法政大学学術機関リポジトリ
HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2025-07-16

Rosin-Rammler粒子径分布に関する二,三の考察

OGUCHI, Yuko / 小口, 雄康

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報

(巻 / Volume)
4

(開始ページ / Start Page)
11

(終了ページ / End Page)
21

(発行年 / Year)
1967-03

(URL)
https://doi.org/10.15002/00004265

Rosin-Rammler 粒子径分布に関する二，三の考察

助教授　小　口　雄　康　(基礎学科)

Some Considerations on Rosin-Rammler's Particle Size Distribution

Yuko Oguchi, *Assistant Professor*

1. 緒　　　言

自然に存在する微粒子や人工の粉体の分布にはいろいろな型があり，これを表わす関係がいくつか知られている。例えば，正規分布，対数正規分布，Griffith の式など[1]である。特に，ここで取り扱う Rosin-Rammler の式（以後 R-R 式と略記する）は，その適用範囲が広いことで有名である。筆者が大気中の浮遊塵を，カスケード・インパクタで集塵し，Automatic Particle Counter and Sizer[2] で測定してみた結果，殆んど大部分の試料が R-R 式にあてはまった[3]。

一般に，R-R 式は累積粒子数分布で表わすのが定数をきめるために便利であり，分布が直線で表わされる図表が市販されている。しかし，R-R 式の分布形をはっきり示した例が手近に求められないようである。このため，定数を求めても分布にどのようにきいてくるかはっきりしない。また，粒子径分布に関するいろいろな物理・化学量と R-R 式から得られる代表値との関連を求めようとするとき，すぐ代表値を知ることもできない。こうしたことから，本報では R-R 式の分布形をはっきりと示し，かつ，これに関する，二，三の代表値を求めてみた。また，累積粒子数分布と粒子数頻度分布との関係を求める計算図表を作製した。

2. Rosin-Rammler 分布

R-R 式は次のように与えられている。

$$F(z)=\exp(-bz^n) \qquad (n>0) \tag{2.1 a}$$

$$=1-\exp(-bz^n) \quad (n<0) \tag{2.1 b}$$

ただし，z は粒子径，$F(z)$ は粒子径が z より大きい粒子の累積粒子数分布関数，b は定数で正の数である。

実用に便のため，

$$b=b'\log_e 10 \tag{2.2}$$

とおけば，

$$F(z)=10^{-b'z^n} \qquad (n>0) \tag{2.3 a}$$

$$=1-10^{-b'z^n} \quad (n<0) \tag{2.3 b}$$

となる。

(2.3 b) からすぐわかるように，R-R 式は n, b' で分布がきまるが，筆者の実測では，

$$-0.5>n>-2.0$$

の場合が多かったので，主としてこの場合について考察をすすめる。従って，取り扱う式は(2.3 b) となる。これを次のようにかきなおす。

$$F(R)=1-10^{-R^n} \tag{2.4}$$

ただし，

$$R=z/\phi, \quad \phi=b'^{-\frac{1}{n}} \tag{2.5}$$

とする。

すなわち，ϕ は b', n からきまり，［長さ］の次元をもち，R は，ϕ を単位の長さとした粒子径を表わし無次元となる。従って，(2.4) は無次元の変数 R, パラメーター n で表わされ，かつ，R-R 式の分布形は n だけによってきめられることがわかる。b' は，n と結びついて単位長を与えるのであるから，粒子径の分散を規定するものといえる。このように考えれば，R-R式は n をパラメーターとして取り扱えばよいことになる。

