

多核子系の固有函数と特殊三次元ユニタリ群 (1) コエフィシヤント オブ フラクショナル ペアレンテージ

Sebe, Takashi / 瀬部, 孝

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学工学部研究集報 / 法政大学工学部研究集報

(巻 / Volume)

2

(開始ページ / Start Page)

55

(終了ページ / End Page)

62

(発行年 / Year)

1965-05

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004276>

多核子系の固有函数と特殊三次元ユニタリ群 第一報

[I] コエフィシャント オブ フラクショナル ペアレンテージ

教授 瀬 部 孝 (基礎学科)

The Eigenfunction of Many Nucleon System and the Group SU_3

[I] Coefficients of Fractional Parentage

Takashi Sebe, *Professor*

§ 1. 緒 言

Elliott の提唱した特殊 3 次元ユニタリ群 (SU_3 群)⁽¹⁾ は, 多核子系の状態を記述するのに極めて有用で, 軽い原子核の低エネルギー準位の性質を良く説明する⁽²⁾. そればかりでなく, ゆがんだ核の回転運動として比較的重い原子核の性質を解析する回転運動模型⁽³⁾とも良く対応し, その物理的意味が把握し易い. Elliott はこの表現に基づき物理量を計算する際に, 固有函数の具体的な表現を求めることは避け, 群演算子の期待値を使って, エネルギー行列やその他の物理量を計算した.

しかし, 固有函数の具体的な表式を知らないと, 異なる表現に属する状態間の行列要素を計算することは難しいし, また核反応の分析に必要な分光因子 (spectroscopic factor)⁽⁴⁾を計算することも出来ない. 多粒子系の反対称化された固有函数を作る良く知られた方法は Slater 行列の方法であるが, 実際の計算には不便な点が多く, 原子核の分野では Racah⁽⁵⁾によって提唱された fractional parentage の方法が良く使われる. この方法では全系の固有函数を軌道部分とスピン部分とに分け, 任意の対称性を持つ軌道部分を, それと対偶な表現に属するスピン部分に結合させて合成された固有函数を反対称化する. N 粒子系の軌道部分の固有函数には, $N-1$ 粒子系の固有函数に残りの 1 個の粒子をベクトル結合 (角運動量に関して) させて得られる固有函数の一次結合を作り, この一次結合の係数を適当に選ぶことにより必要な対称性を持たす. この係数を coefficient of fractional parentage (以後 cfp と略記する) と呼ぶ.

本論文では, SU_3 群の cfp を計算する一般的方法と, p 殻 (主量子数 = 1) について得られた cfp とを併せて報告する. 後に示すように, 我々の方法では, cfp は, 核に固定した座標軸において角運動量を合成する Clebsch-Gordon 係数⁽⁶⁾に比例し, 他の因子も明確な物理的意味を持つ.

§ 2. 内部固有函数 (Intrinsic Eigenfunction) と Hill-Wheeler 積分

2.1) SU_3 群

粒子は調和振動子型の井戸の中にあるものとし、その運動の量子を、磁気量子数 $0, 1$ および -1 で分類し、量子の数を n_0, n_1 , および n_{-1} であらわす。 n_0 を可能な限り大きく取り、その値を $(n_0)_{\max}$ と記す。次に、 n_0 を $(n_0)_{\max}$ に固定した時の n_1 の最大値を $(n_1)_0$, 残された n_{-1} を $(n_{-1})_0$ と書くと、この量子の配置は前述の SU_3 群の表現 $(\lambda\mu)$ に属する。なおこの時 λ と μ とは次の式で与えられる。

$$\lambda = (n_0)_{\max} - (n_1)_0, \quad \mu = (n_1)_0 - (n_{-1})_0$$

$(\lambda\mu)$ に属し、且 $(n_0)_{\max}$ で指定される一般の状態は、 $(n_1)_0, (n_{-1})_0$ とは異なった n_1, n_{-1} を持つので、これを区別するために全磁気量子数 k を使う。

