

金属ベローズの弾性力学的研究(円環殻理論的考察)

TAKEDA, Shin' ichiro / 武田, 晋一郎

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部
研究集報

(巻 / Volume)

2

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

12

(発行年 / Year)

1965-05

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004283>

金属ベローズの弾性力学的研究

(円環殻理論的考察)

教授 武田 晋一郎 (基礎学科)

Elastomechanical Researches on the Metallic Bellows (Toroidal-shell-theoretical Considerations)

Shin'ichiro Takeda, *Professor of Physics*

1. 緒 言

金属ベローズの弾性力学的研究について、著者は先に梁理論的および円板理論的考察を行って、応力分布、有効面積、荷重（圧力）変位関係式などについて有用な諸公式を得た（法政大学工学部研究報告 第16号、1963年12月）。しかし、金属ベローズの弾性力学的に完全に正確な理論はその形状が円環殻（toroidal shell）であるため、殻理論によらなければならないことは当然である。殻理論はその解法が数学的に極めて困難であるため、ベローズの壁の形状に正確に即した解を得ることが至難である。それ故、前回の報告では形状に即した解の得られる梁理論による解を主として研究したものを述べたが、今回は殻理論の正確な解を求める代りに、近似解法による解を求めて、梁理論では解明の不可能な円周方向の応力分布を求めることを主眼とする。

2. 円環殻の基本方程式

回転対称殻の要素部分に対する釣合の方程式は Timoshenko: Theory of Plate and Shells, 534頁 公式 (312) によれば

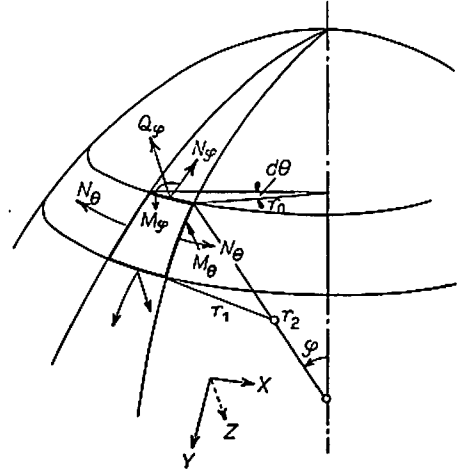
$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}(N_{\varphi}r_0) - N_{\theta}r_1 \cos \varphi - r_0Q_{\varphi} + r_0r_1Y &= 0 \\ N_{\varphi}r_0 + N_{\theta}r_1 \sin \varphi + \frac{d(r_0Q_{\varphi})}{d\varphi} + r_0r_1Z &= 0 \\ \frac{d}{d\varphi}(r_0M_{\varphi}) - M_{\theta}r_1 \cos \varphi - r_0r_1Q_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。 N_{φ} , N_{θ} はそれぞれ φ , θ 方向の張力, Q_{φ} はずり応力, M_{φ} , M_{θ} はそれぞれ φ , θ 方向の曲げモーメントである。 r_1 , r_2 は回転殻面の二つの主曲率で, r_0 は緯円の半径である。第1図にこれらの諸量が示してある。

普通の金属ベローズは円環殻形をしているので、曲率 r_0 , r_1 , r_2 の間にはつぎの関係がある。

$$\begin{aligned}
 r_0 &= r_2 \sin \varphi, \quad r_1 \equiv b, \\
 r_2 &= a/\sin \varphi + b, \\
 r_0 &= a + b \sin \varphi = a(1 + \lambda \sin \varphi) \\
 \lambda &\equiv b/a, \quad b = a\lambda, \\
 \lambda &= 0.05 \text{ 程度の大きさ.} \quad (2)
 \end{aligned}$$

ペローズは圧力差 p のみが作用するとし ($Y=0$, $Z=-p$), λ を小さいとして, (1) の諸式を変形する。まず, (1) の第1式に (2) の関係を代入すれば,



第1図 回転対称殻の諸量

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\varphi} \{a(1 + \lambda \sin \varphi) N_\varphi\} - a\lambda \cos \varphi \cdot N_\theta - a(1 + \lambda \sin \varphi) \cdot Q_\varphi &= 0 \\
 (1 + \lambda \sin \varphi) \frac{dN_\varphi}{d\varphi} + \lambda \cos \varphi \cdot N_\varphi - \lambda \cos \varphi \cdot N_\theta - (1 + \lambda \sin \varphi) \cdot Q_\varphi &= 0
 \end{aligned}$$

すなわち,

$$\frac{dN_\varphi}{d\varphi} - Q_\varphi = -\frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} \cdot (N_\varphi - N_\theta) \quad (3)$$

