等価回路決定の一方法

NAKAMURA, Kenichi / 中村, 顕一

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
4
(開始ページ / Start Page)
35
(終了ページ / End Page)
40
(発行年 / Year)
1967-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004263

等価回路決定の一方法

教 授 中 村 顕 一 (電気工学科)

A Method of Determining Equivalent Circuits

Kenichi Nakamura, *Professor*

1. まえがき

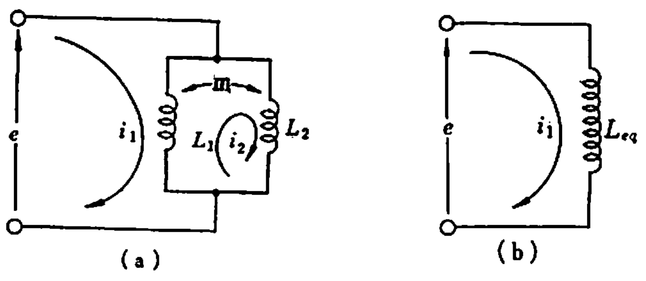
回路網理論は所謂回路解析及び回路合成の問題も一応大掃除は終ったと言われている。大体大きな問題は殆んど解決してしまったと云うわけである。しかしここで取上げる等価回路の問題などは未だ完全な一般論の確立されていない問題の一つである。

言うまでもないが，等価回路とは回路の構成が異なつていながら，その特性の同じである回路のことである。したがって回路合成の場合，その合成方法が違えば違った回路が出来てくるので等価回路がひとりでに得られるわけである。ここで述べるのは二つの回路を与えて，この二つの回路が等価であるための必要条件である。尚これは大学院の講義の際の一人の学生の解答からヒントを得たものである。

2. 二端子回路の等価

先づ二端子回路から始めるが，最初問題になった回路から説明する。

例 1.



第 1 図

第1図 (a) および (b) の等価である条件を考える。同図 (a) に就いては

$$\left.\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt}-(L_1-M)\frac{di_2}{dt}&=e \\ -(L_1-M)\frac{di_1}{dt}+(L_1+L_2-2M)\frac{di_2}{dt}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(b) については

$$L_{eq}\frac{di_1}{dt}=e \tag{2}$$

となる。(1) と (2) の e および i_1 を等しいとすれば，(2) を (1) に代入して，次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}(L_1-L_{eq})\frac{di_1}{dt}-(L_1-M)\frac{di_2}{dt}=0\\ -(L_1-M)\frac{di_1}{dt}+(L_1+L_2-2M)\frac{di_2}{dt}=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(3) 式の解が有限であるためには，係数の行列式が零になることが必要である。即ち

$$\begin{vmatrix} L_1-L_{eq} & -(L_1-M) \\ -(L_1-M) & L_1+L_2-2M \end{vmatrix}=0 \tag{4}$$

これを計算すれば

$$L_1-L_{eq}=\frac{(L_1-M)^2}{L_1+L_2-2M}$$

$$\therefore\quad L_{eq}=L_1-\frac{(L_1-M)^2}{L_1+L_2-2M}$$

$$\therefore\quad L_{eq}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M} \tag{5}$$

となって，(a) 図と等価のインダクタンス L_{eq} が求められる。勿論この結果は (1) 式を解いて直接求めることも出来るが，(4) 式の形の行列式から出て来るところが興味のあるところである。

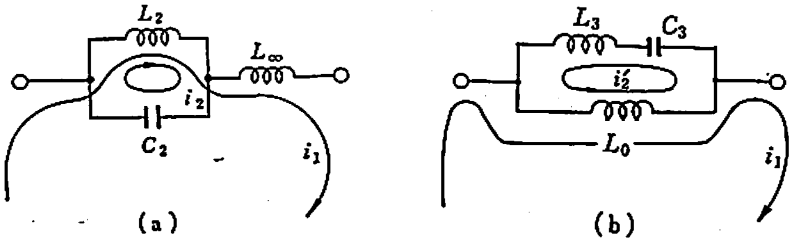
例 2.

