ある変断面梁の曲げ問題への直接積分法の応用

TAKEDA, Shin’ichiro / 武田, 晋一郎

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
2
(開始ページ / Start Page)
13
(終了ページ / End Page)
26
(発行年 / Year)
1965-05
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004282

ある変断面梁の曲げ問題への直接積分法の応用

教授　武田晋一郎（基礎学科）

Application of the Direct Integration Method to the Deflection Problem of a Certain Beam of Variable Cross Section

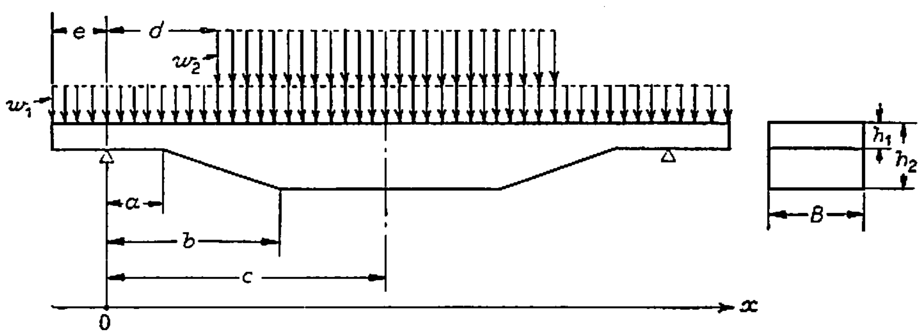
Shin'ichiro Takeda, *Professor of Physics*

1. 緒　言

材料力学における梁の曲げの計算問題は種々の方法で処理されていることは周知の通りであるが，問題が少し複雑になると計算は著しく複雑かつ困難になるものである．著者はさきに，真直梁の曲げ問題を微分方程式（線形）の境界値問題としての見地から整理して，その解の形が定型化されることに着目して，"直接積分法による解法"を提案した（法政大学工学部研究報告第13号，昭和37年1月）．そして，梁の両端における境界条件の実用的に可能なほとんどすべての型の組合せに対して，微分方程式の解の未定定数の計算を完了して一つの表の形にまとめ，また荷重函数も標準の荷重函数に分解して各標準荷重函数に対する曲げ変位の解を標準曲げ函数として，これまた一つの表にまとめて，具体的な曲げ問題の計算を著しく簡単化して，計算誤まりのない方式を作り上げた．種々の例題でその実用性を確認したが，今回は鉄道車輛の台車に用いられる梁に関する実用問題で，梁の計算としては可成り複雑困難なものを，この直接積分法の応用として解析的に処理し得たので，以下これを紹介する．

2. ある変断面梁の曲げ問題

ここに考察する変断面梁は第1図に示す通り，x 軸方向の区間（$-e$, $2c+e$）に位置し，$x=c$ に関して左右対称の問題である．荷重分布は一様荷重 w_1 が全長に渉って分布し，また他の荷重 w_2 が $x=d$ から $x=2c-d$ の区間に一様に分布する．梁の断面は矩形断面であるが，その幅



第1図　梁の断面変化と荷重分布

B は一定，厚さが図のように区間的に変化する．すなわち，区間 $(-e, a)$ は一定値 h_1，区間 (a, b) では一様に増加して h_2 になり，区間 (b, c) では一定値 h_2 になるものとする（問題が $x=c$ に関して左右対称であるから左半部 $x \leqq c$ のみを考える）．すなわち，厚さ h を x の函数とみるとき，

$$-e < x < a \cdots\cdots h = h_1$$

$$a < x < b \cdots\cdots h = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{b-a}(x-a)$$

$$b < x < c \cdots\cdots h = h_2$$

となる．この h の変化に対して曲げ剛性はヤング率を E として

$$-e < x < a \cdots\cdots EI(x) = EI_1 = \frac{EBh_1^3}{12}$$

$$a < x < b \cdots\cdots EI(x) = \frac{EB}{12}\left\{h_1 + \frac{h_2 - h_1}{b-a}(x-a)\right\}^3 = EI_0(1+\alpha x)^3$$

$$b < x < c \cdots\cdots EI(x) = EI_2 = \frac{EBh_2^3}{12}$$

ただし，　$I_0 \equiv \dfrac{B}{12}\left(\dfrac{h_1 b - h_2 a}{b-a}\right)^3$，$\alpha \equiv \dfrac{h_2 - h_1}{h_1 b - h_2 a}$　とする．

荷重分布函数 $F(x)$ は単位階段函数 $u(x)$ を用いて表わせば，

$$F(x) = w_1 u(x+e) + w_2 u(x-d) \tag{1}$$

また，曲げ剛性 $EI(x)$ も $u(x)$ を用いて表わせば

$$EI(x) = EI_1[u(x+e) - u(x-a)] + EI_0(1+\alpha x)^3[u(x-a) - u(x-b)] + EI_2 u(x-b) \tag{2}$$

となる．曲げ変位 $Y(x)$ に対する微分方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{EI(x)\frac{d^2Y}{dx^2}\right\} = F(x) \tag{3}$$