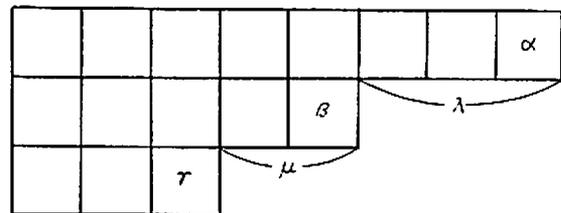
$$k = n_1 - n_{-1}$$

この $(\lambda\mu k)$ の3個の量子数により、核の内部状態 (Intrinsic state) が特定される。磁気量子数 0 の量子は、粒子の赤道面に直角な軌道での回転に対応するので、例えば、 $n_0 > n_1 + n_{-1}$ であれば、葉巻型に変形した核をあらわす。このような変形核の回転によって、角運動量 L が指定される。 L と $\lambda\mu k$ との関係は、Elliott⁽¹⁾ によると、

$$k = \min(\lambda, \mu), \min(\lambda, \mu) - 2 \cdots -1 \text{ 又は } 0,$$

$$L = \begin{cases} k, k+1, \dots, [k + \max(\lambda, \mu)] \\ 0, 2, 4, \dots, \max(\lambda, \mu) \end{cases} \quad (1)$$

p 殻の場合には、単一粒子の個々の状態は、3個の量子の何れかに対応するので、 $\lambda_1 = (n_0)_{\max} = \lambda + \mu + (n_{-1})_0$, $\lambda_2 = (n_1)_0 = \mu + (n_{-1})_0$, $\lambda_3 = (n_{-1})_0$ をそれぞれ同一軌道を回転する粒子の数と解釈することができる。この量子数によって表現される群が対称群⁽⁷⁾である。従って p 殻については、対称群による状態の分類と SU_3 群の分類とは完全に一致する。 sd 殻 (主量子数 $= 2$) の場合にはこれとは事情が異なり、上述の量子2個の結合が1つの単一粒子状態に対応する。この時は SU_3 群は対称群の部分群となる。



第1図 Young 図

従って、一般には量子状態は、対称性 $[f]$, SU_3 群の量子数 $\lambda\mu k$ および角運動量 L とで指定される。堀江によって示されたように⁽⁸⁾, この場合には、 cfp を、 SU_3 群の表現を作りあげて行く部分 ($\lambda\mu Lk$ にのみ依存し、堀江はこれを SU_3 群の Clebsch-Gordon 係数と呼んでいる。) と SU_3 群を結合して要求される対称性を満足させる部分 ($[f], \lambda$ および μ に依存) との積としてあらわされる。この報告では前者のみを取扱い、後者については第2報で報告する予定であ

る。

2.2) 内部状態 (Intrinsic State)

SU_3 群の既約表現は、整数 $N(=\lambda+\mu+(n_{-1})_0)$ の分割に対応するので、等しい大きさの正方形を上から順に、 $\lambda+\mu+(n_{-1})_0$, $\mu+(n_{-1})_0$ および $(n_{-1})_0$ 個並べた Young 図であらわされる⁽⁷⁾。第1図にこれを示す。第1図で α で表示された正方形を取り除くと、残された Young 図は既約表現 $(\lambda-1, \mu)$ をあらわす。これは逆に状態 $(\lambda\mu)$ は状態 $(\lambda-1, \mu)$ に量子を1個結合させて作り得ることを示す。この場合の $(\lambda-1, \mu)$ のような1代前の状態を親の状態と呼ぶことにする。同様に正方形 β および正方形 γ を取り除くことにより、親として可能な状態は $(\lambda-1, \mu)$ の他に $(\lambda+1, \mu-1)$ と $(\lambda, \mu+1)$ とがあることが分る。

計算の便宜上、磁気量子数 k の量子を消滅させる演算子を a_k , 生成する演算子を a_k^* とすると、良く知られているように⁽⁹⁾ 次の交換関係を満足する。

$$[a_k, a_l] = [a_k^*, a_l^*] = 0, [a_k, a_l^*] = \delta_{kl} \equiv \begin{cases} 0 & \text{for } k=l \\ 1 & k \neq l \end{cases}$$

