

変断面真直梁の曲げたわみの逆多項式展開解法

TAKEDA, Shin' ichiro / 武田, 晋一郎

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部
研究集報

(巻 / Volume)

1

(開始ページ / Start Page)

63

(終了ページ / End Page)

67

(発行年 / Year)

1964-05

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004286>

変断面真直梁の曲げたわみの逆多項式展開解法

教 授 武 田 晋 一 郎 (基礎学科)

Method of Inverse Polynomial Expansion of $EI(x)$ for Solving the Deflection Problem of Straight Beams of Variable Cross Section

Shin'ichiro Takeda, *Professor*

1. 緒 言

変断面の真直梁の曲げたわみの計算については、前に工学部研究報告第 13 号において直接積分法 (Direct Integration Method) を展開して一般公式を得て、積分計算のみで任意の変断面梁のたわみを計算する方法を確立したが、曲げ剛性 $EI(x)$ が $EI_0(1+\alpha x)^n$ あるいは $EI_0 e^{\alpha x}$ など以外のときは一般に計算が著しく困難になるのが普通である。今回は $EI(x)$ を逆多項式に展開することにより計算が著しく簡単になることを知り、その方法を説明し、また $EI(x)$ が実験的に指定されている場合にも (区間でとびとびに与えられているときにも) 適用できることを示すものである。

2. 直接積分法の一般公式

変断面真直梁の曲げ撓みの直接積分法による一般解法はつぎの通りである(研究報告13号参照):

$$\text{微分方程式: } \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} \right\} = F(x) \quad (1)$$

ただし $Y(x)$ は梁の長さ方向 x に垂直な撓み

$EI(x)$ は曲げ剛性

$F(x)$ は荷重分布函数

とする。(1) は 4 階の微分方程式であるが変数分離形であるから、順次に積分を繰返して行けば

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ EI(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} \right\} &= \int_0^x F(\xi) d\xi + A \\ EI(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} &= \int_0^x d\xi \int_0^\xi F(\eta) d\eta + Ax + B \\ \frac{dY}{dx} &= \int_0^x \frac{d\xi}{EI(\xi)} \left\{ \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta F(\zeta) d\zeta + A\xi + B \right\} + C \\ Y(x) &= \int_0^x d\xi \int_0^\xi \frac{d\eta}{EI(\eta)} \left\{ \int_0^\eta d\zeta \int_0^\zeta F(u) du + A\eta + B \right\} + Cx + D \end{aligned}$$

となる。上式の2重積分は合成形 (convolution type) の1重積分で書き改めることができるので

$$Y(x) = \int_0^x \frac{x-\xi}{EI(\xi)} \left\{ \int_0^\xi (\xi-\eta)F(\eta)d\eta + A\xi + B \right\} d\xi + Cx + D \quad (2)$$

となるが、ここで

$$G(x) \equiv \int_0^x \frac{x-\xi}{EI(\xi)} \left\{ \int_0^\xi (\xi-\eta)F(\eta)d\eta \right\} d\xi \quad (3)$$

$$\alpha(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-\xi)\xi}{EI(\xi)} d\xi \quad (4)$$

$$\beta(x) \equiv \int_0^x \frac{x-\xi}{EI(\xi)} d\xi \quad (5)$$

を導入すれば、微分方程式(1)の解は

$$Y(x) = G(x) + A\alpha(x) + B\beta(x) + Cx + D \quad (6)$$

と書くことができる。定数 A, B, C, D は境界条件で決定され、 $F(x)$ と $I(x)$ が与えられると(3)~(6)によって解を計算することができる。これが直接積分法による解法であって、(3), (4), (5)の積分を実行するだけで変断面梁のたわみの一般解をうるることができるのが特徴である。

3. 逆多項式展開法による解法

前節に述べた直接積分法による場合の計算の困難は主として、(3), (4), (5)式における積分の分母に $EI(\xi)$ があることにある。 $I(\xi)$ が少し複雑になると初等函数では表現できない積分となるからである。これを

$$\frac{1}{I(\xi)} = \frac{1}{I_0} (1 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots) = \frac{1}{I_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \quad (7)$$