例1のやり方を他のよく知られた等価回路に応用して見るため，第2図 (a) および (b) を考える。電源を正弦波と考え，$p=j\omega$ とすれば (a) に於ける方程式は

$$\begin{pmatrix} p(L_2+L_\infty) & pL_2 \\ pL_2 & pL_2+p^{-1}C_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

となり，(b) に於いては

$$\begin{pmatrix} pL_0 & pL_0 \\ pL_0 & p(L_0+L_3)+p^{-1}C_3^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$



第 2 図

となる。(6)に(7)を代入し整理すると

$$\begin{pmatrix} p(L_2+L_\infty-L_0) & pL_2 & -pL_0 \\ pL_2 & pL_2+p^{-1}C_2^{-1} & 0 \\ pL_2 & 0 & p(L_2+L_3)+p^{-1}C_3^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_2' \end{pmatrix}=0 \qquad (9)$$

となる。(8)が有限の解を有するためには

$$\begin{vmatrix} p(L_2+L_\infty-L_0) & pL_2 & -pL_0 \\ pL_2 & pL_2+p^{-1}C_2^{-1} & 0 \\ pL_0 & 0 & p(L_0+L_3)+p^{-1}C_3^{-1} \end{vmatrix}=0 \qquad (9)$$

が必要である。(9)式は p および p^{-1} の多項式である。これを計算して如何なる p に対しても恒等的に(9)が零になるためには，各次数の係数を零と置けばよいから，p^3 の係数を零と置けば

$$(L_\infty+L_2-L_0)L_2(L_0+L_3)+L_0^2L_2-L_2^2(L_0+L_3)=0 \qquad (10)$$

p の係数から

$$(L_\infty+L_2-L_0)L_2C_3^{-1}+(L_\infty+L_2-L_0)(L_0+L_3)C_2^{-1}+L_0^2C_2^{-1}-L_2^2C_3^{-1}=0 \qquad (11)$$

p^{-1} の係数から

$$C_2^{-1}C_3^{-1}(L_\infty+L_2-L_0)=0 \qquad (12)$$

を得る。(12) より

$$L_0=L_2+L_\infty \qquad (13)$$

(13) を (10) (11) に代入して，

$$L_0^2L_2-L_2^2L_0-L_2^2L_3=0 \qquad (14)$$

$$L_0^2C_2^{-1}-L_2^2C_3^{-1}=0 \qquad (15)$$

(14) より

$$L_2=L_0^2/(L_0+L_3) \qquad (16)$$

(13) と (16) から

$$L_\infty=L_2-L_0=L_0L_3/(L_0+L_3) \qquad (17)$$

(15) より

$$L_0^2C_2^{-1}=L_2^2C_3^{-1}$$

$$\therefore\quad L_0^2C_3=L_2^2C_2 \qquad (18)$$

(16) と (18) より

$$L_2C_2=(L_0+L_3)C_3 \qquad (19)$$

となる。最後にこれらの式から第2図の等価の条件として

$$\left.\begin{aligned} &L_\infty=\frac{L_0L_3}{L_0+L_3}, \qquad L_2=\frac{L_0^2}{L_0+L_3} \\ &C_2=\left(\frac{L_0+L_3}{L_0}\right)^2C_3 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

あるいは $L_0/(L_0+L_3)=\varphi$ とすれば

$$\left.\begin{aligned} &L_\infty=\varphi L_3, \quad L_2=\varphi L_0 \\ &C_2=\varphi^{-2}C_3 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

となる，(21) より

$$\varphi=L_0/(L_0+L_3)=L_2/(L_2+L_\infty) \tag{22}$$

となるから，

$$\left.\begin{aligned} &L_3=\varphi^{-1}L_\infty \quad C_3=\varphi^2 C_2 \\ &L_0=\varphi^{-1}L_2 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

となり，(21) および (23) が，第2図 (a) および (b) の等価関係を与える式となる，とにかく周知の等価関係ではあるが，この場合やはり（9）の行列式が零となると云うことから求められるのが面白い。

例 3.