であって，その直接積分法による解式は

$$Y(x) = G(x) + A\alpha(x) + B\beta(x) + Cx + D \tag{4}$$

である．ただし，

$$G(x) \equiv \int_0^x \frac{x-\xi}{EI(\xi)}\left\{\int_0^\xi (\xi-\eta)F(\eta)\,d\eta\right\}d\xi \tag{5}$$

$$\alpha(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-\xi)\xi}{EI(\xi)}d\xi \tag{6}$$

$$\beta(x) \equiv \int_0^x \frac{x-\xi}{EI(\xi)}d\xi \tag{7}$$

境界条件は，$x=0$ において曲げモーメントが $(-e,\ 0)$ の部分によって $w_1e^2/2$ と与えられることと，$x=c$ における対称性の条件とによって

$$Y(0)=0, \qquad Y''(0)=\frac{w_1e^2}{2EI_1} \tag{8}$$

$$Y'(c)=0, \qquad Y'''(c)=0 \tag{9}$$

となる．

境界条件 (8)，(9) を満足するように，解式 (4) の未定定数を決定する．$G(0)=\alpha(0)=\beta(0)=0$ であるから，(8) の第1式から

$$Y(0)=D=0$$

が得られる．$\dfrac{w_1e^2}{2EI_1}\equiv\sigma$ とおき，(8) の第2式と (9) の2つの式とより，A, B, C の決定方程式を作れば，

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha'\ (c)A+\beta'\ (c)B+C= \ \ -G'(c)\\
&\alpha''\ (0)A+\beta''\ (0)B \qquad =\sigma-G''(0)\\
&\alpha'''(c)A+\beta'''(c)B \qquad = \ \ -G'''(c)
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

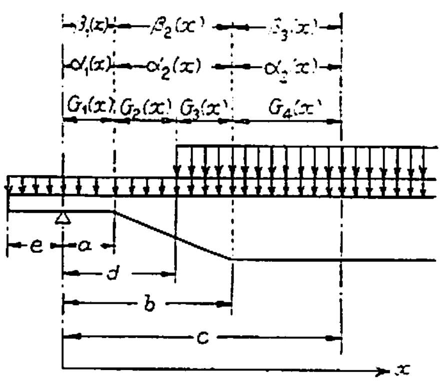
この連立方程式を解いて，A, B, C を求めると

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{\beta''(0)G'''(c)-\beta'''(c)G''(0)+\sigma\beta'''(c)}{\alpha''(0)\beta'''(c)-\alpha'''(c)\beta''(0)}\\
B&=\frac{\alpha'''(c)G''(0)-\alpha''(0)G'''(c)-\sigma\alpha'''(c)}{\alpha''(0)\beta'''(c)-\alpha'''(c)\beta''(0)}\\
C&=[\alpha''(0)\{\beta'(c)G'''(c)-\beta'''(c)G'(c)\}-\beta''(0)\{\alpha'(c)G'''(c)-\alpha'''(c)G'(c)\}\\
&\quad+\{\sigma-G''(0)\}\{\alpha'''(c)\beta'(c)-\alpha'(c)\beta'''(c)\}/\{\alpha''(0)\beta'''(c)-\alpha'''(c)\beta''(c)\}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

となる．この A, B, C を解式 (4) に代入すれば，この問題の解となるのであるが，勿論 $G(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ をまず計算しなくてはならない．

3. $G(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ の計算

微分方程式の特解に相当する函数 $G(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ の計算はそれぞれ (5)，(6)，(7) 式によればよいのであるが，ただ計算遂行に当って荷重分布函数 $F(x)$ および曲げ剛性函数 $EI(x)$ が変数 x の区間によって表現式が異なる点に注意すればよい．とくに，$G(x)$ の計算では $F(x)$ と $EI(x)$ の両方が関係しているので，注意しなければならない．



第2図　函数 $G(x)$, $\alpha(x)$,$\beta(x)$ の区分

区間によって，$G(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ の表現式が異なるので，第2図に示すように

$$G(x):\quad G_1(x),\ G_2(x),\ G_3(x),\ G_4(x).$$

$$\alpha(x):\quad \alpha_1(x),\ \alpha_2(x),\ \alpha_3(x).$$

$$\beta(x):\quad \beta_1(x),\ \beta_2(x),\ \beta_3(x).$$

と区別して書くことにする.

（1） $\boldsymbol{\beta(x)}$ の計算: $\displaystyle\int_0^x \frac{x-\xi}{EI(\xi)}d\xi$

$\beta(x)$ の計算には $EI(x)$ の区分に注意するだけでよい.

$$\beta_1(x)=\int_0^x \frac{x-\xi}{EI_1}d\xi=\frac{1}{EI_1}\left[x\xi-\frac{\xi^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{EI_1}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\beta_2(x)=\int_0^a \frac{x-\xi}{EI_1}d\xi+\int_a^x \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}d\xi$$

$$=\frac{1}{EI_1}\int_0^a(x-\xi)d\xi+\frac{x}{EI_0}\int_a^x\frac{d\xi}{(1+\alpha\xi)^3}-\frac{1}{EI_0}\int_a^x\frac{\xi d\xi}{(1+\alpha\xi)^3}$$

$$=\frac{1}{EI_1}\left[x\xi-\frac{\xi^3}{2}\right]_0^a+\frac{x}{EI_0}\left[\frac{1}{-2\alpha(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x-\frac{1}{EI_0}\left[\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{-1}{1+\alpha\xi}+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right\}\right]_a^x$$

$$=\frac{1}{EI_1}\left(xa-\frac{a^2}{2}\right)+\frac{x}{2\alpha EI_0}\left\{\frac{-1}{(1+\alpha x)^2}+\frac{1}{(1+\alpha a)^2}\right\}-\frac{1}{\alpha^2EI_0}\left\{\frac{-1}{(1+\alpha x)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1+\alpha a)}+\frac{1}{2(1+\alpha x)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}$$

$$\beta_3(x)=\int_0^a\frac{x-\xi}{EI_1}d\xi+\int_a^b\frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}d\xi+\int_b^x\frac{x-\xi}{EI_2}d\xi$$

$$=\frac{1}{EI_1}\left[x\xi-\frac{\xi^2}{2}\right]_0^a+\frac{x}{EI_0}\left[\frac{-1}{2\alpha(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^b-\frac{1}{\alpha^2EI_0}\left[\frac{-1}{1+\alpha\xi}+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^b$$

$$+\frac{1}{EI_2}\left[x\xi-\frac{\xi^2}{2}\right]_b^x$$

$$=\frac{1}{EI_1}\left(xa-\frac{a^2}{2}\right)+\frac{x}{2\alpha EI_0}\left\{\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha a)^2}\right\}-\frac{1}{\alpha^2EI_0}\left\{\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha a}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}+\frac{1}{EI_2}\left\{\frac{x^2}{2}-xb+\frac{b^2}{2}\right\}$$