つぎに, 第2式に (2) の関係を代入して計算すれば,

$$\begin{aligned}
 a(1 + \lambda \sin \varphi) \cdot N_\varphi + a\lambda \sin \varphi \cdot N_\theta + \frac{d}{d\varphi} \{a(1 + \lambda \sin \varphi) Q_\varphi\} &= -a^2 \lambda (1 + \lambda \sin \varphi) p \\
 (1 + \lambda \sin \varphi) \cdot \left(\frac{dQ_\varphi}{d\varphi} + N_\varphi \right) &= -\lambda (\sin \varphi \cdot N_\theta + \cos \varphi \cdot Q_\varphi) - a\lambda (1 + \lambda \sin \varphi) p \\
 \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} + N_\varphi &= -\frac{\lambda (\sin \varphi \cdot N_\theta + \cos \varphi \cdot Q_\varphi)}{1 + \lambda \sin \varphi} - a\lambda p \quad (4)
 \end{aligned}$$

となる。最後に, 第3式について計算すれば,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\varphi} \{a(1 + \lambda \sin \varphi) \cdot M_\varphi\} - a\lambda \cos \varphi \cdot M_\theta - a^2 \lambda (1 + \lambda \sin \varphi) \cdot Q_\varphi &= 0 \\
 (1 + \lambda \sin \varphi) \frac{dM_\varphi}{d\varphi} + \lambda \cos \varphi \cdot M_\varphi - \lambda \cos \varphi \cdot M_\theta - a\lambda (1 + \lambda \sin \varphi) \cdot Q_\varphi &= 0 \\
 \frac{dM_\varphi}{d\varphi} - a\lambda Q_\varphi &= -\frac{\lambda \cos \varphi \cdot (M_\varphi - M_\theta)}{1 + \lambda \sin \varphi} \quad (5)
 \end{aligned}$$

を得る。

(3), (4), (5) を連立方程式とみて, 纏めて書けば

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dN_\varphi}{d\varphi} - Q_\varphi &= -\frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} (N_\varphi - N_\theta) \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} + N_\varphi &= -\frac{\lambda (\sin \varphi \cdot N_\theta + \cos \varphi \cdot Q_\varphi)}{1 + \lambda \sin \varphi} - a\lambda p \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left| \frac{dM_\varphi}{d\varphi} - a\lambda Q_\varphi = -\frac{\lambda \cos \cdot (M_\varphi - M_\theta)}{1 + \lambda \sin \varphi} \right. \quad (5)$$

これらは、 $\lambda \rightarrow 0$ のときの解から近似解を発展せしめ得る形ではある。 $\lambda \rightarrow 0$ は $a \rightarrow \infty$ に対応するものと考えれば、この極限は波形板に近いものになる。

未知数は $N_\varphi, Q_\varphi, M_\varphi; M_\theta, N_\theta$ の5個であるが、方程式は3個しか無いので、 M_θ, N_θ はこれだけからは求まらない。

3. 近似解法の方法

上述のように、連立方程式 (3), (4), (5) だけからは、問題は決定できない。そのための別の条件を求めなければならないが、その前に $\lambda=0$ のときには (3), (4) から N_φ と Q_φ とが求まることを示す。(3), (4) において $\lambda=0$ とおけば、

$$\frac{dN_\varphi}{d\varphi} = Q_\varphi, \quad \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} = -N_\varphi - a\lambda p$$

消去算によって

$$\frac{d^2 N_\varphi}{d\varphi^2} + N_\varphi = -a\lambda p, \quad \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + Q_\varphi = 0 \quad (6)$$

となる。すなわち、 $\lambda=0$ の第1近似解においては、 N_φ と Q_φ とが互に閉じ合っていて、決定できることが知れた。

(5) によって、 M_φ は

$$\begin{aligned} \frac{dM_\varphi}{d\varphi} &= a\lambda Q_\varphi \\ M_\varphi &= \int^\varphi a\lambda Q_\varphi d\varphi + \text{const} \end{aligned} \quad (7)$$

のように、(6) より得られる Q_φ を用いて決定することができる。

M_θ は M_φ より、次のようにして決定できる。Gravina: Theorie und Berechnung der Rotationsschalen の66頁によれば、 M_θ と M_φ とは緯線方向の回転角 V を用いて、つぎのように表わされる：

$$M_\theta = -D \left(\frac{\cot \varphi}{r_2} V + \nu \frac{1}{r_1} \frac{dV}{d\varphi} \right), \quad M_\varphi = -D \left(\frac{1}{r_1} \frac{dV}{d\varphi} + \nu \frac{\cot \varphi}{r_2} V \right)$$

円環面に対しては

$$r_1 = b, \quad r_2 \sin \varphi = a + b \sin \varphi = a(1 + \lambda \sin \varphi), \quad D \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} *$$

を上 M_θ, M_φ の式に代入すれば

* E =ヤング率, h =板厚, ν =ポアソン比

$$M_\theta = -D \left(\frac{\cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} \frac{V}{a} + \frac{\nu}{b} \frac{dV}{d\varphi} \right) = -\frac{D}{b} \left(\frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} V + \nu \frac{dV}{d\varphi} \right)$$

$$M_\varphi = -D \left(\frac{1}{b} \frac{dV}{d\varphi} + \nu \frac{\cos \varphi}{a(1 + \lambda \sin \varphi)} V \right) = -\frac{D}{b} \left(\frac{dV}{d\varphi} + \nu \frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} V \right)$$