また、 $a_k^* a_k = n_k$, は量子の数を与える。この演算子を使うと、1つの量子を状態 (k) から状態 (l) へ移す演算子 μ_l^k が次のように定義される。

$$\mu_l^k = a_l^* a_k, \quad (2)$$

また μ_l^k は次の交換関係を満足する⁽¹⁰⁾。

$$[\mu_l^k, \mu_{l'}^{k'}] = \delta_{kl'} \mu_l^{k'} - \delta_{kl} \mu_{l'}^k, \quad (3)$$

§1 に説明した $n_0 = (n_0)_{\max}$ の状態の固有函数を $\Phi_{\mu k}^1$ であらわすことにすると、 n_0 はこれ以上大きくなれないので、

$$\mu_0^m \cdot \Phi_{\mu k}^1 = 0 \quad \text{for } m = \pm 1, \quad (4.1)$$

さらに $k = \mu$ であれば、 n_1 もこれ以上増加することはできないから

$$\mu_{+1}^{-1} \cdot \Phi_{\mu\mu}^1 = 0 \quad (4.2)$$

従って、前述の3つの分岐に対応する一次結合を作り (4.1) と (4.2) と併せて3個の条件を満足させるようにその一次結合を選べば、 $\Phi_{\mu\mu}^1$ が得られる。

$k \neq \mu$ の状態は μ_{-1}^1 を $\Phi_{\mu\mu}^1$ に繰返し働かせることによって作ることができる。すなわち、

$$\Phi_{\mu k}^1 = N_k (\mu_{-1}^1)^{\left(\frac{\mu-k}{2}\right)} \Phi_{\mu\mu}^1, \quad (5.1)$$

$$N_k^2 = \frac{[(\mu+k)/2]!}{[(\mu-k)/2]! \mu!} \quad (5.2)$$

既に述べたように、 p 殻の場合には、量子と粒子の固有函数との対応が1対1であるから、以後は p 粒子の固有函数を ϕ_m とし、これを使って話を進める。我々は $n_0 = (n_0)_{\max}$ の場合に考察を限るので、 ϕ_0 は Young 図 (第1図) の第1行に配置され、第2行には ϕ_{+1} , と ϕ_{-1} とが配置される。このことに対応して ϕ_m を形式的にスピノール部分 (2成分) $\psi_{\frac{1}{2}, m}$ とスカラ

一部分 (1 成分) とに分けて考えることができる。即ち

$$\psi_{\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}} = \phi_{\pm 1} \quad (6.1)$$

$$\psi_0 = \phi_0 \quad (6.2)$$

すると、量子数 μ および k は上記のスピンロール (6.1) が μ 個結合されて作られたベクトルの絶対値および z 成分の 2 倍をそれぞれ与えると考えることができる。

このベクトルの結合を次の記号であらわす。

$$[\Phi_{\mu'}^{\mu} \times \phi_l]_k^{\mu} \equiv \sum_m \left(\frac{\mu'}{2} l \frac{k'}{2} m \middle| \frac{\mu}{2} \frac{k}{2} \right) \Phi_{\mu' k}^{\mu} \phi_{lm} \quad (7)$$

ここで、 $(ab \alpha\beta | c\gamma)$ は角運動ベクトル \vec{a} , \vec{b} および \vec{c} の間の $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ という結合を作る為の係数で、Clebsch-Gordon 係数と呼ばれている⁽⁶⁾。演算子 μ_l^k についても同様の記号を使う。

$$\mu_{\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}} = \mu_{\pm 1}^0 \quad (8)$$

(7) に対応して、

$$[\Phi_{\mu'}^{\mu} \times \overleftarrow{\mu}_{l, m}]_k^{\mu} \equiv N(\lambda' \mu', \mu) \sum_m \left(\frac{\mu'}{2} l \frac{k'}{2} m \middle| \frac{\mu}{2} \frac{k}{2} \right) \mu_{l, m} \cdot \Phi_{\mu' k}^{\mu} \quad (9)$$