粒子数頻度分布関数 $f(R)$ は，

$$f(R)=-dF(R)/dR$$

$$=-n\cdot\log_e 10\cdot R^{n-1}\cdot 10^{R^{-n}} \tag{2.6 a}$$

$$=-n\cdot\log_e 10\cdot R^{n-1}\cdot\overline{F(R)} \tag{2.6 b}$$

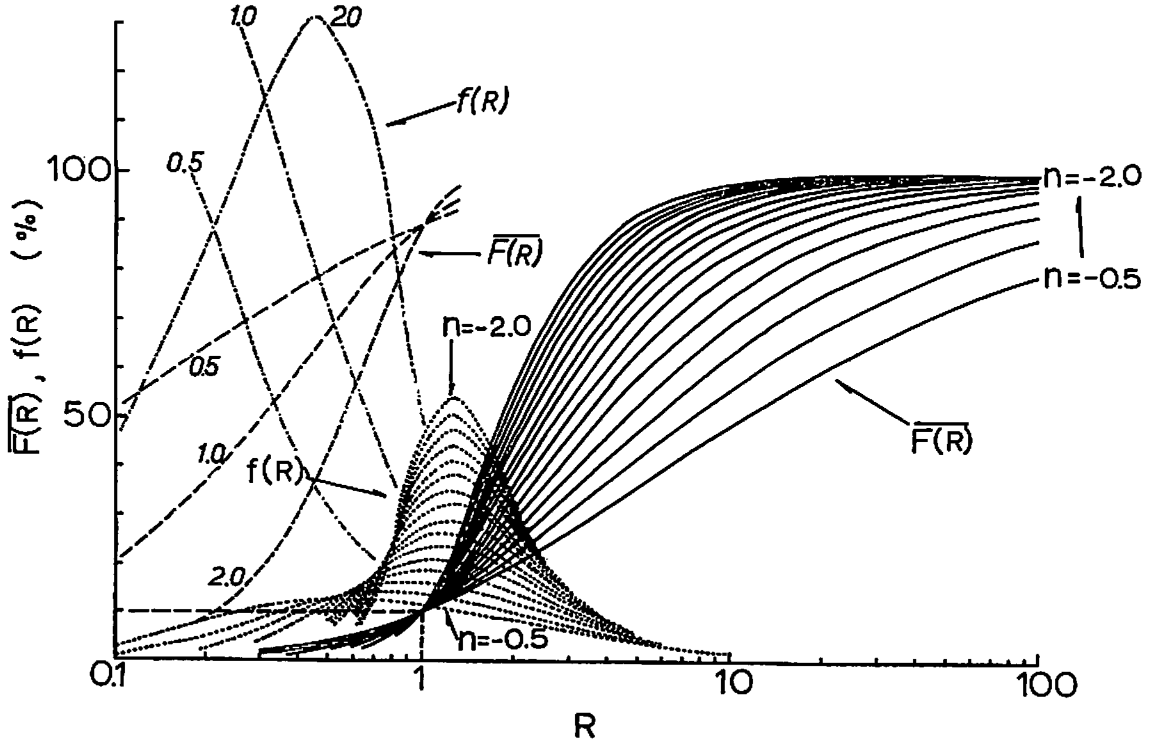


Fig. 1　Rosin-Rammler Particle Size Distribution

で与えられる。ただし，$\overline{F(R)}$ は，

$$\overline{F(R)}=1-F(R) \tag{2.7}$$

で，粒子径が R 以下の累積粒子数分布関数である。

Fig. 1 に $-0.5\geq n\geq -2.0$ の範囲で，Rに対する $\overline{F(R)}$, $f(R)$ の値を示した。$|n|$ が大きくなると粒子径の分散が小さくなり，$f(R)$ には常に極大値がある。参考のため，$n=0.5$, 1.0, 2.0 に対する $\overline{F(R)}$, $f(R)$ も示した。$n<0$ の場合と異なるのは，$0<n\leq 1.0$ で $f(R)$ には極大値がないことで，粒子径分布の分散が大きいことを意味する。

2.2 Rosin-Rammler 式の代表値

1) 平 均 値

すでに，H. Langemann が指摘している[1]ように R-R 式においては，粒子径の下限が 0 より大でないと，粒子径の平均値は，n の値によって発散することがある。いま，平均値を R_{mean} とおけば，

$$R_{mean}=\int_0^\infty Rf(R)dR=(\log_e 10)^{-1/n}\Gamma(1+1/n) \quad (n<-1) \tag{2.8}$$

ただし，$\Gamma(x)$ はガンマ関数を示す。

$n>-1$ では，物理的に意味のある平均値は得られない。すなわち，このような n のときR-R式では，平均値に大きく影響するのは粒子径の小さいところで，本質的に実際の分布と一致しないといえる。

Fig. 2 に，n に対する R_{mean}, $F(_{mean})$ の値を示した。$-n$ が増加すると，R_{mean} は単調減小し，$-n\to\infty$ で 1 に収束する。

2) 中 央 値

$F(R)=0.5$ となる R が分布の中央値である。これを R_M として，Fig. 2 に示してある。

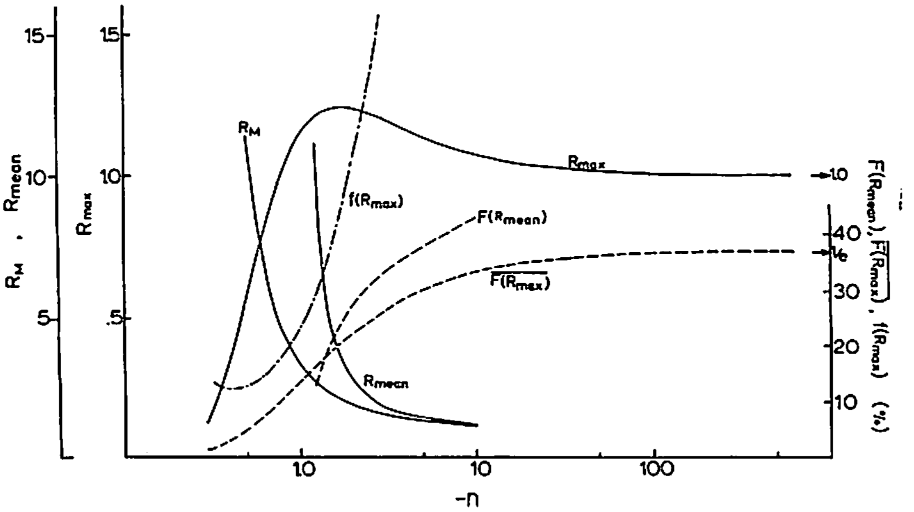


Fig. 2 Representatives of R-R Distribution

$-n$ が増加すると R_M は単調減小し，1 に収束する。また $n \lesssim -5.0$ で R_M, R_{mean} はほぼ一致する。すなわち，$-n$ が大きくなると，平均値は分布の中央値を与える。

