1)^2$

$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$



$1-p=1-3(1-a)^2$
$=(3a-1)^2-3(2a-1)^2$

$N=4$ の場合，A は正四面体となる．その1辺の長さを1としよう．
$0\leqq a<\frac{1}{4}$ ならば，B は空集合，従って $1-p=0$．
$\frac{1}{4}\leqq a<\frac{1}{3}$ ならば，B は1辺 $4a-1$ の正四面体となる．従って $1-p=(4a-1)^3$．
$\frac{1}{3}\leqq a<\frac{1}{2}$ ならば，B は，1辺 $4a-1$ の正四面体の4隅から，1辺 $3a-1$ の正四面体を切りとった残りの図形となる．従って $1-p=(4a-1)^3-4(3a-1)^3$．
$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ ならば，B は，A の4隅から，1辺 $1-a$ の正四面体を切りとった残りの図形となる．従って，$1-p=1-4(1-a)^3$．

§3.　一般の場合

$m(A)$, $m(B)$ を求める代りに，A, B の，超平面 $x_N=0$ 上への正射影 A', B' の面積 $m(A')$, $m(B')$ を求めて，

$$1-p=\frac{m(B')}{m(A')}$$

としてもよい．

簡単のため，$n=N-1$ とおき，n 以下の各自然数 r に対して，

$$S(r)=\sum_{i=1}^{r} x_i$$

とおけば，

$$\begin{aligned} m(A')&=\int_{A'} dx_1\cdots dx_n \\ &=\int_0^1 dx_1\int_0^{1-S(1)} dx_2\int_0^{1-S(2)} dx_3\cdots\int_0^{1-S(n-1)} dx_n \\ &=\frac{1}{n!}\,. \end{aligned}$$

次に $m(B')$ を求める．以下の積分は，すべて区域 $0\leqq x_i\leqq a$ $(i=1,\cdots,n)$ の部分集合の上で行なわれるが，記法を簡単にするため，この区域内であることをいちいち書かないことにする．そうすれば，

$$\begin{aligned} m(B')&=\int_{B'} dx_1\cdots dx_n \\ &=\int_{1\geqq S(n)\geqq 1-a} dx_1\cdots dx_n\,. \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\int_{1-(\alpha-1)a\geqq S(r)\geqq 1-\alpha a} F(x_1,\cdots,x_r)dx_1\cdots dx_r \\ &\quad=\int_{1-(\alpha-1)a\geqq S(r-1)\geqq 1-\alpha a} dx_1\cdots dx_{r-1}\int_0^{1-(\alpha-1)a-S(r-1)} F dx_r \\ &\quad+\int_{1-\alpha a\geqq S(r-1)\geqq 1-(\alpha+1)a} dx_1\cdots dx_{r-1}\int_{1-\alpha a-S(r-1)}^{a} F dx_r \end{aligned}$$

に注意して，$m(B')$ を累次積分で表わせば，

$$\begin{aligned} m(B')=\sum_{\nu=0}^{n-1}&\Bigg[\int_{1-\nu a\geqq x_1\geqq 1-(\nu+1)a} dx_1\Bigg\{\sum_{n\geqq i_1>i_2>\cdots>i_\nu\geqq 2}\Bigg(\int_0^{1-\nu a-S(1)} dx_2 \\ &\times\int_0^{1-\nu a-S(2)} dx_3\cdots\int_0^{1-\nu a-S(i_\nu-2)} dx_{i_\nu-1}\int_{1-\nu a-S(i_\nu-1)}^{a} dx_{i_\nu} \\ &\times\int_0^{1-(\nu-1)a-S(i_\nu)} dx_{i_\nu+1}\cdots\int_0^{1-(\nu-1)a-S(i_{\nu-1}-2)} dx_{i_{\nu-1}-1}\int_{1-(\nu-1)a-S(i_{\nu-1}-1)}^{a} dx_{i_{\nu-1}} \\ &\times\cdots \\ &\times\int_0^{1-a-S(i_2)} dx_{i_2+1}\cdots\int_0^{1-a-S(i_1-2)} dx_{i_1-1}\int_{1-a-S(i_1-1)}^{a} dx_{i_1} \\ &\times\int_0^{1-S(i_1)} dx_{i_1+1}\cdots\int_0^{1-S(n-1)} dx_n\Bigg)\Bigg\}\Bigg]\,. \end{aligned}$$

