# ベクトルバンドルと射影的加群

FUKAWA, Masami / 布川, 正巳

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
4
(開始ページ / Start Page)
41
(終了ページ / End Page)
49
(発行年 / Year)
1967-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004261

# ベクトルバンドルと射影的加群

助教授 布 川 正 巳（基礎学科）

# Vector Bundles and Projective Modules

Masami Fukawa, *Assistant Professor*

## 1. 序

$X$ をハウスドルフ，コンパクトな位相空間，$K$ を実数体 $\mathbf{R}$ または複素数体 $\mathbf{C}$ または実数体上の四元数体 $\mathbf{Q}(\mathbf{R})$ とする。また，$K^X$ を $X$ から $K$ への連続函数全体の作る環とする。$X$ 上の $K$ 係数のベクトルバンドル $E$ に対して，その全域上の切断の全体 $\Gamma(X,E)$ は $K^X$ 加群となる。

**定理** (Swan [1]) 対応 $E \to \Gamma(X, \mathrm{E})$は，$X$ 上の $K$ 係数のベクトルバンドルの圏(category)と $K^X$ 上の有限生成射影的加群の圏との間の同値を与える。

次に，$X$ を抽象体 $k$ 上で定義された代数的アフィン多様体，$R$ を $X$ 上いたるところ正則な有理函数全体の作る環とする。$X$ 上の $k$ 係数のベクトルバンドル $E$ に対して，その全域上の切断の全体 $\Gamma(X, E)$ は $R$ 加群となる。

**定理** (Serre [2]) 対応 $E \to \Gamma(X, E)$ は，$X$ 上の $k$ 係数のベクトルバンドルの圏と $R$ 上の有限生成射影的加群の圏との間の同値を与える。

本稿では，Serre の定理を次のように拡張する。

**定理 A** $X$ をプレスキーム，$\mathcal{O}_X$ をその構造を与える環の層とすると，次の二つの圏は同値である。

(1) $X$ 上のベクトルバンドルの圏 $\mathcal{V}(X)$。

(2) $X$ 上の局所自由階数有限な $\mathcal{O}_X$ 係数の加群の層（以下これを “$\mathcal{O}_X$ 加群” と略称する。）の圏 $\mathcal{P}(X)$。

とくに $X$ がアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, R$ ならば，これはまた

(3) 有限生成射影的 $R$ 加群の圏，$\mathcal{P}(R)$ とも同値である。

**注意** 定理 A でいうベクトルバンドルは，Grothendieck: E. G. A. 第 II 章に定義してあるベクトルバンドルとは異なる。後の定義参照。

## 2. プレスキームの上のベクトルバンドルの定義

$S = \mathrm{Spec}\, \mathbf{Z}[t]$

$$F^n = \mathrm{Spec}\, \mathbf{Z}[t_1,\ \cdots,\ t_n]$$
$$L^{mn} = \mathrm{Spec}\, \mathbf{Z}[\{\lambda_{ij} \mid 1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n\}]$$
$$G^n = \mathrm{Spec}\, \mathbf{Z}[\{\sigma_{ij} \mid 1 \leqq i,\ j \leqq n\},\ d^{-1}], \qquad d = \det(\sigma_{ij})$$

とおく。ここで $\mathbf{Z}$ は有理整数環で，$t$, $t_i$, $\lambda_{ij}$, $\sigma_{ij}$ 等は独立な変数である。

環の準同型

$$\mathbf{Z}[\cdots,\ \lambda_{ij},\ \cdots] \to \mathbf{Z}[\cdots,\ \lambda_{ij},\ \cdots] \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\cdots,\ \lambda_{ij},\ \cdots] \qquad (\lambda_{ij} \to \lambda_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes \lambda_{ij})$$
$$\mathbf{Z}[\cdots,\ \lambda_{ij},\ \cdots] \to \mathbf{Z} \qquad (\lambda_{ij} \to 0)$$
$$\mathbf{Z}[\cdots,\ \lambda_{ij},\ \cdots] \to \mathbf{Z}[\cdots,\ \lambda_{ij},\ \cdots] \qquad (\lambda_{ij} \to -\lambda_{ij})$$
$$\mathbf{Z}[\cdots,\ \lambda_{ij},\ \cdots] \to \mathbf{Z}[t] \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\cdots,\ \lambda_{ij},\ \cdots] \qquad (\lambda_{ij} \to t \otimes \lambda_{ij})$$

によって，射 (morphism)

$$+:\ L^{mn} \times_{\mathbf{Z}} L^{mn} \to L^{mn}$$
$$0:\ \mathrm{Spec}\, \mathbf{Z} \to L^{mn}$$
$$-:\ L^{mn} \to L^{mn}$$
$$m:\ S \times_{\mathbf{Z}} L^{mn} \to L^{mn}$$