となる。 $\lambda \doteq 0.05 \ll 1$ とすれば、第1近似値では

$$M_\theta = -\frac{D}{b} \nu \frac{dV}{d\varphi}, \quad M_\varphi = -\frac{D}{b} \frac{dV}{d\varphi}$$

となり、

$$M_\theta = \nu M_\varphi \quad (8)$$

が成立することになる。この関係式を用いると、(5) より M_φ が決定され、それによって M_θ もまた決定されることになる。

基本方程式 (3), (4) より

$$(1 + \lambda \sin \varphi) \frac{dN_\varphi}{d\varphi} + \lambda \cos \varphi \cdot N_\varphi - \lambda \cos \varphi \cdot N_\theta - (1 + \lambda \sin \varphi) Q_\varphi = 0 \quad (9)$$

$$(1 + \lambda \sin \varphi) \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} + \lambda \cos \varphi \cdot Q_\varphi + \lambda \sin \varphi \cdot N_\theta + (1 + \lambda \sin \varphi) N_\varphi = -a\lambda(1 + \lambda \sin \varphi)p \quad (10)$$

を導き、(9) に $\sin \varphi$ を、(10) に $\cos \varphi$ を掛けて加えると、

$$\frac{d}{d\varphi} [(1 + \lambda \sin \varphi)(\sin \varphi \cdot N_\varphi + \cos \varphi \cdot Q_\varphi)] = -a\lambda \cos \varphi \cdot (1 + \lambda \sin \varphi) \cdot p$$

$$(1 + \lambda \sin \varphi)(\sin \varphi \cdot N_\varphi + \cos \varphi \cdot Q_\varphi) = -\int_0^\varphi a\lambda p \cos \varphi \cdot (1 + \lambda \sin \varphi) d\varphi + \text{const} \quad (11)$$

を得る。これは軸方向の力の釣合の条件を与える式である。

また、 N_θ を求めるには、(9) に $-\cos \varphi$ を、(10) に $\sin \varphi$ を掛けて加えると、

$$\frac{d}{d\varphi} [(1 + \lambda \sin \varphi) \cdot (Q_\varphi \sin \varphi - N_\varphi \cos \varphi)] + \lambda N_\theta = -a\lambda p \sin \varphi \cdot (1 + \lambda \sin \varphi) \quad (12)$$

ここで、後述の通りの第1近似解 $Q_\varphi = Q_0 \cos \varphi$, $N_\varphi = N_0 \sin \varphi$, $N_\theta = Q_0$ を代入すると、上式の左辺の第1項が0になるので、 N_θ が

$$N_\theta = -a \sin \varphi \cdot (1 + \lambda \sin \varphi) p \quad (13)$$

のようにして求められる。

4. 内圧零、集中荷重 W の場合の近似解

まず、内圧 $p=0$ で、集中荷重 W がペローズの軸方向に作用する場合の近似解を求めよう。

(1) 第1次近似解 基本方程式 (6) において $p=0$ とおけば、

$$\frac{d^2 N_\varphi}{d\varphi^2} + N_\varphi = 0, \quad \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + Q_\varphi = 0 \quad (14)$$

となる。この微分方程式の解は容易に求められ、境界条件として

$\varphi=0$ において集中荷重 W がずり応力 Q_φ で支持されることを考慮すれば,

$$Q_0 = Q_\varphi|_{\varphi=0} = \frac{W}{2\pi a} \quad (15)$$

また, $\varphi=\pi/2$ においては, 集中荷重 W は N_φ によって支持されるので,

$$N_0 = N_\varphi|_{\varphi=\pi/2} = \frac{W}{2\pi(a+b)} = \frac{W}{2\pi a(1+\lambda)} \doteq \frac{W}{2\pi a} = Q_0 \quad (16)$$

となる. この境界条件を満足する (14) の解は

$$Q_\varphi = Q_0 \cos \varphi, \quad N_\varphi = N_0 \sin \varphi \quad (17)$$

となり, $N_\theta=0$ となる. これが, 第1次近似解である. M_φ, M_θ の第1近似解は (7) の M_φ に (17) の関係を代入することによって求められる.

