

空気ばね系の温度平衡減衰効果

TAKEDA, Shin' ichiro / 武田, 晋一郎

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部
研究集報

(巻 / Volume)

3

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

11

(発行年 / Year)

1966-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004275>

空気ばね系の温度平衡減衰効果

教授 武田 晋一郎

Damping Effect of Thermal Equilibrium in the Air Spring System

Shin'ichiro TAKEDA, *Professor of Physics*

1. 緒 言

空気ばねを弾性力装置としてもつ系あるいはグッシュ・ポットを減衰装置としてもつ系の力学的研究は諸種の分野において実行されているが、空気ばね内の空気の温度変化に着目してその特有の効果（主として温度平衡減衰効果）を調べたものは皆無の状態である。著者は先頃の研究（導管による振動圧の伝達；法政大学工学部研究報告第1号昭和31年5月，1956年）において、一般に閉じられた空気系の圧力変動がその温度平衡の如何によって大きな影響を受けることを指摘し、導管内の圧力伝達現象の正しい説明にも非常に重要であることを示した。

今回は同じことが、空気ばね系の振動減衰にも大きな影響を持つことを、空気ばねと弾性ばねとを併有する振子系の強制振動の振幅の計算より、等価減衰係数を求めることによって指摘するものである。

2. 温度変化を考慮した空気ばねの力学

空気ばねは模型的には第1図のように、ピストン・シリンダに閉じこめられた空気系にて代表させることができる。平衡時の空気系の圧力、絶対温度、容積をそれぞれ、 P_0 、 T_0 、 V_0 とすれば、状態方程式より

$$P = P_0 \frac{T}{T_0} \frac{V_0}{V}, \quad \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{\Delta V}{V_0} \quad (1)$$

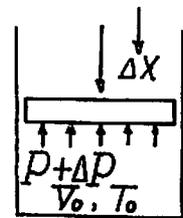
ピストンの面積を A とし、隙間よりの漏洩はないものとすれば、ピストンの変位 ΔX と空気系の容積変化 ΔV との関係は

$$\Delta V = -A\Delta X \quad (2)$$

(2) を (1) に代入すれば

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta T}{T_0} + \frac{A\Delta X}{V_0} \quad (3)$$

となる。容積変化 ΔV と空気系の温度変化 ΔT との間関係は、断熱変化の式



第1図 空気ばね模型

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad \frac{\Delta T}{T} + (\gamma-1) \frac{\Delta V}{V} = 0 \quad (4)$$

で与えられる*. 温度変化 $\theta = \Delta T$ の結果, 空気系とシリンダ壁との間に熱交換 (熱伝導および熱輻射) が生ずる. 熱交換の詳細は空気室の大小および形状によって相違があるが, ここでは簡単のため Newton の法則に従うものとし, 定数 τ でその程度を表わすことにすれば,

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau} = -(\gamma-1) \frac{T_0}{V_0} \frac{dV}{dt} \quad (5)$$

なる関係が得られる. τ = 温度平衡時定数とよぶ.

(3) と (5) とから, ピストン変位 ΔX と圧力変化 ΔP との関係を求める. まず (3) を時間 t で微分して

$$\frac{1}{P_0} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{T_0} \frac{dT}{dt} + \frac{A}{V_0} \frac{dX}{dt}$$

この式の $\frac{dT}{dt}$ を $\frac{d\theta}{dt}$ とおき, (5) より得られる $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\theta}{\tau} + (\gamma-1) \frac{T_0 A}{V_0} \frac{dX}{dt} \\ &= -\frac{1}{\tau} \cdot T_0 \left(\frac{\Delta P}{P_0} - \frac{A \Delta X}{V_0} \right) + (\gamma-1) \frac{T_0 A}{V_0} \frac{dX}{dt} \end{aligned}$$

を代入すれば,

$$\frac{1}{P_0} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{T_0} \left\{ -\frac{T_0}{\tau} \left(\frac{\Delta P}{P_0} - \frac{A \Delta X}{V_0} \right) + (\gamma-1) \frac{T_0 A}{V_0} \frac{dX}{dt} \right\} \frac{A}{V_0} \frac{dX}{dt}$$