が定義され，つこれによって，$L^{mn}$ は $S$ が左から作用する加法的群スキームとなる。とくに，$F^n$, $S$ もそうである。また，準同型

$$\mathbf{Z}[\cdots,\ \lambda_{ij},\ \cdots] \to \mathbf{Z}[\cdots,\ \mu_{ij},\ \cdots] \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\cdots,\ \nu_{ij},\ \cdots] \qquad (\lambda_{ij} \to \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik} \otimes \nu_{kj})$$

によって射

$$m:\ L^{lm} \times L^{mn} \to L^{ln}$$

が定義される。同様に，

$$m:\ G^m \times L^{mn} \to L^{mn}$$
$$m:\ L^{mn} \times G^n \to L^{mn}$$
$$m:\ G^n \times G^n \to G^n$$

も定義され，$G^n$ は乗法的群スキーム となる。$G^m$ は $L^{mn}$ に左から作用し，$G^n$ は $L^{mn}$ に右から作用する。

プレスキーム $X$ の上の**ベクトルバンドル**とは，プレスキーム $E$ と，$E$ から $X$ への射 $p$ との組 $(E,\ p)$ で，次の2条件をみたすものをいう。

(V 1)　$X$ の任意の点 $x$ に対して，適当な近傍 $U$ と適当な自然数 $n$ と同型 $\varphi:\ p^{-1}(U) \simeq U \times_{\mathbf{Z}} F^n$ とが存在して，右の図式が可換となる。ただし，$\pi_1$ は第1成分への射影を表わす。（すなわち，$p^{-1}(U)$ と $U \times_{\mathbf{Z}} F^n$ とは $U$ プレスキームとして同型である。）この $U$ を**座標近傍**，$\varphi$ を**局所座標系**，$n$ を**局所次元**とよぶことにしよう。

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times_{\mathbf{Z}} F^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

(V 2)　$U'$ をもう一つの座標近傍とし，その局所座標系を $\varphi'$，局所次元を $n'$ とする。$U \cap U$

$\neq \phi$ ならば $n=n'$ で，射 $g_{U'U}\colon U\cap U'\to G^n$ が定められていて，右の図式が可換となる。$g_{U'U}$を推移函数とよぶ。

$$\begin{tikzcd}
(U\cap U')\times_{\mathbf{Z}} F^n \arrow[r, "\varphi'\circ\varphi^{-1}"] \arrow[d, "g_{U'U}\times 1"'] & (U\cap U')\times_{\mathbf{Z}} F^n \arrow[d, "\pi_2"] \\
G\times_{\mathbf{Z}} F^n \arrow[r, "m"] & F^n
\end{tikzcd}$$

$U=\mathrm{Spec}\,A$ をアフィンの座標近傍とすると，

$$p^{-1}(U)\cong U\times_{\mathbf{Z}} F^n=\mathrm{Spec}\,A[t_1,\ \cdots,\ t_n]$$

となる。また，$U\cap U'$ の任意のアフィン開集合 $V=\mathrm{Spec}\,B$ に対して，$g_{U'U}|V$ は，$\mathbf{Z}[\cdots,\ \sigma_{ij},\ \cdots,\ d^{-1}]$ から $B$ への環の準同型で定められる。それは $\sigma_{ij}$ の像によって定まるから，$GL(B,\ n)$ の元 $(b_{ij})$ によって定められる。そうすれば，(V 2) の可換な図式は，$\varphi'\circ\varphi^{-1}$ が $V\times F^n$ 上では，環の準同型

$$B[t_1,\ \cdots,\ t_n]\to B[t_1,\ \cdots,\ t_n]\qquad \left(t_i\to\sum_{j=1}^{n} b_{ij}t_j\right)$$

によって与えられることを表わしている。

次に，$f\colon X\to Y$ をプレスキームの間の射とし，$(E,\ p)$，$(F,\ q)$ をそれぞれ $X,\ Y$ 上のベクトルバンドルとする。$f$ 上の準同型 $u\colon (E,\ p)\to(F,\ q)$ とは，$E$ から $F$ への射であって次の2条件をみたすものをいう。

(H 1)　$q\circ u=f\circ p$

(H 2)　$Y$ の任意の座標近傍 $V$，$f^{-1}(V)$ に含まれる $X$ の任意の座標近傍 $U$ をとる。$U,\ V$ 上のそれぞれ $(E,\ p)$，$(F,\ q)$ の局所座標系を $\varphi,\ \psi$，局所次元を $n,\ m$ とすれば，射 $l_U\colon U\to L^{mn}$ が定められていて右の図式が可換となる。$l_U$ を局所準同型とよぶことにしよう。

$$\begin{tikzcd}
U\times_{\mathbf{Z}} F^n \arrow[r, "\psi\circ u\circ\varphi^{-1}"] \arrow[d, "l_U\times 1"'] & V\times_{\mathbf{Z}} F^m \arrow[d, "\pi_2"] \\
L^{mn}\times_{\mathbf{Z}} F^n \arrow[r, "m"] & F^m
\end{tikzcd}$$

