# 付値論の基礎的命題について

FUKAWA, Masami / 布川, 正巳

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
1
(開始ページ / Start Page)
5
(終了ページ / End Page)
16
(発行年 / Year)
1964-05
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004294

# 付値論の基礎的命題について

研究助手　布　川　正　巳（基礎学科）

## Fundamental Propositions on Valuations

Masami Fukawa, *Research Assistant*

### §0. 序

$p$ を一つの素数とすれば，任意の有理数 $x$ は，適当な整数 $\nu$ と，分母分子ともに $p$ と互に素な有理数 $y$ とを用いて，

$$x=p^{\nu}y$$

の形に一意的に表わされる．$x$ にこの整数 $\nu$ を対応させる写像が，有理数体の **$p$ 進付値**である．いいかえれば，有理数 $x$ が，$p$ の何乗を因子にもつかを示すことが $p$ 進付値である．

次に，$\alpha$ を一つの複素数とすれば，リーマン球面（＝複素平面と一つの無限遠点）上の有理型函数 $f(z)$ は，適当な整数 $\nu$ と，$\alpha$ を零点にも極にももたない有理型函数 $g(z)$ とを用いて，

$$f(z)=(z-\alpha)^{\nu}g(z)$$

の形に一意的に表わされる．$f(z)$ に $\nu$ を対応させる写像が，有理型函数体の **$(z-\alpha)$ 進付値**または **$\alpha$ を中心とする付値**とよばれるものである．いいかえれば，$f(z)$ が $\alpha$ を何位の零点にもつかを示すことが $(z-\alpha)$ 進付値である．（$\mu$ 位の極は，$-\mu$ 位の零点と考える.）

以上は，付値の最も簡単な例であるが，前者は整数論において，後者は複素函数論において，有力な道具となっている．代数的数体，必ずしも1変数でない代数函数体，解析函数体等，もっと複雑な体では，もっと複雑な付値が用いられる．付値論については，すでにいろいろな研究がなされているが，本稿で述べるのは，私が，自分で使いやすいように整理補充したものである．証明について言及していない部分は，証明容易の部分である．なお，本稿で述べる付値には，いわゆる「アルキメデス的付値」は含まれていない．

### §1. 付　値 (Valuation)

体 $K$ の**付値**とは，$K$ の 0 でない元全体の作る乗法群 $K^*$ から，ある全順序加群 $\Gamma$ の上への写像 $v: K^*\to\Gamma$ であって，2 条件

$$v(xy)=v(x)+v(y)\,,\qquad v(x+y)\geqq\min\,(v(x),v(y))$$

をみたすものをいう．ここに全順序加群とは，全順序集合であり，かつ加群であり，さらに，条

件 “$\alpha \leqq \beta \Rightarrow \alpha+\gamma \leqq \beta+\gamma$” をみたす代数系をいう．なお，$v(0)=\infty$ と定義して，$v$ を写像 $K\to\Gamma\cup\{\infty\}$ とみなすこともある．$\infty$ は $\Gamma$ のどの元よりも大きいと考える．$\Gamma$ を $v$ の**値群**という．

体の付値 $v$ について，次の性質は容易にたしかめられる．

$v(-x)=v(x)$,

$v(x-y)\geqq\min(v(x),v(y))$

$v(x)>v(y)\Rightarrow v(x+y)=v(x)$.

$v(x_1+\cdots+x_n)\geqq\min(v(x_1),\cdots,v(x_n))$．さらに，右辺$=v(x_j)$ となる番号 $j$ がただ一つしかなければ，$\geqq$ の代りに $=$ が成り立つ．

0 でないある整数 $n$ について $nv(x)=0$ が成り立てば，$v(x)=0$.

$K$ の三つの部分集合

$$R=\{x\in K|v(x)\geqq 0\}\quad (R\ni 0)$$

$$\mathfrak{m}=\{x\in K|v(x)>0\}\quad (\mathfrak{m}\ni 0)$$

$$\mathfrak{u}=\{x\in K|v(x)=0\}$$

を定義する．$R$ は $K$ の部分環であって，$v$ の**付値環**とよばれる．$\mathfrak{m}$ は $R$ の非可逆元全体から成り，かつ $R$ のイデアルとなる．これから，$R$ は $\mathfrak{m}$ を極大イデアルとしてもつ局所環となることがわかる．$\mathfrak{u}$ は $R$ の可逆元全体から成り，乗法に関して群となる．

**命題 1**　$R$ は integrally closed である．

$K$ の 0 でない一つの元で生成される $R$ 加群の互に異なるもの全体の集合 $\{xR|x\in K^*\}$ は，$xR\leftrightarrow v(x)$ によって，$\Gamma$ と 1 対 1 に対応する．この対応によってこの集合を $\Gamma$ と同型な順序群とみれば，加法は $xR+yR=xyR$ で，順序は $xR\leqq yR\Longleftrightarrow xR\supset yR$ で与えられる．さらに，乗法群としての剰余群 $K^*/\mathfrak{u}$ と $\Gamma$ も，$x \bmod \mathfrak{u}\leftrightarrow v(x)$ によって群として同型になる．この対応によって $K^*/\mathfrak{u}$ を順序群とみなせば，その順序は，$(x \bmod \mathfrak{u})>0\Longleftrightarrow x\in\mathfrak{m}$ によって与えられる．