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \int_0^\varphi a\lambda Q_\varphi d\varphi + \text{const} = a\lambda \int_0^\varphi Q_0 \cos \varphi d\varphi + \text{const} \\ &= a\lambda Q_0 \sin \varphi + \text{const} \end{aligned}$$

境界条件であるところの

$$(M_\varphi)_{\varphi=\pi/2} = \frac{W(a+b)}{2\pi(a+b)} = \frac{W}{2\pi} = a\lambda Q_0 + \text{const} = a\lambda \frac{W}{2\pi a\lambda} + \text{const}$$

より $\text{const}=0$ がわかる. また $W/2\pi = \omega$ とおけば

$$M_\varphi = \frac{W}{2\pi} \sin \varphi = \omega \sin \varphi \quad (18)$$

(8) によって

$$M_\theta = \nu \omega \sin \varphi \quad (19)$$

(2) 第2次近似解

(17) の第1次近似解を (3), (4), (5) の右辺に代入して計算すれば, それぞれ第2近似解を求める式となる.

$$\begin{aligned} \frac{dN_\varphi}{d\varphi} - Q_\varphi &= -\frac{\lambda \cos \varphi}{1+\lambda \sin \varphi} \cdot (N_\varphi - N_\theta) = -\frac{\lambda \cos \varphi}{1+\lambda \sin \varphi} \cdot N_0 \sin \varphi \\ &\doteq -\lambda N_0 \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{\lambda N_0}{2} \sin 2\varphi \\ \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} + N_\varphi &= -\frac{\lambda(\sin \varphi \cdot N_\theta + \cos \varphi \cdot Q_\varphi)}{1+\lambda \sin \varphi} \doteq -\lambda \cos \varphi \cdot Q_\varphi = -\lambda Q_0 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

この2つの式より, 消去算によって N_φ および Q_φ に対する微分方程式を導く.

$$\frac{d^2 N_\varphi}{d\varphi^2} - \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} = \frac{d^2 N_\varphi}{d\varphi^2} + N_\varphi + \lambda N_0 \cos^2 \varphi = -\lambda N_0 \cos 2\varphi$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 N_\varphi}{d\varphi^2} + N_\varphi &= -\lambda N_0 (\cos 2\varphi + \cos^2 \varphi) = -\lambda N_0 \left(\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) \\ &= -\frac{\lambda N_0}{2} (1 + 3 \cos 2\varphi)\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{dN_\varphi}{d\varphi} &= \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + Q_\varphi - \frac{\lambda N_0}{2} \sin 2\varphi = \lambda N_0 \sin 2\varphi \\ \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + Q_\varphi &= \frac{3\lambda N_0}{2} \sin 2\varphi\end{aligned}\quad (21)$$

(20) と (21) とがそれぞれ N_φ と Q_φ の第2次近似解を定める式である。まず, (20) の解を求めると,

$$N_\varphi = N_0 \sin \varphi - \frac{\lambda N_0}{2} (1 - \cos 2\varphi)\quad (22)$$

また, (21) の解は

$$Q_\varphi = N_0 \cos \varphi - \frac{\lambda N_0}{2} \sin 2\varphi\quad (23)$$

となる。この第2近似解 (22), (23) を (10) の N_θ の式に代入すれば

$$\begin{aligned}N_\theta &= -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} [Q_\varphi \sin \varphi - N_\varphi \cos \varphi] \\ &= -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} \left[N_0 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\lambda N_0}{2} \sin 2\varphi \sin \varphi - N_0 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda N_0}{2} \cos \varphi \cdot (1 - \cos 2\varphi) \right] \\ &= -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{\lambda N_0}{2} \cos \varphi - \frac{\lambda N_0}{2} (\sin 2\varphi \sin \varphi + \cos 2\varphi \cos \varphi) \right] = -\frac{\lambda N_0}{2\lambda} \frac{d}{d\varphi} [\cos \varphi - \cos \varphi] \\ &= 0\end{aligned}$$

となり, N_θ は第2次近似値でも 0 である。

つぎに, (7) によって M_φ を求める:

$$\begin{aligned}M_\varphi &= a\lambda \int_0^\varphi Q_\varphi d\varphi = a\lambda \int_0^\varphi \left(N_0 \cos \varphi - \frac{\lambda N_0}{2} \sin 2\varphi \right) d\varphi \\ &= \omega \int_0^\varphi \left(\cos \varphi - \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) d\varphi = \omega \left[\sin \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi \right]_0^\varphi \\ &= \omega \sin \varphi - \frac{\lambda \omega}{4} (1 - \cos 2\varphi)\end{aligned}\quad (24)$$

$$M_\theta = \nu M_\varphi = \nu \omega \left\{ \sin \varphi - \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi) \right\}\quad (25)$$

以上によって, N_φ , Q_φ , M_φ , M_θ , N_θ の第2近似値が得られるのである。

5. 内圧 p の作用する場合の近似解

内圧 p が作用する場合、ベローズの上端の円板部に働らく全圧力 $\pi a^2 p$ は円環部にはやはり1つの集中力 $W = \pi a^2 p$ として作用するわけである。

(1) 第1次近似解 第1次近似解に対する基本方程式 (6):

$$\frac{d^2 N_\varphi}{d\varphi^2} + N_\varphi = a\lambda p, \quad \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + Q_\varphi = 0$$

の解は

$$N_\varphi = N_0 \sin \varphi + a\lambda p, \quad Q_\varphi = Q_0 \cos \varphi \quad (26)$$