(H 2) において，$U=\mathrm{Spec}\,A$，$V=\mathrm{Spec}\,B$ ならば，$f\colon U\to V$ によって $A$ は $B$ 上の多元環となる。また $l_U$ は，環の準同型 $\mathbf{Z}[\cdots,\ \lambda_{ij},\ \cdots]\to A$，すなわち $\mathcal{L}(m,\ n;\ A)$ の元 $(a_{ij})$ で定められる。そうすれば，上の可換な図式は，$\psi\circ u\circ\varphi^{-1}$ が環の準同型

$$B[t_1',\ \cdots,\ t_m']\to A[t_1,\ \cdots,\ t_n]\qquad \left(t_i'\to\sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j\right)$$

によって与えられることを表わしている。

$X$ 上のベクトルバンドルのみを考えるときには，恒等写像 $1_X\colon X\to X$ 上の準同型を単に準同型とよぶ。

## 3. ベクトルバンドルと準同型の特徴づけ

形式的な議論によって，次のことは容易に知られる。

1°　$(E,\ p)$ をプレスキーム $X$ 上のベクトルバンドル，$\mathfrak{U}=\{U_\alpha|\alpha\in I\}$ を座標近傍による$X$

の開被覆，$n_\alpha$ を $U_\alpha$ における局所次元とし，推移函数 $g_{U_\alpha U_\beta}$ を $g_{\alpha\beta}$ と書き，$U_\alpha\cap U_\beta$ の任意のアフィン開集合 $V=\operatorname{Spec}A$ 上で $g_{\alpha\beta}$ を表わす行列を $G_{\alpha\beta}{}^V$ で表わせば，

（1） $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ ならば $n_\alpha=n_\beta$，かつその任意のアフィン開集合 $V=\operatorname{Spec}A$ に対して $G_{\alpha\beta}{}^V\in GL(n_\alpha, A)$。

（2） $U_\alpha\cap U_\beta$ の二つのアフィン開集合 $V$, $V'$ に対して $V\cap V'\neq\phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $W=\operatorname{Spec}\mathrm{B}$ に対して，$GL(n_\alpha, B)$ の元として $G_{\alpha\beta}{}^V=G_{\alpha\beta}{}^{V'}$。

（3） $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $V$ に対して $G_{\alpha\beta}{}^V G_{\beta\gamma}{}^V=G_{\alpha\gamma}{}^V$。

逆に，$\mathfrak{U}=\{U_\alpha\,|\,\alpha\in I\}$ を $X$ の任意の開被覆とし，(1)，(2)，(3) の3条件をみたす自然数 $n_\alpha$ と行列 $G_{\alpha\beta}{}^V$ の系をとれば，これは一意的に $X$ 上のベクトルバルドン $(E, p)$ に対応する。

2° 1° の条件をみたす二つの系 $((U_\alpha), (n_\alpha), (G_{\alpha\beta}{}^V))$，$((U'_\mu), (n'_\mu), (G'_{\mu\nu}{}^V))$ が，それぞれベクトバンドル $(\mathrm{E}, p)$，$(E', p')$ を定めるとする。

いま，ベクトルバンドルの同型 $\theta\colon (E, p)\rightleftarrows(E', p')$ があれば，$U_\alpha\cap U'_\mu$ の任意のアフィン開集合 $V=\operatorname{Spec}A$ における $\theta$ の局所同型をあらわす行列を $K_{\mu\alpha}{}^V$ とすれば，

（1） $U_\alpha\cap U'_\mu\neq\phi$ ならば，$n_\alpha=n'_\mu$。かつその任意のアフィン開集合 $V=\operatorname{Spec}A$ に対して $K_{\mu\alpha}{}^V\in GL(n_\alpha, A)$。

（2） $U_\alpha\cap U'_\mu$ の二つのアフィン開集合 $V$, $V'$ に対して，$V\cap V'\neq\phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $W=\operatorname{Spec}B$ に対して，$GL(n_\alpha, B)$ の元として $K_{\mu\alpha}{}^V=K_{\mu\alpha}{}^{V'}$。

（3） $U_\alpha\cap U'_\mu\cap U_\beta\cap U'_\nu\neq\phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $V$ に対して $K_{\mu\alpha}{}^V G_{\alpha\beta}{}^V=G'_{\mu\nu}{}^V K_{\nu\beta}{}^V$。