以上のことから，$R$ を付値環にもつような $K$ の付値は，同型の意味で，はじめに与えた $v$ しか存在しない．すなわち，付値環 $R$ はただ一通りの付値を定める．また，

$$K=R\cup\{x\in K|x^{-1}\in\mathfrak{m}\}$$

であるから，集合 $\mathfrak{m}$ もただ一通りの付値を定める．

$K$ に含まれる (0) でない $R$ 加群 $\mathfrak{a}$ に対して，$v(\mathfrak{a})=\{v(x)|x\in\mathfrak{a}\}$ は $\Gamma$ の一つの切断の上組となり，$\mathfrak{a}=v^{-1}v(\mathfrak{a})$ が成り立つ．また逆に，$\Gamma$ の一つの切断を与えれば，その上組の元を値にもつような $K$ の元の全体 $\mathfrak{b}$ は $R$ 加群をなし，$v(\mathfrak{b})$ がはじめの切断の上組と一致する．ゆえに，この方法で，$\Gamma$ の切断と $K$ に含まれる (0) でない $R$ 加群全体の集合とは 1 対 1 に対応し，切断の下組の大きいものほど対応する $R$ 加群は小さい．$\Gamma$ の切断はあきらかな方法で全順序集合をなすから，この対応によって，$K$ に含まれる $R$ 加群全体も，包含関係によって全順序集合

をなすことがわかる．とくに，$R$ のイデアル全体が，包含関係によって全順序集合となっている．（上組が空であるような切断も考えれば，これと (0) とが対応する．また，下組が空であるような切断も考えれば，これと $K$ 全体とが対応する．）

切断の下組が負でない元を含むとき，下組と，下組の元の逆元全体の集合との共通部分として得られる集合を $\Gamma$ の**線分**という．切断と線分とのこの対応と，上に述べた切断と $R$ 加群との対応とによって，$\Gamma$ の線分全体の集合と $R$ のイデアル全体の集合とが1対1，順序逆同型に対応する．（とくに，$\Gamma\leftrightarrow(0)$，$(0)\leftrightarrow\mathfrak{m}$，$\phi\leftrightarrow R$．空集合 $\phi$ を線分とはよばないから，以下，$R$ 全体を $R$ のイデアルとはよばないことにする．）$\Gamma$ の線分のうち，とくに $\Gamma$ の部分群であって，かつ $\Gamma$ 全体でないものを $\Gamma$ の**孤立部分群**という．

**命題 2**　$\Gamma$ の線分と $R$ のイデアルとの上の対応によって，$\Gamma$ の孤立部分群と $R$ の (0) でない素イデアルとが互に対応する．

**証明**　線分 $A$ に対応するイデアルを $\mathfrak{a}$ とする．

$A\neq\Gamma \Longleftrightarrow \mathfrak{a}\neq(0)$.

$A$ が部分群 $\Longleftrightarrow [\alpha,\beta\geqq 0,\ \alpha,\beta\in A\Rightarrow\alpha+\beta\in A]$

$\Longleftrightarrow [x,y\in R,\ x,y\notin\mathfrak{a}\Rightarrow xy\notin\mathfrak{a}]$

$\Longleftrightarrow \mathfrak{a}$ が素イデアル．

$\Gamma$ の孤立部分群全体の集合が包含関係によって作る順序集合の順序型を，$\Gamma$ の **rank**，または $v$ の **rank** という．以下これを $r$ としよう．また，$\Gamma$ を有理整数環上の加群と考えたときの階数を，$\Gamma$ の，あるいは $v$ の **rational rank** という．これを $\rho$ としよう．次のことは，定義から容易にわかる．

$r=0 \Longleftrightarrow \Gamma=\{0\} \Longleftrightarrow \rho=0 \Longleftrightarrow R=K$.（自明な付値）

$r\leqq 1 \Longleftrightarrow \Gamma$ がアルキメデス的 $\Longleftrightarrow \Gamma\subset\boldsymbol{R}$.

（ここに $\boldsymbol{R}$ は，実数の順序加法群を表わす．）

$\rho\leqq 1 \Longleftrightarrow \Gamma\subset\boldsymbol{Q}$.（$\boldsymbol{Q}$ は，有理数の順序加法群）

$A$ を $\Gamma$ の一つの孤立部分群とする．$\Gamma$ の coset $\alpha+A$ が正の元のみから成るとき $(\alpha \bmod A)>0$ と定義すれば，$\Gamma/A$ がまた全順序加群となる．$\Gamma$ の，$A$ を含む孤立部分群全体と，$\Gamma/A$ の孤立部分群全体とは，自然な方法で1対1に対応する．これから

$$\mathrm{rank}\,A+\mathrm{rank}\,\Gamma/A=\mathrm{rank}\,\Gamma$$

が得られる．（順序数の意味で）

$m$ 個（有限個）の全順序加群 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m$ の群としての直和 $\Gamma$ に辞書式に順序を定義すれば，$\Gamma$ がまた全順序加群となる．このとき，

$$\mathrm{rank}\,\Gamma=\mathrm{rank}\,\Gamma_m+\mathrm{rank}\,\Gamma_{m-1}+\cdots+\mathrm{rank}\,\Gamma_1.$$

かつ，$\Gamma$ の孤立部分群は，ある $\Gamma_s$ の孤立部分群 $A_s$ を用いて，

$$A_s+\Gamma_{s-1}+\cdots+\Gamma_1$$

の形で表わされる.

$\boldsymbol{Z}$ を有理整数の順序加法群とするとき,

$$\Gamma=\boldsymbol{Z}+\cdots+\boldsymbol{Z}\ (r\ \text{個(有限個)の辞書式直和})$$

となるならば, $v$ は **discrete** であるといわれる. このとき, $\mathrm{rank}\,\Gamma=r$ である.