ここで，2番目の $\sum$ は，$n\geqq i_1>i_2>\cdots>i_\nu\geqq 2$ となるような ν 個の自然数 $i_1,i_2,\cdots,i_\nu$ のあらゆるとり方にわたるのである．$\left(\text{従って，この}\sum\text{の中は，}\binom{n-1}{\nu}\text{個の項から成る．}\right)$ 以下，こ

の意味の $\sum$ を，$\sum\limits_{(i,\nu)}$ と書き表わす．

上の積分を逐次実行すれば，

$$m(B')=\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\sum_{(i,\nu)}\int_{1-\nu a\geqq x_1\geqq 1-(\nu+1)a}\left\{\sum_{\lambda=0}^{\nu}\frac{b_\lambda}{(i_\lambda-2)!}(1-\nu a-x_1)^{i_\lambda-2}dx_1\right..$$

ただし，$i_0=n+1=N$ とし，また，$b_0, b_1, \cdots, b_\nu$ は，

$$b_0=1,\quad b_\lambda=-\sum_{\mu=0}^{\lambda-1}\frac{b_\mu a^{i_\mu-i_\lambda}}{(i_\mu-i_\lambda)!}\quad(\lambda=1,\cdots,\nu)$$

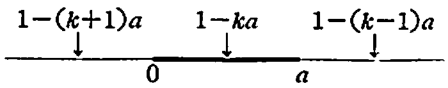
によって定められる数である．

ここで，x_1 についての積分範囲は，くわしく書けば，

$$0\leqq x_1\leqq a,\qquad \text{かつ}\qquad 1-(\nu+1)a\leqq x_1\leqq 1-\nu a$$

で定まる範囲である．今 k を，

$$\frac{1}{k+1}\leqq a\leqq\frac{1}{k}$$



みたす自然数とすれば，上の積分区間は，

$$\begin{cases}\nu=k & \text{に対しては，}\quad 0\leqq x_1\leqq 1-ka.\\ \nu=k-1 & \text{に対しては，}\quad 1-ka\leqq x_1\leqq a.\\ \text{その他の }\nu & \text{に対しては，}\quad \text{空集合.}\end{cases}$$

となる．ゆえに

$$\begin{aligned}m(B')&=\sum_{\nu=k-1}^{k}(-1)^{\nu}\sum_{(i,\nu)}\int_{u(\nu)}^{v(\nu)}\sum_{\lambda=0}^{\nu}\frac{b_\lambda}{(i_\lambda-2)!}(1-\nu a-x_1)^{i_\lambda-2}dx_1\\&=\sum_{\nu=k-1}^{k}(-1)^{\nu+1}\sum_{(i,\nu)}\sum_{\lambda=0}^{\nu}\frac{b_\lambda}{(i_\lambda-1)!}\Big[(1-\nu a-x_1)^{i_\lambda-1}\Big]_{u(\nu)}^{v(\nu)}\end{aligned}$$

ただし
$$\begin{cases}u(k)=0\\ v(k)=1-ka\end{cases}\qquad\begin{cases}u(k-1)=1-ka\\ v(k-1)=a\end{cases}$$

これを計算すれば，最終的な結果が得られる．すなわち，

$\dfrac{1}{k+1}\leqq a\leqq\dfrac{1}{k}$ とし，$1-ka=d$ とおけば，

$$1-p=\frac{m(B')}{m(A')}=(-1)^k(N-1)!\left\{\sum_{(i,k)}\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{b_\lambda}{(i_\lambda-1)!}d^{i_\lambda-1}+\sum_{(j,k-1)}\sum_{\lambda=0}^{k-1}\frac{c_\lambda}{(j_\lambda-1)!}(d^{j_\lambda-1}-a^{j_\lambda-1})\right\}.$$

ただし，

$$i_0=N,\quad b_0=1,\quad \sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{b_\mu}{(i_\mu-i_\lambda)!}a^{i_\mu-i_\lambda}=0\quad(\lambda=1,\cdots,k)$$

$$j_0=N,\quad c_0=1,\quad \sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{c_\mu}{(j_\mu-j_\lambda)!}a^{j_\mu-j_\lambda}=0\quad(\lambda=1,\cdots,k-1).$$