逆に，系 $((U_\alpha), (n_\alpha), (G_{\alpha\beta}{}^V))$，$((U'_\mu), (n'_\mu), (G'_{\mu\nu}{}^{V'}))$，および行列の系 $(K_{\mu\alpha}{}^V)$ がこれらの3条件をみたせば，それは一意的にベクトルバンドルの同型 $\theta\colon E\rightleftarrows E'$ に対応する。

3° $f\colon X\to Y$ をプレスキームの射，$(E, p)$，$(F, q)$ をそれぞれ $X$, $Y$ 上のベクトルバンドルとする。これらを定める1組の系 $((U_\alpha), (n_\alpha), (G_{\alpha\beta}{}^W))$，$((V_\alpha), (m_\alpha), (H_{\alpha\beta}{}^Z))$ $(\alpha, \beta, \cdots\in I)$ において，各 $U_\alpha$，各 $V_\alpha$ はアフィンで，$f(U_\alpha)\subset V_\alpha$ をみたすとする。$U_\alpha=\operatorname{Spec}A_\alpha$, $V_\alpha=\operatorname{Spec}B_\alpha$ とすれば，$f$ によって $A_\alpha$ は $B_\alpha$ 上の多元環となる。

$u\colon (E, p)\to(F, q)$ を $f$ 上の一つの準同型とし，その局所準同型 $l_\alpha$ を表わす行列を $T_\alpha$ とすれば，

（1） $T_\alpha\in\mathcal{L}(m_\alpha, n_\alpha; A_\alpha)$。

（2） $V_\alpha\cap V_\beta\neq\phi$ ならば，$V_\alpha\cap V_\beta$ の任意のアフィン開集合 $Z=\operatorname{Spec}B$, $f^{-1}(Z)$ の任意のアフィン開集合 $W=\operatorname{Spec}A$ に対して，$f\colon W\to Z$ によって $A$ を $B$ 上の多元環と考えるとき，$\mathcal{L}(m_\alpha, n_\alpha; A)$ の元として $T_\alpha G_{\alpha\beta}{}^W=H_{\alpha\beta}{}^Z T_\beta$。

逆に，(1)，(2) をみたす行列 $T_\alpha$ の系があれば，それは一意的に，$f$ 上の準同型 $u\colon (E, p)\to(F, q)$ に対応する。

4° $f\colon X\to Y$ は同上とし，$X$ 上のベクトルバンドル $(E, p)$，$(E', p')$ がそれぞれ系$((U_\alpha)$,

$(n_\alpha)$, $(G_{\alpha\beta}{}^W)$) $(\alpha, \beta, \cdots \in I)$, $((U'_\mu), (n'_\mu), (G'_{\mu\nu}{}^W))$ $(\mu, \nu, \cdots \in J)$ で定まり，$Y$ 上のベクトルバンドル $(F, q)$，$(F', q')$ がそれぞれ系 $((V_\alpha), (m_\alpha), (H_{\alpha\beta}{}^Z))$ $(\alpha, \beta, \cdots \in I)$，$((V'_\mu), (m'_\mu), (H'_{\mu\nu}{}^Z))$ $(\mu, \nu, \cdots \in J)$ で定まるものとし，すべての $\alpha, \mu$ に対して $f(U_\alpha) \subset V_\alpha$，$f(U'_\mu) \subset V'_\mu$ とする。いま，同型

$$v:(E, p) \xrightarrow{\sim} (E', p'), \qquad w:(F, q) \xrightarrow{\sim} (F', q')$$

があるとすれば，2° によって，これらの局所同型を与える行列の系 $(K_{\mu\alpha}{}^W)$，$(L_{\mu\alpha}{}^Z)$ が定まる。さらに，$f$ 上の準同型 $u:(E, p) \to (F, q)$，$u':(E', p') \to (F', q')$ の局所準同型 $(l_\alpha)$，$(l_\mu')$ を表わす行列の系をそれぞれ $(T_\alpha)$，$(T'_\mu)$ とする。

$u, u'$ が

$$u' \circ v = w \circ u$$

をみたすためには，

（1） $U_\alpha \cap U'_\mu \neq \phi$ ならば $V_\alpha \cap V'_\mu$ の任意のアフィン開集合 $Z = \mathrm{Spec}\, B$ と $f^{-1}(Z)$ に含まれる任意のアフィン開集合 $W = \mathrm{Spec}\, A$ とに対して，

$$\mathcal{L}(m_\alpha, n_\alpha; A) \text{ の元として，} T'_\mu K_{\mu\alpha}{}^W = L_{\mu\nu}{}^Z T_\nu$$

の成り立つことが必要かつ十分である。

## 4. 定理 A 前半の証明

$(E, p)$ をプレスキーム $X$ 上のベクトルバンドルとする。$X$ の任意の開集合 $U$ に対して，

$$\mathcal{E}(U) = \Gamma(U, E) = \mathrm{Hom}_U(U, E) = \mathrm{Hom}_U(U, p^{-1}(U))$$