ここで、 $N(\lambda' \mu', \mu)$ は右辺を規格化する為の常数で、

$l=1/2$ の場合には

$$N(\lambda' \mu', \mu) = \begin{cases} 1/\sqrt{\lambda'} & \text{for } \mu = \mu' + 1 \\ 1/\sqrt{\lambda' + \mu' + 1} & \text{for } \mu = \mu' - 1 \end{cases} \quad (10)$$

sd 殻核の場合には、 $\phi_{l, m}$ および $\mu_{l, m}$ は共にベクトル ($l=1$) が可能である。

2.3) p 殻の内部固有函数

上述したように、 p 粒子の系では、 $\Phi_{\mu k}^{\lambda}$ の親は、 $\Phi_{\mu k}^{\lambda-1}$, $\Phi_{\mu-1, k}^{\lambda}$ および $\Phi_{\mu+1, k}^{\lambda}$ の 3 種である。それぞれの親から作られる固有函数を区別する為には、 $\Phi_{\mu k}^{\lambda} [\lambda' \mu']$ なる記号を使う。すると、 $\Phi_{\mu k}^{\lambda} [\lambda' \mu']$ はそれぞれの分岐に応じて次のようにあらわされる。

$$\Phi_{\mu k}^{\lambda} [\lambda-1, \mu] = \Phi_{\mu k}^{\lambda-1} \phi_0 \quad (11.1)$$

$$\Phi_{\mu k}^{\lambda} [\lambda+1, \mu-1] = \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} [\Phi_{\mu+1}^{\lambda+1} \times \phi_{\frac{1}{2}}]_k^{\mu} - \sqrt{\frac{1}{\lambda+2}} [\Phi_{\mu-1}^{\lambda+1} \times \overleftarrow{\mu}_{\frac{1}{2}}]_k^{\mu} \quad (11.2)$$

$$\Phi_{\mu k}^{\lambda} [\lambda, \mu+1] = \sqrt{\frac{\lambda+\mu+2}{\lambda+\mu+3}} [\Phi_{\mu+1}^{\lambda} \times \phi_{\frac{1}{2}}]_k^{\mu} - \sqrt{\frac{1}{\lambda+\mu+3}} [\Phi_{\mu+1}^{\lambda} \times \overleftarrow{\mu}_{\frac{1}{2}}]_k^{\mu} \quad (11.3)$$

上式の右辺にあらわれる演算子 $\mu_{\frac{1}{2}, m}$ は、(4.1) の条件により、性質の良く知られた角運動量演算子 \vec{L}_m に置き換えることができる。

$$\mu_{\frac{1}{2}, m/2} \Phi_{\mu k}^{\lambda} = (-)^{\frac{1+m}{2}} L_m \Phi_{\mu k}^{\lambda} \quad (12)$$

なお、角運動量の固有函数に \vec{L}_m が働く時は⁽⁷⁾、

$$\vec{L}_m \Phi_{\mu k}^{\lambda} = \sqrt{L(L+1)} (L1Mm | LM+m) \Phi_{\mu, k+m}^{\lambda} \quad (13)$$

2.4) Hill-Wheeler 積分

原子核に固定した座標系で記述された固有函数は (11.1)~(11.3) に得られたが、この系自体は実験室系に対し、高速度で回転しているので、この固有函数を変換して実験室系での固有函数を作らなくては行けない。2座標系間の Euler 角を $\theta_1 \theta_2 \theta_3$ とすると、この角に依存する変換函数 $D_{\mu k}^L(\theta_1 \theta_2 \theta_3)$ により、角運動 L の固有函数 $\bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu}$ は核の座標系から実験室系へ次のように変換される⁽³⁾。

$$\bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu} = \sum_{k'} (D_{\mu k'}^L(\theta_1 \theta_2 \theta_3))^* \bar{\Psi}_{Lk'}^{\lambda \mu} \quad (14)$$

