

### 断面が段階的に変化する真直はりの曲げのラプラス変換による解法

KOIDO, Shoroku / 小井戸, 正六

---

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部  
研究集報

(巻 / Volume)

1

(開始ページ / Start Page)

55

(終了ページ / End Page)

62

(発行年 / Year)

1964-05

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004288>

# 断面が階段的に変化する真直はりの曲げの ラプラス変換による解法

教授 小井土正六 (機械工学科)

## A Method to Solve the Problem of Bending of Beam having Stepwisely Variable Cross Section by Laplace Transformation

Shōroku Koido, Professor

### 1. 緒 言

断面が全長にわたり一様である真直はりの曲げの解法にラプラス変換を利用することが非常に有利であることは、各種のラプラス変換の教科書に説明されており、また種々の不連続な曲線をラプラス変換により簡明に表現することができることもよく知られている。

これらのことを利用して、著者は先に断面2次モーメントが  $I_0e^{\alpha x}$ ,  $I_0(1+\alpha x)^n$  と変化する場合の真直はりの弾性線の式を求めたが<sup>1)</sup>、本研究はその一環として断面が階段的に変化する真直はり(以下段付はりとよぶ)の一般的な弾性線の式を導出することを試みた。従来特殊な場合の弾性線の式の求め方は説明されているが<sup>2)</sup>、任意の段数の段付はりについての計算は示されていないので、この報告に示される結果は段付はりの計算を簡便にすることに大きな役割を果すものと考えられる。

### 2. 段付はりの曲げの微分方程式に対するラプラス変換の応用

一般に断面変化する真直はりに、軸に垂直方向の荷重  $F(x)$  ( $x$  の函数と考えられる) の作用するときの微分方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 Y}{dx^2} \right) = F(x) \quad (1)$$

で示される。ここで

$Y$ : はりのたわみ

$x$ : はりの左端を座標の原点として、はりの軸方向にとった距離

$E$ : はりの材料の縦弾性係数(一定とする)

$I$ : はりの断面の2次モーメント( $x$ の函数とする)

(1) 式を書きなおして

$$I \frac{d^4 Y}{dx^4} + 2 \frac{dI}{dx} \frac{d^3 Y}{dx^3} + \frac{d^2 I}{dx^2} \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{F(x)}{E} \quad (2)$$

断面変化するはりの曲げには、(2) 式の左辺が必ず出てくるので、この式の段付はりに対してのラプラス変換を考える。

段付はりの断面 2 次モーメント  $I$  は、段数を  $m$  ( $=1, 2, 3, \dots, m$ ),  $l_1 < l_2 < \dots < l_m$  として

左端より  $l_1$  の距離までの断面の 2 次モーメントを  $I_1$ ,

左端より距離  $l_1$  より  $l_2$  までの間の断面の 2 次モーメントを  $I_2$ ,

.....

.....

左端より距離  $l_{m-1}$  より  $l_m$  までの間の断面の 2 次モーメントを  $I_m$

とすると、任意の位置における断面 2 次モーメント  $I$  はヘビサイドの単位関数を  $H(x)$  として、つぎのように表現できる。

$$I = I_1 + (I_2 - I_1)H(x - l_1) + (I_3 - I_2)H(x - l_2) + \dots + (I_m - I_{m-1})H(x - l_{m-1}) \quad (3)$$

$\delta(x)$  をディラックのデルタ関数、 $\delta^{(1)}(x)$  を  $\delta(x)$  の一次導関数として、単位関数を微分したものがデルタ関数であるから、(3) 式より

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= (I_2 - I_1)\delta(x - l_1) + (I_3 - I_2)\delta(x - l_2) + \dots + (I_m - I_{m-1})\delta(x - l_{m-1}) \\ \frac{d^2 I}{dx^2} &= (I_2 - I_1)\delta^{(1)}(x - l_1) + (I_3 - I_2)\delta^{(1)}(x - l_2) + \dots + (I_m - I_{m-1})\delta^{(1)}(x - l_{m-1}) \end{aligned}$$

