

Moire法による応力解析 : その1. 2次元問題 への適応について

AVE, Masaru / 阿部, 優

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部
研究集報

(巻 / Volume)

4

(開始ページ / Start Page)

22

(終了ページ / End Page)

34

(発行年 / Year)

1967-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004264>

Moiré 法 に る 応 力 解 析

その 1. 2次元問題への適用について

実験助手 阿 部 優 (建築学科)

Stress Analysis by Moiré Methods

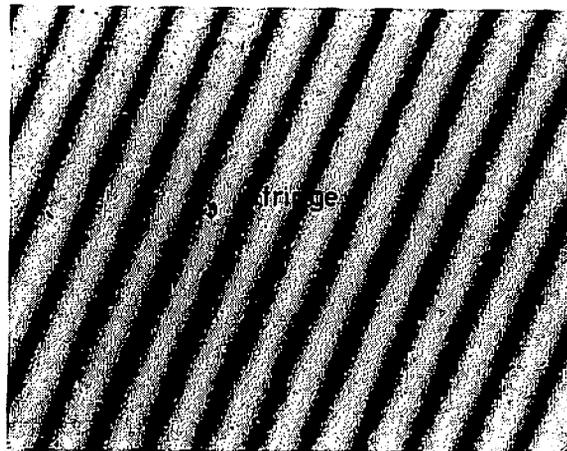
Part 1. Application to the Analysis of Two Dimensional Problems.

Masaru Aue, Assistant

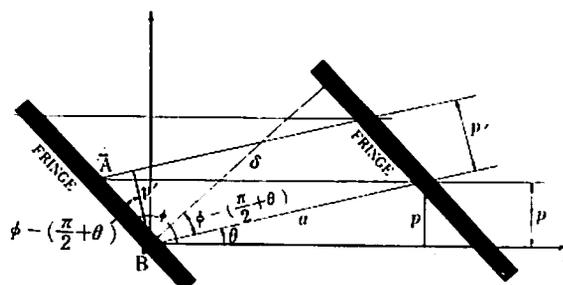
1. 緒 言

歪解析の手段として実用化されつつあるモアレ法を使用する問題のうち、2次元応力解析例について述べる。

モアレ法とは、2組の同様な系を持つ線群、点群の重ね合せによる干渉縞であり、1図に示す様なフリンジ（縞）が生じる。このフリンジから歪測定を行い任意の点の応力を解析する方法をモアレ法と呼ぶ（基礎的な性質については参考文献に示す様に A.J. Durelli, C.A. Sciamm-



1 図 Moire Fringe.



2 図 Geometry of moiré fringes

rella 等により、1955年以後発表されてきた)。筆者は建築構造における幾何学的に複雑な架構の応力解析法の一つとして、簡単な装置で架構全体の応力分布が求められるモアレ法に注目し、数種類の実験により、この方法の適用性、3次元への拡張を実験技術的な問題を含めて検討してきた。

2. 基本 原 理

2.1 直 接 解 析 法

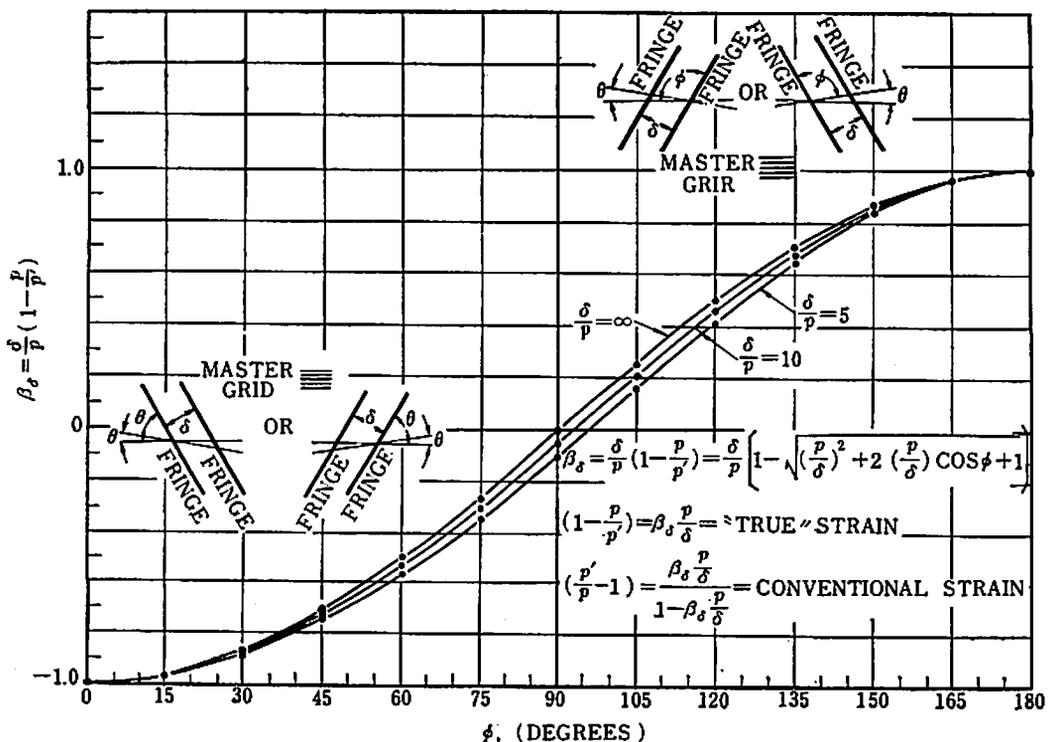
2組のグリッド (oneway の線格子) のうち、固定したグリッドをマスターと呼び、モアレ解析の基準と座標の決定に使用し、グリッド間隔を P とする。(マスター方向を S 、これに垂直な方向を r とする)。このマスターに対し、同様な配列の他のグリッドは可変グリッド (モデルグリッド) と呼ばれマスターと同じピッチである必要はない (P')。回転角 (θ) はマスターに対し任意に与えられた角で、一般には鋭角で定義される。以上の状態は 2 図に示す。フリンジ角 (ϕ) は 2 図より、

$$P' = P \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin \phi}$$

であるから、

$$\tan \phi = \frac{P \sin \theta}{P \cos \theta - P'} \quad (1)$$

また、フリンジ間隔 (δ) は、



3 図 Function for Fringes

$$\delta = a \cos \left(\phi - \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{P' \sin \phi}{\sin \theta} \quad (2)$$