となる. これを書き改めると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_0} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{\tau} \frac{\Delta P}{P_0} &= \frac{1}{\tau} \frac{A \Delta X}{V_0} + (\gamma-1) \frac{A}{V_0} \frac{dX}{dt} + \frac{A}{V_0} \frac{dX}{dt} \\ &= \frac{1}{\tau} \frac{A \Delta X}{V_0} + \gamma \frac{A}{V_0} \frac{dX}{dt} \end{aligned}$$

いま, $\frac{\Delta P}{P_0} \equiv p$, $\frac{A \Delta X}{V_0} \equiv \xi$ とおけば, 上式は ($P = P_0 + \Delta P$)

$$\frac{dp}{dt} + \frac{p}{\tau} = \gamma \frac{d\xi}{dt} + \frac{\xi}{\tau} \quad (6)$$

* 熱力学の第1法則によれば, 断熱変化 $Q=0$ に対しては $Q = \Delta U + W$ において $W = p \Delta V$, $\Delta U = J C_v \Delta T$ とすれば, $J C_v \Delta T = -p \Delta V$ となる. 状態方程式 $pV = RT$ をこの式に代入して

$$\begin{aligned} J C_v \Delta T &= -\frac{RT}{V} \Delta V = -\frac{J(C_p - C_v)T}{V} \Delta V \\ \frac{\Delta T}{T} + \frac{C_p - C_v}{C_v} \frac{\Delta V}{V} &= 0, \quad \frac{\Delta T}{T} + (\gamma-1) \frac{\Delta V}{V} = 0, \quad \left(\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v} \right). \end{aligned}$$

となる。これは、空気ばね系における変位 ξ と圧力変化 p との間の関係を表わす基本方程式である。

この方程式の意味を考えるため、 $\tau=\infty$ 、 $\tau=0$ の2つの場合と $\xi=\xi_0 e^{int}$ のように変化した場合とを調べてみる。

(1) $\tau=\infty$ の場合:

基本方程式 (6) は $\tau=\infty$ の極限の場合には

$$\frac{dp}{dt} = \gamma \frac{d\xi}{dt}, \text{ すなわち } p = \gamma \xi \quad (7)$$

となり、純粋の断熱変化の場合に帰着することがわかる。

(2) $\tau=0$ の場合:

基本方程式 (6) において $\tau=0$ とすれば

$$p = \xi \quad (8)$$

となって、純粋の等温変化の場合に帰着する。

(3) $\xi = \xi_0 e^{int}$ の場合:

基本方程式 (6) において $\xi = \xi_0 e^{int}$ とおくと、 $p = p_0 e^{int + i\alpha}$ となるものとすれば、

$$\left(in + \frac{1}{\tau}\right) p_0 e^{int + i\alpha} = \left(\gamma in + \frac{1}{\tau}\right) \xi_0 e^{int}$$

これより e^{int} を取り去り、

$$\frac{p_0}{\xi_0} e^{i\alpha} = \frac{\frac{1}{\tau} + \gamma in}{\frac{1}{\tau} + in} = \frac{1 + \gamma in \tau}{1 + in \tau} = \frac{1 + \gamma n^2 \tau^2 + (\gamma - 1) in \tau}{1 + n^2 \tau^2}$$

を得る。ピストン変位 ξ と圧力変化 p との関係は複素数 K :

$$K \equiv \frac{1 + \gamma in \tau}{1 + in \tau}$$

$$|K| = \sqrt{\frac{1 + \gamma^2 n^2 \tau^2}{1 + n^2 \tau^2}}, \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{(\gamma - 1)n\tau}{1 + \gamma n^2 \tau^2} \quad (9)$$