したがって、(2) 式の左辺は次のように書ける。

$$\begin{aligned} &\{I_1 + (I_2 - I_1)H(x - l_1) + (I_3 - I_2)H(x - l_2) + \dots + (I_m - I_{m-1})H(x - l_{m-1})\} \frac{d^4 Y}{dx^4} \\ &+ 2\{(I_2 - I_1)\delta(x - l_1) + (I_3 - I_2)\delta(x - l_2) + \dots + (I_m - I_{m-1})\delta(x - l_{m-1})\} \frac{d^3 Y}{dx^3} \\ &+ \{(I_2 - I_1)\delta^{(1)}(x - l_1) + (I_3 - I_2)\delta^{(1)}(x - l_2) + \dots + (I_m - I_{m-1})\delta^{(1)}(x - l_{m-1})\} \frac{d^2 Y}{dx^2} \quad (4) \end{aligned}$$

$1 \leq r \leq m-1$  なる整数  $r$  をとり、 $s$  を像空間における変数、 $L\{ \}$  を括弧の中の関数のラプラス変換を示すものとして、ラプラス変換の定義より

$$L\left\{H(x - l_r) \frac{d^4 Y}{dx^4}\right\} = \int_0^\infty e^{-sx} Y^{(4)}(x) dx - \int_0^{l_r} e^{-sx} Y^{(4)}(x) dx \quad (5)$$

しかるにラプラス変換のよく知られた公式により、 $Y(x)$  の像関数を  $y(s)$  として

$$\int_0^\infty e^{-sx} Y^{(4)}(x) dx = s^4 y(s) - s^3 Y(0) - s^2 Y^{(1)}(0) - s Y^{(2)}(0) - Y^{(3)}(0)$$

また (5) 式の第 2 項は部分積分を用いて、 $Y^{(4)}(x)$  の微分の次数を減少させて行くことにより

$$- \int_0^{l_r} e^{-sx} Y^{(4)}(x) dx = s^3 Y(0) + s^2 Y^{(1)}(0) + s Y^{(2)}(0) + Y^{(3)}(0)$$

$$-e^{-l_r s} \{s^3 Y(l_r) + s^2 Y^{(1)}(l_r) + s Y^{(2)}(l_r) + Y^{(3)}(l_r)\} - s^4 \int_0^{l_r} e^{-sx} Y(x) dx$$

よって

$$L \left\{ H(x-l_r) \frac{d^4 Y}{dx^4} \right\} = s^4 \left\{ y(s) - \int_0^{l_r} e^{-sx} Y(x) dx \right\} - e^{-l_r s} \{s^3 Y(l_r) + s^2 Y^{(1)}(l_r) + s Y^{(2)}(l_r) + Y^{(3)}(l_r)\}$$

つぎに公式に示されるように

$$L \left\{ \delta(x-l_r) \frac{d^3 Y}{dx^3} \right\} = \int_0^\infty \delta(x-l_r) e^{-sx} Y^{(3)}(x) dx = e^{-l_r s} Y^{(3)}(l_r)$$

また部分積分を行うことにより

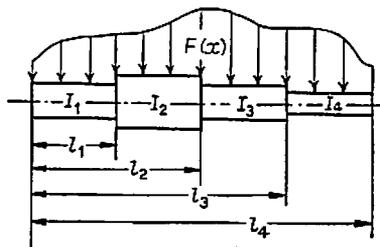
$$L \left\{ \delta^{(1)}(x-l_r) \frac{d^2 Y}{dx^2} \right\} = \int_0^\infty \delta^{(1)}(x-l_r) e^{-sx} Y^{(2)}(x) dx = s e^{-l_r s} Y^{(2)}(l_r) - e^{-l_r s} Y^{(3)}(l_r)$$