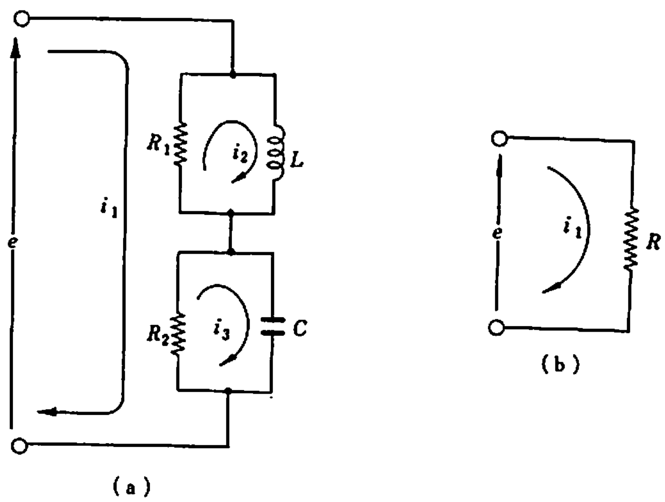
今まではリアクタンス回路のみを取り扱ったので，抵抗を含んだ回路を例に取ると，周知のように第3図 (a) および (b) が

$$R=R_1=R_2=\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{24}$$

のとき等価であることが知られているが，これを例1および例2この方法で計算すると結局

$$\begin{vmatrix} R_1+R_2-R & -R_1 & -R_2 \\ -R_1 & R_1+pL & 0 \\ -R_2 & 0 & R_2+\dfrac{1}{pC} \end{vmatrix}=0 \tag{25}$$

が必要条件となり，(25) の左辺の多項式の p の一次の係数，$\dfrac{1}{p}$ の係数を全部零と置けば

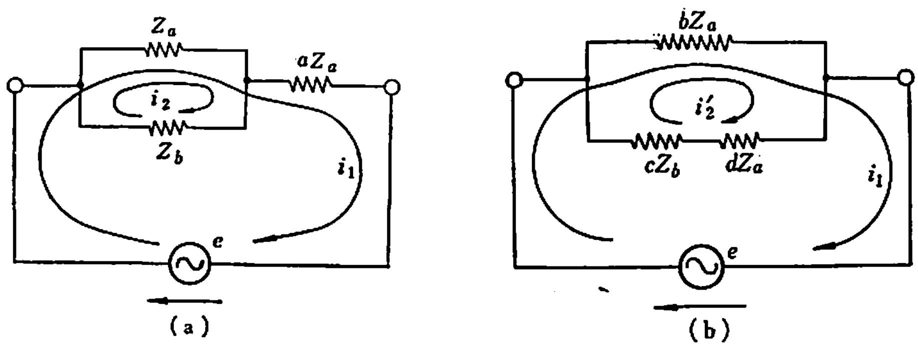


第 3 図

$$
\left.
\begin{aligned}
&L\{(R_1+R_2-R)\}R_2-R_2{}^2\}=0\\
&\left(R_1R_2+\frac{L}{C}\right)(R_1+R_2-R)-R_2{}^2R_1-R_1{}^2R^2=0\\
&\frac{1}{C}\{R_1(R_1+R_2-R)-R_1{}^2\}=0
\end{aligned}
\right\}
\qquad (26)
$$

等となり，(26) より (24) を得ることは簡単である。すなわち (24) は第3図 (a) と (b) が等価であるための必要かつ充分な条件である。

例 4.



第 4 図

例2の場合をもう少し一般化して，第4図のような等価関係を考える。この場合 (9) に相当して，

$$
\begin{vmatrix}
(1+a-b)Z_a & Z_a & -bZ_a\\
Z_a & Z_a+Z_b & 0\\
bZ_a & 0 & (b+d)Z_a+CZ_b
\end{vmatrix}=0
\qquad (27)
$$

となる。(27) の左辺を計算して $Z_a{}^3$, $Z_a{}^2Z_b$, $Z_aZ_b{}^2$ の係数を零とすれば

$$
\begin{aligned}
&(b+d)(1+a-b)+b^2-(b+d)=0\\
&(1+a-b)(b+d)+b^2+c=0\\
&C(1+a-b)=0
\end{aligned}
\qquad (28)
$$

となる。(23) より周知の

$$
\left.
\begin{aligned}
&b=1+a\\
&c=(1+a)^2\\
&d=(1+a)a
\end{aligned}
\right\}
\qquad (29)
$$

を得る。

3. 結　　　言

以上の方法を2n端子網への拡張することは簡単であるが，四端子回路の等価に対する応用等は今後の研究に待ちたい。尚この研究のヒントのきつかけを作ってくれた大学院学生古田島君に感謝の意を表する。

(昭和41年11月22日　受理)