によって変化する。そして、

$\gamma=1$ ならば、 $\alpha=0$ が当然成立つ (等温変化)。

$\gamma \neq 1$ ならば、 $\alpha \neq 0$ であるが、

$$n\tau \rightarrow 0 \text{ ならば } \alpha \rightarrow 0$$

$$n\tau \rightarrow \infty \text{ ならば } \alpha \rightarrow 0$$

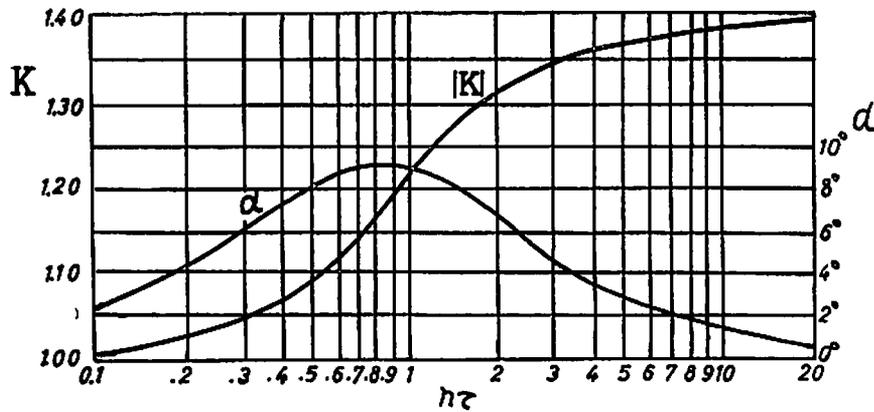
$n\tau$ の途中の値に α の極大値が存在する*。

また, $|K|$ の値は

$$n\tau \rightarrow 0 \text{ のとき } |K| \rightarrow 1, \text{ (等温変化)}$$

$$n\tau \rightarrow \infty \text{ のとき } |K| \rightarrow \gamma. \text{ (断熱変化)}$$

となる。空気系の圧縮に関するポリトロップ指数の $n\tau$ による変化を明確化したもので、空気ばねの力学について従来の研究の全く看過し去っていた点はこの点である。第2図は $|K|$ と α との $n\tau$ による変化を $\gamma=1.40$ (空気) として表わしたものである。



第2図 $n\tau$ の函数とみたときのポリトロップ指数 $|K| \cdot e^{i\alpha}$

この解析によって、空気ばねの力学的挙動は単純なばね特性の外に複素数的性格を有する減衰効果を含むことが、位相角 $\alpha \neq 0$ のために発生することが明らかとなった。次には、この点を具体的に調べることにする。

3. 空気ばねと弾性ばねとを併有する振動系の強制振動

質量 m の質点にはばね定数の弾性ばね、面積 A 容積 V_0 の空気ばねをもつ力学系と $f_0 e^{int}$ の強制振動力が作用する場合 (第3図) の強制振幅を種々の振動数について計算して空気ばねの温度平衡減衰の効果を判定しようとするものである。質点の変位を x とすれば、質点の運動方程

* $\alpha = \tan^{-1} \frac{(\gamma-1)n\tau}{1+\gamma n^2 \tau^2}$ の極大値は $n\tau \equiv x$ とおけば、 $f(x) = \frac{(\gamma-1)x}{1+\gamma x^2}$ として

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \frac{(\gamma-1)x}{1+\gamma x^2} \right\} = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{1 + \frac{(1+\gamma x^2)^2}{(\gamma-1)^2 x^2}} = 0$$

より

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(\gamma-1)(1+\gamma x^2) - (\gamma-1)x \cdot 2\gamma x}{(1+\gamma x^2)^2} = \frac{(\gamma-1)(1-\gamma x^2)}{(1+\gamma x^2)^2} = 0$$

$\gamma \neq 1$ であれば、 $1-\gamma x^2=0$; $x^2 = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{1.40} = 0.7143$, $x=0.8452$, $n\tau=0.8452$ が α の極大値 $\tan^{-1} 0.1690 \approx 9^\circ 35'$ を与える。(空気)

式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + A \cdot \Delta P = f_0 e^{int} \quad (10)$$