以上の計算を総合して (4) 式のラプラス変換は

$$I_1 \{s^4 y(s) - s^3 Y(0) - s^2 Y^{(1)}(0) - s Y^{(2)}(0) - Y^{(3)}(0)\} + \sum_{r=1}^{m-1} (I_{r+1} - I_r) \left[ s^4 \left\{ y(s) - \int_0^{l_r} e^{-sx} Y(x) dx \right\} - e^{-l_r s} \{s^3 Y(l_r) + s^2 Y^{(1)}(l_r)\} \right] \quad (6)$$

### 3. はりの軸に垂直方向の荷重の作用する場合の逆変換

第1図のように軸に垂直方向の荷重  $F(x)$  が作用するはりの弾性線の微分方程式は (2) 式によって示される。(6) 式を用いて (2) 式をラプラス変換すると、 $F(x)$  の像函数を  $f(s)$  として



第1図

$$I_1 y(s) + \sum_{r=1}^{m-1} (I_{r+1} - I_r) \left\{ y(s) - \int_0^{l_r} e^{-sx} Y(x) dx \right\} = \frac{1}{E} \frac{f(s)}{s^4} + I_1 \left\{ \frac{Y(0)}{s} + \frac{Y^{(1)}(0)}{s^2} + \frac{Y^{(2)}(0)}{s^3} + \frac{Y^{(3)}(0)}{s^4} \right\} + \sum_{r=1}^{m-1} (I_{r+1} - I_r) e^{-l_r s} \left\{ \frac{Y(l_r)}{s} + \frac{Y^{(1)}(l_r)}{s^2} \right\} \quad (7)$$

逆変換の記号を  $L^{-1}$  で示し、 $L^{-1}\{f(s)/s^4\} = \varphi(x)$ <sup>3)</sup> として、(7) 式を逆変換すると

$$\begin{aligned}
I_1 Y(x) + \sum_{r=1}^{m-1} (I_{r+1} - I_r) Y(x) H(x - l_r) \\
= \frac{\varphi(x)}{E} + I_1 \left\{ Y(0) + Y^{(1)}(0)x + Y^{(2)}(0) \frac{x^2}{2} + Y^{(3)}(0) \frac{x^3}{6} \right\} \\
+ \sum_{r=1}^{m-1} (I_{r+1} - I_r) \{ Y(l_r) H(x - l_r) + Y^{(1)}(l_r)(x - l_r) \}
\end{aligned}$$

したがって

$m=1$  のときのたわみを  $Y_1$ ,

$m=2$  のときのたわみを  $Y_2$ ,

.....

.....

$m=m$  のときのたわみを  $Y_m$

とすると

$$Y_1 = \frac{\varphi(x)}{EI_1} + Y(0) + Y^{(1)}(0)x + Y^{(2)}(0) \frac{x^2}{2} + Y^{(3)}(0) \frac{x^3}{6} \quad (8)$$

(8) 式より  $Y(l_1)$ ,  $Y^{(1)}(l_1)$  を求め代入することにより

$$\begin{aligned}
Y_2 = \frac{\varphi(x)}{EI_2} + \frac{1}{E} \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \{ \varphi(l_1) + \varphi^{(1)}(l_1)(x - l_1) \} + Y(0) + Y^{(1)}(0)x \\
+ Y^{(2)}(0) \left\{ \frac{I_1}{I_2} \frac{x^2}{2} + I_1 \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \left( l_1 x - \frac{l_1^2}{2} \right) \right\} \\
+ Y^{(3)}(0) \left\{ \frac{I_1}{I_2} \frac{x^3}{6} + I_1 \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \left( \frac{l_1^2}{2} x - \frac{l_1^3}{3} \right) \right\}
\end{aligned} \quad (9)$$