（2） $\boldsymbol{\alpha(x)}$ の計算: $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-\xi)\xi}{EI(\xi)}d\xi$

$$\alpha_1(x)=\int_0^x\frac{(x-\xi)\xi}{EI_1}d\xi=\frac{1}{EI_1}\left[x\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\right]_0^x=\frac{1}{EI_1}\cdot\frac{x^3}{6}$$

$$\alpha_2(x)=\int_0^a\frac{(x-\xi)\xi}{EI_1}d\xi+\int_a^x\frac{(x-\xi)\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}d\xi$$

$$=\frac{1}{EI_1}\left[x\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\right]_0^a+\frac{x}{\alpha^2EI_0}\left[\frac{-1}{1+\alpha\xi}+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x-\frac{1}{\alpha^3EI_0}\left[\ln(1+\alpha\xi)\right.$$

$$\left.+\frac{2}{1+\alpha\xi}-\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x$$

$$=\frac{1}{EI_1}\left\{x\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}\right\}+\frac{x}{\alpha^2EI_0}\left\{\frac{-1}{1+\alpha x}+\frac{1}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha x)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}$$
$$-\frac{1}{\alpha^3EI_0}\left\{\ln\frac{1+\alpha x}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha x}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha x)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}$$

$$\alpha_3(x)=\int_0^a\frac{(x-\xi)\xi}{EI_1}d\xi+\int_a^b\frac{(x-\xi)\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}d\xi+\int_b^x\frac{(x-\xi)\xi}{EI_2}d\xi$$
$$=\frac{1}{EI_1}\left[x\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\right]_0^a+\frac{x}{\alpha^2EI_0}\left[\frac{-1}{1+\alpha\xi}+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^b$$
$$-\frac{1}{\alpha^3EI_0}\left[\ln(1+\alpha\xi)+\frac{2}{1+\alpha\xi}-\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^b+\frac{1}{EI_2}\left[x\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\right]_b^x$$
$$=\frac{1}{EI_1}\left\{x\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}\right\}+\frac{x}{\alpha^2EI_0}\left\{\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+aa)^2}\right\}$$
$$-\frac{1}{\alpha^3EI_0}\left\{\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}$$
$$+\frac{1}{EI_2}\left\{\frac{x^3}{6}-x\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}\right\}$$

（3） $G(x)$ の計算： $\int_0^x\frac{x-\xi}{EI(\xi)}\left\{\int_0^\xi(\xi-\eta)F(\eta)d\eta\right\}d\xi$

$F(\eta)$ は区間 $(0,\ d)$ と区間 $(d,\ c)$ とで異なることに留意して計算する．

$$G_1(x)=\int_0^x\frac{x-\xi}{EI_1}\left\{\int_0^\xi(\xi-\eta)w_1d\eta\right\}d\xi=\frac{w_1}{EI_1}\int_0^x(x-\xi)\left\{\int_0^\xi(\xi-\eta)d\eta\right\}d\xi$$
$$=\frac{w_1}{EI_1}\int_0^x(x-\xi)\left\{\left[\xi\eta-\frac{\eta^2}{2}\right]_0^\xi\right\}d\xi=\frac{w_1}{EI_1}\int_0^x(x-\xi)\frac{\xi^2}{2}d\xi$$
$$=\frac{w_1}{EI_1}\left[x\frac{\xi^3}{6}-\frac{\xi^4}{8}\right]_0^x=\frac{w_1}{EI_1}\cdot\frac{x^4}{24}$$

$$G_2(x)=\left\{\int_0^a\frac{x-\xi}{EI_1}+\int_a^x\frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}\right\}\left\{\int_0^\xi(\xi-\eta)w_1d\eta\right\}d\xi$$
$$=\frac{w_1}{EI_1}\int_0^a(x-\xi)\left\{\left[\xi\eta-\frac{\eta^2}{2}\right]_0^\xi\right\}d\xi+\frac{w_1}{EI_1}\int_a^x\frac{x-\xi}{(1+\alpha\xi)^3}\left\{\left[\xi\eta-\frac{\eta^2}{2}\right]_0^\xi\right\}d\xi$$
$$=\frac{w_1}{EI_0}\int_0^a(x-\xi)\frac{\xi^2}{2}d\xi+\frac{w_1}{EI_0}\int_a^x\frac{x-\xi}{(1+d\xi)^3}\frac{\xi^2}{2}d\xi$$
$$=\frac{w_1}{EI_1}\left[x\frac{\xi^3}{6}-\frac{\xi^4}{8}\right]_0^a+\frac{w_1}{EI_0}\left\{\frac{x}{2\alpha^3}\left[\ln(1+\alpha\xi)+\frac{2}{1+\alpha\xi}-\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\alpha^4}\left[(1+\alpha\xi)-3\ln(1+\alpha\xi)-\frac{3}{1+\alpha\xi}+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x\right\}$$
$$=\frac{w_1}{EI_1}\left(x\frac{a^3}{6}-\frac{a^4}{8}\right)+\frac{w_1}{EI_0}\left\{\frac{x}{2\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha x}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha x}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha x)^2}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]-\frac{1}{2a^4}\left[\alpha(x-a)-3\ln\frac{1+\alpha x}{1+\alpha a}-\frac{3}{1+\alpha x}+\frac{3}{1+\alpha a}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2(1+\alpha x)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]\right\}$$