**命題 3** $r$ を一つの自然数とする. $v$ が $\mathrm{rank}\,r$ の discrete な付値であるためには, $\Gamma$ の孤立部分群の列

$$\{0\}=A_0\subsetneqq A_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq A_{r-1}\subsetneqq A_r=\Gamma$$

において, $A_{i+1}/A_i\cong\boldsymbol{Z}$ (順序群として, $i=0,1,\cdots,r-1$) となることが必要かつ十分である.

**証明** [2] p. 48~p. 49.

**命題 4** 付値 $v$ について,

(i) discrete, rank 1

(ii) $\Gamma\cong\boldsymbol{Z}$

(iii) $v$ は自明でなく, $R$ がネーター環である.

の三つは同値である.

**証明** [2] p. 41.

**命題 5** $\rho$ が有限ならば, $r$ も有限で, $r\leqq\rho$.

**証明** $\{0\}=A_0\subsetneqq A_1\supsetneqq\cdots\subsetneqq A_{s-1}\subsetneqq A_s=\Gamma$

を任意の有限個の孤立部分群の列とする. $i=1,\cdots,s$ の各 $i$ に対して, $A_i$ に属して $A_{i-1}$ に属さない元 $\alpha_i$ をとれば, $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ は有理整数環上1次独立となる. 従って $s\leqq\rho$. ゆえに $r\leqq\rho$ ([2] p. 50).

**命題 6** 整域 $R$ が, その商体 $K$ の付値環であるためには, 次の同値な各命題の成り立つことが必要かつ十分である.

a) $K$ の 0 でない任意の元 $x$ に対して, $x$ または $x^{-1}$ が $R$ に属する.

b) $K$ の任意の2元 $x,y$ に対して, $xR\subset yR$, $xR\supset yR$ の少なくとも一方が成り立つ.

c) $R$ の任意の2元 $a,b$ に対して, $aR\subset bR$, $aR\supset bR$ の少なくとも一方が成り立つ.

d) $R$ は局所環であって, その有限個の元で生成されるイデアルは必ず単項イデアルである.

**証明** $R$ が $K$ の付値環であることが, a), b), c) のどれとも同値であることは容易にわかる. c) と d) が同値であることについては, [3] p. 34.

$K$ の付値環 $R$ からある体 $\Delta$ への準同型全射 $\pi$ を **place** という. $R$ は局所環であるから, 必然的に $\Delta\cong R/\mathfrak{m}$ で, $\pi$ は標準的全射となる. 以下 $\Delta=R/\mathfrak{m}$ とみなそう. $\Delta$ を $v$ の**剰余体**という. $R$ に属さない $K$ の元 $x$ に対しては $\pi(x)=\infty$ と定義して, $\pi$ を写像 $K\to\Delta\cup\{\infty\}$ とみなすこともある. あきらかに

$$\pi(x)=\infty \Longleftrightarrow x^{-1}\in\mathfrak{m} \Longleftrightarrow \pi(x^{-1})=0$$

またあきらかに，

$$\Delta\cong K \Longleftrightarrow R=K. \quad \text{(自明な付値)}$$

$R$ がある部分体 $k$ を含めば，$\pi$ は $k$ 上で同型写像となるから，$\Delta$ は $k$ の拡大体と考えられ，従って $K$ と $\Delta$ との標数は一致する．逆に，$K$ と $\Delta$ とが等しい標数をもてば，$\pi$ はこの標数の素体上で同型写像となり，この素体は $R$ に含まれる．

## §2. 付値の定める位相

体 $K$ に付値 $v$ が与えられているとする．付値環，その極大イデアル，値群を前と同様に，それぞれ $R,\mathfrak{m},\Gamma$ で表わそう．$\Gamma$ の任意の元 $\alpha$ に対して，

$$U(\alpha)=\{x\in K|v(x)>\alpha\} \quad (\ni 0)$$

とおき，$K$ の元 $x_0$ の基本近傍系を

$$\sum=\{x_0+U(\alpha)|\alpha\in\Gamma\}$$

によって定義すれば，この位相によって $K$ は位相体となる．

$K$ の異なる2元 $x,y$ に対して，$v(x-y)$ より大きい $\Gamma$ の元 $\alpha,\beta$ を任意にとれば，$x+U(\alpha)$ と $y+U(\beta)$ とは交わらない．従って $K$ はハウスドルフ空間となる．また，二つの集合 $x+U(\gamma)$ と $y+U(\gamma)$ とは，一致するかまたは全く交わらない．従って $x+U(\gamma)$ は，開かつ閉であり，これから $K$ が正則空間ともなることがわかる．

$K$ に含まれる任意の $R$ 加群 $\mathfrak{a}$ もまた開かつ閉である．実際，$\mathfrak{a}\ni a$ ならば，$a+U(v(a))\subset\mathfrak{a}$．また，$x\notin\mathfrak{a}$ ならば，$x+U(v(a))$ は $\mathfrak{a}$ と交わらない．とくに $R$, $\mathfrak{m}$ は開かつ閉である．

さらに $K$ は，

$$V(\alpha)=\{(x,y)\in K\times K|v(x-y)>\alpha\} \quad (\alpha\in\Gamma)$$

を一様近傍系の基として，一様空間となる．($V(\alpha)$ は，対角線集合 $\Delta=\{(x,x)|x\in K\}$ を含む．) この一様位相の意味での完備化がまた付値体となる．これを少しくわしく述べよう．

$\mathfrak{X}$ が $K$ 上の **Cauchy filter** であるとは，$K$ 上の filter であって，$\Gamma$ の任意の元 $\gamma$ に対して適当な元 $X\in\mathfrak{X}$ をとれば，$X\times X\subset V(\gamma)$ となるものをいう．$K$ の元に収束する filter は Cauchy filter である．任意の Cauchy filter がかならず収束するならば，$K$ は，(より正確には，$(K,v)$ は) **完備**であるといわれる．