空気ばねの圧力変化 ΔP に対する方程式は基本方程式 (6) により

$$\frac{1}{P_0} \frac{d(\Delta P)}{dt} + \frac{1}{\tau} \frac{1}{P_0} \Delta P = \gamma \frac{A}{V_0} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} \frac{A}{V_0} x \quad (11)$$

連立方程式 (10) と (11) とを解いて x を求めればよいわけである。

ラプラス変換法によって、これを解く。 $x(t) \rightarrow X(s)$, $\Delta P \rightarrow p(s)$ として、(10) と (11) とのラプラス変換を求めると、

$$\left. \begin{aligned} ms^2 X(s) + kX(s) + Ap(s) &= f_0 \frac{1}{s-in} \\ sp(s) + \frac{1}{\tau} p(s) &= \frac{\gamma AP_0}{V_0} sX(s) + \frac{1}{\tau} \frac{AP_0}{V_0} X(s) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし、定常振動解を求めるのが目的であるから、初期値はすべて 0 とおいた。(12) の各式から $p(s)$ を消去すれば、

$$p(s) = \frac{\frac{\gamma AP_0}{V_0} s + \frac{1}{\tau} \frac{AP_0}{V_0}}{s + \frac{1}{\tau}} X(s)$$

$$ms^2 X(s) + kX(s) + \frac{\frac{\gamma A^2 P_0}{V_0} s + \frac{1}{\tau} \frac{A^2 P_0}{V_0}}{s + \frac{1}{\tau}} X(s) = \frac{f_0}{s-in}$$

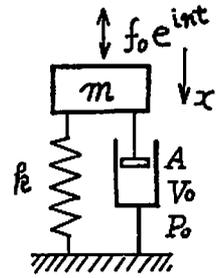
$$\left[(ms^2 + k) \left(s + \frac{1}{\tau} \right) + \frac{A^2 P_0}{V_0} \left(\gamma s + \frac{1}{\tau} \right) \right] X(s) = f_0 \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s-in}$$

$\frac{A^2 P_0}{mV_0} = \Omega^2$, $\frac{k}{m} = \omega^2$, $\frac{f_0}{m\omega^2} = x_s$ とおけば

$$\left[(s^2 + \omega^2) \left(s + \frac{1}{\tau} \right) + \Omega^2 \left(\gamma s + \frac{1}{\tau} \right) \right] X(s) = \frac{f_0}{m} \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s-in}$$

$$\therefore X(s) = \frac{f_0}{m} \cdot \frac{s + \frac{1}{\tau}}{\left[(s^2 + \omega^2) \left(s + \frac{1}{\tau} \right) + \Omega^2 \left(\gamma s + \frac{1}{\tau} \right) \right] \cdot (s-in)} \quad (13)$$

となる。 $\frac{1}{s-in} \rightarrow e^{int}$ に対応する項が定常振動項であるから、(13) において $s=in$ を代入して、原函数 $x(t)$ を求めると



第3図 振動系

$$x(t) = \frac{f_0}{m} \cdot \frac{in + \frac{1}{\tau}}{(-n^2 + \omega^2)(in + \frac{1}{\tau}) + \Omega^2(i\gamma n + \frac{1}{\tau})} e^{int}$$

$$\frac{x(t)}{x_s} = \frac{1 + in\tau}{\left(1 - \frac{n^2}{\omega^2}\right)(1 + in\tau) + \frac{\Omega^2}{\omega^2}(1 + i\gamma n\tau)} e^{int}$$

$$= \frac{1 + in\tau}{\left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2}\right) + in\tau\left(1 + \gamma\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2}\right)} e^{int}$$

