Recursive-汎函数列の極限

TANAKA, Hisao / 田中, 尚夫

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報

(巻 / Volume)
3

(開始ページ / Start Page)
26

(終了ページ / End Page)
35

(発行年 / Year)
1966-03

(URL)
https://doi.org/10.15002/00004273

Recursive-汎函数列の極限

専任講師 田 中 尚 夫 (基礎学科)

On Limits of Sequences of Recursive Functionals

Hisao TANAKA

α は 函数の有限列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{l_1}$ を表わし，x は自然数全体の集合 N の上の変数の有限列 $x_1, x_2, \cdots, x_{l_2}$ を表わす．ここで函数とは，1変数の数論的函数すなわち N^N に属する函数のことである．汎函数 $\Phi\langle\alpha, x\rangle$ (すなわち $\lambda a\Phi\langle\alpha, x\rangle(a)$) とは，$(N^N)^{l_1}\times N^{l_2}$ から N^N の中への mapping のことである．ただし l_1, l_2 の少くとも一方は0でないとする．$l_1=0$ の場合には，(l_2+1)-変数の函数と考える．

汎函数のクラス $C_h(h<\omega)$ を次のように帰納的に定義する:

C_0 は recursive-汎函数 $\Phi\langle\alpha, x\rangle$ 全体のクラスである．

C_{h+1} は次のような汎函数 $\Phi\langle\alpha, x\rangle$ 全体のクラスである: すなわち，C_h に属するある汎函数 $\Psi\langle\alpha, x, k\rangle$ (k は N 上の変数) があって，それに対し

$$\Phi\langle\alpha, x\rangle=\lim_{k\to\infty}\Psi\langle\alpha, x, k\rangle$$

が成り立つような汎函数 Φ，換言すれば

$$(\alpha)(x)(a)(Em)(k)[k\geqq m\to\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(a)=\overline{\Psi\langle\alpha, x, k\rangle}(a)]$$

が成立するような汎函数 Φ 達から成る[1]．

次に $\{w_i\}(i<\omega)$ は sequence numbers 全体を重複を許さないで recursive に並べたものとする．そのとき我々は L_h を次のような汎函数 $\Phi\langle\alpha, x\rangle$ 全体のクラスとして定義する: the predicate

$$\lambda\alpha xi[\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(lh(w_i))=w_i]$$

は Δ_{h+1}-form で (すなわち $\sum^0_{h+1}\cap\Pi^0_{h+1}$-form で) 表示可能である．

そのとき，Post の定理によって，$C_0=L_0$ であることがわかる．更に各自然数 h に対し

$$C_h=L_h$$

であることが証明される．所で recursive-汎函数は連続であるから，この結果は，有限級の Baire-函数に関する Lebesgue の定理の effective version を与える．例えば $h=1$ に対し ($l_1=1$, $l_2=0$ として),

1) 函数 β に対し，$\overline{\beta}(a)=\prod_{i<a}p_i\exp(\beta(a)+1)$ である．ここに p_i は $i+1$ 番目の素数を表わす．その他ここで用いられる notations は主として Kleene [1], [2] のものである．

$\Phi\langle\alpha\rangle$ が Baire の零空間 N^N で定義され，値域が N^N に含まれる函数であるとき；Φ が第1級の Baire-函数であるための（recursive 汎函数達の recursive sequence の極限であるための）必要かつ十分な条件は，その全ての Lebesgue-sets $\{\alpha: \Phi\langle\alpha\rangle\in w_i\}$（ここに w_i は Baire の区間を表わす）が F_σ & G_δ-sets であることである．（集合 $\{\langle\alpha, i\rangle: \Phi\langle\alpha\rangle\in w_i\}$ が Δ_2-set であることである）．

証明は，Ljapunow [3] および Vallée-Poussin [4] における classical proofs を recursive function theoretic な方法で改作することによって得られる*．著者は，上の事実が，実数の区間 [0, 1] で定義された recursive-実函数の場合にも成立するかどうか知らない．

[Lemma 1] Φ がクラス C_h に属する汎函数ならば，Φ はクラス L_h に属する．すなわち $C_h\subseteq L_h$.