3) モード径

$f(R)$ が極大値をとる R がモード径である。これを R_{max} とかいて Fig. 2 に示してある。同時に，$f(R_{max})$, $\overline{F(R_{max})}$ も示してある。また，Fig. 3 に R_{max} と $f(R_{max})$, $\overline{F(R_{max})}$ との関係を示してある。n と R_{max} との関係は，$-n \lesssim 1.24$ で R_{max} が単調増加，$-n \gtrsim 1.24$ で R_{max} が単調減小となり，1 に収束する。また，$-n \gg 1$ で R_{max} は R_M, R_{mean} に近づくが常に R_M より小さい。これは Fig. 1 からもすぐ知れる。Fig. 3 から $f(R_{max})$ は非常に大きくなるが，$\overline{F(R_{max})}$ は $1/e=0.3678\cdots$ より大きくならないことが知れる。したがって，モード径は粒子径の小さい方の分布によって左右されることになる。

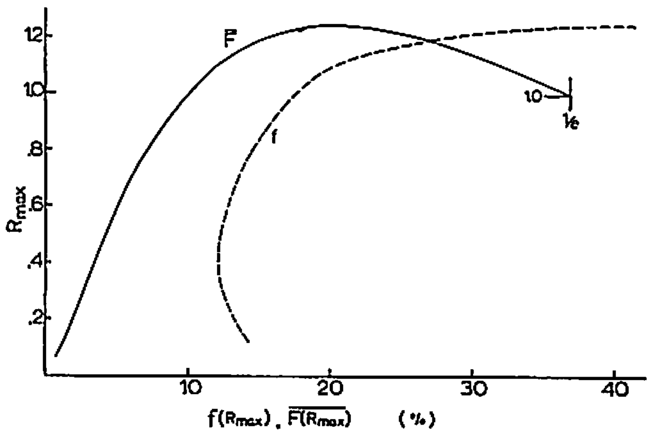


Fig. 3 Relations between R_{max} and $f(R_{max})$, $\overline{F(R_{max})}$

4) ϕ の意味

G. Herdan[5] は R-R 式の代表値として $1/b$ を採用している。その理由は次のように説明される。

粒子数頻度分布関数 $f(z)$ は，n の正負にかかわらず，

$$f(z)=b|n|z^{n-1}\exp(-bz^n) \tag{2.9}$$

で与えられる。すでに述べたように，$f(z)$ に $0<n\leq 1$ で極大値をもたない。したがって，一般の n について $f(z)$ の極大値を論じても意味がない。そこで，$zf(z)$ を考える。物理的にみれば，これは，z が粒子径を表わすときその粒子径の和，z が粒子の重量を表わすときその粒子の全重量を与える。特に，後者の場合を念頭におき，極大値を与える z を求めれば，

$$z=b^{-\frac{1}{n}} \tag{2.10}$$

となる。Herdan は粉体について n が 1 に近いことを測定し，$n \fallingdotseq 1$ でも $1/b$ をもって代表値と考えている。$n>0$ なら，

$$F(b^{-\frac{1}{n}})=1/e=0.3678\cdots$$

となるので，累積粒子数分布関数で 36.78% を与える粒子径を求めれば簡単に $1/b$ が求められ，これが重量分布のモード径を与え，代表値として取り扱いが便利である。

確にこの方法は実用上便利であり，R-R 式の代表値として最も有用なものの一つと考えられるが，(2.10) 式からみて，$n\approx1$ 以外では $1/b$ を代表値とするのは無理であり，特に $n<0$ では意味がない。しかし，$n<0$ では 3) で述べたようにモード径が常に存在するから，これを代表値として採用した方がよい。このとき，(2.5) 式から，

$$z_{\max}=R_{\max}\cdot\phi \qquad (2.11)$$

となる。$-n\gg1$ のとき $R_{\max}\approx1$ であるから，

$$z_{\max}\approx\phi \qquad (2.12)$$

としてよい。すなわち，ϕ がモード径を与える。

一方，$R=z/\phi$ であるから，実測において測定する粒子径の範囲が一定であると，ϕ の大小によって R の範囲が限定される。従って，$1/\phi$ が粒子径の分散をきめる一つの要素となる。しかし，

$$1/\phi=b'^{-\frac{1}{n}} \qquad (2.13)$$

であるから，分散の度合はかならずしも b' のみで与えられるのではなく n にも関係する。二，三の教科書にあるように b' が分散の度合を与えるというのは，$|n|\approx1$ の場合においてのみ成り立つことに注意を要する。

2.3　分布形に関する代表値

$f(R)$ は，Fig 1 に示したように釣鐘型をしている。こうした形では，分布の特性を取り扱う場合だけではなく，例えば，集塵装置の集塵効率を取り扱う場合などに有効な，いくつかの形状係数が考えられる。