(1) 式から,

$$\sin \phi = \frac{P \sin \theta}{\sqrt{P^2 \sin^2 \theta + (P \cos \theta - P')^2}} \quad (3)$$

よって,

$$\delta = \frac{P P'}{\sqrt{P^2 \sin^2 \theta + (P \cos \theta - P')^2}} \quad (4)$$

θ, P' は一般には未知量であるから, (2) 式より,

$$\tan \theta = \frac{\sin \phi}{\delta/P + \cos \phi} \quad (5)$$

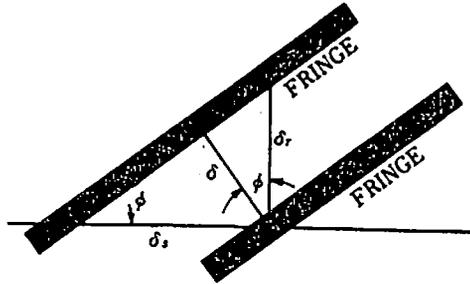
$$P' = \frac{\delta}{\sqrt{1 + (\delta/P)^2 + 2(\delta/P) \cos \phi}} \quad (6)$$

これら, (5), (6) 式は δ, P, ϕ が既知量であるから, 上の関係をグラフにしておくと, 一層簡単な式になる。以上の事からフリンジと歪の関係を導くと,

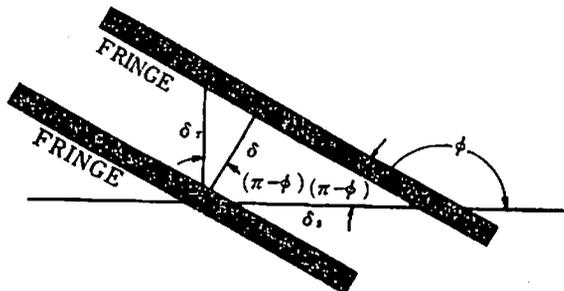
$$\varepsilon_r = 1 - \frac{P}{P'} = \frac{P' - P}{P'} = \frac{P'}{P} - 1 = \frac{1 - \sqrt{(P/\delta)^2 + 2(P/\delta) \cos \phi + 1}}{\sqrt{(P/\delta)^2 + 2(P/\delta) \cos \phi + 1}} \quad (7)$$

(7) 式において,

$$\beta \delta = \frac{\delta}{P} \left(1 - \frac{P}{P'} \right) = \frac{\delta}{P} [1 - \sqrt{(P/\delta)^2 + 2(P/\delta) \cos \phi + 1}] \quad (8)$$



CASE (a), ϕ AN ACUTE ANGLE



CASE (b), ϕ AN OBTUSE ANGLE

とおき、 $\beta\delta$ のグラフを3図のように作成しておく、(9)式のように簡単な式により歪は求まる。

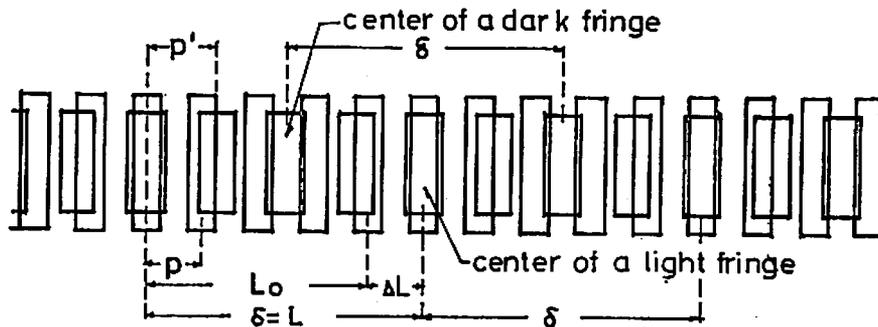
$$\epsilon_r = \beta\delta \cdot P/\delta \tag{9}$$

以上は歪をフリッジ間隔、フリッジ角により解析したが、座標軸 (S, r) に沿って測定する場合は4図に示すように、

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta_r |\cos \phi| \\ \delta &= \delta_r \sin \phi \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

と置いて前述の式に代入する。

2.2 変位による解析法



5 図 Formation of Moiré Fringes

5図に示すように2組のグリッドが重なった時(マスターピッチ P 、モデルピッチ P' とする)明るい部分と暗い部分が生じる。これは2.1で述べた現象であり、最も暗い(明るい)部分の間隔をフリッジ間隔と定義し、 δ で表わす。つまり、一方のグリッドが外力により変位して生じるもので、歪は

$$\epsilon = \frac{P - P'}{P'} = \frac{P}{\delta}$$

で表わされる。

任意の状態のフリッジを考えると、5図と同様なフリッジが生じ、固定点(フリッジ上にある点)を置く事により、その点から1番目のフリッジは $1P$ の変位により生じる事がわかり、同様に N 番目のフリッジは nP の変位を表わす。この様にモアレフリッジはマスターグリッド間隔の倍数に等しいグリッド方向における相対変位を表わす軌跡である。この変位はモデルの形、変形により与えられ、各々のフリッジは変数によって特徴づけられる。