（証明） $C_0=L_0$ であるから，Φ はクラス C_{h+1} に属する汎函数とする．すなわちクラス C_h に属するある汎函数 $\Psi\langle\alpha, x, m\rangle$ に対し

(1) $$\Phi\langle\alpha, x\rangle=\lim_{m\to\infty}\Psi\langle\alpha, x, m\rangle$$

となる．そのとき次の同値式が成り立つ：

$$\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(lh(w_i))=w_i$$

(2) $$\equiv(Ek)(m)[m\geqq k\to\overline{\Psi\langle\alpha, x, m\rangle}(lh(w_i))=w_i],$$

(3) $$\equiv(k)(Em)[m\geqq k\ \&\ \overline{\Psi\langle\alpha, x, m\rangle}(lh(w_i))=w_i].$$

何となれば，先づ (1) によって

(4) $$(\alpha)(x)(a)(Em)(n)[n\geqq m\to\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(a)=\overline{\Psi\langle\alpha, x, n\rangle}(a)].$$

そこで簡単のために添数 i を省いて $\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(l)=w$ としよう．ただし $l=lh(w)$ である．この l に対し (4) によって

(5) $$(n)[n\geqq m_0\to\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(l)=\overline{\Psi\langle\alpha, x, n\rangle}(l)]$$

なる m_0 がある．従って $(n)[n\geqq m_0\to\overline{\Psi\langle\alpha, x, n\rangle}(l)=w]$．故に $(Em)(n)[n\geqq m\to\overline{\Psi\langle\alpha, x, n\rangle}(l)=w]$．更に任意の m をとる．$n_0=\max(m_0, m)$ としよう．そのとき

$$n_0\geqq m\ \&\ \overline{\Psi\langle\alpha, x, n_0\rangle}(l)=w.$$

従って $(m)(En)[n\geqq m\ \&\ \overline{\Psi\langle\alpha, x, n\rangle}(l)=w]$．今度はこの仮定の下で

$$n_1\geqq m_0\ \&\ \overline{\Psi\langle\alpha, x, n_1\rangle}(l)=w$$

なる n_1 がある．それ故 (5) によって $\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle(l)}=w$ をうる．かくて

$$\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(l)=w\to(Em)(n)[n\geqq m\to\overline{\Psi\langle\alpha, x, n\rangle}(l)=w]\to$$
$$\to(m)(En)[n\geqq m\ \&\ \overline{\Psi\langle\alpha, x, n\rangle}(l)=w]\to\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(l)=w$$

---

*) 本論文の草稿が書き上げられた後に，著者の上の結果の $h=1$ の場合が近着の次の論文に含まれていることを知った：E. M. Gold, Limiting recursion, Journal of Symbolic Logic, Vol. 30, No. 1 (1965), pp. 28-48.

なることが示された．これは (2), (3) を証明した．

帰納法の仮定によって Ψ はクラス L_h に属するから，(2), (3) の括弧内の predicate はクラス Δ_{h+1} にある．従って the predicate $\lambda\alpha xi[\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(lh(w_i))=w_i]$ は Δ_{h+2}-form に表示可能である．故に Φ はクラス L_{h+1} に属する．(証明終)

次に predicates $P(\alpha, x)$ のクラス達 $K_h(h<\omega)$ を次のように帰納的に定義する：

K_0 は recursive predicates $P(\alpha, x)$ の全体のクラスである．

K_{h+1} は，クラス K_h に属するある predicate $R(\alpha, x, m)$ に対し，同値式

(6) $$P(\alpha, x)\equiv(Ek)(m)[m\geqq k\rightarrow R(\alpha, x, m)]$$

(7) $$\equiv(k)(Em)[m\geqq k \ \&\ R(\alpha, x, m)]$$

が成り立つような predicates $P(\alpha, x)$ 全体のクラスである．

[Lemma 2] $P(\alpha, x)$ が Δ_{h+1}-predicate ならば，$P(\alpha, x)$ はクラス K_h に属する．すなわち $\Delta_{h+1}\subseteq K_h$．逆の包含関係は明かに成立するから結局すべての $h<\omega$ に対し

$$\Delta_{h+1}=K_h.$$

それ故，Δ_{h+1}-predicate $P(\alpha, x)$ に対する (6), (7) なる表現において，R は Δ_h-predicate であると取ることが出来る．