Elliott によって、 $(\lambda \mu k)$ で指定される内部固有函数は、核の回転によって作り出される角運動量 L を持つ固有函数 $\bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu}$ で展開することができ、

$$\phi_{\mu k}^{\lambda} = \sum_{L' k'} c_{L' k'}^{\lambda \mu k} \bar{\Psi}_{L' k'}^{\lambda \mu} \delta(k, k') \quad (15)$$

さらに、変換 (14) と $D_{\mu k}^L(\theta_1 \theta_2 \theta_3)$ の規格直交性⁽³⁾とにより、実験室系の固有函数は次の積分で与えられることが示された⁽⁴⁾。

$$\bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu} = \frac{(2L+1)}{8\pi^2 c_{Lk}^{\lambda \mu}} \iiint \phi_{\mu k}^{\lambda} D_{\mu k}^L(\theta_1 \theta_2 \theta_3) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \quad (16)$$

(16) 式の積分を Hill-Wheeler 積分と呼ぶ⁽⁴⁾。

以後、実験室系での単一粒子の固有函数を ϕ_m^l (l は角運動量) と記す。角運動量演算子は、(13) から知れるように、量子数 $\lambda \mu k$ および L を変更しないから、(11.1)~(11.3) の右辺に、(15) の展開式を代入すると、 $\bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu} \cdot \phi_n$ という積の一次結合となる。従って (16) の右辺には次の型の Hill-Wheeler 積分があらわれる。

$$\overline{\bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu} \cdot \phi_n} = \frac{(2L+1)}{8\pi^2} \iiint D_{\mu k}^L(\theta_1 \theta_2 \theta_3) \bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu} \cdot \phi_n d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

これと ϕ_m^l との重なり積分を計算すると、

$$\langle \phi_m^l | \overline{\bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu} \cdot \phi_n} \rangle = \frac{(2L+1)}{8\pi^2} \iiint D_{\mu k}^L(\theta_1 \theta_2 \theta_3) D_{\mu n}^L(\theta_1 \theta_2 \theta_3) \bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu} \cdot \phi_n d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \langle \phi_m^l | \phi_n \rangle \quad (17)$$

ここで、 $\langle \phi_m^l | \phi_n \rangle$ は単一粒子の固有函数の重なり積分で、(17) 式を導き出すのに (14) の逆変換が使われた。さらに $D_{\mu k}^L(\theta_1 \theta_2 \theta_3)$ の結合法則と規格直交性および実験室系の固有函数の定義 (16) とを使うと、

$$\langle \phi_m^l | \overline{\bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu} \cdot \phi_n} \rangle = (L'l M-m m | LM)(L'l k'' k-k'' | Lk) \phi_n^l | \phi_n \rangle \bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu} \quad (17')$$

(17) の最初の Clebsch-Gordon 係数は、実験室系での固有函数 $\bar{\Psi}_{Lk}^{\lambda \mu}$ と ϕ_m^l とをベクトル結合させる係数で、緒言に述べた cfp の定義により、残余の因子は cfp に含まれる因子となる。上述のベクトル結合に対応する cfp を通常の記法に従って、 $\langle (\lambda' \mu' k' L') l l \rangle \lambda \mu k L$ と記すと、

$$\langle (\lambda' \mu' k' L') l l \rangle \lambda \mu k L \propto (L'l k'' k-k'' | Lk) \langle \phi_m^l | \phi_n \rangle \quad (18)$$

つまり、cfp は内部固有函数の角運動量の結合についての Clebsch-Gordon 係数に比例すること

になり、従来 of cfp の取扱いに比べて、その物理的意味が一段と明確にされた。なお (18) の k'' は、(11.1)~(11.3) の右辺の演算子 μ_{lm} を含まない部分については、 k' と一致する。また p 殻の場合には、

$$\langle \phi'_n | \psi_n \rangle = 1 \quad (19)$$

2.5) 展開係数

(15) に導入された展開係数 $c_L^{\mu k}$ については、同じ $\lambda\mu$ を持ち、異なる座標軸で記述された二つの内部固有函数の重なりを、変換係数 $D_{kk'}^{\lambda}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ の具体的な形⁽⁶⁾ を使って、計算することにより、 $|c_L^{\mu k}|^2$ が求められる。(16) に定義された固有函数のうち、同じ $\lambda\mu L$ で指定され、 k だけが異なるものは相互に直交していない。この重なりも同様にして求められる。両者を統一的に記述するため次の記号を導入する。