とおけば，自然な制限写像によって，$\mathcal{E}$ は $X$ 上の層となる。

もし，$\varphi: p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F^n$ ならば，$U$ の任意のアフィン開集合 $V = \mathrm{Spec}\, A$ に対して，

$$\mathcal{E}(V) \overset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}_V(V, V \times F^n) = \mathrm{Hom}\,(V, F^n) = \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}[t_1, \cdots, t_n], A) = A^n$$

一般の開集合 $U$ に対して，アフィン開集合による $U$ の被覆 $\{U_\alpha = \mathrm{Spec}\, A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ で，

$$\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \underset{U_\alpha}{\xrightarrow{\sim}} U_\alpha \times F^{n_\alpha}$$

となるものが存在する。この同型によって

$$\varphi_\alpha: \mathcal{E}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} A_\alpha{}^{n_\alpha}$$

となる。$\mathcal{E}(U) \ni s, s'$，$\mathcal{O}_X(U) \ni \lambda$ に対して，$\xi_\alpha = \varphi_\alpha(s \mid U_\alpha)$，$\xi_\alpha' = \varphi_\alpha(s' \mid U_\alpha)$，$\lambda_\alpha = \lambda \mid U_\alpha$ とおけば，$\xi_\alpha + \xi'_\alpha$，$\lambda_\alpha \xi_\alpha \in A_\alpha{}^{n_\alpha}$，したがって $t_\alpha = \varphi_\alpha{}^{-1}(\xi_\alpha + \xi'_\alpha)$，$t'_\alpha = \varphi_\alpha{}^{-1}(\lambda_\alpha \xi_\alpha) \in \mathcal{E}(U_\alpha)$，そして $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $V = \mathrm{Sepc}\, A$ に対して右の可換な図式を考えることにより，$\xi_\alpha = G_{\alpha\beta}{}^V \xi_\beta$ を得る。ゆえに，$V$ 上で $t_\alpha = t_\beta$，$t'_\alpha = t'_\beta$。任意の $V$ について これが成り立つから，$U_\alpha \cap U_\beta$ 上で $t_\alpha = t_\beta$，$t_\alpha' = t_\beta'$。

$$\begin{tikzcd} V \times F^{n_\beta} & p^{-1}(V) \arrow[l, "\sim"', "\varphi_\beta"] \arrow[r, "\sim", "\varphi_\alpha"'] & V \times F^{n_\alpha} \\ & V \arrow[ul, "(\xi_\beta)"] \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "(\xi_\alpha)"'] & \end{tikzcd}$$

したがって $\mathcal{E}(U)$ の元 $t,\ t'$ で，すべての $\alpha$ に対して $t|U_\alpha=t_\alpha,\ t'|U_\alpha=t_\alpha'$ をみたすものが一意的に存在する。しかもあきらかに，これは $U$ の開被覆の選び方によらない。これらの元をそれぞれ $s+s',\ \lambda s$ で表わす。この演算によって，$\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_X$ 加群となる。しかも，$p^{-1}(U)\underset{U}{\overset{\sim}{\rightarrow}}U\times F^n$ ならば，あきらかに $\mathcal{E}|U\simeq(\mathcal{O}_X|U)^n$。ゆえに $\mathcal{E}$ は，局所自由階数有限の $\mathcal{O}_X$ 加群となる。この $\mathcal{E}$ を $\Phi(E)$ で表わす。つぎに，$(E,\ p)$, $(F,\ q)$ を $X$ 上の二つのベクトルバンドとし，$\mathcal{E}=\Phi(E)$, $\mathcal{F}=\Phi(F)$ とする。$u$: $(E,\ p)\to(F,\ q)$ を $X$ 上のベクトルバンドルの準同型とすれば，$X$ の任意の開集合 $U$ に対して写像

$$v(U):\ \mathcal{E}(U)\to\mathcal{F}(U)\qquad(s\to u\circ s)$$

はあきらかに制限写像と可換であるから，層の準同型である。さらに局所的には，右の可換な図式から，局所的に $s,\ u\circ s$ を表現するベクトルをそれぞれ $\xi,\ \eta$ とすれば，$\eta=T\xi$ となり，したがって $v(U)$ は $\mathcal{O}_X(U)$ 上の一次写像となる。ゆえに $\mathcal{O}_X$ 加群の準同型

$$\begin{tikzcd}
V\times F^n \arrow[rr, "(T)"] & & V\times F^m \\
p^{-1}(V) \arrow[u, "\wr"] \arrow[rr, "u"] & & q^{-1}(V) \arrow[u, "\wr"'] \\
& V \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "u\circ s"'] &
\end{tikzcd}$$

$$v:\ \mathcal{E}\to\mathcal{F}$$

が定められる。$v=\Phi(u)$ と書く。

逆に，$\mathcal{E}$ を局所自由階数有限の $\mathcal{O}_X$ 加群とすれば，$X$ の開被覆 $\mathfrak{U}=\{U_\alpha|\alpha\in I\}$ があって

$$\varphi_\alpha:\ \mathcal{E}|U_\alpha\overset{\sim}{\rightarrow}(\mathcal{O}_X|U_\alpha)^{n_\alpha}$$