(証明) $\Delta_1=K_0$ は明白であるから，$P(\alpha, x)$ を Δ_{h+2}-predicate としよう．従って

(8) $$P(\alpha, x)\equiv(En)(m)R_0(\alpha, x, n, m)$$

$$\equiv(n)(Em)R_1(\alpha, x, n, m)$$

なる $\sum_h$-predicate R_0, Π_h-predicate R_1 が存在する．そのとき (6), (7) をみたす Δ_{h+1}-predicate R が存在することを示せば十分である．何となれば帰納法の仮定によって，そのとき R はクラス K_h に属する predicate であるから P はクラス K_{h+1} に属することになる．これは Lemma 2 を証明した．そこで，

(9) $$P_0(\alpha, x, n)\equiv(m)R_0(\alpha, x, n, m)\ \&\ (j)[j<n\rightarrow(Em)\bar{R}_0(\alpha, x, j, m)]$$

(10) $$M_0(\alpha, x, n, m)\equiv(i)[i<m\rightarrow R_0(\alpha, x, n, i)]$$

(11) $$N_0(\alpha, x, n, m)\equiv(Ei)[i<m\ \&\ (j)\{j<n\rightarrow\bar{R}_0(\alpha, x, j, (i)_j)\}]$$

とおこう．そのとき M_0, N_0 は Δ_{h+1}-predicates であって，

(12) $$P_0(\alpha, x, n)\equiv(m)M_0(\alpha, x, n, m)\ \&\ (Em)N_0(\alpha, x, n, m),$$

(13) $$P(\alpha, x)\equiv(En)P_0(\alpha, x, n),$$

(14) $$M_0(\alpha, x, n, m+1)\rightarrow M_0(\alpha, x, n, m),$$

(15) $$N_0(\alpha, x, n, m)\rightarrow N_0(\alpha, x, n, m+1)$$

が成り立つ．(14) と (15) によって次の (16)～(19) を得る：

(16) $$(m)M_0(\alpha, x, n, m)\equiv(Ek)(m)[m\geqq k\rightarrow M_0(\alpha, x, n, m)]$$

(17) $$\equiv(k)(Em)[m\geqq k\ \&\ M_0(\alpha, x, n, m)],$$

(18) $$(Em)N_0(\alpha, x, n, m) \equiv (Ek)(m)[m \geqq k \to N_0(\alpha, x, n, m)]$$

(19) $$\equiv (k)(Em)[m \geqq k \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m)].$$

それ故 (12), (16)～(19) によって

(20) $$P_0(\alpha, x, n) \equiv (Ek)(m)[m \geqq n \to M_0(\alpha, x, n, m)] \ \& \ (Ek)(m)[m \geqq k \to N_0(\alpha, x, n, m)],$$

(21) $$P_0(\alpha, x, n) \equiv (k)(Em)[m \geqq k \ \& \ M_0(\alpha, x, n, m)] \ \& \ (k)(Em)[m \geqq k \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m)]$$

を得る．このとき

(22) $$P_0(\alpha, x, n) \equiv (Ek)(m)[m \geqq k \to M_0(\alpha, x, n, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m)]$$

(23) $$P_0(\alpha, x, n) \equiv (k)(Em)[m \geqq k \ \& \ M_0(\alpha, x, n, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m)]$$

が成り立つことを証明しよう：

先づ (20) によって

(24) $$(Ek)(m)[m \geqq k \to M_0(\alpha, x, n, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m)] \to P_0(\alpha, x, n)$$

が言える．そこで $P_0(\alpha, x, n)$ と仮定しよう．再び (20) によって

$$(m)[m \geqq k_1 \to M_0(\alpha, x, n, m)],$$

$$(m)[m \geqq k_2 \to N_0(\alpha, x, n, m)]$$

なる k_1, k_2 がある．$k = \max(k_1, k_2)$ とすると

$$(m)[m \geqq k \to M_0(\alpha, x, n, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m)].$$

従って $P_0(\alpha, x, n) \to (Ek)(m)[m \geqq k \to M_0(\alpha, x, n, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m)]$ が示された．(24) と共にこれは (22) を証明した．次に

$$(Em)[m \geqq k \ \& \ M_0(\alpha, x, n, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m)] \to$$
$$\to (Em)[m \geqq k \ \& \ M_0(\alpha, x, n, m)] \ \& \ (Em)[m \geqq k \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m)]$$

であるから (21) によって (23) の逆の implication を得る．所で (22) の右辺は (23) の右辺を imply するから (22) によって

$$P_0(\alpha, x, n) \to (k)(Em)[m \geqq k \ \& \ M_0(\alpha, x, n, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m)].$$