以下，$(K,v)$ はかならずしも完備でない付値体とする．

$\mathfrak{X}$ が，0 に収束しない Cauchy filter ならば，適当な元 $\alpha\in\Gamma$ が存在して，十分大きいすべての $\gamma$ に対して，$X\times X\subset V(\gamma)$ となるような $X$ の元の値はすべて $\alpha$ となる．これを証明しよう．$\mathfrak{X}$ は 0 に収束しないから，ある $U(\gamma_0)$ を含まない．$X_0\times X_0\subset V(\gamma_0)$ となる $X_0\in\mathfrak{X}$ を一つとれば，$X_0\not\subset U(\gamma_0)$ となるから，$X_0$ の元 $x_0$ で，$v(x_0)\leqq\gamma_0$ となるものが存在する．$\alpha=v(x_0)$ とお

く．そうすれば，$\gamma\geqq\gamma_0$ の $\gamma$ に対して $X\times X\subset V(\gamma)$ となる $X$ の任意の元 $x$ の値は $\alpha$ となる．実際，$\mathfrak{X}$ はフィルターであるから $X\cap X_0$ はある元 $y$ を含み，$v(x-y)>\gamma$，$v(y-x_0)>\gamma_0$，$v(x_0)=\alpha\leqq\gamma_0$ であるから，

$$v(x)=v((x-y)+(y-x_0)+x_0)=\alpha .$$

この $\alpha$ を $\mathfrak{X}$ の値とよび，$v(\mathfrak{X})$ と記そう．また，$\mathfrak{X}$ が 0 に収束する filter ならば $v(\mathfrak{X})=\infty$ と定める．

二つの Cauchy filter $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ が与えられたとき，

$$\{X+Y|X\in\mathfrak{X}, Y\in\mathfrak{Y}\},\quad \{XY|X\in\mathfrak{X}, Y\in\mathfrak{Y}\}$$

が filter の基となることは，

$$(X_1+Y_1)\cap(X_2+Y_2)\supset(X_1\cap X_2)+(X_1\cap Y_2)\quad(X_i\in\mathfrak{X}, Y_i\in\mathfrak{Y})$$

$$X_1Y_1\cap X_2Y_2\supset(X_1\cap X_2)(Y_1\cap Y_2)$$

からあきらかである．これらから生成された filter を，それぞれ $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ で表わす．

$$X\times X\subset V(\gamma),\quad Y\times Y\subset V(\gamma)\Rightarrow(X+Y)\times(X+Y)\subset V(\gamma)$$

であるから，$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}$ は Cauchy filter となり，かつ

$$v(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})\geqq\min(v(\mathfrak{X}),v(\mathfrak{Y}))$$

となる．次に，$\mathfrak{X}$ も $\mathfrak{Y}$ も 0 に収束しないとき，$\alpha=v(\mathfrak{X})$，$\beta=v(\mathfrak{Y})$ とおけば，

$$X\times X\subset V(\gamma-\alpha),\quad Y\times Y\subset V(\gamma-\beta)\Rightarrow XY\times XY\subset V(\gamma)$$

が成り立つから，$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ も Cauchy filter で，

$$v(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})=v(\mathfrak{X})+v(\mathfrak{Y})$$

が得られる．$\mathfrak{X}$ または $\mathfrak{Y}$ が 0 に収束するならば，$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ も 0 に収束する．

Cauchy filter $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ において，$\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y}$ がまた Cauchy filter となるとき $\mathfrak{X}\sim\mathfrak{Y}$ と書くことにすれば，～は同値関係となる．Cauchy filter 全体の集合を～で類別して得られる商集合を $\tilde{K}$ とすれば，上に定義した加法・乗法は $\tilde{K}$ の加法・乗法を定め，これによって $\tilde{K}$ は可換環となる．$K$ の元 $x$ に収束する filter 全体は一つの類を作るから，これを $x$ と同一視することによって $K\subset\tilde{K}$ と考えられる．そして 0 に収束しない任意の Cauchy filter $\mathfrak{X}$ をとれば，十分大きいすべての $\gamma\in\Gamma$ に対して，$X\times X\subset V(\gamma)$ となる $X\in\mathfrak{X}$ は 0 を含まず，$X$ を動かしたとき，$Y=\{x^{-1}|x\in X\}$ の全体の生成する filter $\mathfrak{Y}$ は Cauchy filter で，$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\sim1$ をみたす．従って $\tilde{K}$ は体となる．

$\tilde{K}$ の 0 でない元 $\xi$ に対し，それを代表する Cauchy filter の値は $\xi$ によって定まる．この値を $\tilde{v}(\xi)$ で表わせば，$\tilde{v}$ は体 $\tilde{K}$ の，値群 $\Gamma$ をもつ一つの付値となり，$\tilde{v}$ を $K$ 上に制限したものは $v$ と一致する．しかも，$\tilde{K}$ の $\tilde{v}$ による位相は，$(K,v)$ の一様空間としての完備化にほかならない．従って，$(\tilde{K},\tilde{v})$ は完備で，$(K,v)$ はその稠密な部分体となる．