となる。$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $V=\operatorname{Spec}A$ に対して，

$$A^{n_\beta}\overset{\varphi_\beta}{\underset{\sim}{\leftarrow}}\mathcal{E}(V)\overset{\varphi_\alpha}{\underset{\sim}{\rightarrow}}A^{n_\alpha}\quad(A=\mathcal{O}_X(V)\text{ 上の同型})$$

ゆえに，$n_\alpha=n_\beta$ で，$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ は，$GL(n_\alpha,\ A)$ の一つの元に対応する。この元を $G_{\alpha\beta}{}^V$ とする。$U_\alpha\cap U_\beta$ のもう一つのアフィン開集合 $V'=\operatorname{Spec}A'$ に対して $V\cap V'\neq\phi$ ならば，$V\cap V'$ の任意のアフィン開集合 $W=\operatorname{Spec}B$ に対して，右の可換な図式（$\rho$ は制限写像）から，$W$ 上で

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{E}(V) \arrow[l, "\varphi_\beta"', "\sim"] \arrow[r, "\varphi_\alpha", "\sim"'] \arrow[d, "\rho"] & A^n \arrow[d, "\rho"] \\
B^n & \mathcal{E}(W) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & B^n \\
A'^n \arrow[u, "\rho"] & \mathcal{E}(V') \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\rho"] & A'^n \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

$(n=n_\alpha=n_\beta)$

$$G_{\alpha\beta}{}^V=G_{\alpha\beta}{}^{V'}$$

となることがわかる。

さらに $U_\alpha\cap U_\beta\cup U_\gamma\neq\phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $V$ 上で $(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})\circ(\varphi_\beta\circ\varphi_\gamma^{-1})=\varphi_\alpha\circ\varphi_\gamma^{-1}$ を考えることにより，

$$G_{\alpha\beta}{}^VG_{\beta\gamma}{}^V=G_{\alpha\gamma}{}^V$$

となることが容易に導かれる。ゆえに前節 1° によって，系 $((U_\alpha),\ (n_\alpha),\ (G_{\alpha\beta}{}^V))$ は一つのベクトルバンドル $(E,\ p)$ を定める。

つぎに，上の $\mathcal{E}$ に対して，$X$ の開被覆 $\mathfrak{U}'=\{U'_\mu|\mu\in J\}$ についても

$$\varphi'_\mu:\ \mathcal{E}|U'_\mu\overset{\sim}{\rightarrow}(\mathcal{O}_X|U'_\mu)^{n'_\mu}$$

が成り立つとすれば，上の方法によって行列の系 $(G'_{\mu\nu}{}^{V'})$ が定まり，さらにベクトルバンドル $(E', p')$ が定まる。$U_\alpha \cap U'_\mu \neq \phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $V = \operatorname{Spec} A$ に対して

$$A^{n_\alpha} \overset{\varphi_\alpha}{\rightleftarrows} \mathcal{E}(V) \overset{\varphi'_\mu}{\rightleftarrows} A'^{n_\mu}$$

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{E}(V) \arrow[l, "\varphi_\alpha"', "\sim"] \arrow[r, "\varphi'_\mu", "\sim"'] \arrow[d, "\rho"] & A^n \arrow[d, "\rho"] \\
B^n & \mathcal{E}(W) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & B^n \\
A'^n \arrow[u, "\rho"] & \mathcal{E}(V') \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\rho"] & A'^n \arrow[u, "\rho"]
\end{tikzcd}$$

$(n = n_\alpha = n'_\mu)$

ゆえに $n_\alpha = n'_\mu$ で，$\varphi'_\mu \circ \varphi_\alpha{}^{-1}$ は $GL(n_\alpha, A)$ の一つの元 $K_{\mu\alpha}{}^V$ に対応する。$U_\alpha \cap U'_\mu$ のもう一つのアフィン開集合 $V' = \operatorname{Spec} A'$ に対して $V \cap V' \neq \phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $W = \operatorname{Spec} B$ に対して，右の可換な図式から，$W$上で

$$K_{\mu\alpha}{}^V = K_{\mu\alpha}{}^{V'}$$

となることがわかる。さらに，$U_\alpha \cap U_\mu' \cap U_\beta \cap U'_\nu \neq \phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $V = \operatorname{Spec} A$ に対して，右の可換な図式から

$$K_{\mu\alpha}{}^V G_{\alpha\beta}{}^V = G'_{\mu\nu}{}^V K_{\nu\beta}{}^V$$

の成り立つことがわかる。ゆえに前節の 2° によって，$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ によって定められるベクトルバンドルは同型である。すなわち $\mathcal{E}$ から，同型のいみで一意的にベクトルバンドが定まる。これを $\Psi(\mathcal{E})$ で表わす。