これで (23) が証明された．

さて上と同様にして

$$P_1(\alpha, x, n) \equiv (m)\bar{R}_1(\alpha, x, n, m) \ \& \ (j)[j<n \to (Em)R_1(\alpha, x, j, m)],$$

$$M_1(\alpha, x, n, m) \equiv (i)[i<m \to \bar{R}_1(\alpha, x, n, i)],$$

$$N_1(\alpha, x, n, m) \equiv (Ei)[i<m \ \& \ (j)\{j<n \to R_1(\alpha, x, j, (i)_j)\}]$$

と定義すると，M_1, N_1 は Δ_{h+1}-predicates であって，

(13′) $$\bar{P}(\alpha, x) \equiv (En)P_1(\alpha, x, n),$$

(22′) $$P_1(\alpha, x, n) \equiv (Ek)(m)[m \geqq k \to M_1(\alpha, x, n, m) \ \& \ N_1(\alpha, x, n, m)],$$

$$(23') \qquad P_1(\alpha, x, n) \equiv (k)(Em)[m \geqq k \ \& \ M_1(\alpha, x, n, m) \ \& \ N_1(\alpha, x, n, m)]$$

を得る．そこで

$$R(\alpha, x, m) \equiv (Ek)[k \leqq m \ \& \ M_0(\alpha, x, k, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, k, m) \ \& \ (i)\{i \leqq k \rightarrow \bar{M}_1(\alpha, x, i, m) \vee \bar{N}_1(\alpha, x, i, m)\}]$$

と定義すれば，R は Δ_{h+1}-predicate であって，

$$(6) \qquad P(\alpha, x) \equiv (En)(m)[m \geqq n \rightarrow R(\alpha, x, m)],$$

$$(7) \qquad \equiv (n)(Em)[m \geqq n \ \& \ R(\alpha, x, m)]$$

が成り立つ．これを証明しよう．

$P(\alpha, x)$ とせよ．(13) によって $P_0(\alpha, x, n_0)$ なる n_0 がある．(22) によって

$$(25) \qquad (m)[m \geqq k' \rightarrow M_0(\alpha, x, n_0, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, n_0, m)]$$

なる k' が存在する．(13′) によって $(n)\bar{P}_1(\alpha, x, n)$ であるから，勿論

$$(i)[i \leqq n_0 \rightarrow \bar{P}_1(\alpha, x, n)].$$

故に (23′) によって $i=0, 1, 2, \cdots, n_0$ に対し

$$(26) \qquad (m)[m \geqq k_i \rightarrow \bar{M}_1(\alpha, x, i, m) \vee \bar{N}_1(\alpha, x, i, m)]$$

なる k_i がある．$k = \max_{i \leqq n_0} (k_i, k', n_0)$ とすると (25), (26) から

$$m \geqq k \rightarrow [M_0(\alpha, x, n_0, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, n_0, m) \ \& \ (i)\{i \leqq n_0 \rightarrow \bar{M}_1(\alpha, x, i, m) \vee \bar{N}_1(\alpha, x, i, m)\}]$$

を得る．$n_0 \leqq k$ であるから [ ] 内は

$$(En)[n \leqq m \ \& \ M_0(\alpha, x, n, m) \ \& \ N_0(\alpha, x, n, m) \ \& \ (i)\{i \leqq n \rightarrow \bar{M}_1(\alpha, x, i, m) \vee \bar{N}_1(\alpha, x, i, m)\}]$$

となるから，結局 $(Ek)(m)[m \geqq k \rightarrow R(\alpha, x, m)]$ を得た．従って

$$(27) \qquad P(\alpha, x) \rightarrow (Ek)(m)[m \geqq k \rightarrow R(\alpha, x, m)]$$

が示された．次に $\bar{P}(\alpha, x)$ とせよ．(13′) によって $P_1(\alpha, x, n_1)$ なる n_1 がある．よって (22′) により次のような k' がある．

$$(28) \qquad (m)[m \geqq k' \rightarrow M_1(\alpha, x, n_1, m) \ \& \ N_1(\alpha, x, n_1, m)].$$