荷重函数 $F(x)$ の区間による変化のため，x の区間が $(d,\ b)$ のときは

$$\int_0^\xi (\xi-\eta)F(\eta)d\eta=\int_0^\xi w_1(\xi-\eta)d\eta+\int_d^\xi w_2(\xi-\eta)d\eta$$

$$=w_1\frac{\xi^2}{2}+w_2\left(\frac{\xi^2}{2}-\xi d+\frac{d^2}{2}\right)$$

であって，第2項 $w_2(\xi-d)^2/2$ は $\xi>d$ のときにのみ正の値をとり，$\xi<d$ のときは 0 となるものである．したがって，その前の積分項

$$\int_0^a \frac{x-\xi}{EI_1}d\xi+\int_a^d \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}d\xi+\int_d^x \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}d\xi$$

と組合せるとき，第3項とのみの積をとるべきことになる．よって

$$G_3(x)=\left\{\int_0^a \frac{x-\xi}{EI_1}+\int_a^d \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}+\int_d^x \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}\right\}\left\{w_1\frac{\xi^2}{2}+w_2\left(\frac{\xi^2}{2}-\xi d+\frac{d^2}{2}\right)\right\}d\xi$$

$$=\int_0^a \frac{x-\xi}{EI_1}w_1\frac{\xi^2}{2}d\xi+\int_a^x \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}w_1\frac{\xi^2}{2}d\xi+\int_d^x \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}w_2$$

$$\times\left(\frac{\xi^2}{2}-\xi d+\frac{d^2}{2}\right)d\xi$$

$$=\frac{w_1}{EI_1}\left[x\frac{\xi^3}{6}-\frac{\xi^4}{8}\right]_0^a+\frac{w_1}{EI_0}\left\{\frac{x}{2\alpha^3}\left[\ln(1+\alpha\xi)+\frac{2}{1+\alpha\xi}-\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\alpha^4}\left[(1+\alpha\xi)-3\ln(1+\alpha\xi)-\frac{3}{1+\alpha\xi}+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x\right\}$$

$$+\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[(1+\alpha\xi)-3\ln(1+\alpha\xi)-\frac{3}{1+\alpha\xi}+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x\right.$$

$$+\left(\frac{x}{2}-d\right)\frac{1}{\alpha^3}\left[\ln(1+\alpha\xi)+\frac{2}{1+\alpha\xi}-\frac{2}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x-\left(xd+\frac{d^2}{2}\right)\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha\xi}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x+\frac{xd^2}{2}\frac{1}{\alpha}\left[\frac{-1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^x\right\}$$

$$=\frac{w_1}{EI_1}\left(x\frac{a^3}{6}-\frac{a^4}{8}\right)+\frac{w_1}{EI_0}\left\{\frac{x}{2\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha x}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha x}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha x)^2}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(x-a)-3\ln\frac{1+\alpha x}{1+\alpha a}-\frac{3}{1+\alpha x}+\frac{3}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha x)^2}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]\right\}+\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(x-a)-3\ln\frac{1+\alpha x}{1+\alpha a}-\frac{3}{1+\alpha x}+\frac{3}{1+\alpha a}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha x)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]+\left(\frac{x}{2}-d\right)\frac{1}{\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha x}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha x}-\frac{2}{1+\alpha a}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha x)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]-\left(xd+\frac{d^2}{2}\right)\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha x}+\frac{1}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha x)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]+\frac{xd^2}{4\alpha}\left[\frac{-1}{(1+\alpha x)^2}+\frac{1}{(1+\alpha a)^2}\right]$$

同様の注意をして $G_4(x)$ を計算する．

$$G_4(x)=\left\{\int_0^a \frac{x-\xi}{EI_1}+\int_a^d \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}+\int_d^b \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}+\int_b^x \frac{x-\xi}{EI_0}\right\}\left\{w_1\frac{\xi^2}{2}\right.$$

$$\left.+w_2\left(\frac{\xi^2}{2}-\xi d+\frac{d^2}{2}\right)\right\}d\xi$$

$$=\int_0^a \frac{x-\xi}{EI_1}w_1\frac{\xi^2}{2}d\xi+\int_a^b \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}w_1\frac{\xi^2}{2}d\xi+\int_b^x \frac{x-\xi}{EI_2}w_1\frac{\xi^2}{2}d\xi$$

$$+\int_d^b \frac{x-\xi}{EI_0(1+\alpha\xi)^3}w_2\left(\frac{\xi^2}{2}-\xi d+\frac{d^2}{2}\right)d\xi+\int_b^x \frac{x-\xi}{EI_2}w_2\left(\frac{\xi^2}{2}-\xi d+\frac{d^2}{2}\right)d\xi$$

$$=\frac{w_1}{EI_1}\left[x\frac{\xi^3}{6}-\frac{\xi^4}{8}\right]_0^a+\frac{w_1}{EI_0}\left\{\frac{x}{2\alpha^3}\left[\ln(1+\alpha\xi)+\frac{2}{1+\alpha\xi}-\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^b\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\alpha^4}\left[(1+\alpha\xi)-3\ln(1+\alpha\xi)-\frac{3}{1+\alpha\xi}+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_a^b\right\}+\frac{w_1}{EI_2}\left[x\frac{\xi^3}{6}-\frac{\xi^4}{8}\right]_b^x$$

$$+\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[(1+\alpha\xi)-3\ln(1+d\xi)-\frac{3}{1+\alpha\xi}+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_d^b\right.$$