つぎに (9) 式より  $Y(l_2)$ ,  $Y^{(1)}(l_2)$  を求めて代入することにより  $Y_3$  を求める。このようにしてつぎつぎに  $Y_4, Y_5, \dots$  と求めると、一般に任意の段数  $m$  段目の弾性線の式はつぎの式で示される。

$$\begin{aligned}
Y_m = \frac{\varphi(x)}{EI_m} + \frac{1}{E} \sum_{k=2}^m \left( \frac{1}{I_{k-1}} - \frac{1}{I_k} \right) \{ \varphi(l_{k-1}) + \varphi^{(1)}(l_{k-1})(x - l_{k-1}) \} \\
+ Y(0) + Y^{(1)}(0)x \\
+ I_1 Y^{(2)}(0) \left\{ \frac{1}{I_m} \frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^m \left( \frac{1}{I_{k-1}} - \frac{1}{I_k} \right) \frac{l_{k-1}}{2} (2x - l_{k-1}) \right\} \\
+ I_1 Y^{(3)}(0) \left\{ \frac{1}{I_m} \frac{x^3}{6} + \sum_{k=2}^m \left( \frac{1}{I_{k-1}} - \frac{1}{I_k} \right) \frac{l_{k-1}^2}{6} (3x - 2l_{k-1}) \right\}
\end{aligned} \quad (10)$$

この式にはりの両端の境界条件<sup>4)</sup>を代入すれば未知定数  $Y(0)$ ,  $Y^{(1)}(0)$ ,  $Y^{(2)}(0)$ ,  $Y^{(3)}(0)$  等についての連立方程式が得られ、これらの値を (10) 式へ代入して弾性線の式を求めることができる。

さらに、(10) 式は各段の境界の  $x$  の値  $l_k$  を代入すると

$$Y_{k-1} = Y_k$$

となり、断面の不連続点におけるたわみの連続の条件を満足していることがわかる。

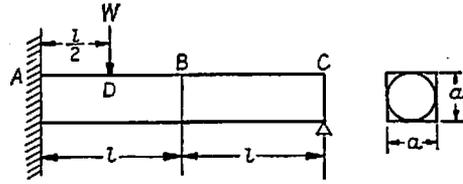
4. 例 題

(1) 第2図のような荷重および支持条件で、AB間は1辺  $a$  の正方形断面、BC間は直径  $a$  の円形断面の場合、

AB間の断面2次モーメントを  $I_1$ 、BC間のを  $I_2$  とすると

$$I_1 = \frac{a^4}{12}$$

$$I_2 = \frac{\pi a^4}{64} = \frac{3\pi}{16} I_1$$



第2図

また集中荷重  $W$  のある場合には、文献3)より、

$$\varphi(x) = \frac{W}{6} \left(x - \frac{l}{2}\right)^3$$

この場合の境界条件は

$$Y(0) = Y^{(1)}(0) = Y(2l) = Y^{(2)}(2l) = 0$$

したがって(10)式を用いてBC間のたわみ  $Y_2$  は

$$Y_2 = \frac{W}{6EI_2} \left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + \frac{W}{E} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) \left\{ \frac{1}{6} \left(l - \frac{l}{2}\right)^3 + \left(l - \frac{l}{2}\right)^2 (x - l) \right\}$$

$$+ I_1 Y^{(2)}(0) \left\{ \frac{1}{I_2} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) \frac{l}{2} (2x - l) \right\}$$

$$+ I_1 Y^{(3)}(0) \left\{ \frac{1}{I_2} \frac{x^3}{6} + \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) \frac{l^2}{6} (3x - 2l) \right\}$$

$Y(2l) = Y^{(2)}(2l) = 0$  の条件と  $I_2 = \frac{3\pi}{16} I_1$  を代入して

$$\left(\frac{20}{9\pi} + \frac{7}{48}\right) \frac{Wl}{EI_1} + \left(\frac{8}{3\pi} + \frac{3}{2}\right) Y^{(2)}(0) + \left(\frac{32}{9\pi} + \frac{2}{3}\right) l Y^{(3)}(0) = 0 \tag{a}$$

$$3 \frac{Wl}{EI_1} + 2Y^{(2)}(0) + 4l Y^{(3)}(0) = 0 \tag{b}$$

(a), (b) 式より

$$Y^{(2)}(0) = \frac{1}{8} \frac{64 + 51\pi}{16 + 21\pi} \frac{Wl}{EI_1}, \quad Y^{(3)}(0) = -\frac{1}{16} \frac{256 + 303\pi}{16 + 21\pi} \frac{W}{EI_1}$$