$\tilde{K}$ における 0 の近傍を

$$\tilde{U}(\alpha)=\{\xi\in\tilde{K}|\tilde{v}(\xi)>\alpha\}$$

で表わそう．$\tilde{v}$ の付値環 $\tilde{R}$ は $R$ を含む閉集合であるから，$R$ の $\tilde{K}$ における閉包を含む．一方 $R$ の閉包に属さない $\tilde{K}$ の元をとれば，そのある近傍 $\xi+\tilde{U}(\gamma)$ は $R$ と交わらない．$K$ は $\tilde{K}$ 内で稠密であるから，$(\xi+\tilde{U}(\gamma))\cap K$ はある元 $x$ を含み，その値は $<0$ となる．$\gamma$ として $\geqq 0$ のものがとれるから，$\tilde{v}(\xi)=\tilde{v}(\xi-x+x)=\tilde{v}(x)<0$. ゆえに $\xi$ は $\tilde{R}$ に属さない．従って，$\tilde{R}$ は $R$ の閉包と一致する．同様の理由で，$\tilde{R}$ の極大イデアル $\tilde{\mathfrak{m}}$ は $\mathfrak{m}$ の閉包であることがわかる．$\tilde{R}$ が $R$ の閉包と一致することから，$R$ の任意の元 $\xi$ に対して，適当な $R$ の元 $x$ をとれば，$\tilde{v}(\xi-x)>0$ となる．これは，$\tilde{v}$ の剰余体 $\tilde{\Delta}$ が $\Delta$ と等しいことを示している．

以上によって，次の定理が得られた．

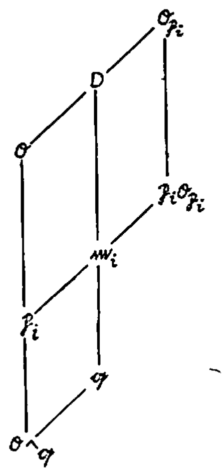
**定理 1**　付値体 $(K, v)$ に対して，その一様空間としての完備化を与える付値 $(\tilde{K}, \tilde{v})$ が存在する．

## §3.　有限個の付値の間の関係

前と同様，付値 $v$ の付値環，その極大イデアル，剰余体，値群，rank, rational rank をそれぞれ $R, \mathfrak{m}, \Delta, \Gamma, r, \rho$ で表わす．本節では，このほかの付値 $v', \tilde{v}, v_1, v_2, \cdots$ 等も考えるが，これらについては，対応する記号にそれぞれの添字をつけて表わす．たとえば，$v'$ の付値環を $R'$, $\tilde{v}$ の剰余体を $\tilde{\Delta}$, $v_i$ の値群を $\Gamma_i$ 等．

以下，本稿全体を通じて，環のイデアルというときは，その環全体とは一致しないもののみをさすことにする．

次の命題は，純粋に環論の命題である．




**命題 7**　$\mathfrak{o}$ を整域，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ をその有限個の素イデアルとし，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ のどの二つも互に包含関係をもたないとする．そのとき，$D=\bigcap_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}$ は準局所環 (semi-local ring) で，$\mathfrak{m}_i=D\cap\mathfrak{p}_i\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}$ $(i=1, \cdots, n)$ がその極大イデアルのすべてである．

$D$ の素イデアル $\mathfrak{q}$ に，$\mathfrak{o}$ の素イデアル $\mathfrak{o}\cap\mathfrak{q}$ を対応させることによって，$D$ の素イデアル全体と，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ の少なくとも一つに含まれる $\mathfrak{o}$ の素イデアル全体とが1対1に対応する．

$\mathfrak{o}$ がネーター環ならば，$D$ もネーター環となる．

**証明**　まず，$D$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ は，少なくとも一つの $\mathfrak{m}_i$ に含まれることを示そう．仮に $\mathfrak{a}$ がどの $\mathfrak{m}_i$ にも含まれないと仮定する．$\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n$ は有限個の素イデアルで，どの二つも包含関係をもたないから，$\mathfrak{a}$ の元 $a$ でどの $\mathfrak{m}_i$ にも含まれないものが存在する．([1] p. 215 Remark). そうすれば，各 $i$ について $a\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}$, $a\notin\mathfrak{p}_i\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}$ であるから $a^{-1}\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}$. 従って $a^{-1}\in D$. $a$ は $\mathfrak{a}$ の元であったから，これは矛盾である．

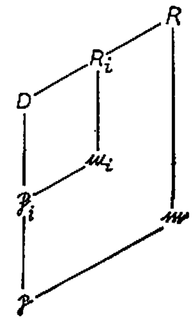
上に証明したことと，$\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n$ が包含関係をもたないことから，これらが $D$ の極大イデア

ルのすべてであることが得られる．命題7に述べた1対1の対応も，今やあきらかである．

$D$ がネーター環でなければ，ある $\mathfrak{m}_i$ に含まれる $D$ のイデアルの昇鎖列で長さ無限のものが存在する．これらのイデアルと $\mathfrak{o}$ との交わりは，$\mathfrak{o}$ のイデアルの長さ無限の昇鎖列を与え，$\mathfrak{o}$ がネーター環でなくなる．

**命題 8** 体 $K$ の，有限個の互に異なる付値 $v_1,\cdots,v_n$ に対して，$D=\bigcap_{i=1}^{n} R_i$ とおけば，$D$ を含む $K$ の付値環全体の集合 $\mathfrak{R}$ と，$D$ の素イデアル全体の集合 $\mathfrak{P}$ とは，次の対応によって1対1に対応する．

$$\mathfrak{R}\ni R\to D\cap\mathfrak{m}\in\mathfrak{P},\quad \mathfrak{P}\ni\mathfrak{p}\to D_{\mathfrak{p}}\in\mathfrak{R}$$



さらに，$\{R_1,\cdots,R_n\}$ の中で極小なもの全体の集合を，（適当に番号をつけかえて）$\{R_1,\cdots,R_r\}$ とすれば，これらが $\mathfrak{R}$ の中の極小なものの全体である．従って，$\mathfrak{p}_i=D\cap\mathfrak{m}_i$ とおけば，$\{\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_r\}$ が $D$ の極大イデアルの全体である．