のように展開できるとすれば、計算は著しく容易になる。すなわち、(7)を(3), (4), (5)に代入すれば、つぎのように計算される。

$$\begin{aligned} EI_0 \cdot \alpha(x) &= \int_0^x (x-\xi)\xi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \cdot d\xi \\ &= x \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{n+1} d\xi - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{n+2} d\xi \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+3} x^{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+2)(n+3)} x^{n+3} \end{aligned} \quad (8)$$

$$EI_0 \cdot \beta(x) = \int_0^x (x-\xi) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2} \quad (9)$$

$$EI_0 \cdot G(x) = \int_0^x (x-\xi) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \right) \cdot M(\xi) d\xi = \int_0^x \left\{ x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{n+1} \right\} M(\xi) d\xi \quad (10)$$

$$\text{ただし } M(\xi) = \int_0^\xi (\xi-\eta)F(\eta)d\eta \quad (\text{モーメント函数})$$

(8), (9), (10) を(6)に代入すれば、求める解が得られる。変断面の影響は係数 a_n に表わされ

ているので、 a_n が知れると計算はいつも可能となるので、問題は著しく簡単になったわけである。つぎに若干の例を示してこの方法を説明する。

4. 応 用 例

前節に述べた逆多項式展開法による解法を 例を用いて解説しよう。

例 1. $I(x) = I_0(1+ax)^m$ の場合:

この場合は直接積分法によってできるが、少し長い式となる (報告 13 号参照)。しかし、本論文の方法によれば全く簡単になる。

$$\frac{1}{I(x)} = \frac{1}{I_0}(1+ax)^{-m} = \frac{1}{I_0} \left\{ 1 - m\alpha x + \frac{m(m+1)}{2} \alpha^2 x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \alpha^3 x^3 + \dots \right\}$$

となるので、展開係数は

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -m\alpha, \quad a_2 = \frac{m(m+1)\alpha^2}{2}, \quad a_3 = -\frac{m(m+1)(m+2)\alpha^3}{6}, \dots$$

$$a_n = (-1)^n \frac{m(m+1) \cdots (m+n-1)\alpha^n}{n!}$$

となる。よって

$$EI_0 \cdot \alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m(m+1) \cdots (m+n-1)}{(n+2)(n+3) \cdot n!} \alpha^n x^{n+3}$$

$$EI_0 \cdot \beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m(m+1) \cdots (m+n-1)}{(n+1)(n+2) \cdot n!} \alpha^n x^{n+2}$$

$$EI_0 \cdot G(x) = \int_0^x (x-\xi) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m(m+1) \cdots (m+n-1)}{n!} \alpha^n \xi^n \right) \cdot M(\xi) d\xi$$

を (6) に代入すれば $Y(x)$ の一般解が得られるから、境界条件によって A, B, C, D を決定すればよい。

$m=1, 2, 3$ の場合にも特別の扱いなしに問題が解けるのは他の方法 (直接積分法 p. 17 あるいは小井土: 材料力学演習 p. 155) と異なり、簡単どころである。

例 2. $I(x) = I_0 e^{ax}$ の場合:

逆数の多項式展開は

$$\frac{1}{I(x)} = \frac{1}{I_0} e^{-ax} = \frac{1}{I_0} \left\{ 1 - \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} - \frac{\alpha^3 x^3}{3!} + \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{I_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n x^n}{n!}$$

$$a_0 = 1, \quad a_n = (-1)^n \frac{\alpha^n}{n!}$$

となるので、

$$EI_0 \cdot \alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{(n+2)(n+3) \cdot n!} x^{n+3}$$

$$EI_0 \cdot \beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{(n+1)(n+2) \cdot n!} x^{n+2}$$

$$EI_0 \cdot G(x) = \int_0^x (x-\xi) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n \xi^n}{n!} \right) \cdot M(\xi) d\xi$$

を (6) に代入して一般解を得るのである。

例 3. 片持梁, 一様分布荷重で $EI(x) = EI_0(1+\alpha x)$ の場合:

荷重分布函数: $F(x) = w$

境界条件: $Y(0) = Y'(0) = 0, \quad Y''(l) = Y'''(l) = 0$

逆多項式展開: $\frac{1}{I(x)} = \frac{1}{I_0} (1+\alpha x)^{-1} = \frac{1}{I_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^n x^n, \quad a_n = (-1)^n \alpha^n,$

$$\alpha(x) = \frac{1}{EI_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{(n+2)(n+3)} x^{n+3}, \quad \beta(x) = \frac{1}{EI_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}$$

$$M(x) = \int_0^x (x-\xi) F(\xi) d\xi = \int_0^x (x-\xi) w d\xi = \frac{w}{2} x^2$$

$$G(x) = \frac{1}{EI_0} \cdot \int_0^x (x-\xi) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \xi^n \right) \cdot \frac{w}{2} \xi^2 d\xi = \frac{w}{2EI_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{(n+3)(n+4)} x^{n+4}$$