$x(t) = x_0 e^{int}$ とおき, 振幅比を x_0/x_s で表わせば,

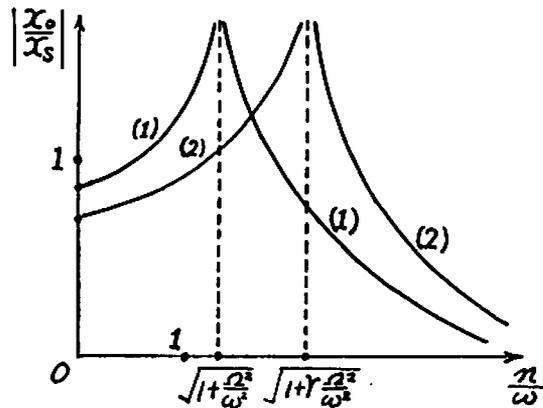
$$\frac{x_0}{x_s} = \frac{1 + in\tau}{\left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2}\right) + in\tau\left(1 + \gamma\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2}\right)} \quad (14)$$

(14) の絶対値 $|x_0/x_s|$ は定常振動の振幅比を表わし, 偏角は位相角 ϕ を表わす.

$$\left| \frac{x_0}{x_s} \right| = \sqrt{\frac{1 + n^2\tau^2}{\left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2}\right)^2 + n^2\tau^2\left(1 + \gamma\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2}\right)^2}} \quad (15)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-n\tau(\gamma - 1)\frac{\Omega^2}{\omega^2}}{\left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2}\right) + n^2\tau^2\left(1 + \gamma\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2}\right)} \quad (16)$$

振幅比および位相角の詳細な計算の前に, (15) (16) 両式の特別の場合を考察しよう.



第4図 等温および断熱共振曲線

(1) $n\tau \rightarrow 0$ の場合 (等温変化)

$$\left| \frac{x_0}{x_s} \right| = \frac{1}{1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2}} \quad (17)$$

(2) $n\tau \rightarrow \infty$ の場合 (断熱変化)

$$\left| \frac{x_0}{x_s} \right| = \frac{1}{1 + \gamma \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{n^2}{\omega^2}} \quad (18)$$

(3) $\Omega \rightarrow 0$ の場合 (空気ばねがなく, 当然 $n\tau \rightarrow 0$)

$$\left| \frac{x_0}{x_s} \right| = \frac{1}{1 - \frac{n^2}{\omega^2}} \quad (19)$$

(4) $\omega \rightarrow 0$ の場合 (弾性ばねがない)

この場合には x_s の代りに $x_s' = \frac{f_0}{P_0 A^2 / V_0}$ をとって計算すれば,

$$\left| \frac{x_0}{x_s'} \right| = \sqrt{\frac{1 + n^2 \tau^2}{\left(1 - \frac{n^2}{\Omega^2}\right)^2 + n^2 \tau^2 \left(\gamma - \frac{n^2}{\Omega^2}\right)^2}} \quad (20)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-n\tau(\gamma - 1)}{\left(1 - \frac{n^2}{\Omega^2}\right) + n^2 \tau^2 \left(\gamma - \frac{n^2}{\Omega^2}\right)} \quad (21)$$

となる。ここで, さらに

(a) $n\tau \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 0$) とすれば (等温空気ばね),

$$\left| \frac{x_0}{x_s'} \right| = \frac{1}{1 - \frac{n^2}{\Omega^2}} \quad (22)$$

(b) $n\tau \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow \infty$) とすれば (断熱空気ばね),

$$\left| \frac{x_0}{x_s'} \right| = \frac{1}{\gamma - \frac{n^2}{\Omega^2}} \quad (23)$$

共振曲線として (17), (18), (19), (22), (23) はいずれも $n\tau \rightarrow 0$ あるいは $n\tau \rightarrow \infty$ に対応するもので, 等温あるいは断熱空気ばねとして作用する場合である。これらの場合には, 何れも無限大の共振幅をもつが, (20) の場合は $n\tau \neq 0, \neq \infty$ であって, 有限な共振振幅であることは, 温度平衡減衰の効果によるものである。

(4) の場合は, 弾性ばねが無くて空気ばねだけの場合であって, 一般の場合の (15), (16) 式より少し簡単である。

いずれにしても, (20) あるいは一般に (15) を計算して有限な最大共振振幅を求めて, 例えば等価減衰係数を求める方法などによって, 温度平衡減衰度を調べるのが本研究の目的である。