$$C(\lambda\mu; kk'; L) = \begin{cases} |c_L^{\mu k}|^2 & \text{for } k = k' \\ c_L^{\mu k} c_L^{\mu k'} \langle \bar{\psi}_{L\lambda}^{\mu k} | \bar{\psi}_{L\lambda}^{\mu k'} \rangle & \text{for } k \neq k' \end{cases} \quad (20.1)$$

有馬によって、この展開係数が計算され、次のような比較的簡単な形の表式が得られた⁽¹²⁾。今 $k \geq k'$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} C(\lambda\mu; kk'; L) &= \frac{(2L+1)(2k')!}{2^{\mu+k} \left(\frac{k-k'}{2}\right)!} \sqrt{\frac{m'! (\mu-m)! (L+k)! (L-k')!}{m! (\mu-m')! (L+k')! (L-k)!}} \sum_{\substack{x,u \\ v,w \\ \lambda+k+L+u=\text{even}}} \binom{\mu-m'}{v} \binom{m}{v} \\ &\times \binom{2m-2v}{w-x} \binom{2v}{x} (-1)^x \frac{(\lambda+w)!}{(\lambda+k+w-L)! (2k'-u+w)! (u-w)!} \\ &\times \frac{(\lambda+k-L-1+u)!!}{(\lambda-2k'+k+L+1+u)!!} \end{aligned} \quad (20.2)$$

ただし、

$$m = (\mu - k)/2, \quad m' = (\mu - k')/2,$$

$$\binom{A}{n} = \frac{A!}{n! (A-n)!}$$

(20.2) により計算されるのは、既に述べたように、 $|c_L^{\mu k}|^2$ であるから、 $c_L^{\mu k}$ の位相を定めることは出来ない。Elliott は $\bar{\psi}_{L\lambda}^{\mu k}$ と $\bar{\psi}_{L\lambda}^{\mu k}$ の同一性を保証する為に、次の位相の関係を採用した⁽¹⁾。

$$c_L^{\mu-k} = (-1)^{\lambda+\mu+L} c_L^{\mu k} \quad \text{for } k > 0 \quad (21)$$

我々もこの位相の関係を取り入れることにする。

§ 3. p 殻の cfp

(11.1)~(11.3) 式に得られた内部固有函数の Hill-Wheeler 積分を遂行することにより、cfp は次のようにあらわされる。

$$\langle (\lambda - 1, \mu, k, L') p1 \rangle \lambda \mu k L \rangle = \frac{c_L^{\lambda-1 \mu k}}{c_L^{\lambda \mu k}} (L'1k0|Lk) \quad (22.1)$$

$$\begin{aligned} \langle (\lambda + 1, \mu - 1, k \pm 1, L') p1 \rangle \lambda \mu k L \rangle &= \frac{c_L^{\lambda+1 \mu-1 k \pm 1}}{c_L^{\lambda \mu k}} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} \left(\frac{\mu-1}{2} \frac{1}{2} \frac{k \pm 1}{2} \mp \frac{1}{2} \left| \frac{\mu}{2} \frac{k}{2} \right. \right) \\ &\times \left\{ (L'1k \pm 1 \mp 1|Lk) \mp \frac{\sqrt{L'(L'+1)}}{\lambda+1} (L'1k \pm 1 \mp 1|L'k)(L'1k0|Lk) \right\} \end{aligned} \quad (22.2)$$

$$\begin{aligned} \langle (\lambda, \mu + 1, k \pm 1, L') p1 \rangle \lambda \mu k L \rangle &= \frac{c_L^{\lambda \mu+1 k \pm 1}}{c_L^{\lambda \mu k}} \sqrt{\frac{\lambda+\mu+2}{\lambda+\mu+3}} \left(\frac{\mu+1}{2} \frac{1}{2} \frac{k \pm 1}{2} \mp \frac{1}{2} \left| \frac{\mu}{2} \frac{k}{2} \right. \right) \\ &\times \left\{ (L'1k \pm 1 \mp 1|Lk) \mp \frac{\sqrt{L'(L'+1)}}{\lambda+\mu+2} (L'1k \pm 1 \mp 1|L'k)(L'1k0|Lk) \right\} \end{aligned} \quad (22.3)$$