この変数をフリッジオーダーと呼び n で表わす。フリッジからの変位の解析は XY 座標によって表わすため、任意の変位成分は $\phi(X, Y)$ で与えられ、この関数は幾何学(アフィン座標系)によって与えられる。つまり、仮想曲面—— $Z = \phi_i(X, Y)$ が与えられる事で、この投影線となるフリッジは、 $Z = nP$ の面をもったものと平面の交線として与えられる。

$$\phi_i(X, Y) = K \quad (K = \text{一定}) \tag{11}$$

変位が歪を決定するには、変位の微分が必要となり、前述の曲面上の接面、つまりフリンジ上の傾斜として示される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial X} &= \text{grad } \phi_i(X, Y) \cos \varphi \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial Y} &= \text{grad } \phi_i(X, Y) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

φ は X 軸と $\text{grad } \phi_i$ 間の角度であるから、

$$\tan \varphi = \frac{\partial \phi_i / \partial Y}{\partial \phi_i / \partial X} \quad (13)$$

$\phi_i(X, Y)$ の一次導関数を計算する事は、平面 $X=C_1$, $Y=C_2$ (C_1, C_2 は一定) と仮相曲面との交叉曲線の傾きを求める事になる。故に、この一次導関数を求める方法は、8 図に示すように任意の断面におけるフリンジから得た変位曲線の勾配を求める事で、切断線上の歪 (ϵ) に一致する。

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (14)$$

3. 実験および解析

3.1 グリッド

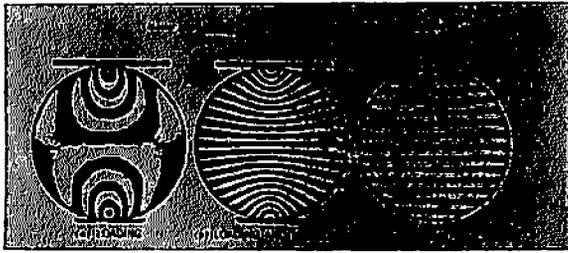
グリッド (格子) はモアレ法における測定の基準となり、測定可能な歪の最小限度はグリッド間隔に関係する事は明らかである。現在、技術的に可能なグリッドの最小間隔は 600 本/cm 程度で、非常に高価である。しかし、後で述べる mismatch 法¹⁾ および材料のヤング係数を適当に選ぶ事で比較的粗いグリッドの使用が可能になる。そこで筆者はオフセット印刷に使用される単線グリッド (ガラス板にグリッドをケガキしカーボンブラックを流入したもの——100 本/cm) より、製版カメラにより縮小したフィルム状のグリッドを製作した (116~120 本/cm, 22×27cm²)。これをマスターグリッドとし、モデルグリッドはマスターからネガをとり、試験体上に印刷す

イ) mismatch 法¹⁾

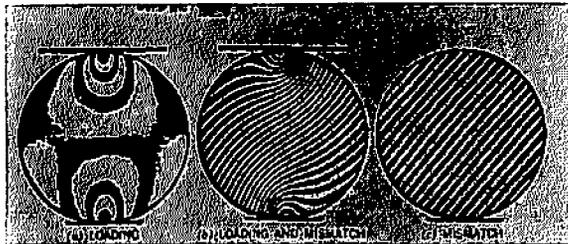
一般にモアレ法の精度はマスターグリッド間隔により、測定の際に読み取るフリンジの多少により精度が増減するはずである。mismatch 法は読み取りの精度を増す方法で、あらかじめモデルとマスターのグリッドピッチをずらす事で、フリンジを作っておく (仮想の歪を与える——a 図)。ここでも (4) 式が成り立ち、この状態でモデルに変位が生じると変位による歪 + 仮想の歪により別のフリンジが生じる。この解析の過程には mismatch の影響は入らず、mismatch 部分の歪を変位後の歪から減ずる事により、真の歪が求められる——b 図。

$$\left. \frac{\partial u}{\partial X} \right|_x = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{cd}{ab}$$