**証明** $\mathfrak{R}\ni R$ に対して $\mathfrak{p}=D\cap\mathfrak{m}$ とおけば，あきらかに，$\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}$ かつ $D_{\mathfrak{p}}\subset R_{\mathfrak{m}}=R$．一方 [3] p. 37 (11.10) により $R\subset D_{\mathfrak{p}}$．ゆえに $R=D_{\mathfrak{p}}$．これからまた，対応 $R\to D\cap\mathfrak{m}$ が injective であることもわかる．

とくに $R_i=D_{\mathfrak{p}_i}\,(i=1,\cdots,r)$．$R_1,\cdots,R_r$ の間には包含関係はあり得ないから，$\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_r$ の間にも包含関係はあり得ず，従って命題7により，$\{\mathfrak{p}_1,\cdots\mathfrak{p}_r\}$ が $D$ の極大イデアルのすべてである．

従って，$D$ の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ は，ある $\mathfrak{p}_i$ に含まれる．従って $D_{\mathfrak{p}}\supset D_{\mathfrak{p}_i}=R_i$．$R_i$ は付値環であるから，それを含む $D_{\mathfrak{p}}$ も付値環となる．そして $D\cap\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}$ であるから，対応 $R\to D\cap\mathfrak{m}$ が surjective であることと，この逆写像が $\mathfrak{p}\to D_{\mathfrak{p}}$ であることが示された．さらに，$\mathfrak{R}$ の任意の元が，ある $R_i$ $(1\leqq i\leqq r)$ を含むことも示されている．

体 $K$ の付値 $v,v'$ において，$R\subset R'$ であるとき，$v$ は $v'$ の**特殊化**であるという．$R\subset R'\Longleftrightarrow[v(x)\geqq0\Rightarrow v'(x)\geqq0]\Longleftrightarrow[v'(x)<0\Rightarrow v(x)<0]\Longleftrightarrow[v'(x)>0\Rightarrow v(x)>0]\Longleftrightarrow\mathfrak{m}\supset\mathfrak{m}'$.

命題8を，$n=1$ の場合に適用すれば，$R'\leftrightarrow\mathfrak{m}'$ は，$R$ を含む付値環全体の集合と $R$ の素イデアル全体の集合との間の1対1の対応を与え，かつ

$$R'=R_{\mathfrak{m}'}$$

が成り立つ．とくに，$K$ と $(0)$ とが対応する．

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
& K \arrow[d] & & \\
\pi' : & R' \arrow[r, "", ->] \arrow[d] & \Delta' \arrow[d] & \\
\pi : & R \arrow[r, "\pi'", ->] \arrow[d] & \bar{R} \arrow[r, "\bar{\pi}", ->] \arrow[d] & \Delta \arrow[d] \\
& \mathfrak{m} \arrow[r, ->] \arrow[d] & \bar{\mathfrak{m}} \arrow[r, ->] \arrow[d] & 0 \\
& \mathfrak{m}' \arrow[r, ->] \arrow[d] & 0 & \\
& 0 & &
\end{tikzcd}$$

命題2の対応によって，$R$ の素イデアル $\mathfrak{m}'$ と $\Gamma$ の孤立部分群 $A$ とが対応するとする．$\Gamma$ から $\Gamma/A$ への標準的準同型を $\varphi$ とすれば，$\varphi\circ v$ は $\Gamma/A$ を値群とする $K$ の付値となり，その付値環は $R'$ となる．ゆえに

$$\Gamma'=\Gamma/A,\quad v'=\varphi\circ v$$

とみなすことができる．とくに，$v$ が discrete ならば，$v'$ も discrete であることがわかる．

$R\subset R'$ のとき，$\pi'(R)=\bar{R}$, $\pi'(\mathfrak{m})=\bar{\mathfrak{m}}$ とおこう．すなわち $\bar{R}=R/\mathfrak{m}'$, $\bar{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}/\mathfrak{m}'$. そうすれば，$R=\pi'^{-1}(\bar{R})$, $\mathfrak{m}=\pi'^{-1}(\bar{\mathfrak{m}})$ となる．また，$\Delta'$ の 0 でない元 $\pi'(x)$ に $v(x)\in\Gamma$ を対応させる写像 $\bar{v}$ は矛盾なく定義される．$\left(\pi'(x)=\pi'(y)\neq 0\Rightarrow\pi'\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\pi'(x)}{\pi'(y)}=1\Rightarrow\pi'\left(\frac{x}{y}\right)\in\bar{R},\ \notin\bar{\mathfrak{m}}\Rightarrow\frac{x}{y}\in R,\ \notin\mathfrak{m}\Rightarrow v\left(\frac{x}{y}\right)=0\Rightarrow v(x)=v(y).\right)$ さらに，$\bar{v}(\Delta'^*)=\{v(x)|x\in R',\ \notin\mathfrak{m}'\}=\{v(x)|x\notin\mathfrak{m}',\ x^{-1}\notin\mathfrak{m}'\}=A$. ゆえに写像

$$\bar{v}:\Delta'^*\to A$$

が定義される．これは体 $\Delta'$ の付値となり，その付値環は $\bar{R}$, その極大イデアルは $\bar{\mathfrak{m}}$ である．$\bar{R}/\bar{\mathfrak{m}}=R/\mathfrak{m}'\Big/\mathfrak{m}/\mathfrak{m}'\cong R/\mathfrak{m}=\Delta$ であるから，