$$+\left(\frac{x}{2}-d\right)\frac{1}{\alpha^3}\left[\ln(1+\alpha\xi)+\frac{2}{1+\alpha\xi}-\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_d^b-\left(xd+\frac{d^2}{2}\right)\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha\xi}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_d^b+\frac{xd^2}{2\alpha}\left[\frac{-1}{2(1+\alpha\xi)^2}\right]_d^b\right\}+\frac{w_2}{EI_2}\left[x\left(\frac{\xi^3}{6}-\frac{\xi^2 d}{2}+\frac{\xi d^2}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\xi^4}{8}-\frac{\xi^3 d}{3}+\frac{\xi^2 d^2}{4}\right)\right]_b^x$$

$$=\frac{w_1}{EI_1}\left\{x\frac{a_3}{6}-\frac{a^4}{8}\right\}+\frac{w_1}{EI_0}\left\{\frac{x}{2\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-a)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]\right\}+\frac{w_1}{EI_2}\left\{\frac{x^4}{24}-\frac{xb^3}{6}+\frac{b^4}{8}\right\}+\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-d)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]+\left(\frac{x}{2}-d\right)\frac{1}{\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha d}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]-\left(xd+\frac{d^2}{2}\right)\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha b}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^3}-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]+\frac{xd^2}{4\alpha}\left[\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha d)^2}\right]\right\}$$

$$+\frac{w_2}{EI_2}\left\{x\left(\frac{x^3-b^3}{6}-\frac{x^2-b^2}{2}d+\frac{x-b}{2}d^2\right)-\left(\frac{x^4-b^4}{8}-\frac{x^3-b^3}{3}d+\frac{x^2-b^2}{4}d^2\right)\right\}$$

最後の項はまとめて

$$\frac{w_2}{EI_2}\left\{\frac{x^4}{24}-\frac{x^3 d}{6}+\frac{x^2 d^2}{4}+x\left(-\frac{b^3}{6}+\frac{b^2 d}{2}-\frac{bd^2}{2}\right)+\frac{b^4}{8}+\frac{b^3 d}{3}+\frac{b^2 d^2}{4}\right\}$$

とすることができる．

(4) 定数 A, B, C の計算のための $\alpha'(c),\cdots$; $\alpha''(0)\cdots$; $\alpha'''(c)\cdots$ の計算値

公式 (11) における A, B, C の計算のためには，各函数 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $G(x)$ の境界値が必要である．各函数が区間毎に異なる表式を持っているため (11) に必要なものは

$$\alpha_3'\ (x),\quad \beta_3'\ (x),\quad G_4'\ (c):$$

$$\alpha_1''\ (0),\quad \beta_1''\ (0),\quad G_1''\ (0):$$

$$\alpha_3'''(c),\quad \beta_3'''(c),\quad G_4'''(0):$$

である．$\beta(x)$, $\alpha(x)$, $G(x)$ の順序に計算する．

$$\beta_3'\ (x)=\frac{a}{EI_1}+\frac{1}{2\alpha EI_0}\left\{\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha a)^2}\right\}+\frac{x-b}{EI_2}$$

$$\beta_3'''(x)=0$$

$$\therefore\quad \beta_3'\ (c)=\frac{a}{EI_1}+\frac{1}{2\alpha EI_0}\left\{\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha a)^2}\right\}+\frac{c-b}{EI_2}$$

$$\beta_3'''(c)=0$$

$$\beta_1''\ (x)=\frac{1}{EI_1}$$

$$\therefore\quad \beta_1''\ (0)=\frac{1}{EI_1}$$

次に，$\alpha(x)$ に関して

$$\alpha_3'\ (x)=\frac{1}{EI_1}\frac{a^2}{2}+\frac{1}{\alpha^2 EI_0}\left\{\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}$$
$$+\frac{1}{EI_2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{b^2}{2}\right)$$

$$\alpha_3'''(x)=\frac{1}{EI_2}$$

$$\therefore\quad \alpha_3'\ (c)=\frac{1}{EI_1}\frac{a^2}{2}+\frac{1}{\alpha^2 EI_0}\left\{\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}+\frac{1}{EI_0}\left(\frac{c^2}{2}-\frac{b^2}{2}\right)$$

$$\alpha_3'''(c)=\frac{1}{EI_0}$$

$$\alpha_1''\ (x)=\frac{1}{EI_1}x$$

$$a_1\ ''(0)=0$$

$G(x)$ に関しては，

$$G_1''(x)=\frac{w_1}{EI_1}\frac{x^2}{2}\qquad\qquad \therefore\quad G_1''(0)=0$$

$$G_4'(x)=\frac{w_1}{EI_1}\frac{a^3}{6}+\frac{w_1}{EI_0}\frac{1}{2\alpha^3}\left\{\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}$$

$$+\frac{w_1}{EI_2}\left\{\frac{x^3}{6}-\frac{b^3}{6}\right\}+\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha d}-\frac{2}{2(1+\alpha b)^2}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]-\frac{d}{\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]$$

$$\left.+\frac{d^2}{4\alpha}\left[\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha d)^2}\right]\right\}+\frac{w_2}{EI_2}\left\{\frac{x^3}{6}-\frac{x^2d}{2}+\frac{xd^2}{2}+\left(-\frac{b^3}{6}+\frac{b^2d}{2}-\frac{bd^2}{2}\right)\right\}$$

$$G_4'''(x)=\frac{w_1}{EI_2}x+\frac{w_2}{EI_2}(x-d)$$

$$\therefore\quad G_4'(c)=\frac{w_1}{EI_1}\frac{a^3}{6}+\frac{w_1}{EI_0}\frac{1}{2\alpha^3}\left\{\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}+\frac{w_1}{EI_2}\left(\frac{c^3}{6}-\frac{b^3}{6}\right)+\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}+\frac{2}{1+\alpha b}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2}{1+\alpha d}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]-\frac{d}{\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha d}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]+\frac{d^2}{4\alpha}\left[\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha d)^2}\right]\right\}$$

$$+\frac{w_2}{EI_2}\left\{\frac{c^3}{6}-\frac{b^3}{6}-\frac{c^2-b^2}{2}d+\frac{c-b}{2}d^2\right\}$$

$$G_4'''(c)=\frac{w_1}{EI_2}c+\frac{w_2}{EI_2}(c-d)=\frac{(w_1+w_2)c-w_2d}{EI_2}$$