$\tan \alpha$: 変形前の変位曲線の勾配。 $\tan \beta$: 変形後の勾配。

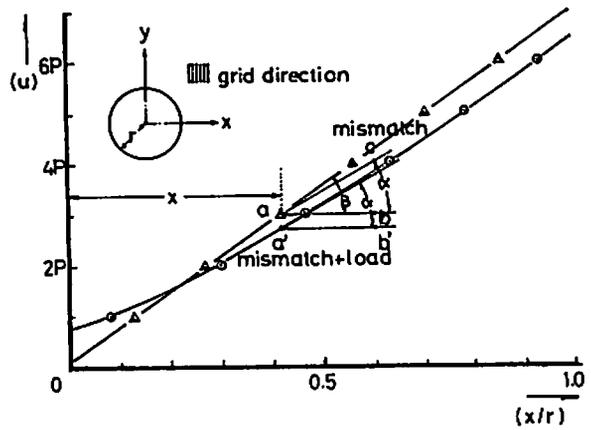


LIEAR MISMATCH

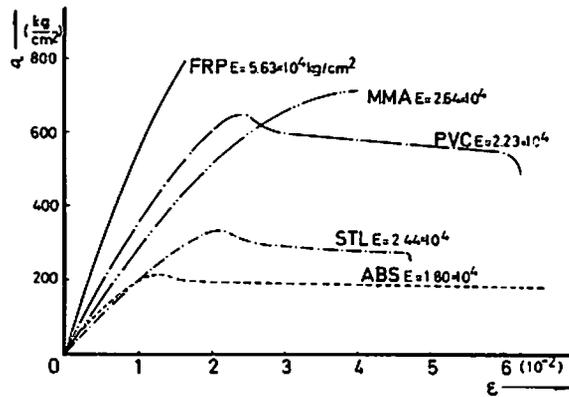


ROTATION MISMATCH

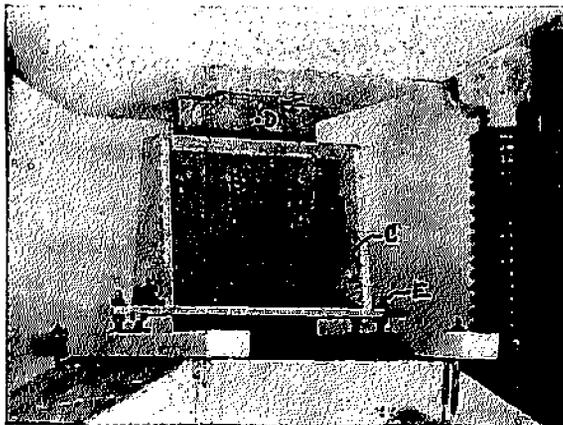
a ㊦ Mismatch Method



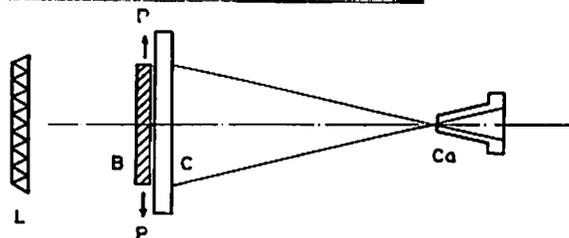
b ㊦ Deflection Curve



6 ㊦ Stress-Strain Curves for Plastics



- A: master grid p
- B: model grid p'
- C: screen holder
- D: connector
- E: adjustor
- P: load
- L: light source
- C_a: camera

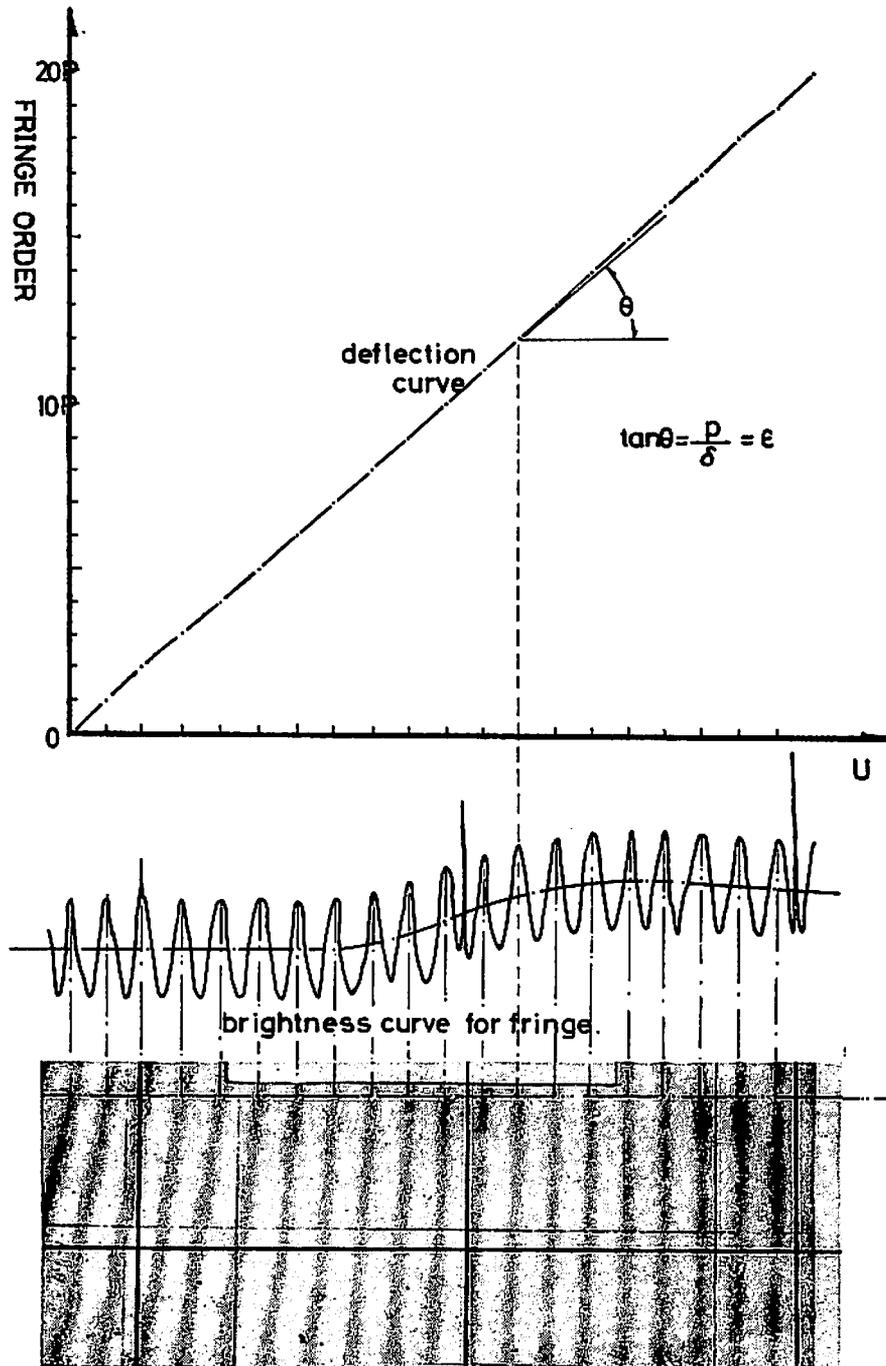


7 ㊦ Experimental Instrument

る。(印刷法は一般に試験体上に乳剤を塗り焼き付ける方法を採用すると 600 本/cm のグリッドを可能にする。しかし、筆者は多量の試料を必要としたので、オフセット印刷により試験体上にグリッドを印刷した)