§ 4. 結 び

p 殻については、既に 1951 年に Jahn 達によって、対称群の cfp の数値の表が計算されているが⁽¹³⁾、電子計算機を使用する際には、解析式を subroutine として組み込む方が好都合のようである。SU₃ 群の cfp の解析式は我々の他に堀江によって $\mu \leq 2$ の範囲で計算され最近発表された。我々の表式は μ についての制限がないので適用範囲が広いように見えるが、現実の p 殻では Pauli の禁制原理の為大きい μ の値が許されないので実用の面では大差がない。ただ Clebsch-Gordon 係数の subroutine が多数の機種について整備されているので、coding が多少容易であるようにも思われる。

sd 殻については、公表された cfp は現在の所、4 粒子系までしかなく⁽¹⁴⁾、5 粒子系の cfp が最近秋山、井上等により漸く計算された段階である⁽¹⁵⁾。§2 で強調したように、我々の cfp の表式の各因子は明確な物理的な意味を持つが、そのことが、我々の計算を sd 殻へ拡張することを極めて容易にする。また (20.2) 式に与えた $c(\lambda\mu; kk'; L)$ は単一粒子の固有函数には全くよらないので、 p 殻にも sd 殻にも共通に使える。この点は我々の計算法の利点の一つであろう。なお $c(\lambda\mu; kk'; L)$ の code は NEAC 2230 (法政大学計算センター) について完成されている。

終りに、この問題に深い関心を寄せられ、堪えず御激励下さった武藤教授 (東京大) および武田教授 (法政大) に心からの謝意を表します。また有馬助教授 (東京大) 井上助教授 (日大) 秋山博士 (東京大) には何度も有益な御討論をして戴いた事について、堀江教授 (東工大) には、この問題について多くの有効な情報を戴きましたことと適切な御忠告を戴いた事について深く感謝致します。また計算機の coding および利用の面について法政大学計算センターの皆様いろいろ御助力を仰ぎましたことについても深謝の意を表させて戴きます。

参 考 文 献

- 1) J. P. Elliott; Proc. Roy. Soc. A 245, (1958) 128, 562,
J. P. Elliott & M. Harvey; Proc. Roy. Soc. A 272 (1963) 507.
- 2) T. Inoue, T. Sebe, H. Hagiwara & A. Arima; Nuc. Phys. 59 (1964) 1.
- 3) 有馬, 堀江, 藤田, 吉沢; 核構造 (共立出版) (1960).
- 4) M. M. Macfarlane & J. B. French; Rev. Mod. Phys. 32 (1960) 567.
- 5) G. Racah; Phys. Rev. 63 (1948) 367.
- 6) M. E. Rose; Elementary Theory of Angular Momentum. (1957).
- 7) 山内恭彦, 堀江 久; 回転群および対称群の応用 (現代応用数学第11巻) (岩波).
- 8) H. Horie; J. Phys. Soc. Japan 19 (1964) 1783.
- 9) 磯 親他; 素粒子の一般的性質 (共立出版) (1957).
- 10) M. Moshinsky; Nuc. Phys. 31 (1962) 384.
- 11) P. L. Hill & J. A. Wheeler; Phys. Rev. 89 (1953) 1102.
- 12) 有馬朗人; 私信.
- 13) H. A. Jahn and H. van Wieringen; Proc. Roy. Soc. A 209 (1951) 592.
- 14) H. A. Jahn; Proc. Roy. Soc. A 201 (1950) 516.
- 15) 秋山佳己, 井上健男; 私信.