$A = -wl, B = \frac{wl^2}{2}, C = D = 0$ を代入すれば, この問題の撓み $Y(x)$ は

$$Y(x) = \frac{w}{2EI_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{(n+3)(n+4)} x^{n+4} - \frac{wl}{EI_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{(n+2)(n+3)} x^{n+3} + \frac{wl^2}{2EI_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}$$

となる. $\alpha = \frac{1}{2}, x = l$ とおけば, 自由端のたわみ $Y(l)$ が得られる:

$$\begin{aligned} \frac{2EI_0}{w} \cdot Y(l) &= \left(\frac{l^4}{12} - \frac{l^5}{40} + \frac{l^6}{120} + \dots \right) \\ &\quad - \left(\frac{l^4}{6} - \frac{l^5}{12} + \frac{l^6}{120} - \dots \right) \\ &\quad + \left(\frac{l^4}{2} - \frac{l^5}{12} + \frac{l^6}{48} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{4} l^4 + \frac{1}{40} l^5 + \frac{1}{240} l^6 + \dots \end{aligned}$$

すなわち

$$Y(l) = \frac{w}{EI_0} \left(\frac{1}{8} l^4 + \frac{1}{80} l^5 + \frac{1}{480} l^6 + \dots \right)$$

$l=1$ とすれば

$$Y(1) = 0.139 \frac{w}{EI_0}$$

となる。

例 4. $EI(x)$ がつぎの表のように $(\cos \theta)$ 変化する一様分布荷重の片持梁の曲げたわみの計算

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\frac{EI(x)}{EI_0}$	1.0000	0.9848	0.9397	0.8660	0.7660	0.6428
$\frac{I_0}{I(x)}$	1.0000	1.0155	1.0642	1.1547	1.3055	1.5557

これに適合する多項式を決定する (最小自乗法などで):

$$\frac{I_0}{I(x)} = 1 + 0.381x^2 + 0.121x^4 + 0.044x^6$$

これを一般式 (3), (4), (5) に代入して計算すると

$$EI_0\alpha(x) = \frac{1}{6}x^3 + 0.0190x^5 + 0.0028x^7 + 0.00062x^9$$

$$EI_0\beta(x) = \frac{1}{2}x^2 + 0.0318x^4 + 0.0040x^6 + 0.0008x^8$$

$$EI_0G(x) = \frac{w}{2}\{0.0833x^4 + 0.0127x^6 + 0.0022x^8 + 0.0005x^{10}\}$$

となる. 今の場合境界条件からは直ちに $A = -w$, $B = \frac{w}{2}$ をうるので

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{w}{2EI_0} \cdot \{0.0833x^4 + 0.0127x^6 + 0.0022x^8 + 0.0005x^{10} \\ &\quad - 0.3333x^3 - 0.0381x^5 - 0.0056x^7 - 0.0012x^9 \\ &\quad + 0.5000x^2 + 0.0318x^4 + 0.0040x^6 + 0.0008x^8\} \\ &= \frac{w}{2EI_0} \{0.5000x^2 - 0.3333x^3 + 0.1151x^4 - 0.0381x^5 + 0.0167x^6 \\ &\quad - 0.0056x^7 + 0.0030x^8 + 0.0005x^{10}\} \end{aligned}$$

この式に $x=0\sim 1$ の値を入れて計算すると, 各点のたわみ $Y(x)$ が求められる.

いまの例では, A, B の値が直ちに知れたが, 普通には $\alpha(x), \beta(x), G(x)$ の境界値の値に関連して決定されるべきものである. しかし, $\alpha(x), \beta(x), G(x)$ が多項式であるから, これらの計算は容易である.

5. 結 言

曲げ剛性 $EI(x)$ の逆多項式展開法によって実用的に十分な精度を持ち, 計算の容易な解法が得られた. 直接積分法による解法の実用解法の形になっている.

(昭和 38 年 10 月 27 日)