3.2 材 料

グリッド間隔が決められると、使用する材質(ヤング係数)は測定可能な最小歪から決定すべき事は明らかで、筆者の使用したグリッドでは $\epsilon_{\min} = 300 \mu$ 程度であり、使用出来る材料は今のところ高分子材料が最適と思われる。今回の実験では 6 図により、弾性域の大きさ、販入のし



8 図 Procedure of Stress Analysis

やすさという条件からアクリル樹脂を選んだ。このアクリル板(透明, 2mm厚)にグリッドを印刷し, 試験片を切り出す。

3.3 試験装置および実験方法

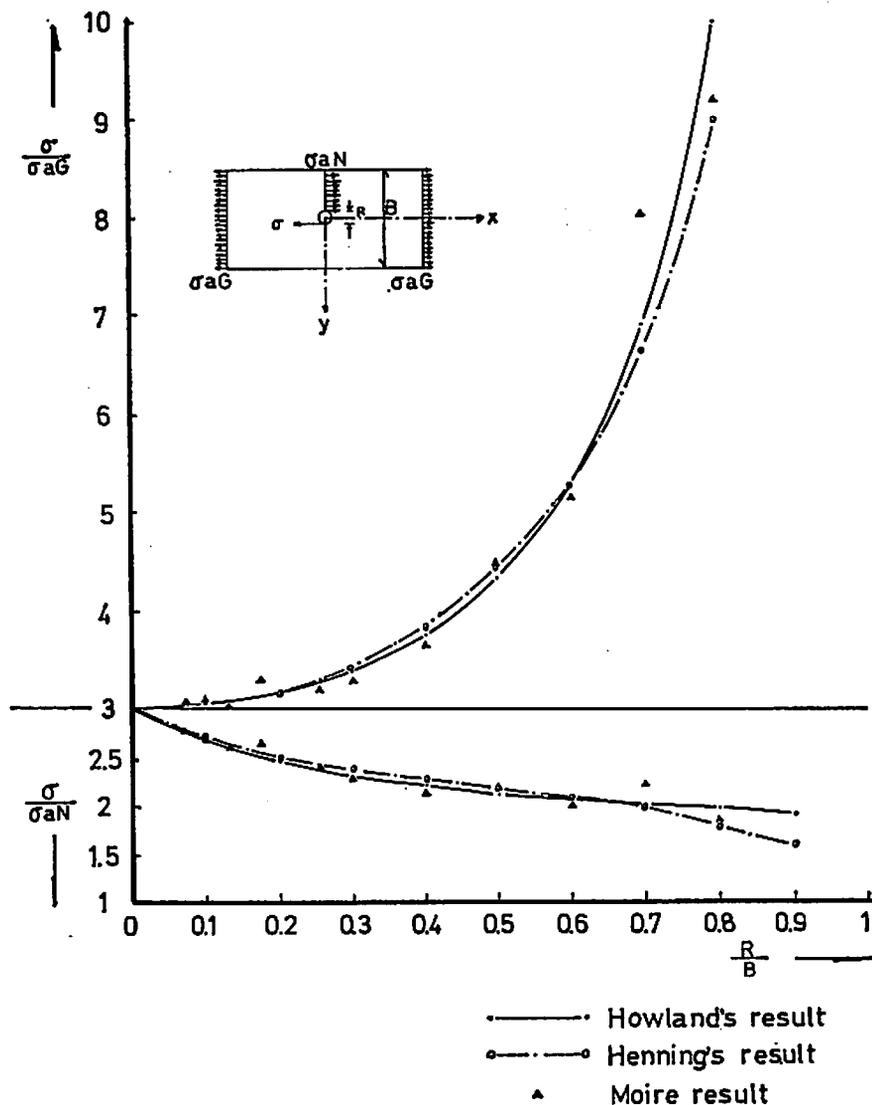
グリッドを印刷したモデル(試験体)を試験機にセットして, その前面にグリッド面が平行になるようにマスター(スクリーン)をセットする。

マスターグリッドは左右, 前後方向へ移動, 回転が可能なホルダーに取り付ける。モデルとマスターにより生じるフリンジをカメラを用いて記録する(トプコンホースマンプレス, ネオパン SS, F4, 1/30秒使用)。カメラは7図のごとく光軸をグリッド面に垂直に設置する必要がある。

以上の装置で実験を行い, 0荷重, 加力状態の写真を撮り解析する。

3.4 解析の手順

写真からの歪解析は2通りの方法で行った。一方は写真を拡大し指定点における歪を直接的解



9 図 Stress-Concentration Factors

析法による。しかし一般には回転の影響があまりないため (6 式中の $\cos \phi \approx 1$)、指定断面の変位曲線を描き、この曲線の勾配を求める方法をとる (2.2)。この方法で略算的には拡大した写真より変位曲線を描き (8 図)、図式微分により求めるが、この方法は写真からもわかる様にフリンジの中心を決めるのが困難なので、フリンジを光り強さにより波形する方法¹⁾をとり、フィルムからマイクロフォトメーターにより、フリンジ間隔を求めた波長より変位曲線を求め、この曲線の微係数を出す事で歪解析とした。——数値微分