1)　半　値　巾

$f_{\max}=f(R_{\max})$ とかいて，Fig. 4 のように $f(R)=1/2f_{\max}$ を与える R の値を，R_1，R_2 $(R_1<R_2)$ とすれば (R_2-R_1) が半値巾となる。半値巾は，粒子径の分散の度合を示す量で，これが小さい程分散が小さい。Fig. 6 に n 対する半値巾を示してある。$-n>0.68$ で，$|n|$ が大

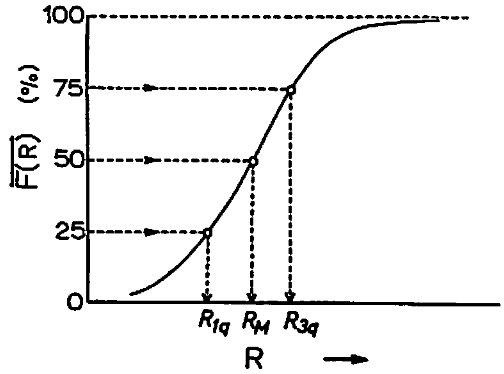


Fig. 4

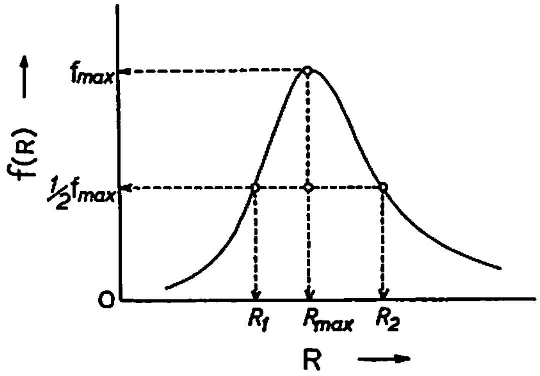


Fig. 5

きくなると半値巾は小さくなり，分散が小さくなる。また，$0.5<-n<0.68$ では，$|n|$ が小さい程半値巾が小さくなる。従って，$-n\approx 0.68$ で半値巾からみた粒子径の分散は最大となる。

2) 分 解 能

$$Q=R_{max}/(R_2-R_1) \tag{2.14}$$

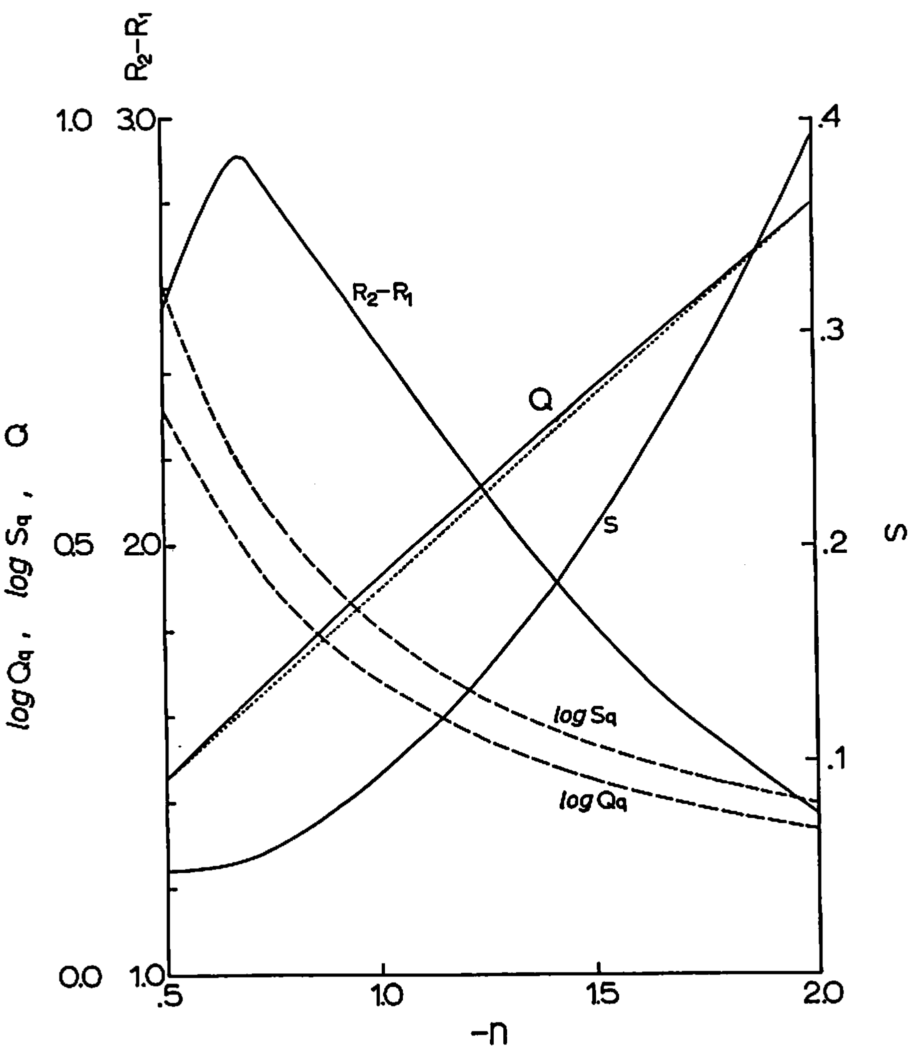
とおくと，Q は R_{max} に対する粒子径の分解能，すなわち，粒子径 R_{max} の近辺にどれだけ粒子が集まっているかを示す量と考えられる。Fig. 6 に Q の値を示してある。図中の実線が Q であるが，$0.5\leq -n\leq 2.0$ では殆んど直線に近く，