4. 共振振幅の計算と等価減衰率

共振振幅比を一般には公式 (15) によって, 空気ばねのみの系に対しては公式 (20) によって計算すればよいわけであるが, 計算の都合上次の無次元数を導入する。

(1) 空気ばねのみの系の場合

この場合には、公式 (20) において

$$\text{主変数: } \frac{n}{\Omega} \equiv v$$

$$\text{助変数: } \Omega\tau \equiv \theta$$

とすれば、振幅比は ($n\tau = v\Omega\tau = v\theta$ となることを考慮して)

$$\frac{x_0}{x_0'} = \sqrt{\frac{1 + \theta^2 v^2}{(1 - v^2)^2 + \theta^2 v^2 (\gamma - v^2)^2}} \quad (24)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-(\gamma - 1)\theta v}{(1 - v^2) + \theta^2 v^2 (\gamma - v^2)} \quad (25)$$

(2) 一般の系の場合

公式 (15) において

$$\text{主変数: } \frac{n}{\omega} \equiv u$$

$$\text{助変数: } \frac{\Omega}{\omega} \equiv \nu$$

$$\text{助変数: } \omega\tau \equiv \theta$$

$$\frac{x_0}{x_3} = \sqrt{\frac{1 + \theta^2 u^2}{(1 + \nu^2 - u^2)^2 + \theta^2 u^2 (1 + \lambda\nu^2 - u^2)^2}} \quad (I)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-(\gamma - 1)\theta\nu^2 u}{(1 + \nu^2 - u^2) + \theta^2 u^2 (1 + \lambda\nu^2 - u^2)} \quad (II)$$

(1) の場合には θ に種々の値を与えて v に対する振幅比を計算し、(2) の場合には ν , θ に種々の値を与えて計算した。

第5図には (1) の場合、すなわち空気ばねのみの系の場合の共振曲線群を示してある。

等価減衰率は、系を2次の線形系として

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 e^{int}$$

$$x = A e^{int + \phi}$$

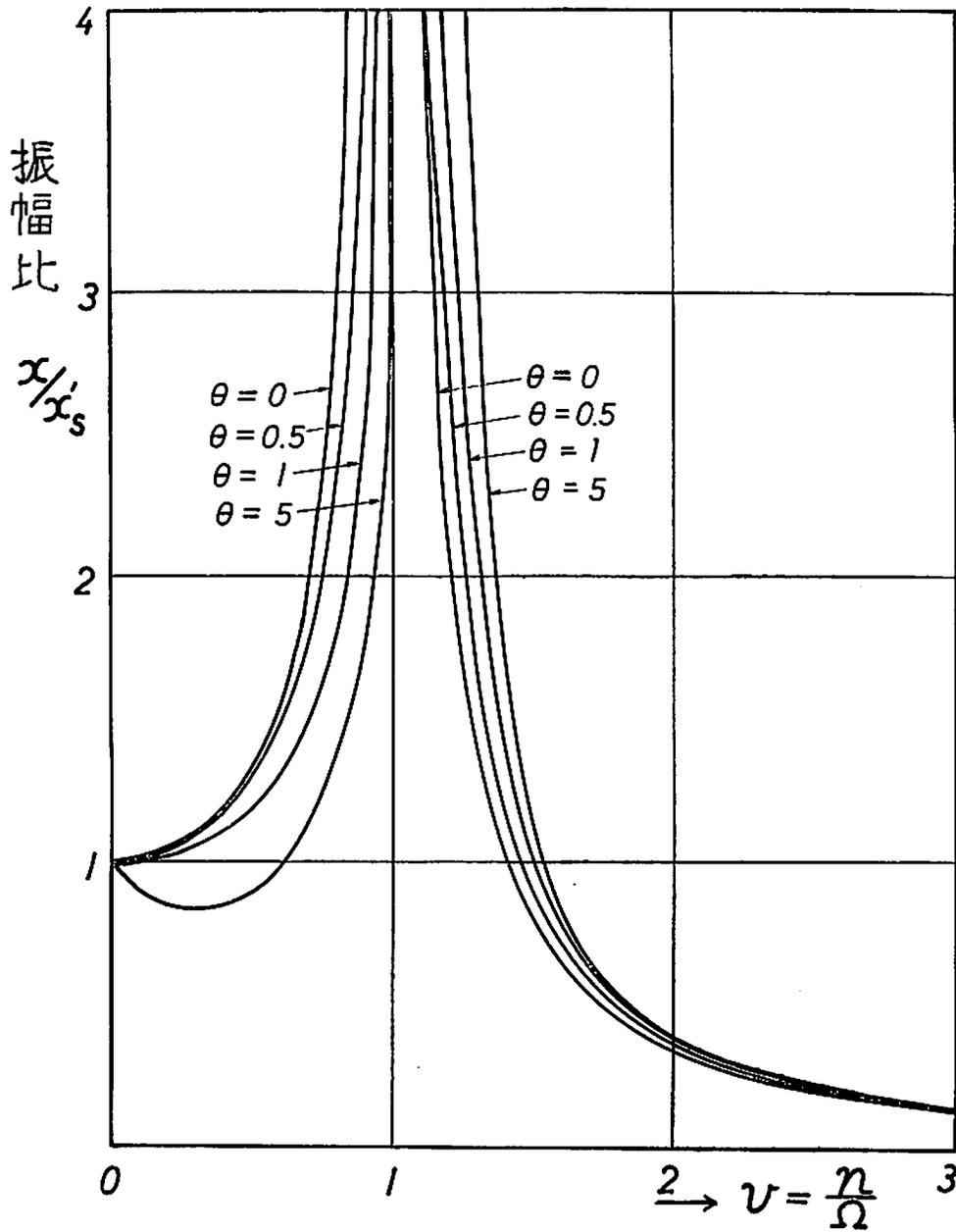
$$A = \frac{\omega_n}{\sqrt{(\omega_n^2 - n^2)^2 + 4\lambda^2 n^2}}$$