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[rr, "(K_{\mu\alpha}^V)"] & & A^n \\
& \mathcal{E}(V) \arrow[ul, "\varphi_\alpha"'] \arrow[ur, "\varphi'_\mu"] \arrow[dl, "\varphi_\beta"] \arrow[dr, "\phi'_\nu"'] & \\
A^n \arrow[uu, "(G_{\alpha\beta}^V)"] \arrow[rr, "(K_{\nu\beta}^V)"'] & & A^n \arrow[uu, "(G'_{\mu\nu}{}^V)"']
\end{tikzcd}$$

$(n = n_\alpha = n_\beta,\ m = m_\alpha = m_\beta)$

$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ を局所自由階数有限の $\mathcal{O}_X$ 加群，$\upsilon$: $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ をその間の準同型とする。$X$ のアフィン開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ で，

$$\varphi_\alpha\colon \mathcal{E}|U_\alpha \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X|U_\alpha)^{n_\alpha}, \qquad \phi_\alpha\colon \mathcal{F}|U_\alpha \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X|U_\alpha)^{m_\alpha}$$

となるものが存在する。そうすれば，

$$A_\alpha{}^{n_\alpha} \overset{\varphi_\alpha}{\rightleftarrows} \mathcal{E}(U_\alpha) \overset{\upsilon(U_\alpha)}{\to} \mathcal{F}(U_\alpha) \overset{\phi_\alpha}{\rightleftarrows} A_\alpha{}^{m_\alpha}$$

は $\mathcal{O}_X(U_\alpha) = A_\alpha$ 上の一次写像であるから，$\phi_\alpha \circ \upsilon(U_\alpha) \circ \varphi_\alpha{}^{-1}$ は $\mathcal{L}(m_\alpha, n_\alpha; A_\alpha)$ の一つの元 $T_\alpha$ に対応する。$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $V = \operatorname{Spec} A$ に対して，右の可換な図式から

$$T_\alpha G_{\alpha\beta}{}^V = H_{\alpha\beta}{}^V T_\beta$$

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[rrr, "(T_\alpha)"] & & & A^m \\
& \mathcal{E}(V) \arrow[ul, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dl, "\varphi_\beta"] \arrow[r, "\nu(V)"] & \mathcal{F}(V) \arrow[ur, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "\psi_\beta"'] & \\
A^n \arrow[uu, "(G_{\alpha\beta}^V)"] \arrow[rrr, "(T_\beta)"'] & & & A^m \arrow[uu, "(H_{\alpha\beta}^V)"']
\end{tikzcd}$$

となることがわかる。ただし，$G_{\alpha\beta}{}^V$, $H_{\alpha\beta}{}^V$ はそれぞれ $(E, p) = \Psi(\mathcal{E})$, $(F, q) = \Psi(\mathcal{F})$ の推移函数を $V$ で表わす行列である。前節 3° により，系 $(T_\alpha)$ は $(E, p)$ から $(F, q)$ への一つの準同型 $u$ を定める。

もし，$X$ のアフィン開被覆 $\mathfrak{U}' = \{U'_\mu = \operatorname{Spec} A'_\mu \mid \mu \in J\}$ についても，

$$\varphi'_\mu: \mathcal{E}|U'_\mu \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X|U'_\mu)^{n'_\mu}, \qquad \psi'_\mu;\ \mathcal{F}|U'_\mu \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X|U'_\mu)^{m'_\mu}$$

となっていれば，上の方法で行列の系 $(T'_\mu)$ が定まり，ベクトルバンドルの準同型 $u'; (E',p') \to (F',q')$ が定まる。ここで $(E,p)$ と $(E',p')$, $(F,q)$ と $(F',q')$ はそれぞれ標準的な方法で同型なベクトルバンドルである。$U_\alpha \cap U'_\mu \neq \phi$ ならば，その任意のアフィン開集合 $V=\mathrm{Spec}\,A$ に対して，右の可換な図式から，$V$ 上で

$$T'_\mu K_{\mu\alpha}{}^V = L_{\mu\alpha}{}^V T_\alpha$$

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "(T_\alpha)"] \arrow[dd, bend right=60, "(K^V_{\mu\alpha})"'] & A^m \arrow[dd, bend left=60, "(L^V_{\mu\alpha})"] \\
\mathcal{E}(V) \arrow[u, "\varphi_\alpha", "\wr"'] \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'_\mu"', "\wr"] & \mathcal{F}(V) \arrow[u, "\psi_\alpha"', "\wr"] \arrow[d, "\psi'_\mu", "\wr"'] \\
A^n \arrow[r, "(T'_\mu)"'] & A^m
\end{tikzcd}$$