一方 (13) によって $(n)\bar{P}_0(\alpha, x, n)$ であるから，(23) によって，$i < n_1$ に対し

$$(29) \qquad (m)[m \geqq k_i \rightarrow \bar{M}_0(\alpha, x, i, m) \vee \bar{N}_0(\alpha, x, i, m)]$$

なる k_i が存在する．$k = \max_{i < n_1} (k_i, k', n_1)$ とおこう．(28), (29) によって

$$m \geqq k \rightarrow (i)[i < n_1 \rightarrow \bar{M}_0(\alpha, x, i, m) \vee \bar{N}_0(\alpha, x, i, m)] \ \& \ M_1(\alpha, x, n_1, m) \ \& \ N_1(\alpha, x, n_1, m).$$

従って $m \geqq k$ ならば，$i < n_1$ なる i に対し

$$\bar{M}_0(\alpha, x, i, m) \vee \bar{N}_0(\alpha, x, i, m),$$

従って

(30) $\bar{M}_0(\alpha, x, i, m) \vee \bar{N}_0(\alpha, x, i, m) \vee (Ej)[j \leqq i \ \& \ M_1(\alpha, x, n_1, m) \ \& \ N_1(\alpha, x, n_1, m)]$.

$n_1 \leqq i \leqq m$ なる i に対し

$$(Ej)[j \leqq i \ \& \ M_1(\alpha, x, n_1, m) \ \& \ N_1(\alpha, x, n_1, m)]$$

であるからやはり (30) が成り立つ．かくて

$$(Ek)(m)[m \geqq k \rightarrow (i)\{i \leqq m \rightarrow \bar{M}_0(\alpha, x, i, m) \vee \bar{N}_0(\alpha, x, i, m) \vee$$
$$\vee (Ej)(j \leqq i \ \& \ M_1(\alpha, x, j, m) \ \& \ N_1(\alpha, x, j, m))\}]$$

なること従って $(\bar{k})(Em)[m \geqq k \ \& \ R(\alpha, x, m)]$ なることがわかった．故に

(31) $$\bar{P}(\alpha, x) \rightarrow (\bar{k})(Em)[m \geqq k \ \& \ R(\alpha, x, m)]$$

が示された．(6) の右辺は (7) の右辺を imply するから，(21) と (31) は (6), (7) を与える．

[Lemma 3] $C_h = L_h$ という仮定の下で；$\Phi\langle\alpha, x\rangle$ は与えられた汎函数であり，$\Psi\langle\alpha, x, n\rangle$ はクラス C_{h+1} に属する汎函数で，それに対し

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \Psi\langle\alpha, x, n\rangle = \Phi\langle\alpha, x\rangle \text{ recursively uniformly,}$$

であるとする．すなわち

(32) $$(\alpha)(x)(k)(n)[n \geqq \theta(k) \rightarrow \overline{\Psi\langle\alpha, x, n\rangle}(k) = \overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(k)]$$

なる単調増大な recursive function $\theta(k)$ が存在するとする．

そのとき Φ はクラス C_{h+1} に属する．すなわち

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \Theta\langle\alpha, x, n\rangle = \Phi\langle\alpha, x\rangle$$

なるクラス C_h に属する汎函数 Θ を見出すことが出来る．

(証明) (32) によって

(33) $$\overline{\Psi\langle\alpha, x, \theta(k)\rangle}(k) = \overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(k).$$

また Ψ がクラス C_{h+1} に属することから，クラス C_h に属するある汎函数 $\Theta'\langle\alpha, x, n, m\rangle$ に対し

$$\lim_{m\rightarrow\infty} \Theta'\langle\alpha, x, n, m\rangle = \Psi\langle\alpha, x, m\rangle$$

となる．従って (33) から

(34) $$\overline{\lim_{m\rightarrow\infty} \Theta'\langle\alpha, x, \theta(k), m\rangle}(k) = \overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(k)$$

を得る．そこで

$$\begin{cases} \Theta''\langle\alpha, x, 0, m\rangle(a) = \Theta'\langle\alpha, x, \theta(1), m\rangle(a) \\ \Theta''\langle\alpha, x, k+1, m\rangle(a) = \begin{cases} \Theta''\langle\alpha, x, k, m\rangle(a) & \text{if } a < k+1, \\ \Theta'\langle\alpha, x, \theta(k+2), m\rangle(a) & \text{otherwise,} \end{cases} \end{cases}$$