である。 N_0 は内圧 p のため、膜理論による計算値:

$$N_0 = ap \sin \varphi \cdot (1 + \lambda \sin \varphi) \quad (27)$$

を用いることができる。

(2) 第2次近似解 第1次近似解の解式 (26), (27) を (3), (4) の右辺に代入すれば、第2次近似解が得られる。すなわち、(26) より

$$\begin{aligned} \frac{dN_\varphi}{d\varphi} - Q_\varphi &= -\frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} (N_0 \sin \varphi + a\lambda p - ap \sin \varphi \cdot (1 + \lambda \sin \varphi)) \\ &\doteq -\lambda N_0 \sin \varphi \cos \varphi + a\lambda p \sin \varphi \cos \varphi - a\lambda^2 p \cos \varphi + ap\lambda^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ &\doteq -\frac{\lambda N_0}{2} \sin 2\varphi + \frac{a\lambda p}{2} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

境界条件より

$$Q_\varphi|_{\varphi=0} = \frac{W}{2\pi a} = \frac{\pi a^2 p}{2\pi a} = \frac{ap}{2}, \quad N_0 = \frac{a(1+\lambda)p}{2} \doteq \frac{ap}{2}.$$

が得られるので、結局

$$\frac{dN_\varphi}{d\varphi} - Q_\varphi = \frac{a\lambda p}{4} \sin 2\varphi \quad (28)$$

同様 (27) より

$$\begin{aligned} \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} + N_\varphi &= -\frac{\lambda \{ \sin \varphi \cdot ap \sin \varphi \cdot (1 + \lambda \sin \varphi) + \cos \varphi \cdot Q_0 \cos \varphi \}}{1 + \lambda \sin \varphi} \\ &= -a\lambda p \sin^2 \varphi - \lambda Q_0 \cos^2 \varphi = -a\lambda p \sin^2 \varphi - \frac{a\lambda p}{2} \cos^2 \varphi \\ &= -a\lambda p + \frac{a\lambda p}{2} \cos^2 \varphi = -a\lambda p + \frac{a\lambda p}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \\ &= -\frac{3}{4} a\lambda p + \frac{1}{4} a\lambda p \cos 2\varphi \quad (29) \end{aligned}$$

(28) と (29) とより、消去算によって

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_\varphi}{d\varphi^2} - \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} &= \frac{d^2 N_\varphi}{d\varphi^2} + N_\varphi = -\frac{3}{4}a\lambda p + \frac{1}{4}a\lambda p \cos 2\varphi + \frac{a\lambda p}{2} \cos 2\varphi \\ &= -\frac{3}{4}a\lambda p + \frac{3}{4}a\lambda p \cos 2\varphi = -\frac{3}{4}a\lambda p(1 - \cos 2\varphi) \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{dN_\varphi}{d\varphi} &= \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + Q_\varphi = -\frac{a\lambda p}{2} \sin 2\varphi - \frac{a\lambda p}{2} \sin 2\varphi \\ &= -\frac{3}{4}a\lambda p \sin 2\varphi \quad (31) \end{aligned}$$

(30) と (31) とを解いて、 N_φ と Q_φ とに対する第2次近似解を定める。

$N_\varphi = \frac{ap}{2} \sin \varphi - \frac{3}{4}a\lambda p + A \cos 2\varphi$ とおいて、(30) に代入して A を決定する：

$$-4A \cos 2\varphi + A \cos 2\varphi = \frac{3}{4}a\lambda p \cos 2\varphi$$

$$\therefore A = -\frac{1}{4}a\lambda p.$$

同様に、 $Q_\varphi = \frac{ap}{2} \cos \varphi + B \sin 2\varphi$ とおいて、(31) に代入して B を決定する：

$$-4B \sin 2\varphi + B \sin 2\varphi = -\frac{3}{4}a\lambda p \sin 2\varphi$$

$$\therefore B = \frac{1}{4}a\lambda p.$$

よって、第2次近似解の N_φ と Q_φ とが知れる：

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{ap}{2} \sin \varphi - \frac{3}{4}a\lambda p - \frac{1}{4}a\lambda p \cos 2\varphi \\ Q_\varphi &= \frac{ap}{2} \cos \varphi + \frac{1}{4}a\lambda p \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

M_φ は (7) によって Q_φ より計算される：

$$\begin{aligned} M_\varphi &= a\lambda \int_0^\varphi Q_\varphi d\varphi = a\lambda \int_0^\varphi \left(\frac{ap}{2} \cos \varphi + \frac{a\lambda p}{4} \sin 2\varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{a^2 \lambda p}{2} \sin \varphi + \frac{a^2 \lambda^2 p}{8} (1 - \cos 2\varphi) \\ M_\theta &= \nu M_\varphi = \nu \frac{a^2 \lambda p}{2} \left\{ \sin \varphi + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

6. 第2次近似解による応力解析

前2節によって、金属ペローズの第2次近似解が求められたので、これらを利用して応力解析を行って、実験結果と比較することができる。実験は大型ペローズについて、ペローズ円環部の表面の緯線方向および経線方向の歪みをストレングージで測定したものである。したがって、ここでの応力解析もペローズ円環部の表面の応力あるいは歪みを求める式を導出することにする。