$$Q \doteqdot 0.45(1-n) \tag{2.15}$$

で近似される。$|n|$ が大きくなる程分解能はよくなる。

3) 尖 鋭 度

$$S=f_{max}/(R_2-R_1) \tag{2.16}$$



$S = f_{max}/R_2-R_1$, $Q = R_{max}/R_2-R_1$

Fig. 6

とおくと，S は分布の尖鋭度，すなわち，粒子径の分散の大小，または，粒子の選択度を示す値となる。$|n|$ が増加すると S も増加する。

4) 対数四分偏差

Fig. 5 に示したような粒子径を用いて，

$$\log Q_q=1/2\cdot(\log R_{3q}-\log R_{1q}) \tag{2.17}$$

とおくとき，$\log Q_q$ を対数四分偏差といい，粒子径の均一性を示す量である。$\log Q_q$ が小さい程均一性はおちる。Fig. 5 に $\log Q_q$ を示してある。$|n|$ が大きくなる程均一性は悪くなる。

5) 対数四分傾度

$\log Q_q$ と同様に，Fig. 6 の粒子径を用いて，

$$\log S_q=1/2\cdot(\log R_{1q}+\log R_{3q}-2\log R_M) \tag{2.18}$$

で与えられる $\log S_q$ を対数四分傾度という。これは，分布の対称性を示すもので，$\log S_q$ が大きいもの程対称性がよい。Fig. 5 に示したように $|n|$ が大きい程対称性はよくなる。

2.4 計 算 図 表

実測値を，R-R 分布確率紙上において，n, b' が求められる。この値からいままで論じたいくつかの量を求める計算図表をつくったので以下に説明する。

1) b', n から ϕ, $\bar{R}(=1/\phi)$；ϕ, z から R を求める計算図表

(2.5)，(2.13) 式から，与えられた b', n を用いて ϕ, $\bar{R}$ が求められる。

Fig. 7 にその計算図表を示してある。使用例を記入してあるから使用法の説明は省く。また，ここで得られた ϕ, z を用いて R が，(2.5) 式で与えられる。この計算図表も Fig. 7 に示してある。

2) n, R から $\overline{F(R)}$ を求める計算図表

(2.4)，(2.7) 式から $\overline{F(R)}$ が求められる。1) から求められた R と n を用いて，$\overline{F(R)}$ を求める計算図表を Fig. 8 a, 8 b に示してある（以下計算図表では $\overline{F(R)}$, $f(R)$ の値は % で示されている）。Fig. 8 a は $R\geq 0.9$, Fig. 8 b は $R\leq 1.0$ のとき用いられる。

3) R, n, $\overline{F(R)}$ から $f(R)$ を求める計算図表

われわれは，$F(R)$（または $\overline{F(R)}$）の実測値から，しばしば $f(R)$ を求める必要にせまられる。(2.6 a, b) 式に従って $F(R)$ をグラフ上で微分すればよいのであるが，実際には測定した粒子径の間隔によって正確な値を求めることがむずかしい。ことに，Automatic Particle Counter and Sizer による測定に際しては，その機構上，グラフ上で微分することはうまくできない。分布を推定し，その分布関数を微分して $f(R)$ を求める方が便利である。ここでは，R, n, $\overline{F(R)}$ を用いて，$f(R)$ を求める計算図表を作っておいた。Fig. 9 a, 9 b にそれを示す。図中，n_1, n_2 とあるのは n と同じ値で，次のように求めてゆく。まず，与えられた R, n を用いて，図中の R, n_1 から t を求める。また，$\overline{F(R)}$ と n_2 から u を求める。次に，t, u から