となることがわかる。ただし，$K_{\mu\alpha}{}^V$, $L_{\mu\alpha}{}^V$ は，それぞれ $(E,p)$ と $(E',p')$, $(F,q)$ と $(F',q')$ の標準的同型を $V$ 上で表現する行列である。前節 4° により，$u$, $u'$ は，各ベクトルバンドルの標準的同型と可換である。すなわち，$(E,p)=(E',p')=\Psi(\mathcal{E})$, $(F,q)=(F',q')=\Psi(\mathcal{F})$ と同一視したとき $u=u'$ となる。ゆえに $u$ は $v$ から，開被覆の選び方に無関係に定まる。この $u$ を $\Psi(v)$ で表わす。

以上，定義した $\Phi$, $\Psi$ はそれぞれ $\mathcal{V}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{V}(X)$ の函手であって，$\Psi \circ \Phi \cong 1_{v(X)}$, $\Phi \circ \Psi \cong 1_{\mathcal{P}(X)}$ はあきらかである。ゆえに，$\mathcal{V}(X)$ と $\mathcal{P}(X)$ とは同値な圏である。

## 5. 定理 A 後半の証明

$X$ がアフィンスキーム Spec $R$ ならば，よく知られているように，$X$ 上の準連接層 (quasi-coherent sheaf) の圏と $R$ 加群の圏とは，

$$\mathcal{F} \to \Gamma(X, \mathcal{F}), \qquad M \to \widetilde{M}$$

によって同値である。([5] 1.4.)。

いま $\mathcal{E}$ を局所自由階数有限の $\mathcal{O}_X$ 加群とすれば，$\mathcal{E}$ はもちろん準連接層である。さらに，アフィンスキームはコンパクトであるから，$\mathcal{E}$ に対して $X$ の有限開被覆 $\mathfrak{U}=\{X_{f_i}|i=1, \cdots, r\}$ $(f_i \in R)$ が存在して，

$$\Gamma(X_{f_i}, \mathcal{E}) = R_{f_i} \underset{R}{\otimes} \Gamma(X, \mathcal{E})$$

が自由 $R_{f_i}$ 加群となる。$\mathfrak{U}$ が開被覆であることは $f_1, \cdots, f_r$ の生成するイデアルが $R$ 全体と一致することを意味するから，上のことから $\Gamma(X, \mathcal{E})$ は $R$ 上射影的である ([6], p.138)。さらに $\Gamma(X_{f_i}, \mathcal{E})$ は $R_{f_i}$ 上階数有限で，しかもその生成元は $\Gamma(X, \mathcal{E})$ の元の像として選ぶことができる。各 $i$ についてそのような $\Gamma(X, \mathcal{E})$ の元を定め，すべての $i$ についてそれを集めれば，$(f_1, \cdots, f_r)=R$ から，これらが $R$ 上で $\Gamma(X, \mathcal{E})$ を生成することがわかる。ゆえに $\Gamma(X, \mathcal{E})$ は有限生成である。

逆に，$P$ を $R$ 上有限生成の射影的加群とすれば，$R$ の有限個の元 $f_1, \cdots, f_r$ を選んで，$(f_1, \cdots, f_r)=R$，かつ $P_{f_i}=R_{f_i}\underset{R}{\otimes}P$ が $R_{f_i}^n$ 上自由であるようにできる。その階数はもちろん有限である。そうすれば，$\tilde{P}$ は，各 $X_{f_i}$ 上で自由かつ階数有限となる。$X=\bigcup_{i=1}^{r}X_{f_i}$ であるから $\tilde{P}$ は局所自由な $\mathcal{O}_X$ 加群となる。

すなわち，$X$ 上の準連接層の圏と $R$ 加群の圏との同値において，局所自由階数有限な層と有限生成射影的加群とが互に対応することがわかった。したがって $\mathcal{P}(X)$ と $\mathcal{P}(R)$ とは同値である。

以上で定理 A の証明は完全に終った。

## 文　献


[1] R.G. Swan: Vector bnndles and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc., 105, 1962.

[2] J.P. Serre: Faisceaux algébriques cohérents, 50, Annals of Math., Vol. 61, No. 2, 1955.

[3] J.P. Serre: Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle. Séminaire P. Dubreil, 1958.

[4] M.F. Atiyah: K-Theory, Lecture. Notes by D.W. Anderson, 1964.

[5] A. Grothendieck: Element de geometrie algébrique I. Le Langage des schemas, I. H. E. S., 1960.

[6] N. Bourbaki: Elements de mathematiques. XXVII, algébre commutative, Chap. 2, Hermann, 1961.


(昭和41年12月1日　受理)