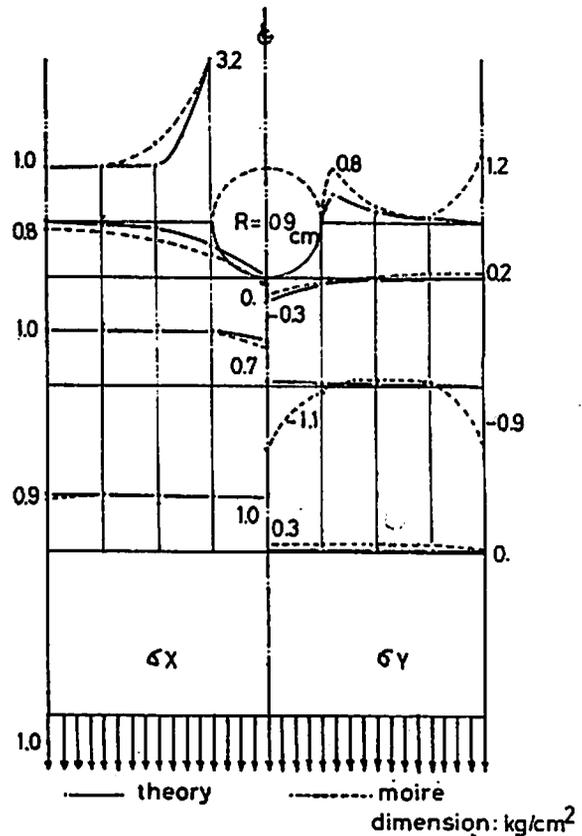
この歪より応力を求める°

3.5 実験例

以上の方法を使用した例を 2 題ここに載せる。

- a. 単純引張荷重を受ける有孔板の孔縁における応力集中

孔径を材巾の 1/12~8/10 まで 11 種類について実験を行い、Howland の光弾性実験による値との比較を行った (9 図)。又、板全体の応力分布を 10 図に示す。フリンジパターンを 10.



10 図 Distribution of Stress

ロ) モアレ法の光学上の基本法則¹⁾

モアレ法におけるフリンジは 2.2 で述べたように、2 組のグリッドの干渉として表わされ、変位を示す。この干渉を光り強さの変化として考えると、最も暗いところ (光り強さの最も小さいところ) がフリンジとして定義される事は明らかである。つまり、フリンジを光り強さの場においた場合の基本方程式は、

$$F_r(g, h) = F_A^2(g, h) F_B(g, h)$$

となり、又、グリッドの干渉により構成されるので、矩形波動のフーリエ変換は、

$$F(h) = \lim_{L \rightarrow \infty} 1/2L \int_{-L}^{+L} f(X) e^{-i2\pi h x} dx$$

により与えられ、像 (フリンジ) の明暗度の分布におけるフーリエ変換は、

$$J(g, h) = F(g, h) L(g, h)$$

で与えられる。

一般にフリンジの明暗分布度は、 $I(X) = I_0 + I \cos 2\pi P$ となり、変位と光り強さの関係は

$$U = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{I - I_0}{I_1}$$

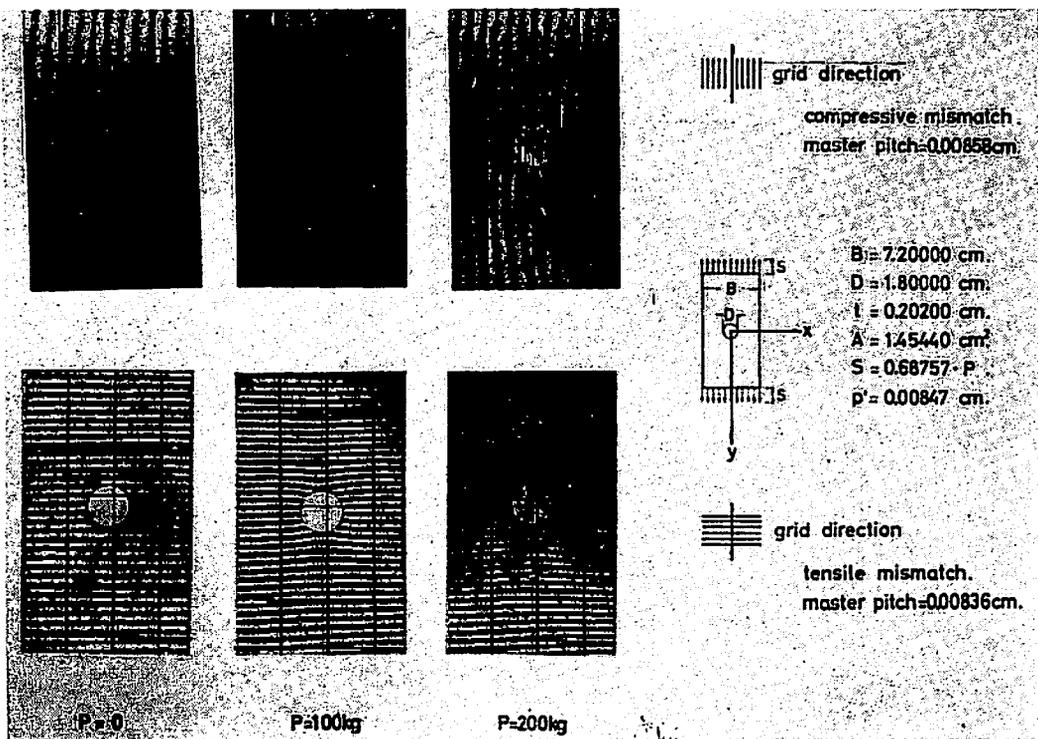
として表わされる。

A 図に示す。

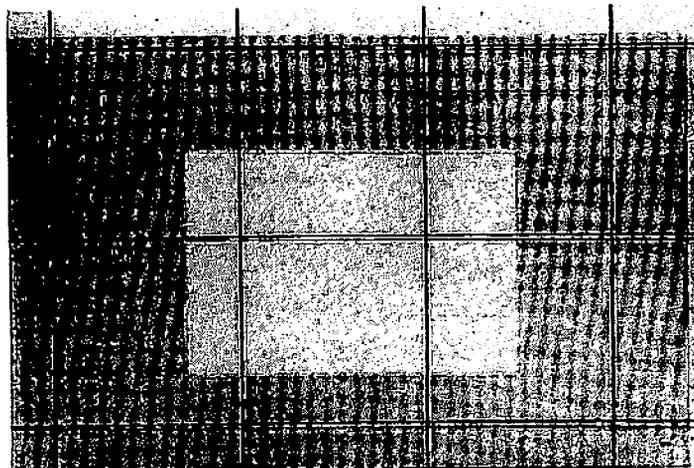
b. 水平力を受ける開口壁の応力分布

これは、開口をもつ壁体における開口の与える影響を変位により調べ、剛域部における応力分布を求める、

11 図は開口の大きさと頂点の変位の関係を示し、ラーメン公式、実測値との比較を示す。12 図は剛域部分の応力分布を差分解（曲げのみ与える）で求めたものと比較した。フリッジパターンを 11. A 図に示す。