金属ペローズの板厚を h とすれば、 φ -方向および θ -方向の表面応力 σ_φ および σ_θ は垂直応力 N_φ, N_θ と曲げモーメント M_φ, M_θ とを用いて

$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{h} \pm \frac{\sigma M_\varphi}{h^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} \pm \frac{\sigma M_\theta}{h^2} \quad (34)$$

と表わされる。これらの式に、前2節で得た近似解式を代入すれば、最大応力が求められるわけである。

(1) $p=0, W$ (引張荷重を正とする) の場合 第4節の (22), (23), (24), (25) を上の (34) に代入すれば

$$\sigma_\varphi = \frac{N_0}{h} \sin \varphi - \frac{\lambda N_0}{2h} (1 - \cos 2\varphi) \pm \frac{6}{h^2} \left\{ \omega \sin \varphi - \frac{\lambda \omega}{4} (1 - \cos 2\varphi) \right\}$$

$$\sigma_\theta = 0 \pm \frac{6\nu\omega}{h^2} \left\{ \sin \varphi - \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi) \right\}$$

$\sin^2 \varphi = (1 - \cos 2\varphi)/2$ を考慮し、少し整理した形を書けば

$$\sigma_\varphi = \frac{W}{2\pi ah} \left(1 \mp \frac{6b}{h} \right) \sin \varphi - \frac{\lambda W}{2\pi ah} \left(1 \pm \frac{3\sigma}{h} \right) \sin^2 \varphi \quad (35)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{3\nu Wb}{\pi h^2 a} \left(\sin \varphi - \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi \right) \quad (36)$$

となる。 $\omega = Wb/2\pi a$ とした。

(2) p および $W = \pi a^2 p$ が作用する場合 第5節の (32), (33) を (34) に代入して計算する。

$$\sigma_\varphi = \frac{ap}{2h} \sin \varphi - \frac{3\lambda p}{4h} - \frac{\lambda ap}{4h} \cos 2\varphi \pm \frac{6}{h^2} \left\{ \frac{\lambda a^2 p}{2} \sin \varphi + \frac{a^2 \lambda^2 p}{8} (1 - \cos 2\varphi) \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{ap}{h} \sin \varphi \cdot (1 + \lambda \sin \varphi) \pm \frac{6}{h^2} \frac{\nu a^2 \lambda p}{2} \left\{ \sin \varphi + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi) \right\}$$

$\lambda a \equiv b$ とおき、少し整理して書けば

$$\sigma_\varphi = -\frac{bp}{h} + \frac{ap}{2h} \left(1 \pm \frac{6b}{h} \right) \sin \varphi + \frac{\lambda ap}{2h} \left(1 \pm \frac{3b}{h} \right) \sin^2 \varphi \quad (37)$$

$$\sigma_\theta = \frac{ap}{2h} \left(1 \pm \frac{6\nu b}{h} \right) \sin \varphi + \frac{2\lambda ap}{h} \left(1 \pm \frac{3\nu b}{4h} \right) \sin^2 \varphi \quad (38)$$

これらの計算式と実験値とを比較するために、さきに学生卒業実験としての斎藤宏、高橋敏行両君の研究結果 (日本機械学会第700回講演会前刷集)(1962-3-17) の大型ペローズについて計算する。

大型ペローズの諸元:

外直径 = 354 mm, 肉厚 $h = 1.0$ mm

内直径 = 278 mm, ピッチ $4b = 22.1$ mm

$$a + b = 3542 = 177 \text{ mm}, \quad b = 5.5 \text{ mm}$$

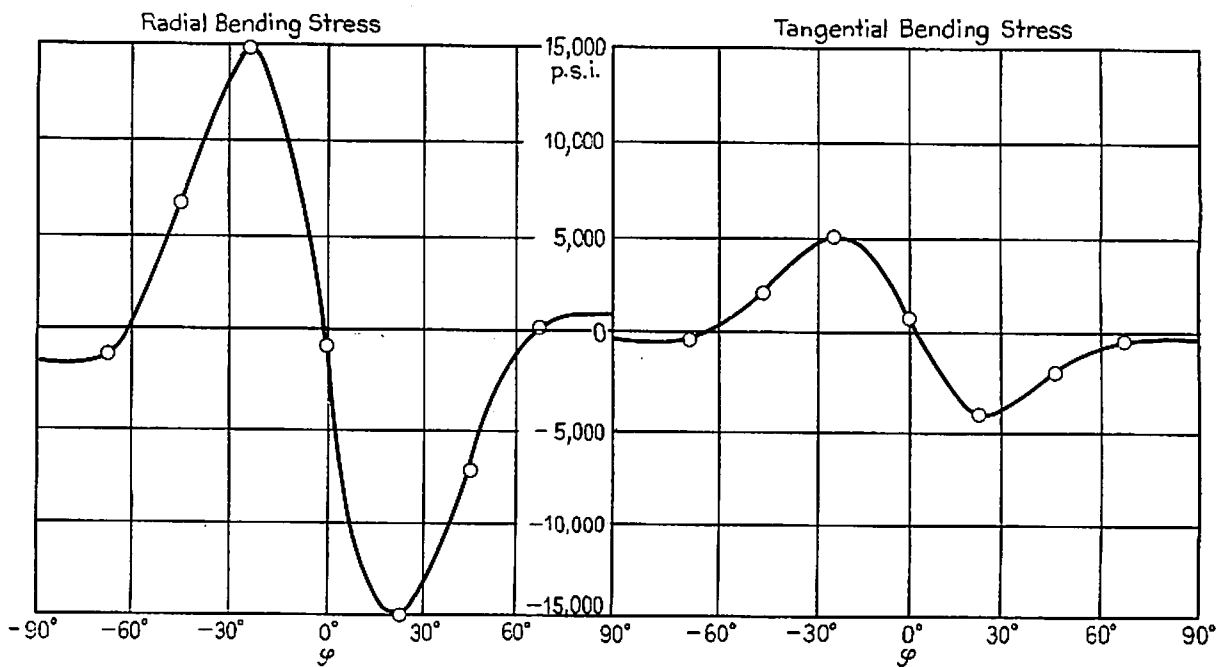
$$a = 177 - b = 177 - 5.5 = 171.5 \text{ mm},$$

$$\lambda = b/a = 5.5/171.5 = 0.032$$

引張あるいは圧縮の集中荷重が作用する場合の最大応力を実験値より求めたものと、(35)と(36)とで求めたものと比較する。この大型ペローズでは $6b/h = 33$, $3b/h = 16.5$ で、曲げ応力の方が格段と垂直応力よりも大きい。曲げモーメントに参与する b の数値は、試験に用いた大型ペローズの山形の形状が真の円環ではなく、ややつぶれた形であることを考慮して、 $b = (177 - 139) \div 2 = 19 \text{ mm}$ にとって計算した。

W kgwt	σ_φ 計算値 kg/mm ²	σ_φ 実測値 kg/mm ²
50	5.45	5.6
100	10.87	11.0
150	16.30	16.0
200	21.7	22.5
250	27.2	28.0
300	32.8	33.5

σ_φ の方は計算値と実測値とが可成りよく一致しているが、 σ_θ の方は可成りの差が存在する。しかし、N. C. Dahl⁽²⁴⁾ (第2図) の実験結果と比較すると、 σ_φ と σ_θ との比はポアソン比 $\nu = 0.3$ に殆んど近くよく一致しているように見える。



第2図 Dahl の測定結果

最大の接線方向の曲げ応力 = 5,000 p.s.i.

最大の経方向の曲げ応力 = 15,000 p.s.i.

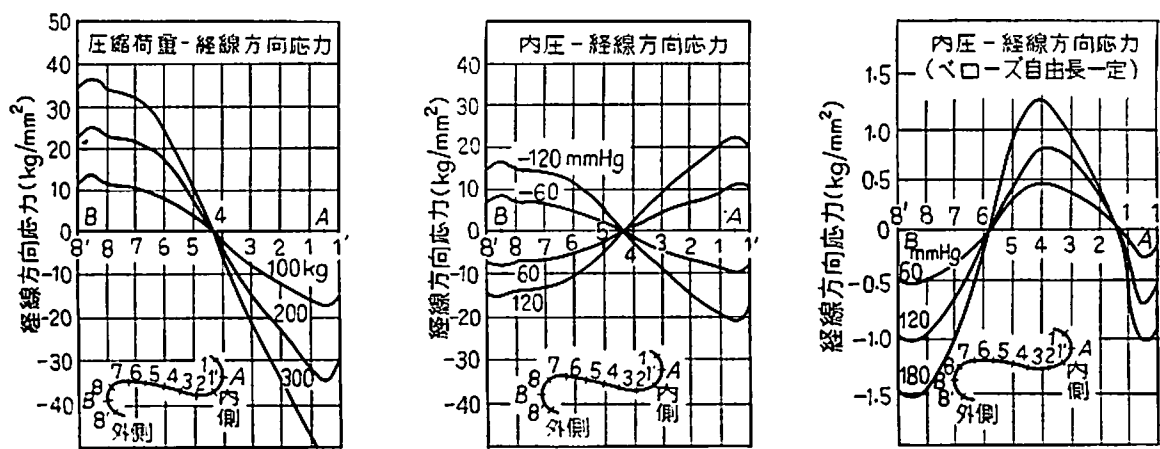
その比: $5,000/15,000 = 0.3 = \nu$

内圧 p の作用する場合の最大縁応力 σ_φ についても, (37) について計算した値は実験とよく一致する. 例えば,

$p = 120 \text{ mmHg}$ の場合の $\sigma_\varphi \text{ max} = 15.0 \text{ kg/mm}^2$ (実測値)

$\sigma_\varphi \text{ max} = 15.9 \text{ kg/mm}^2$ (計算値)

の通りである. しかし, 斎藤, 高橋の実験結果では σ_θ の方の一致は良くない.