$\omega_n = n$ のとき

$$A_{\max} \doteq \frac{1}{2\lambda} \quad (26)$$

として、上に計算した共振振幅の最大値から、 $\lambda = 1/2A_{\max}$ として等価減衰率を決定するものである。そして、この λ を助変数 θ の関数とし観察するわけである。

第5図より (26) の関係式によって、等価減衰率 λ を $\theta = \Omega\tau$ の関数として求めたものは第6



第5図 空気ばねのみの系の共振曲線群

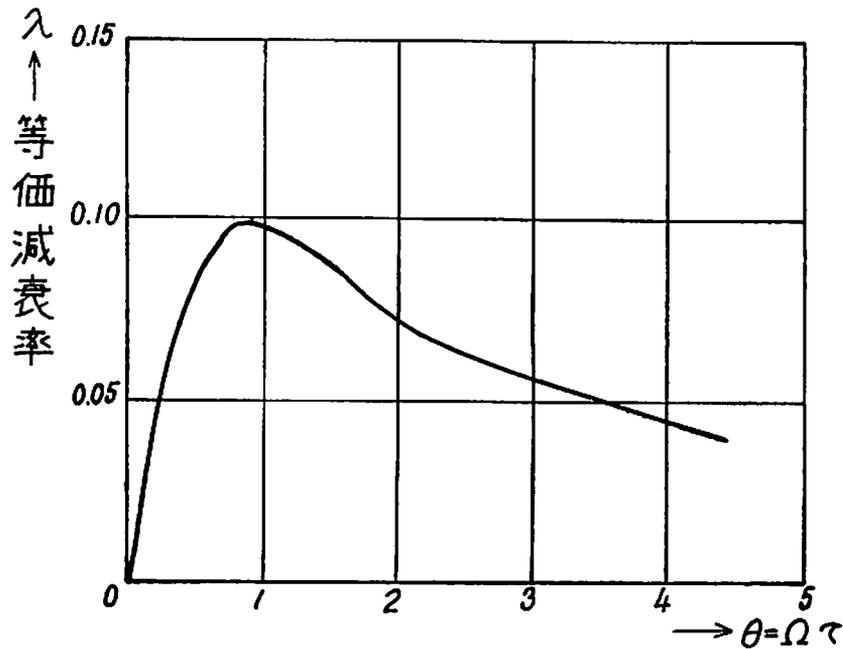
図の通りである。λ の最大値は約 0.10 であって、θ=0.85 のところにある。λ=1 の場合が、ちょうど臨界制振に相当するので、λ_{max} はその $\frac{1}{10}$ 程度に過ぎないけれども、温度平衡減衰の効果は明瞭に認められるところである。