によって汎函数 $\Theta''\langle\alpha, x, k, m\rangle$ を定義する．Θ' はクラス C_h に属し，また仮定により $C_h = L_h$ であるから，$\lambda\alpha xkmab[\Theta'\langle\alpha, x, \theta(k), m\rangle(a) = b]$ は Δ_{h+1}-predicate であり，従って上の定義から

$$\lambda\alpha xkmab[\Theta''\langle\alpha, x, k, m\rangle(a)=b]$$

もまた Δ_{h+1}-predicate である．更に Θ'' は

$$\overline{\Theta''\langle\alpha, x, k, m\rangle}(k)=\overline{\Theta''\langle\alpha, x, k-1, m\rangle}(k), \tag{35}$$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}\Theta''\langle\alpha, x, k, m\rangle}(k+1)=\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(k+1) \tag{36}$$

を満足する．何となれば，先づ (35) は Θ'' の定義から明白である．よって (36) を k についての帰納法で証明しよう：

$$\Theta''\langle\alpha, x, 1, m\rangle(0)=\Theta'\langle\alpha, x, \theta(1), m\rangle(0),$$
$$\Theta''\langle\alpha, x, 1, m\rangle(1)=\Theta'\langle\alpha, x, \theta(2), m\rangle(1)$$

であるから

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\Theta''\langle\alpha, x, 1, m\rangle(0)&=\lim_{m\to\infty}\Theta'\langle\alpha, x, \theta(1), m\rangle(0)\\&=\Phi\langle\alpha, x\rangle(0) \text{ by } (34),\\ \lim_{m\to\infty}\Theta''\langle\alpha, x, 1, m\rangle(1)&=\lim_{m\to\infty}\Theta'\langle\alpha, x, \theta(2), m\rangle(1)\\&=\Phi\langle\alpha, x\rangle(1) \text{ by } (34)\end{aligned}$$

となり，従って $\overline{\lim_{m\to\infty}\Theta''\langle\alpha, x, 1, m\rangle}(2)=\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(2)$ を得る．これは $k=1$ に対する (36) である．そこで $k+1$ の場合を考える．定義によって

$$\Theta''\langle\alpha, x, k+1, m\rangle(k+1)=\Theta'\langle\alpha, x, \theta(k+2), m\rangle(k+1)$$

であるから

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\Theta''\langle\alpha, x, k+1, m\rangle(k+1)&=\lim_{m\to\infty}\Theta'\langle\alpha, x, \theta(k+2), m\rangle(k+1)\\&=\Phi\langle\alpha, x\rangle(k+1) \text{ by } (34),\end{aligned}$$

また $a<k+1$ ならば，帰納法の仮定を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\Theta''\langle\alpha, x, k+1, m\rangle(a)&=\lim_{m\to\infty}\Theta'\langle\alpha, x, k, m\rangle(a)\\&=\Phi\langle\alpha, x\rangle(a)\end{aligned}$$

を得る．故に

$$\overline{\lim_{m\to\infty}\Theta''\langle\alpha, x, k+1, m\rangle}(k+2)=\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(k+2).$$

これは，$k+1$ に対する (36) である．これで (36) が示された．

そこで

$$\Theta\langle\alpha, x, m\rangle=\Theta''\langle\alpha, x, m, m\rangle$$

により汎函数 Θ を定義する．そのとき $\lambda\alpha xmab[\Theta\langle\alpha, x, m\rangle(a)=b]$ は Δ_{h+1}-predicate となるから，Θ はクラス L_h に属する．従って仮定 $C_h=L_h$ によって，クラス C_h に属する．これに対し

$$\lim_{m\to\infty}\Theta\langle\alpha, x, m\rangle=\Phi\langle\alpha, x\rangle \tag{37}$$

が証明されるから，Φ はクラス C_{h+1} に属することがわかる．

以下 (37) の証明： 任意の k に対し，$m>k$ ならば，

$$\overline{\Theta\langle\alpha, x, m\rangle}(m)=\overline{\Theta''\langle\alpha, x, m, m\rangle}(m)$$
$$=\overline{\Theta''\langle\alpha, x, m-1, m\rangle}(m) \text{ by (35)},$$
$$\overline{\Theta''\langle\alpha, x, m-1, m\rangle}(m-1)=\overline{\Theta''\langle\alpha, x, m-2, m\rangle}(m-1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{\Theta''\langle\alpha, x, k+1, m\rangle}(k+1)=\overline{\Theta''\langle\alpha, x, k, m\rangle}(k+1)$$