$$\bar{\Delta}=\Delta$$

$$R \text{ 上では } \pi=\bar{\pi}\circ\pi'$$

とみなすことができる．

逆に，$\Delta'$ の任意の付値環 $\bar{R}$ をとり，$\pi'^{-1}(\bar{R})=R$ とおけば，$R$ は $R'$ に含まれる $K$ の付値環となる．ゆえに，$R\to\pi'(R)$, $\pi'^{-1}(\bar{R})\leftarrow\bar{R}$ によって，$v'$ の特殊化全体の集合と $\Delta'$ の付値全体の集合とが1対1に対応する．この対応で $\Delta'$ の付値 $\bar{v}$ に対応する $K$ の付値 $v$ は，$v'$ と $\bar{v}$ との**結合**であるといわれる．このとき，

$$\Gamma'=\Gamma/\bar{\Gamma}$$

であるから，とくに

$$r=\bar{r}+r',\quad \rho=\bar{\rho}+\rho'$$

が成り立つ．

以上で，次の命題が得られた．

**命題 9**　体 $K$ の付値 $v$ が $v'$ の特殊化であることは，次のおのおのと同値である．

(1)　$\mathfrak{m}'\subset\mathfrak{m}$.

(2)　$\mathfrak{m}'$ は $R$ の素イデアルである．

(3)　$\Gamma$ のある孤立部分群 $A$ が存在して，$\Gamma'=\Gamma/A$, $v'=\varphi\circ v$. ($\varphi:\Gamma\to\Gamma'$ は標準的準同型)

(4)　$\Delta'$ のある付値 $\bar{v}$ が存在して，$v$ は $v'$ と $\bar{v}$ との結合となる．

これらの条件が成り立つとき，(2) の $\mathfrak{m}'$ と (3) の $A$ とは，命題2の意味で対応する．また $A=\bar{\Gamma}$, $R'=R_{\mathfrak{m}'}$, $\pi'^{-1}(\bar{R})=R$, $\pi'^{-1}(\bar{\mathfrak{m}})=\mathfrak{m}$ が成り立つ．

$v_1,\cdots,v_n$ を体 $K$ の付値とし，$D=\bigcap_{i=1}^{n}R_i$, $\mathfrak{p}_i=D\cap\mathfrak{m}_i$ とすれば，命題 8 によって $R_i=D_{\mathfrak{p}_i}$ となる．次に $\mathfrak{a}_i$ を $R_i$ の (0) でないイデアルとすれば，

$$\mathfrak{a}_i\ni x=\frac{a}{b},\ a,b\in D,\ b\notin\mathfrak{p}_i\Rightarrow a=bx\in\mathfrak{a}_i\cap D$$

であるから，$\mathfrak{b}_i=D\cap\mathfrak{a}_i$ も (0) でない．さらに，$\mathfrak{b}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{b}_i\supset\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{b}_i$ も (0) でない．

**命題 10**　$v_1,\cdots,v_n$, $D$, $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{d}$ は上の通りとする．ここでさらに,

（1） $v_1,\cdots,v_n$ のどの異なる二つの間にも特殊化の関係がない．

（2） どの異なる二つの番号 $i,j$ に対しても $\mathfrak{b}_i\not\subset\mathfrak{p}_j$

が成り立つならば，次の環の同型が成り立つ．

$$R/\mathfrak{d}\cong R_1/\mathfrak{a}_1\oplus\cdots\oplus R_n/\mathfrak{a}_n \quad (x \bmod \mathfrak{d}\leftrightarrow(\cdots,x \bmod \mathfrak{a}_i,\cdots))$$

**証明**　条件 (1) によって，$\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n$ が $D$ の極大イデアルのすべてである．ゆえに条件 (2) により，$\mathfrak{b}_i+\mathfrak{b}_j=D$ $(i\neq j)$ となる．従って,

$$D/\mathfrak{d}\cong D/\mathfrak{b}_1\oplus\cdots\oplus D/\mathfrak{b}_n \quad (x \bmod \mathfrak{d}\leftrightarrow(\cdots,x \bmod \mathfrak{b}_i,\cdots))$$

が成り立つ．

ふたたび (1), (2) により，$D/\mathfrak{b}_i$ は $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{b}_i$ を極大イデアルにもつ局所環である．従って $\mathfrak{p}_i$ に属さない $D$ の元は $\bmod \mathfrak{b}_i$ で逆元をもつ．$R_i=D_{\mathfrak{p}_i}$ の任意の元 $x=\dfrac{a}{b}$, $a,b\in D$, $b\notin\mathfrak{p}_i$ に対し，$b$ の $\bmod \mathfrak{b}_i$ での逆元 $c$ をとれば，$x\equiv ac \pmod{\mathfrak{a}_i}$．ゆえに $R_i/\mathfrak{a}_i=D/\mathfrak{b}_i$.

$v_1,\cdots,v_n$ は命題 10 の通りとし，ここで $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{m}_i$ $(i=1,\cdots,n)$ と選べば，条件 (1), (2) が成り立つ．従って $\mathfrak{d}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$ として,

$$D/\mathfrak{d}\cong\Delta_1\oplus\cdots\oplus\Delta_n \quad (x \bmod \mathfrak{d}\leftrightarrow(\pi_1(x_1)\cdots,\pi_n(x)))$$

が成り立つ．この同型から次の命題が導かれる．

**命題 11**　(place に関する独立定理) $v_1,\cdots,v_n$ は，どの二つの間にも特殊化の関係がない $K$ の付値とする．各 $\Delta_i\cup\{\infty\}$ から任意に $\xi_i(i=1,\cdots,n)$ を選ぶとき,

$$\pi_i(x)=\xi_i \quad (i=1,\cdots,n)$$

をみたす $K$ の元 $x$ が存在する．

**証明**　どの $\xi_i$ も $\infty$ でない場合は，すぐ上の同型からあきらかである．

一般の場合を証明するには,

$$\pi_i(x_i)=1\,,\quad \pi_j(x_i)=0 \quad (i\neq j)$$
$$\pi_i(y_i)=\xi_i\,,\quad \pi_j(y_i)\neq\infty \quad (i\neq j)$$