第3図 斎藤・高橋の測定結果

7. 結 言

金属ベローズの弾性力学的理論を梁理論, 円板理論の順序に展開して, 有効面積および荷重変位特性などについて有効な諸公式を導出して来たが, 本報告においては円環殻理論を近似的に展開することができて, 比較的簡単な式で応力解析を行うことができることを示した.

円環殻理論の正式の展開は極めて困難な数学的問題に属し, 可成り徹底した研究が他に進められているが, 実用的ではない. 著者は極めて簡単な近似解式を摂動法によって求めて, 一応応力解析には効果あることを示し得た. これを以て金属ベローズの弾性力学的研究は終了とする.

(昭和39年11月6日)

文 献

Shell 理論に関する単行著書:—

- (1) W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen, Springer 1934.
訳: 寺崎恒正: 曲面板の力学 コロナ社, 昭和29年.
- (2) W. Flügge: Stresses in Shells, Springer 1960.
- (3) S. P. Timoshenko: Theory of Plate and Shells, McGraw-Hill 1959.
- (4) V. V. Novozhilov: The Theory of Thin Shells, Noordhoff 1959.

- (5) P. B. J. Gravina: Theorie und Berechnung der Rotationsschalen, Springer 1961.
研究論文:—
- (6) R. A. Clark: On the Theory of Thin Elastic Toroidal Shells, Journal of Math. and Physics 29, (1950) p. 141/178.
- (7) R. A. Clark and E. Reissner: On Axially Symmetrical Bending of Nearly Cylindrical Shells of Revolution, Journal of Applied Mechanics, 23, (1959) pp. 59-67.
- (8) P. J. Palmer: A Method of Analysis for Axially Symmetrical Shells with Constant Meridional Curvature, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 12, (1959), pp. 431-442.
- (9) 中村康治: 円環殻の応力および変形の計算, 機械学会論文集 19 卷 83 号 (昭和 28 年), 48-54 頁.
: 圧力容器の応力計算 (第 1 報), 同上, 54-58 頁.
: Calculation of Stresses in Pressure Vessel Heads (Report II), Proc. 6th Japan Nat. Congress for Applied Mech. 1956, pp. 149-152.
- (10) G. D. Galletly: Edge Influence Coefficients for Toroidal Shells of Positive Gaussian Curvature, Trans. of the ASME, Feb. 1960, pp. 60-68.
- (11) P. J. Palmer: An Approximate Analysis giving Design Data for Corrugated Pipes, Proc. Inst. Mech. Engrs, vol. 174, (1960), pp. 635-639.
- (12) C. E. Turner and H. Ford: Stress and Deflection Studies of Pipeline Expansion Bellows, Proc. of the I. M. E., vol. 171 (1957), pp. 526-552.
- (13) G. Hororay, C. Linkous and J. B. Born: Analysis of Short Thin Axisymmetrical Shells under Axisymmetrical Edge Loading, J. of Appl. Mech. 23, (1956), pp. 68-71.
- (14) G. Hororay and I. H. Clauden: Membrane and Bending Analysis of Axisymmetrically Loaded Axisymmetrical Shells, J. of Appl. Mech. 22, (1955), pp. 25-30.
- (15) R. A. Clark, T. J. Gilroy and E. Reissner: Stresses and Deformations of Toroidal Shells of Elliptical Cross Sections, J. of Appl. Mech. 19, (1952), pp. 37-48.
- (16) A. Laupa and N. A. Weil: Analysis of U-shaped Expansion Joints, Trans. of the ASME, Jour. of Appl. Mech. (1962), pp. 614-.
- (17) 太田友弥, 浜田 実 等: 円環殻の強度に関する研究 (第 1, 2, 3, 4 報), 日本機械学会論文集, 29 卷 197 号 (昭和 38 年 1 月), 142-178 頁.
- (18) L. H. Donnell: The Flexibility of Corrugated Pipes under Longitudinal Forces and Bending. Trans. of the ASME, 54, (1932), pp. 69-75.
- (19) F. Feely and W. M. Goryl: Stress Studies on Piping Expansion Bellows., J. of Appl. Mech. (1950), pp. 135-141.
- (20) K. Stange: Der Spannungszustand einer Kreisringschale., Ingenieur- Archiv 2, (1931), S. 47-91.
- (21) J. B. Stevens: Bellows-Type Axial Mechanical Seals, Machine Design.
- (22) 中原一郎: 管継手用ベローズの設計, 日本機械学会誌, 67 卷 548 号, 昭和 39 年 9 月, 1459-1463 頁.
- (23) H. Nothdurft: Eigenschaften von Metallbälgen, Regelungstechnik, 1957, (Bd. 5, Nr. 10).
- (24) N. C. Dahl: Toroidal-Shell Expansion Joints, Jour. of Appl. Mech. 57, (1953), pp. 497-505.