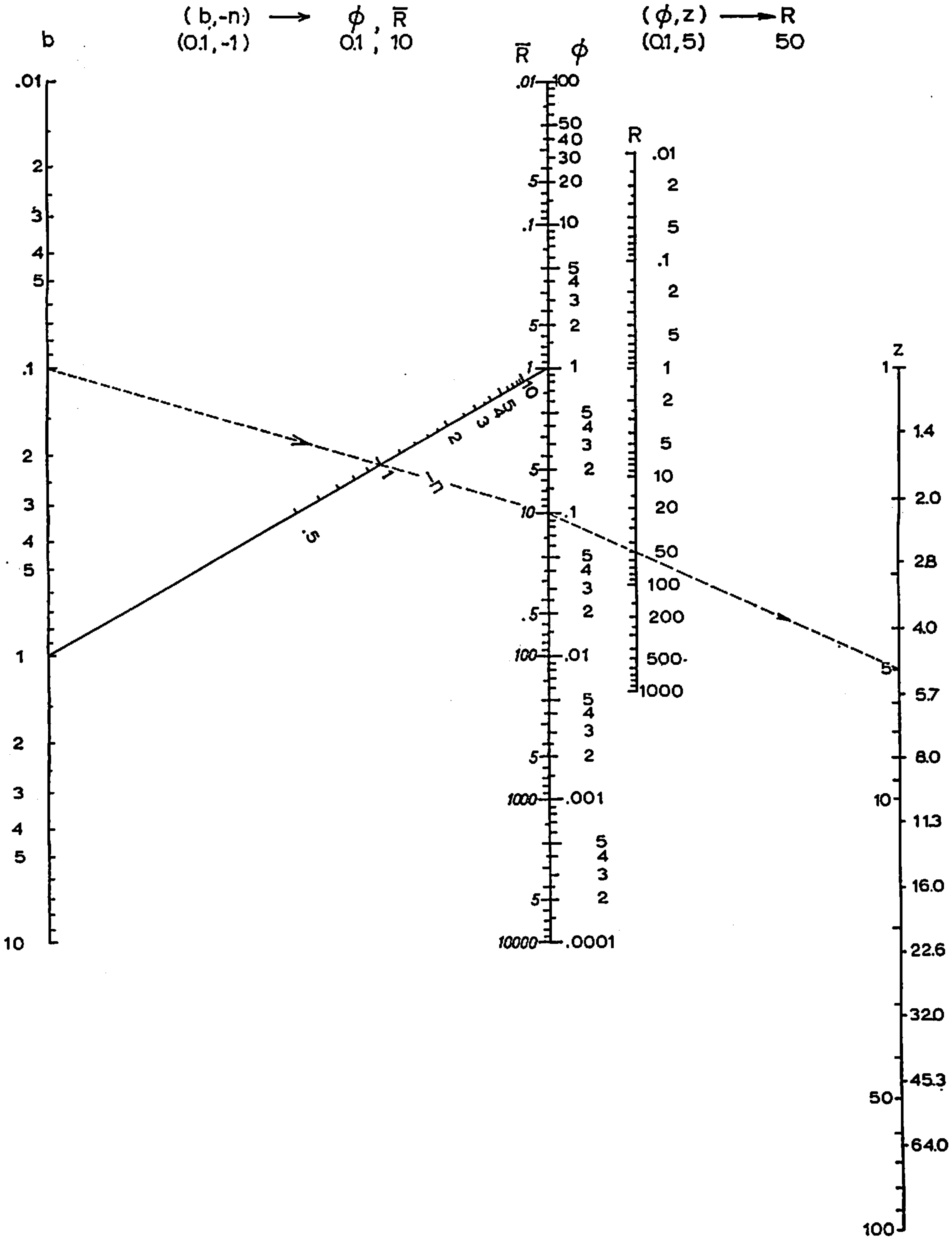


Fig. 7 Nomograph for ϕ, R, $\bar{R}$

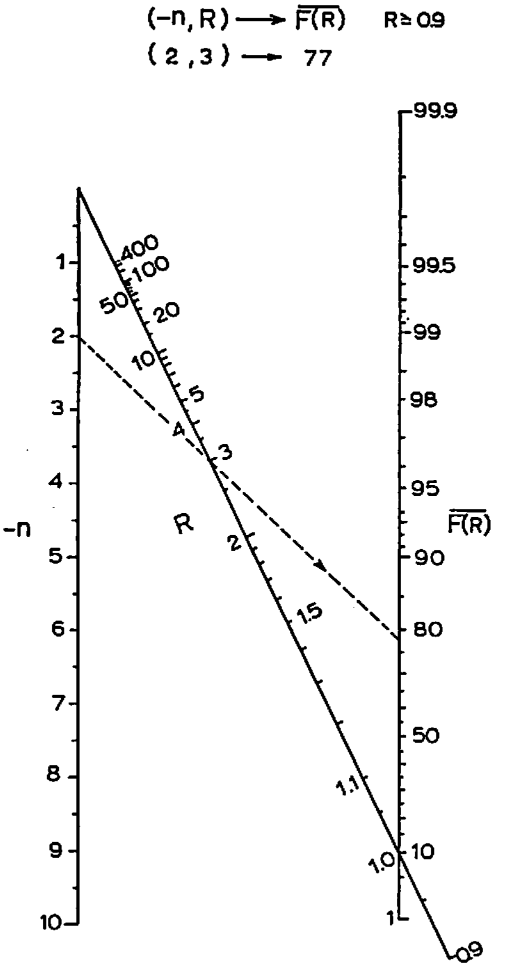


Fig. 8a Nomograph for $\overline{F(R)}$ ($R\geq 9.9$)