4. 解式 $Y(x)$ の計算

解式 $Y(x)$ の中の定数 $A,\ B,\ C$ の計算式 (11) に，上に得た $\alpha_1''(0)=\beta_3'''(c)=G_1''(0)=0$ の関係を代入すると

$$A=-\frac{G'''(c)}{\alpha'''(c)}=-(w_1+w_2)c+w_2d$$

$$B=\frac{\sigma}{\beta''(0)}=w_1\frac{\rho^2}{2}$$

$$C=-\sigma\frac{\beta'(c)}{\beta''(0)}+\frac{\alpha'(c)G'''(c)}{\alpha'''(c)}-G'(c)=-B\beta'(c)-A\alpha'(c)-G'(c)$$

この関係を解式 $Y(x)$ に代入すれば

$$Y(x)=G(x)+A\alpha(x)+B\beta(x)+\{-B\beta'(c)-A\alpha'(c)-G'(c)\}x \qquad (12)$$

あるいは

$$Y(x)=\{G(x)-xG'(c)\}-\{(w_1+w_2)c-w_2d\}\{\alpha(x)-x\alpha'(c)\}$$

$$+w_1\frac{e^2}{2}\{\beta(x)-x\beta'(c)\} \qquad (13)$$

この式に前節に得た $G'(c)$, $\alpha'(c)$, $\beta'(c)$ 等の値を代入すれば

$$Y(x)=G(x)-x\Big[\frac{w_1}{EI_1}\frac{a^3}{6}+\frac{w_1}{2\alpha^3EI_0}\Big\{\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}$$
$$+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\Big\}+\frac{w_1}{EI_2}\Big(\frac{c^3}{6}-\frac{b^3}{6}\Big)+\frac{w_2}{EI_0}\Big\{-\frac{1}{2\alpha^3}\Big[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}+\frac{2}{1+\alpha d}$$
$$-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\Big]-\frac{d}{\alpha^2}\Big[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}$$
$$-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\Big]+\frac{d^2}{4\alpha}\Big[\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha d)^2}\Big]+\frac{w_2}{EI_2}\Big\{\frac{c^3-b^3}{6}-\frac{c^2-b^2}{2}d$$
$$+\frac{c-b}{2}d^2\Big\}\Big]$$
$$-\{(w_1+w_2)c-w_2d\}\cdot\Big[\alpha(x)-x\Big\{\frac{1}{EI_1}\frac{a^2}{2}+\frac{1}{\alpha^2EI_0}\Big(\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha a}$$
$$+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\Big)+\frac{1}{EI_2}\frac{c^2-b^2}{2}\Big\}\Big]$$
$$+w_1\frac{c^2}{2}\Big\{\beta(x)-x\Big[\frac{a}{EI_1}+\frac{1}{2\alpha EI_0}\Big\{\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha a)^2}\Big\}+\frac{c-b}{EI_2}\Big]\Big\} \tag{14}$$

これで解式が求められたわけであるが, $G(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ は x の区間によってそれぞれの区間に属する $G_i(x)$, $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ を用いるものとする.

中点 $x=c$ における撓み $Y(c)$ を求めるには, 上の (13) あるいは (14) に $x=c$ を代入して計算すればよい. $\alpha(x)$, $\beta(x)$ はそれぞれ $\alpha_3(x)$, $\beta_3(x)$ を用い, $G(x)$ は $G_4(x)$ を用いる.

まず係数を計算すれば

$$\beta(c)-c\beta'(c)=\frac{1}{EI_1}\Big(ca-\frac{a^2}{2}\Big)+\frac{c}{2\alpha EI_0}\Big\{\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha a)^2}\Big\}-\frac{1}{\alpha^2EI_0}\Big\{\frac{-1}{1+\alpha b}$$
$$+\frac{1}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\Big\}+\frac{1}{EI_2}\Big(\frac{c^2}{2}-cb+\frac{b^2}{2}\Big)-\frac{ac}{EI_1}$$
$$-\frac{c}{2\alpha EI_0}\Big\{\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha a)^2}\Big\}-\frac{c^2-bc}{EI_2}$$
$$=-\frac{1}{EI_1}\frac{a^2}{2}-\frac{1}{\alpha^2EI_0}\Big\{\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha b}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\Big\}$$
$$+\frac{1}{EI_2}\frac{b^2-c^2}{2} \tag{15}$$

$$\alpha(c)-c\alpha'(c)=\frac{1}{EI_1}\Big\{\frac{ca^2}{2}-\frac{a^3}{3}\Big\}+\frac{c}{\alpha^2EI_0}\Big\{\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\Big\}$$
$$-\frac{1}{\alpha^3EI_0}\Big\{\ln\frac{1+\alpha b}{1-\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\Big\}$$
$$+\frac{1}{EI_2}\Big\{\frac{c^3}{6}-\frac{cb^2}{2}+\frac{b^3}{3}\Big\}-\frac{1}{EI_1}\frac{ca^2}{2}-\frac{c}{\alpha^2EI_0}\Big\{\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha a}$$