をみたすような $2n$ 個の $K$ の元 $x_1,\cdots,x_n$, $y_1,\cdots,y_n$ の存在をいえばよい．これがいえれば，$x=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ が所要の条件をみたすからである．

$x_1,\cdots,x_n$ の存在および $\xi_i\neq\infty$ の場合の $y_i$ の存在は，最初の部分で証明されている．$\xi_i=\infty$ ならば，$\pi_i(y_i')=0$, $\pi_j(y_i')=1$ をみたす $y_i'$ をとり，$y_i=y_i'^{-1}$ とすればよい．

命題 11 の別証（命題 8, 10 を用いない直接の証明）については，[2] p. 30, Lemma 2 参照．

体 $K$ の付値 $v_1,\cdots,v_n$ において，どの $v_i$ も自明でなく，(すなわち $R_i\neq K$) かつどの二つの異なる番号 $i,j$ に対しても，$R_i$ と $R_j$ の生成する $K$ の部分環が $K$ となるとき，$v_1,\cdots,v_n$ は**独立**であるという．この第 2 の条件は，どの二つの $v_i,v_j$ に対しても，それらを特殊化にもつような自明でない一つの付値は存在しないともいいかえられる．また，命題 8 によれば，どの二

つの $i,j$ に対しても，$\mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{p}_j$ に含まれる $D$ の素イデアルは (0) しかないともいいかえられる．

$v_1,\cdots,v_n$ が独立ならば，あきらかに命題 10 の条件 (1) は成り立つ．さらに，$\mathfrak{a}_i$ を $R_i$ の (0) でない任意のイデアルとするとき，$v_1,\cdots,v_n$ が独立ならば，命題 10 の条件 (2) も成り立つことを示そう．$R_i$ の素イデアル全体の集合は包含関係によって全順序集合を作っているから，$\mathfrak{a}_i$ を含む素イデアル全体の共通部分である $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}_i$ は素イデアルである．従って，$\mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}_i=\mathrm{Rad}\,\mathfrak{a}_i \cap D$ は $D$ の素イデアルである．もし，$\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}_j$，$i \neq j$ が成り立ったとすれば，$\mathrm{Rad}\,\mathfrak{q}_i$ は $\mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{p}_j$ に含まれる (0) でない素イデアルとなり，$v_1,\cdots,v_n$ が独立であることに反する．

今証明したことによって，次の命題が得られる．

**命題 12**（近似定理）$v_1,\cdots,v_n$ は $K$ の独立な付値とし，$x_1,\cdots,x_n$ は $K$ の任意の元，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ はそれぞれ $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n$ の任意の元とすれば，

$$v_i(x-x_i)>\alpha_i \quad (i=1,\cdots,n)$$

をみたす $K$ の元 $x$ が存在する．

すなわち，$x_1,\cdots,x_n$ を任意に与え，かつ各 $v_i$ の定める位相による $x_i$ の近傍 $U_i$ を任意に与えると，$U_1 \cap \cdots \cap U_n \neq \phi$ が成り立つ．

**証明**　$x_i \in R_i$ $(i=1,\cdots,n)$ の場合，$R_i$ から元 $a_i$ を，$v_i(a_i)>\alpha_i$ をみたすように選べば，上に証明したことと命題 10 とから，同型

$$D/\mathfrak{b} \cong R_1/R_1a_1 \oplus \cdots \oplus R_n/R_na_n \ (x \bmod \mathfrak{b} \leftrightarrow (\cdots, x \bmod R_ia_i, \cdots))$$

が得られる．ただし $\mathfrak{b}=\bigcap_{i=1}^{n} R_ia_i$．右辺の元 $(x_1 \bmod R_1a_1,\cdots,x_n \bmod R_na_n)$ に対応する左辺の元を $x \bmod \mathfrak{b}$ とすれば，$x-x_i \in R_ia_i$．ゆえに $v_i(x-x_i)>\alpha_i$ となる．

一般の場合，$x_i \notin R_i$ $(i=1,\cdots,m)$，$x_j \in R_j$ $(j=m+1,\cdots,n)$ とする．そうすれば，$x_i^{-1} \in R_i$ $(i=1,\cdots,m)$．そして $\bigcap_{i=1}^{m} x_i^{-1}R_i \cap \bigcap_{j=m+1}^{n} R_j$ は，0 でない元 $y$ を含む．この $y$ に対して，$x_iy \in R_i$ $(i=1,\cdots,n)$．ゆえに上に証明したことにより，

$$v_i(z-x_iy)>v_i(y)+\alpha_i \quad (i=1,\cdots,n)$$

をみたす $K$ の元 $z$ が存在する．$x=\dfrac{z}{y}$ は所要の条件をみたす．

命題 12 の別証（命題 8, 10 を用いない直接の証明法）については [2] p. 47 Theorem 18′ 参照．

**命題 13**（強い近似定理）$v_i, x_i, \alpha_i$ $(i=1,\cdots,n)$ を命題 12 の通りとすれば，

$$v_i(x-x_i)=\alpha_i \quad (i=1,\cdots,n)$$

をみたす $K$ の元 $x$ が存在する．

**証明**　近似定理から強い近似定理が導かれる．[2] p. 47 Theorem 18′ の証明の最初の部分参照．

## 引用文献


［1］ O. Zariski, P. Samnel: Commutative Algebra Vol. 1.
［2］ O. Zariski, P. Samnel: Commutative Algebra Vol. 2.
［3］ M. Nagata: Local Rings.