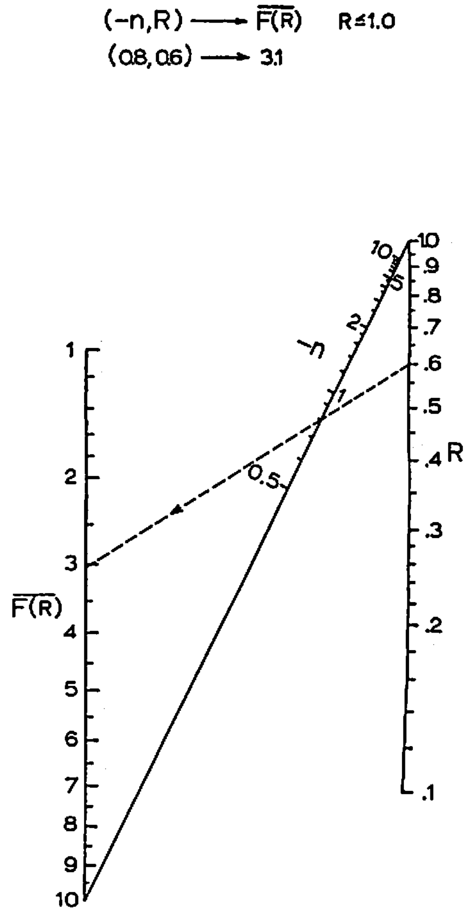


Fig. 8b Nomograph for $\overline{F(R)}$ ($R\leq 1.0$)

$f(R)$ が求められる。Fig. 9a は $\overline{F(R)}$ の全領域について求められるが，$\overline{F(R)}\geq 0.8$ に対しては，Fig. 9b を用いた方が精度がよい。

3. 結　　語

本報では Rosin-Rammler 分布から得られるいくつかの量を計算してみた。今まで，ややはっきりしなかった分布形について，いささかでも解明できれば本報の目的は果されたと思う。実際に R-R 式に従う粉体のいろいろな物理的・化学的性質と，以上に求めたいくつかの分布の代表値との相関が求まれば，大変面白い。現在，多数の粒子径測定法が用いられているので，こうした相関が論じられる日も遠くないと思う。ただ，R-R 式は，粒子径の小さいところの分布の様子に大きく支配されるので，物理的にみていろいろな問題点が含まれている。本報でも，粒子径の下限について詳しく追及しなかった。この点に関しては，更に詳しい考察が必要と考えるが，後報にゆずることにする。