$$+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\Big\}-\frac{1}{EI_2}\left\{\frac{c^3}{2}-\frac{cb^2}{2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{EI_1}\frac{a^3}{3}-\frac{1}{\alpha^3EI_0}\left\{\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}-\frac{1}{EI_2}\left\{\frac{c^3}{3}-\frac{b^3}{3}\right\} \tag{16}$$

$$G(c)-cG'(c)=\frac{w_1}{EI_1}\left(\frac{ca^3}{6}-\frac{a^4}{8}\right)+\frac{w_1}{EI_0}\left\{\frac{c}{2\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-a)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}-\frac{3}{1+\alpha b}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]\right\}+\frac{w_1}{EI_2}\left(\frac{c^4}{24}-\frac{bc^3}{6}+\frac{b^4}{8}\right)$$

$$+\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-d)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]+\left(\frac{c}{2}-d\right)\frac{1}{\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha d}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]-\left(cd+\frac{d^2}{2}\right)\left[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]+\frac{cd^2}{4\alpha}\left[\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha d)^2}\right]+\frac{w^2}{EI_2}\left\{c\left(\frac{c^3-b^3}{6}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{c^2-b^2}{2}d+\frac{c-b}{2}d^2\right)-\left(\frac{c^4-b^4}{8}-\frac{c^3-b^3}{3}d+\frac{c^2-b^2}{4}d^2\right)\right\}$$

$$-\frac{w_1}{EI_1}\frac{ca^3}{6}-\frac{w_1\cdot c}{2\alpha^3EI_0}\left\{\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right\}-\frac{w_1}{EI_2}\left(\frac{c^4}{6}-\frac{cb^3}{6}\right)-\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{c}{2\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}+\frac{2}{1+\alpha b}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2}{1+\alpha d}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]-\frac{cd}{d^2}\left[\frac{1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha d}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]+\frac{cd^2}{4\alpha}\left[\frac{-1}{(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{(1+\alpha d)^2}\right]\right\}$$

$$-\frac{w_2}{EI_2}\left\{\frac{c^4}{6}-\frac{cb^3}{6}-\frac{c^3-cb^2}{2}d+\frac{c^2-bc}{2}d^2\right\}$$

$$=-\frac{w_1}{EI_1}\frac{a^4}{8}+\frac{w_1}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-a)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha a}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]\right\}+\frac{w_1}{EI_2}\left\{-\frac{c^4}{8}+\frac{b^4}{8}\right\}$$

$$+\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-d)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\Bigg]-\frac{d}{\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+bd}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]-\frac{d^2}{2\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]$$

$$+\frac{w_2}{EI_2}\left\{-\frac{c^4-b^4}{8}+\frac{c_3d}{3}-\frac{c^2d^2}{4}-\frac{b^3d}{3}+\frac{b^2d^2}{4}\right\} \tag{17}$$

上の諸式を (13) に代入すれば，中点の撓み量 $Y(c)$ を得る．

$$Y(c)=-\frac{w_1}{EI_1}\frac{a^4}{8}+\frac{w_1}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-a)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha a}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]\right\}+\frac{w_1}{EI_2}\left\{-\frac{c^4}{8}+\frac{b^4}{8}\right\}+\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\Bigg[\alpha(b-d)\right.$$

$$-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\Bigg]-\frac{d}{\alpha^3}\Bigg[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}$$

$$+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha d}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\Bigg]-\frac{d^2}{2d^2}\Bigg[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha d}$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\Bigg]\right\}+\frac{w_2}{EI_2}\left\{-\frac{c^4-b^4}{8}+\frac{c^3-b^3}{3}d-\frac{c^2-b^2}{4}d^2\right\}$$

$$-\{(w_1+w_2)c-w_2d\}\cdot\left\{-\frac{1}{EI_1}\frac{a^3}{3}-\frac{1}{\alpha^3EI_0}\Bigg[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\Bigg]-\frac{1}{EI_2}\left[\frac{c^3}{3}-\frac{b^3}{3}\right]\right\}$$

$$+w_1\frac{e^2}{2}\cdot\left\{-\frac{1}{EI_1}\frac{a^2}{2}-\frac{1}{\alpha^2EI_0}\left[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{EI_2}\frac{b^2-c^2}{2}\right\}$$

$$=\frac{w_1}{EI_1}\left\{-\frac{a^4}{8}+\frac{a^3c}{3}-\frac{e^2a^2}{4}\right\}$$

$$+\frac{w_1}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-a)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]+\frac{c}{\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]$$

$$\left.-\frac{e^2}{2\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha 2)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]\right\}$$

$$+\frac{w_2}{EI_0}\left\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-d)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]-\frac{d}{\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha d}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]$$

$$-\frac{d^2}{2\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]$$

$$+(c-d)\frac{1}{\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]\Bigg\}$$

$$+\frac{w_2}{EI_1}\left\{+(c-d)\frac{a^3}{3}\right\}$$

$$+\frac{w_2}{EI_2}\left\{-\frac{c^4-b^4}{8}+\frac{c^3-b^3}{3}d-\frac{c^2-b^2}{4}d^2+(c-d)\left(\frac{c^3}{3}-\frac{b^3}{3}\right)\right\}$$

$$+\frac{w_1}{EI_2}\left\{-\frac{c^4}{8}+\frac{b^4}{8}+\frac{c^4}{3}-\frac{b^3c}{3}+\frac{e^2(b^2-c^2)}{4}\right\}$$

$$=\frac{w_1}{EI_1}\left\{-\frac{a^4}{8}+\frac{a^3c}{3}-\frac{e^2a^2}{4}\right\}$$