この値を用いて(10)式より

AD間では

$$Y(x) = \frac{1}{96} \frac{1}{16 + 21\pi} \{6(64 + 51\pi)l - (256 + 303\pi)x\} \frac{W}{EI_1}$$

DB間では

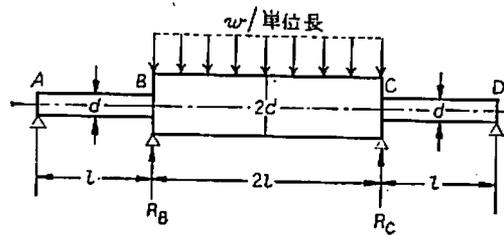
$$Y(x) = \left[ \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{6} + \frac{1}{96} \frac{1}{16 + 21\pi} \{6(64 + 51\pi)l - (256 + 303\pi)x\} \right] \frac{W}{EI_1}$$

BC 間では

$$Y(x) = \left[ \frac{8}{9\pi} \left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + \left(1 - \frac{16}{3\pi}\right) \left(\frac{l}{48} + \frac{x-l}{8}\right) l^2 + \frac{l}{8} \frac{64+51\pi}{16+21\pi} \left\{ \frac{8}{3\pi} x^2 + \left(1 - \frac{16}{3\pi}\right) \frac{l}{2} (2x-l) \right\} - \frac{1}{16} \frac{256+303\pi}{16+21\pi} \left\{ \frac{8}{9\pi} x^3 + \left(1 - \frac{16}{3\pi}\right) \frac{l^2}{6} (3x-2l) \right\} \right] \frac{W}{EI_1}$$

(2) 第3図のような荷重および支持条件で、AB 間および CD 間は直径  $d$  の、BC 間は直径  $2d$  の円形断面である連続はりの場合。

AB, CD 間の断面 2 次モーメントを  $I_1$ , BC 間のを  $I_2$  とすると



第3図

$$I_1 = \frac{\pi}{64} d^4, \quad I_2 = \frac{\pi(2d)^4}{64} = 16I_1, \quad (a)$$

境界条件は

$$Y(0) = Y^{(2)}(0) = Y(4l) = Y^{(2)}(4l) = 0 \quad (b)$$

連続はりの場合は、はりの途中  $x=l$  で  $R_B$ ,  $x=3l$  で  $R_C$  なる集中荷重が上向に作用して、B, C 断面におけるたわみが 0 であるとして解くと都合がよいので