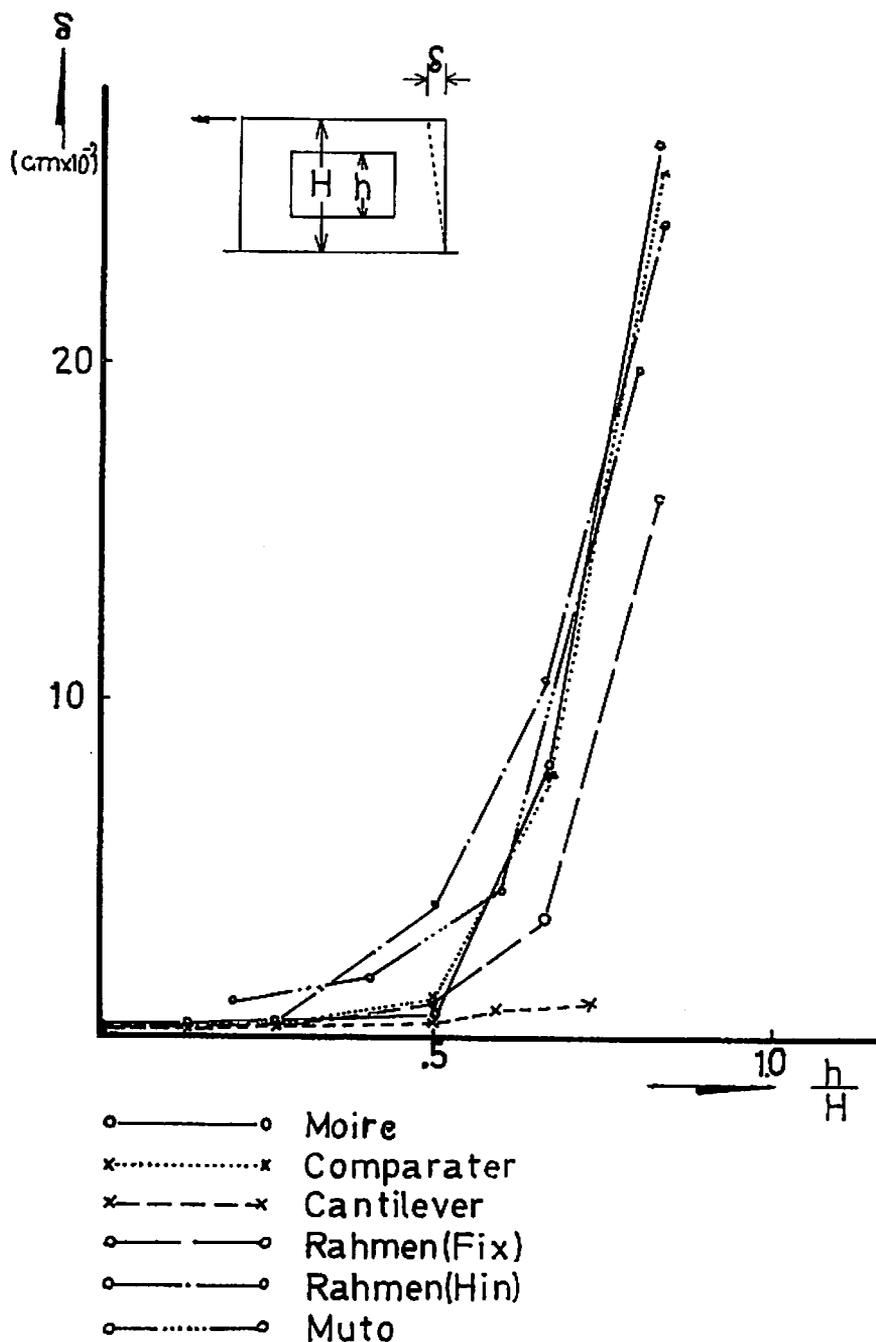
10. A 図 Fringe Pattern (opening plate)



11. A 図 Fringe Pattern (scheibe)

5. 結 語

モアレ法の適用について、2次元問題を解析してきたが、有孔板の応力集中のごとく歪が大きい部分 ($\epsilon < 500 \mu$) では非常によい結果を得る。9図において、光弾性実験より得た値とモアレ値を比較すると、1,2点を除き5%以下の誤差しか生じていない。しかしながら、筆者の使用した120本/cm程度のグリッドでは、10, 12図で示す歪の小さい部分ではモアレ値がばらつく(この誤差はグリッドピッチを200~250本/cmに増加し、試験体の精度を増す事で解消されると思う)。