$$+\frac{w_1}{EI_0}\Bigg\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-a)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]+\frac{c}{\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]-\frac{e^2}{2\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha a}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]\Bigg\}$$

$$+\frac{w_1}{EI_2}\left\{\frac{5}{24}c^4+\frac{b^4}{8}-\frac{b^3c}{3}+\frac{e^2(b^2-c^2)}{4}\right\}$$

$$+\frac{w^2}{EI_1}\left\{\frac{+(c-d)a^3}{3}\right\}$$

$$+\frac{w_2}{EI_0}\Bigg\{-\frac{1}{2\alpha^4}\left[\alpha(b-d)-3\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha d}-\frac{3}{1+\alpha b}+\frac{3}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^3}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(1+\alpha d)^2}\right]+\frac{c-2\alpha}{\alpha^3}\left[\ln\frac{1+\alpha b}{1+\alpha a}+\frac{2}{1+\alpha b}-\frac{2}{1+\alpha a}-\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(1+\alpha a)^2}\right]-\frac{d^2}{2\alpha^2}\left[\frac{-1}{1+\alpha b}+\frac{1}{1+\alpha d}+\frac{1}{2(1+\alpha b)^2}-\frac{1}{2(1+\alpha d)_2}\right]\Bigg\}$$

$$+\frac{w^2}{EI_2}\left\{\frac{5}{24}c^4+\frac{b^4}{8}-\frac{b^3c}{3}-\frac{c^2d^2}{4}+\frac{b^2d^2}{4}\right\} \tag{18}$$

この $Y(c)$ の式において $a=d=b$ とおけば，第3図のような段付梁の曲げ問題となり

$$\bar{Y}(c)=\frac{w_1}{EI_1}\left(-\frac{a^4}{8}+\frac{a^3c}{3}-\frac{a^2e^2}{4}\right)+\frac{w_2}{EI_1}\left(-\frac{a^4}{3}+\frac{a^3c}{3}\right)$$

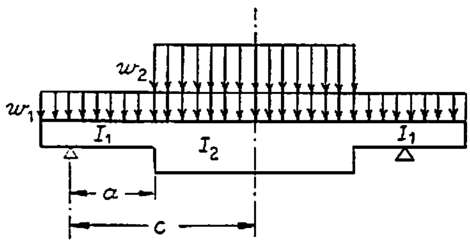
$$+\frac{w_1}{EI_2}\left(\frac{a^4}{8}+\frac{4}{25}c^4-\frac{a^3c}{3}+\frac{e^2a^2-e^2c^2}{4}\right)+\frac{w^2}{EI_2}\left(\frac{3}{8}a^4+\frac{4}{25}c^4-\frac{a^3c}{3}-\frac{a^2c^2}{4}\right) \tag{19}$$

を得るが，これははじめから，直接積分法で計算しても，またラプラス変換法で計算しても同じ式が得られるので計算の正しいことの一保証になる．

また，さらに $I_1=I_2$，$w_2=0$ とおけば，一様分布荷重，等断面梁の中点撓み

$$\bar{\bar{Y}}(c)=\frac{4}{25}\frac{wc^4}{EI} \qquad (20)$$

を得る.



第3図　簡単化した問題の場合

数値計算例

$a=1\,\mathrm{m}$,　$b=2.5\,\mathrm{m}$,　$c=4\,\mathrm{m}$,　$d=1.5\,\mathrm{m}$,

$e=1\,\mathrm{m}$

$w_1=0.2\,\mathrm{kg/mm}$,　$w_2=1\,\mathrm{kg/mm}$,　$B=10\,\mathrm{cm}$,　$h_1=15\,\mathrm{cm}$,　$h_2=30\,\mathrm{cm}$

の場合に中点の撓み $Y(c)$ を求めてみる.

$$I_1=\frac{Bh_1{}^3}{12}=\frac{10^2\times(1.5)^3\times 10^6}{12}=2.8125\times 10^7$$

$$I_2=\frac{Bh_2{}^3}{12}=\frac{10^2\times 3^3\times 10^6}{12}=2.250\times 10^8$$

$$I_0=\frac{B}{12}\left(\frac{h_1b-h_2a}{b-a}\right)^3=\frac{10^2}{12}\left(\frac{1.5\times 2.5-3\times 1}{2.5-1}\right)^3\times 10^6=1.0416\times 10^6$$

$$\alpha=\frac{h_2-h_1}{h_1b-h_2a}=\frac{3\times 10^2-1.5\,10^2}{1.5\times 2.5\times 10^5-3\times 1\times 10^5}=2\times 10^{-3}$$

$$E=2.1\times 10^4\,\mathrm{kg/mm^2}$$

これらの値を (18) に代入して計算すれば

$$Y(c)=11.55\,\mathrm{mm}$$

を得る.

同じ数値で $a=d=b=1\,\mathrm{m}$ とした第3図の場合を (19) 式によって計算すれば

$$\bar{Y}(c)=14.25\,\mathrm{mm}$$

を得る. $a=d=b=2.5\,\mathrm{m}$ とすれば

$$\bar{Y}(c)=28.32\,\mathrm{mm}$$

となる.

5. 結　　言

真直梁の曲げ撓みの計算法に関する直接積分法を可成り複雑な変断面不連続荷重分布の問題に適用する実際的な場合を研究して, 直接積分法が積分操作だけで変断面梁の曲げ撓みの解析に実用上有効であることを示した. この研究は昭和 38 年度機械科卒業生　井上繁, 階堂真次の両君の計算助力に待つことが多く両君と, 又この問題を提示された機械工学科小井土教授とに感謝の意を表するものである.

(昭和 39 年 11 月 27 日)