$$Y(l) = Y(3l) = 0 \quad (c)$$

また  $\varphi(x)$  は、

AB 間では  $\varphi(x) = 0$

BC 間では  $\varphi(x) = \frac{w}{14} (x-l)^4$

CD 間では  $\varphi(x) = \frac{w}{14} \{(x-l)^4 - (x-3l)^4\}$

したがって (10) 式により

$$Y_1 = xY^{(1)}(0) + \frac{x^3}{6} Y^{(3)}(0)$$

$$Y_2 = \frac{1}{EI_2} \left\{ \frac{w}{24} (x-l)^4 - \frac{R_B}{6} (x-l)^3 \right\} + xY^{(1)}(0) + I_1 Y^{(3)}(0) \left\{ \frac{1}{I_2} \frac{x^3}{6} + \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \frac{l^2}{6} (3x-2l) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 Y_3 = & \frac{1}{EI_3} \left[ \frac{w}{24} \{ (x-l)^4 - (x-3l)^4 \} - \frac{R_B}{6} (x-l)^3 - \frac{R_C}{6} (x-3l)^3 \right] \\
 & + \frac{1}{E} \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) \left\{ \left( \frac{2}{3} w l^4 - \frac{4}{3} R_B l^3 \right) + \left( \frac{4}{3} w l^3 - 2 R_B l^2 \right) (x-3l) \right\} \\
 & + Y^{(1)}(0) x \\
 & + I_1 Y^{(3)}(0) \left\{ \frac{1}{I_3} \frac{x^3}{6} + \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \frac{l^3}{6} + \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) \frac{3l^2}{2} (3x-6l) \right\}
 \end{aligned}$$

以上の (3) 式に (a), (b), (c) の関係を代入すると

$$Y^{(1)}(0) + \frac{l^2}{6} Y^{(3)}(0) = 0 \tag{d}$$

$$\frac{1}{6} \frac{w l^3}{EI_1} - \frac{1}{3} \frac{R_B l^2}{EI_1} + 12 Y^{(1)}(0) + \frac{11}{2} l^2 Y^{(3)}(0) = 0 \tag{e}$$

$$\frac{35}{24} \frac{w l^3}{EI_1} - \frac{11}{8} \frac{R_B l^2}{EI_1} - \frac{1}{6} \frac{R_C l^2}{EI_1} + 4 Y^{(1)}(0) + \frac{91}{24} l^2 Y^{(3)}(0) = 0 \tag{f}$$

$$4 \frac{w l}{EI_1} - 3 \frac{R_B}{EI_1} - \frac{R_C}{EI_1} + 4 Y^{(3)}(0) = 0 \tag{g}$$

(d), (e), (f), (g) より  $R_B, R_C, Y^{(1)}(0), Y^{(3)}(0)$  を求めると

$$R_B = \frac{20}{19} w l, \quad R_C = \frac{20}{19} w l, \quad Y^{(1)}(0) = -\frac{1}{114} \frac{w l^3}{EI_1}, \quad Y^{(3)}(0) = \frac{1}{19} \frac{w l}{EI_1}$$

これらを代入して

$$\begin{aligned}
 Y_1 = & \frac{1}{114} \frac{w l x}{EI_1} (x^2 - l^2) \\
 Y_2 = & \left\{ \frac{(x-l)^4}{384} - \frac{5}{456} l (x-l)^3 + \frac{29}{1824} l^2 x + \frac{l x^3}{1824} - \frac{15}{912} l^4 \right\} \frac{w}{EI_1} \\
 Y_3 = & \left[ \frac{1}{24} \{ (x-l)^4 - (x-3l)^4 \} - \frac{10}{57} l \{ (x-l)^3 + (x-3l)^3 \} \right. \\
 & \left. - \frac{20}{19} l^4 + \frac{59}{114} l^3 x + \frac{1}{114} x^3 l \right] \frac{w}{EI_1}
 \end{aligned}$$

## 5. 結 び

ラプラス変換を利用することにより、(10) 式に示す真直段付はりの弾性線の一般式を得ることができた。この式を利用すると、作用する荷重を  $x$  の函数として表わした  $F(x)$  の像函数  $f(s)$  を求めて、 $f(s)/s^4$  の逆返換を行い、つぎにはりの両端の支持条件を代入することにより生ずる連立方程式を解くことによるだけで、任意の断面におけるたわみを求めることができる。したがって (10) 式を2回または3回微分することにより曲げモーメント、せん断力をも求めることができる。

すなわち例題に示すように (10) 式を利用することにより複雑な操作を行うことなく真直段付はりに関する計算ができることになった。

文 献

- 1) 法政大学工学部研究報告, 第 11 号, 小井土著, “断面変化する真直梁の曲げのラプラス変換による解法”
- 2) William, T. Thomson, “Laplace Transformation”, p. 109~113.
- 3) 小井土著, “材料力学演習”, p. 140, 第 5.2 表.
- 4) 同 上 p. 141, 第 5.3 表.