であるから，

$$m>k \rightarrow \overline{\Theta\langle\alpha, x, m\rangle}(k+1)=\overline{\Theta''\langle\alpha, x, k, m\rangle}(k+1)$$

が成り立つ．これと (36) とによって

$$\overline{\lim_{m\to\infty}\Theta\langle\alpha, x, m\rangle}(k+1)=\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(k+1)$$

を得る．k は任意であったから，これは (37) を imply する．（証明終）

［Lemma 4］ $C_h=L_h$ という仮定の下で：$\Phi\langle\alpha, x\rangle$ がクラス L_{h+1} の汎函数であれば，Lemma 3 の条件をみたす θ と Ψ が存在する．従って Φ はクラス C_{h+1} に属する．

（証明） Sequence numbers の列 $\{w_i\}$ に対し

(38)
$$\beta_i^n(a)=\begin{cases}(w_i)_a \dot{-} 1 & \text{if } n=lh(w_i) \ \& \ a<n,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

と定義すれば，$\lambda nia\beta_i^n(a)$ は recursive function であって

$$\overline{\beta_i^n}(n)=w_i \quad \text{if } n=lh(w_i).$$

$\{w_i\}$ は重複がないので

$$\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(n)=w_i \ \& \ n=lh(w_i)=lh(w_j) \ \& \ i\neq j \rightarrow \overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(n)\neq w_j,$$

であり，従って

(39)
$$(n)(\alpha)(x)(E!i)[n=lh(w_i) \ \& \ \overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(n)=w_i]$$

が成り立つ．

Φ はクラス L_{h+1} に属するから，(39) の［ ］内の predicate は Δ_{h+1}-predicate である．従って Lemma 2 によって

$$n=lh(w_i) \ \& \ \overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(n)=w_i$$

(40)
$$\equiv(k)(Em)[m\geqq k \ \& \ \mathrm{V}(\alpha, x, i, n, m)]$$

(41)
$$\equiv(Ek)(m)[m\geqq k \rightarrow \mathrm{V}(\alpha, x, i, n, m)]$$

なる Δ_{h+1}-predicate V が存在する．

そこで

(42)
$$\Psi\langle\alpha, x, n\rangle(a)=\beta_i^n(a) \quad \text{if } n=lh(w_i) \ \& \ \overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(n)=w_i$$

によって汎函数 Ψ を定義すると，(39) によってこの定義は整合的である．更に

(43)
$$\Theta'\langle\alpha, x, n, m\rangle=\begin{cases}\beta_i^n & \text{if } i\leqq m \ \& \ \mathrm{V}(\alpha, x, i, n, m) \ \& \ (j)[j<i \rightarrow \bar{\mathrm{V}}(\alpha, x, j, n, m)],\\ \beta_m^n & \text{otherwise}\end{cases}$$

によって汎函数 Θ' を定義する. V が Δ_{h+1}-predicate であるから, $\lambda\alpha xnmab[\Theta'\langle\alpha, x, n, m\rangle(a)=b]$ もまたそうであり, 従って Θ' はクラス L_h に, 従ってまた (仮定 $C_h=L_h$ により) クラス C_h に属する. これに対し

(44) $$\lim_{m\to\infty}\Theta'\langle\alpha, x, n, m\rangle=\Psi\langle\alpha, x, n\rangle,$$

(45) $$(k)(\alpha)(x)(n)[n\geqq k\to\overline{\Psi\langle\alpha, x, n\rangle}(k)=\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(k)]$$

が成り立つことが証明される. これは $\theta(k)=k$ と Ψ とが, Lemma 3 の条件を満足することを意味するから, 同 Lemma によって Φ はクラス C_{h+1} に属することがわかる. それ故 (44) と (45) を証明しよう.