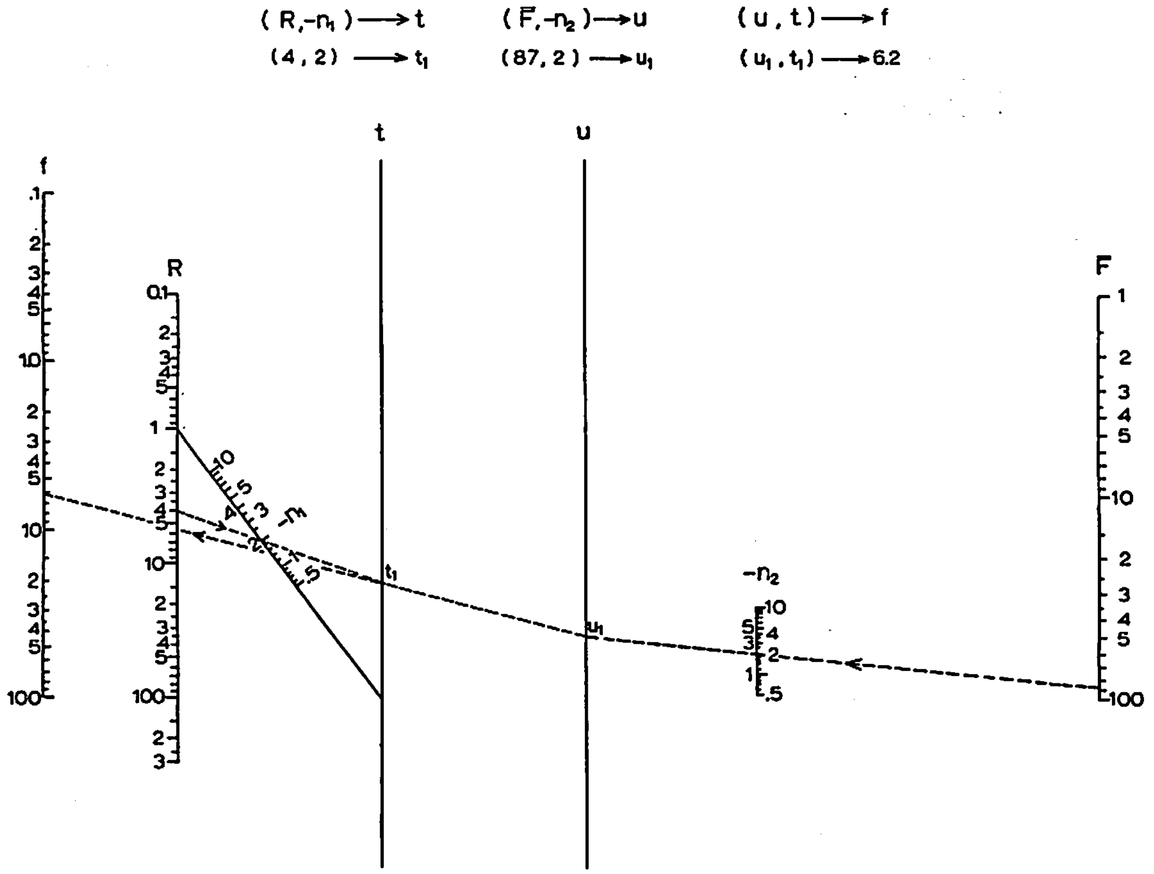


Fig. 9 a Nomograph for $f(R)$

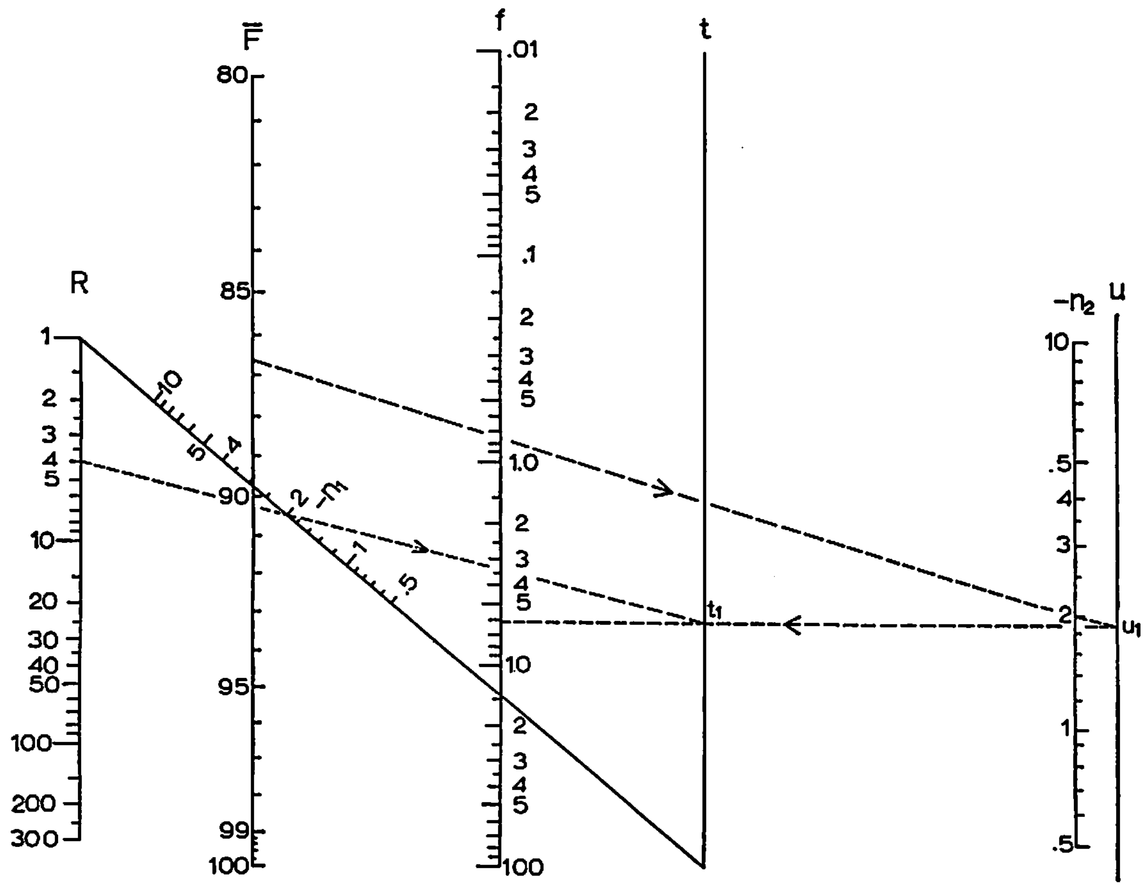


Fig. 9 b Nomograph for $f(R)$ $(\overline{F(R)} \geq 0.8)$

終りにのぞんで，有益な助言を頂いた 放射線医学総合研究所 環境衛生研究部 第一研究室室長 阿部史朗氏に感謝する。

参 考 文 献

1) 例えば，Clyde Orr, Jr. & J.M. Dallavalle: "Fine Pacticle Measeurment" The Macmillan Co. N.Y. 1st. Ed., 1959.
中 川 他："粉体" 丸善，1962.
2) 小口，阿部，鈴木："自動粒度測定器の性能試験" 分析化学，Vol. 12, No. 11, p 1063, 1963.
3) 小口，阿部："Rosin-Rammler 粒子サイズ分布の特性の考察" 放射線医学総合研究所年報 昭和38年度
4) H. Langemann: "Zur Berechnung der spezifischen Oberflache von Dispersoiden" Chemie Ing. Techn. 27, p 27, 1955.
5) G. Herdan: "Small Pacticle Statistics" Butterwarths 2nd. Ed., 1960.

(昭和41年10月10日　受理)