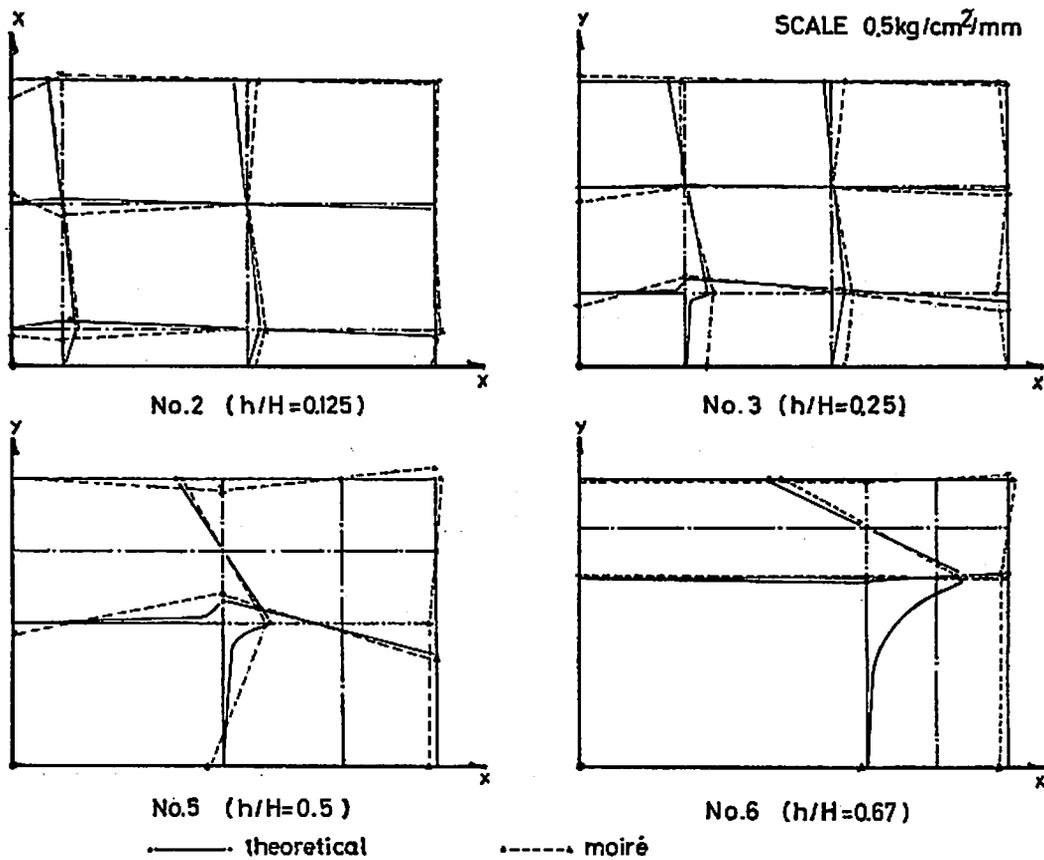
11 図 Deflection Diagram

11 図に示す変位は、コンパレーターで実測した値とほぼ一致し、変位測定としては十分な結果が得られた。

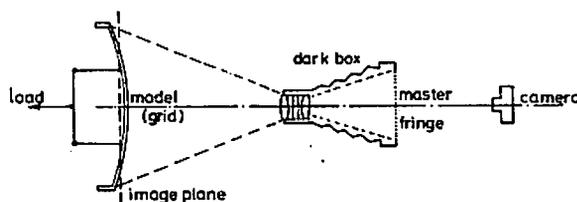
このように現段階では十分な精度を必要とする実験への適用には困難があるが、予備実験の段階で2次元応力の分布傾向を調べるには非常に有効な方法であると思われる。また、曲面板への適用についても、応力集中をテーマとした実験に比較的容易に使用出来ると思う。

ここで現在行いつつある曲面板への適用について簡単に述べると、次の問題が生じる。

- 1) 曲面であるため、マスターとモデルグリッドが直接平行な面として置けない。
- 2) 面外の変形が生じるので、面外、面内の変位が同時に生じ、フリンジから個々に抜き出さなければならない。
- 3) 実験方法が未開拓である。



12 図 Stress Diagram of Scheibe with Opening



13 図 Experimental Instrument (three dimension)

以上の事項を考慮して、次に示すような方法を研究する。

- a) 試験装置——2次元の解析法を適用すると、射影面での応力を考える事が出来る。つまり建築に於ける3次元問題の多くは偏平な曲面、折板であつて、平面に対して大きな角度をとらない。そこで13図に示すような装置を考えて予備的な実験を行つてみたが、5度以下の角度ではわずか3%の誤差しか生じない事が明らかとなつた。故に、この装置により面外の問題を行う事にする。つまり、モデル上に仮想の射影面 A を置きその上のグリッドと暗箱のピントガラス上にあるマスターによりフリンジが生じる、このフリンジを記録、解析する。
- b) 2) の問題については、筆者は主に面内応力を問題とするので、表裏のフリンジから解析された歪を加減算することで面内合応力のみが測定されると思われるが、実験誤差が大きくなるようなので今後の課題としたい。

$$\epsilon_n = \frac{P/\delta_u + P/\delta_l}{2}$$

尚、この実験を行うに際し、加工実験室、金属実験室、化学実験室の諸氏、川口衛助教授に色々御指導、協力頂いた事にここに感謝します。

参 考 文 献

- (1) C.A. Sciammarella and A.J. Durelli: "Moiré Fringes as a Means of Analyzing Strains," proc. ASCE. EM 1 (1961)
- (2) S. Morse and A.J. Durelli: "Geometry of Moiré Fringes in strain Analysis," proc ASCE. EM 4. (1960)
- (3) A.J. Durelli and I.M. Daniel: "Structural Model Analysis by Means of Moiré Fringes." proc ASCE. ST 12. (1960)
- (4) C.A. Sciammarella: "Basic Optical Law in the Interpretation of Moiré Fringes." proc SESA. Vol. 22. (1965)
- (5) F. Ching: "A Method to Increase the Accuracy of Moiré Method." proc. ASCE. EM 1. (1965)
- (6) 坪井善勝, 川股重也: "壁式プレキャスト鉄筋コンクリート造構法に関する研究 (その 5)" 東大生研論文 (1956)
- (7) 阿部 優: "モアレ法による二次元応力解析について" 日本建築学会関東支部, 第37回学術研究発表梗概集 (1966)

(昭和41年11月21日 受理)