(44) の証明:

(46) $$(n)(\alpha)(x)(Ek)(m)[m\geqq k\to\Theta'\langle\alpha, x, n, m\rangle=\Psi\langle\alpha, x, n\rangle]$$

が示されれば十分である. n, α, x を与える. これに対し (39) によって

(47) $$n=lh(w_i)\ \&\ \overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(n)=w_i$$

なる unique i がある. (41) によって

$$m\geqq k'\ \to\ \mathrm{V}(\alpha, x, i, n, m)$$

なる k' がある. また (39) によって

$$j<i\ \to\ \overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(n)\neq w_j$$

である. 従って (40) によって, 各 $j<i$ に対し

$$m\geqq k_j\ \to\ \bar{\mathrm{V}}(\alpha, x, j, n, m)$$

なる k_j がある. $k=\max_{j<i}(k_j, k', i)$ とおこう. そのとき

$$(m)[m\geqq k\to i\leqq m\ \&\ \mathrm{V}(\alpha, x, i, n, m)\ \&$$
$$\&\ (j)\{j<i\to\bar{\mathrm{V}}(\alpha, x, j, n, m)\}]$$

が成り立つ. 故に (43), (39), (42) によって

$$(m)[m\geqq k\to\Theta'\langle\alpha, x, n, m\rangle=\beta_i^n=\Psi\langle\alpha, x, n\rangle]$$

を得る. これは (44) を証明した.

(45) の証明: k, α, x と $n\geqq k$ なる n を与える. これに対し (39) によって (47) なる unique i がある. そのとき (42) によって

$$\Psi\langle\alpha, x, n\rangle=\beta_i^n.$$

それ故 $k\leqq n$ を用いて

$$\begin{aligned}\overline{\Psi\langle\alpha, x, n\rangle}(k)&=\overline{\beta_i^n}(k)\\&=\mathrm{rstr}\,(w_i, k)\ ^{2)}\\&=\mathrm{rstr}\,(\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(n), k)\ \text{by (47)}\end{aligned}$$

---

2) Sequence number w と $k\leqq lh(w)$ なる k とに対し $\mathrm{rstr}\,(w, k)=\prod_{i<k}p_i\exp((w)_i)$.

$$=\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(k).$$

これは (45) を証明した.（証明終り）

$C_0=L_0$ であったから，h に関する数学的帰納法によって，Lemmas 1, 4 から次の定理を得る：

［定理］ 各 $h<\omega$ に対し $C_h=L_h$ である.

文　　献

［1］ S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, (North-Holland Pub. Co.) (1952).

［2］ S. C. Kleene, Arithmetical predicates and function quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 79 (1955), 312-340.

［3］ A. A. Ljapunow, E. A. Stschegolkow and W. J. Arsenin, Arbeiten zur deskriptiven Mengenlehre, Berlin, (1955).

［4］ C. de la Vallée-Poussin, Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensembles, Classes de Baire, Paris, (1950).

（以　上）

June 11, 1965

Added in proof (March 3, 1966).

1. Lemma 3 の簡単な証明： (32) によって $\overline{\Psi\langle\alpha, x, \theta(k)\rangle}(k)=\overline{\Phi\langle\alpha, x\rangle}(k)$, 従って $\Phi\langle\alpha, x\rangle(k)=\Psi\langle\alpha, x, \theta(k+1)\rangle(k)$ を得る. $\Psi\epsilon C_{h+1}$ であるから,

$$\Psi\langle\alpha, x, k\rangle=\lim_{m\to\infty}\Theta'\langle\alpha, x, k, m\rangle$$

なる汎函数 $\Theta'\epsilon C_h$ がある. 従って

$$\Psi\langle\alpha, x, \theta(k+1)\rangle=\lim_{m\to\infty}\Theta'\langle\alpha, x, \theta(k+1), m\rangle$$

が成り立つ，そこで汎函数 Θ を次のように定義しよう：

$$\Theta\langle\alpha, x, m\rangle(k)=\Theta'\langle\alpha, x, \theta(k+1), m\rangle(k).$$

$\Theta'\epsilon C_h=L_h$（仮定による）であるから，Θ' の representing predicate は $\varDelta_{h+1}$−predicate であり，従って Θ のそれもまたそうである. だから再び $C_h=L_h$ を用いて $\Theta\epsilon C_h$. しかも $\Phi\langle\alpha, x\rangle=\lim_{m\to\infty}\Theta\langle\alpha, x, m\rangle$. その結果，$\Phi\epsilon C_{h+1}$.（証明終）

2. 著者は最近，この論文の結果を超限級 (transfinite orders) の場合に拡張した. それは次の論文に現われる：

H. Tanaka, On limits of sequences of hyperarithmetical functionals and predicates, Comment. Math. Univ. St. Paul, 14 (1966).