空気室の容積 V(liter) とその時定数 τ(sec) の間の実験式

$$\tau = 7.5 \sqrt[3]{V}$$

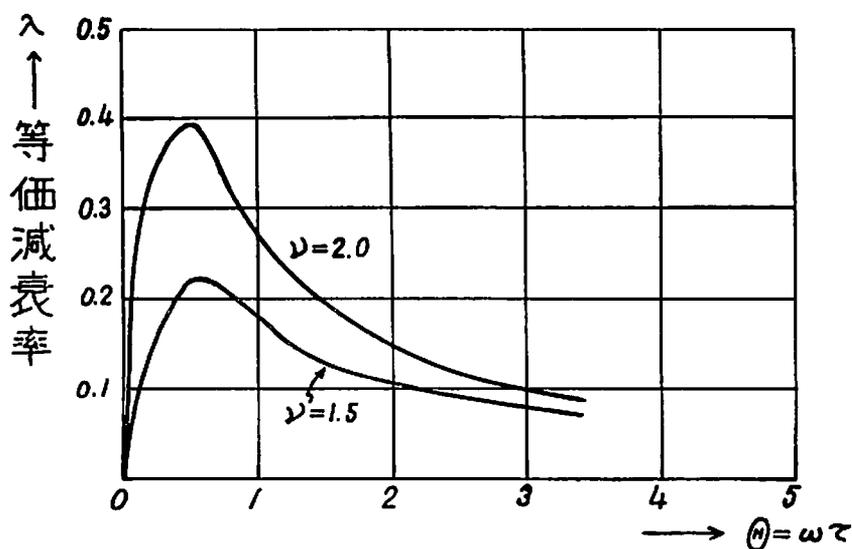
を用いて、λ_{max} のときの振動数を求めると

$$n = \frac{0.13}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{\sqrt[3]{V}} = 0.112 \frac{1}{\sqrt[3]{V}} \tag{28}$$

第6図 空気ばねのみの系の等価減衰率 λ

となる。 $V=1$ liter の場合には、角振動数 n が 0.112 (rad/sec) すなわち 0.0179 (cycle/sec), 周期 56 sec の緩徐なものである。これから、大きな空気室容積を持つ空気ばね系では λ_{\max} となる振動は振動数が極めて小さいので実用範囲内では仲々起り難いが、空気室容積が小さい系では実用範囲で問題となることが想像される。空盆内部容積、圧力伝達導管の内部などがこの場合に属する。

弾性ばねと空気ばねとを併有する振動系の場合について同様の操作を行えば、第7図のような結果を得る。これによれば、空気ばねのみの振動系の場合よりも大きな等価減衰率が得られていることが知れる。

第7図 空気ばねと弾性ばねとを併用する系の等価減衰率 λ

5. 結 言

空気ばね系の振動減衰に、空気ばね内の空気室内の空気の断熱圧縮による温度変化が周囲の壁への熱伝導、熱輻射によって平衡する過程が、振動には減衰効果を呈することを理論によって明確にし、また数値計算によってその等価減衰率を求めた。空気ばねのみよりなる振動系では等価減衰率は臨界制振の場合の $1/10$ 程度であるが、弾性ばねを併有する場合には割合に大きい減衰率が現われる。

本研究の計算には法政大学計算センターの援助を受け、また数値計算の進行および整理には基礎学科実験助手 秋山喬二君 の助力を受けた。ここに記して感謝の意を表する次第である。

(昭和 39 年 12 月 28 日)